La forma della quantità. Analisi algebrica e analisi superiore : il problema dell'unità della matematica nel secolo dell'illuminismo.

Marco Panza

N° 38 - 1992
CAHIERS D'HISTOIRE & DE PHILOSOPHIE DES SCIENCES

N° 38 - 1992

CAHIERS D'HISTOIRE & DE PHILOSOPHIE DES SCIENCES

nouvelle série

Marco Panza

La forma della quantità
La forme de la quantité

TOME I

SOCIÉTÉ FRANÇAISE DES SCIENCES ET DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES

Cahiers d'Histoire et de Philosophie
des Sciences

Nouvelle série

Une publication régulière de la
Société Française d'Histoire des Sciences et des Techniques

Cahiers diffusés par BELIN
8, rue Férou
75278 PARIS CEDEX 06
Tél. 1-46-34-21-42

Marco PANZA
Assistant en histoire et philosophie des sciences à l'université de Genève

LA FORMA DELLA QUANTITÀ

Analisi algebrica e analisi superiore: il problema dell'unità della matematica nel secolo dell'illuminismo

* * *

LA FORME DE LA QUANTITÉ

Analyse algébrique et analyse supérieure: le problème de l'unité des mathématiques dans le siècle des lumières

TOME I

Avant-propos

TABLE DES MATIERES

TOMO I

Avant-propos

Parte I
Analitica generale

I. 1.
OGGETTI E CONCETTI

I. 2.
OGGETTI E CONCETTI MATEMATICI

I. 3.
ANALISI FILOSOFICA

Parte II
Analitica dei concetti

II. 1.
LA QUESTIONE DEI FONDAMENTI DEL *CALCOLO*

II. 2.
LA FORMA DELLA QUANTITA

TOMO II

III. 3.
IL PRIMO TOMO DELL'*INTRODUCTIO IN ANALYSIN INFINITORUM* DI EULER: IL PROGRAMMA DELL'ANALISI ALGEBRICA (1748)

III. 4.
L'INTEGRAZIONE DEL *CALCOLO* NELL'EDIFICIO DELL'ANALISI EULERIANA: LAGRANGE, LAPLACE E "L'ANALOGIA DI LEIBNIZ" (1768-1779)

III. 5.
LA SCUOLA COMBINATORIA TEDESCA E IL PROBLEMA DELLA POTENZA DI UN POLINOMIO
(1778-1803)

III. 6.
LA TEORIA LAGRANGIANA DELLE FUNZIONI ANALITICHE
(1797-1813)

III. 7.
CONCLUSIONE

PREFACE

1. Sur la base de deux jugements admis, pour ainsi dire, sans discussion, l'historiographie des mathématiques a depuis longtemps reconstruit la naissance et le développement du "calcul infinitésimal", jusqu'aux premières années du XIX^{ème} siècle.

Le premier de ces jugements découpe au sein d'un tel événement un espace séparé, où serait placée l'histoire d'une controverse à la frontière entre philosophie et mathématique, controverse qui porterait sur le statut de l'infini quantitatif et qui ressemblerait aux conflits métaphysiques les plus classiques. Une telle histoire est reconstruite en termes assez généraux, bien souvent sans aucune référence à la pratique mathématique effective, en se limitant à la considération des principes premiers d'une telle pratique. Le second jugement lie les découvertes mathématiques plus spécifiques de la période intermédiaire (entre la naissance du calcul infinitésimal et sa reformulation par L. A. Cauchy), à une pratique mathématique conçue comme dépourvue de toute rigueur, où les présupposés "infinitésimalistes" les plus audacieux s'accompagneraient de l'usage non contrôlé des sommes et des produits infinis et de la généralisation (non justifiée) d'une foule de résultats dont la validité dépend, en fait, de certaines conditions (continuité, convergence, analyticité, etc).

S'il est difficile de ne pas concéder à ces jugements la possibilité de se fonder sur un grand nombre de références textuelles, les résultats de plusieurs recherches récentes ont montré la légitimité d'une lecture fort différente. Une telle lecture non seulement remet en cause l'acceptabilité de tels jugements, mais rend évidente la nécessité d'un cadre interprétatif complètement renouvelé, qui soit capable de constituer une référence pour d'autres recherches particulières et aussi de fournir une image cohérente et unitaire d'un siècle de recherche mathématique.

Cette question a constitué le point de départ de ma recherche. Mon but a été de fournir une interprétation de l'histoire du calcul infinitésimal au XVIII^{ème} siècle qui montre son lien très strict avec deux idéaux mathématiques qui semblent se rencontrer: d'une part l'idéal d'une science *analytique* des quantités, de l'autre l'idéal d'une unité intrinsèque de la connaissance mathématique, envisagée comme une structure génétiquement organisée. Tout présents qu'ils soient aussi à d'autres époques, ces idéaux trouvent leur humus naturel dans l'épistémologie des Lumières, dont ils ne sont d'ailleurs qu'une des manifestations. Bien plus que le souci d'éviter les paralogismes de l'infini, ils paraissent constamment présider au travail des mathématiciens du XVIII^{ème} siècle et leur fournir une véritable philosophie scientifique.

Le plan de ma thèse s'organise en trois parties séparées qui poursuivent des objectifs différents. La première partie vise: i) à mettre en place un ensemble unitaire de catégories philosophiques et historiographiques qui sont utilisées dans la suite; ii) à présenter le projet d'une "analyse philosophique" des théories mathématiques. La deuxième présente un cadre d'ensemble pour le débat sur les fondements de l'analyse au XVIII$^{\text{ème}}$ siècle, en fournissant les lignes générales d'une reconstruction historique et les concepts-clefs autour desquels m'ont semblé s'organiser les théories mathématiques dont il est question dans ce débat. La troisième partie enfin est constituée par la reconstruction détaillée du contenu de certains textes qui ont fait l'histoire de l'analyse mathématique au XVIII$^{\text{ème}}$ siècle; elle entend fournir ainsi un soutien documentaire aux thèses défendues dans la deuxième partie. J'ai cherché aussi à faire ressortir de mes reconstructions les lignes essentielles du développement de la théorie des séries entières, qui est au XVIII$^{\text{ème}}$ la base même de l'analyse.

2. Bien que ces trois parties puissent être lues séparément les unes des autres et puissent être envisagées comme des essais indépendants, ma décision de les réunir au sein d'un seul ouvrage n'est pas purement arbitraire, et ne tient pas simplement à leurs liens thématiques particuliers. Ma décision relève plutôt d'une conception de la recherche et d'une proposition d'ordre général sur lesquelles j'essaie ici de m'espliquer.

La recherche dite "philosophique", ainsi que les recherches dites "scientifiques" et "historiographiques" visent à la compréhension d'une existence qui leur est préalable. Cette existence n'est pas toujours la même et, bien que préalable à la recherche dont elle est le sujet, elle peut n'être pas indépendante d'autres recherches déjà accomplies (elle peut carrément être le résultat de ces recherches). Ceci se vérifie toutes les fois que la recherche ne vise pas à la compréhension de l'existence ultime du monde sensible. Bien qu'il me semble inacceptable de nier cette existence même, personne ne peut échapper à l'évidence qu'aucune compréhension d'une telle existence n'est possible sans la constitution d'une réalité qui est à son tour une existence d'ordre supérieur: c'est seulement cette réalité constituée qui peut à la rigueur être décrite. Décrire et même saisir cette réalité n'est d'ailleurs pas possible sans faire usage de certaines structures de concepts qui relèvent d'une recherche déjà accomplie.

L'existence qui est visée par ma recherche est celle d'une suite d'actes de la pensée et des constructions auxquelles ils ont abouti. Ces constructions sont saisies ici comme des objets dont on veut connaître autant les origines que les relations réciproques. La scène que j'essaie de dévoiler est celle d'une activité qui se transpose dans un *corpus* de connaissances. Il s'agit d'une activité qui répond à des modalités particulières et donc d'un *corpus* de connaissances qu'on peut qualifier de spécifique: d'une part l'activité mathématique et d'autre part les mathématiques comme *corpus*.

Cela pose, certes, des problèmes particuliers, qui ne sont propres qu'à ma recherche et aux recherches qui en partagent l'objet (à commencer par le problème de saisir ce qui est spécifique aux mathématiques, autant comme activité que comme *corpus*). Toutefois j'estime que l'idée directrice de mon effort peut s'appliquer à toute recherche qui, comme la mienne, vise à la compréhension d'une suite d'actes qui se transposent dans un *corpus*. J'ai , pour l'essentiel, exposé cette idée dans le chapitre I.3.. Elle correspond au programme que j'ai qualifié d' "analyse philosophique": la reconstruction de la réalité des concepts dont relèvent les objets qui participent au *corpus* et qui se présentent au chercheur comme étant évoqués par un ensemble de textes. Ce programme requiert trois moments séparés, mais également essentiels: la constitution d'une logique des objets et des concepts considérés - ce que je qualifierais d'*analytique générale* - l'exhibition d'une structure unitaire de concepts dont ces objets peuvent relever - ce que je qualifierais d' *analytique des concepts* - et le questionnement détaillé d'un ensemble de textes, à la recherche de ces mêmes concepts, derrière les objets qui y sont évoqués - ce que je qualifierais enfin d'*analytique des objets*.

3. La dissertation que je présente ici a constitué ma thèse de doctorat, soutenue à Rome le 25 septembre 1990, face à une commission composée des professeurs Francesco Barone, Sergio Bernini e Giuliano Di Bernardo que je voudrais remercier d'abord pour leur travail et pour leurs critiques. Ma recherche s'est inscrite dans le cadre du doctorat en Philosophie (Philosophie des Sciences) comprenant les universités de Bologne, Gênes, Milan et Trente. Les rencontres d'étude et les discussions qui se sont périodiquement succédé au sein de l'activité de cet organisme ont été pour moi l'occasion d'exposer mes idées, de les comparer à d'autres, de les changer au besoin: j'en suis reconnaissant aux nombreux participants et aux organisateurs.

Les derniers mois de mon travail, consacrés à la rédaction du texte final, ont pu bénéficier de l'appui des institutions universitaires de la ville de Genève. La présente publication n'aurait, de son côté, pas été possible sans le soutien financier de la fondation Birkigt. Aux unes et à l'autre j'exprime ici ma gratitude. Je voudrais adresser un remerciement particulier au doyen de la faculté des sciences, Pierre Buri, à la disponibilité et à l'intérêt personnel duquel je dois une grande partie des aides qui me sont venues des structures universitaires genevoises.

Le travail de recherche qui aboutit à une thèse de doctorat relève en général d'une histoire complexe, qui connaît des phases différentes au fil de nombreuses années. Rappeler toutes les contributions, de nature très variée, dont il s'est enrichi, jour après jour, est impossible. On est fatalement conduit à en agrandir certaines, surtout parmi les plus récentes, et à en diminuer ou à en oublier d'autres, parmi les plus anciennes, également importantes ou parfois davantage. C'est à toutes les personnes et les institutions que je ne saurais pas citer ici que je voudrais surtout dire ma reconnaissance.

Parmi ceux que je saurais citer, je voudrais réserver une place toute particulière à celui qui, dès le premier moment, a dirigé ma recherche par la discussion et la critique, mais aussi par le respect d'opinions différentes des siennes et même par l'encouragement constant à parcourir des voies autonomes et personnelles. Ceci est le plus grand des enseignements que je dois à Giulio Giorello, la raison première de ma gratitude. Mais au-delà des choses nombreuses qu'il m'a enseignées, je dois aussi beaucoup - je ne saurais dire combien - à son amitié et à sa présence humaine.

Ma recherche a été conduite, pour sa plus grande partie, à Paris, au sein d'un milieu intellectuel autant riche et vivant que capable à l'occasion de se transformer en un abri et en un cercle d'amis. Si Jean Petitot et Ernest Coumet ont été les premiers à m'accueillir dans leurs séminaires, à me permettre de profiter de leur savoir, à marquer mes réflexions par leurs idées - qui ont continué à être pour moi le plus précieux des repères - Jean Dhombres a été la personne qui, plus que toute autre, a suivi mon questionnement de l'histoire des mathématiques à l'âge des lumières, a suscité mon intérêt pour l'idéal de l'analyse, m'a appris le travail difficile de l'historien des sciences exactes; c'est d'ailleurs lui qui a ouvert les *Cahiers d'Histoire et Philosophie des Sciences* à la publication de mon travail, publication pour laquelle je tiens aussi à remercier la *Société Française d'Histoire des Sciences et des Techniques*.

A Genève, où je me suis plus tard installé, j'ai trouvé un nouveau milieu, plus restreint mais beaucoup plus hétérogène, d'où j'ai pu tirer des enseignements différents qui m'ont permis d'élargir le champ de mes réflexions. Parmi tous les collègues, les étudiants et le personnel du département de philosophie je tiens à exprimer ma gratitude particulière à Roberta De Monticelli, Sylvie Germain, Jan Lacki, Vivian Leschziner, Kevin Mulligan, Jean-Claude Pont et Anita Von Duhn.

A Milan, ainsi qu'à Paris et à Genève, ma recherche a été constamment facilitée par la disponibilité et la compétence du personnel des bibliothèques que j'ai fréquentées: la bibliothèque de l'Institut des Mathématiques à Milan, la Bibliothèque Nationale et la bibliothèque du Centre Koyré à Paris, la B.P.U. à Genève.

Parmi les nombreuses personnes avec lesquelles j'ai discuté de certaines parties de mon travail ou des thèmes différemment liés à ma recherche, je tient à remercier ici Evandro Agazzi, Luca Bianchi, Michel Blay, Luciano Boi, Gabriella Bosco, Umberto Bottazzini, Aldo Brigaglia, Karin Chemla, Amy Daham, Ahmed Djebbar, Craig Fraser, Paolo Freguglia, Maria Caterina Gallo, Livia Giaccardi, Fernando Gil, Enrico Giusti, Donald Gillies, Ivor Grattan-Guinness, Christian Houzel, Giorgio Israel, Jean-Pierre Leyvraz, Claudia Maschio, Alessandra Mauro, Claudio Milanesi, Fabio Minazzi, Pietro Nastasi, Michael Otte, Jeanne Peiffer, Luigi Pepe, Silvia Roero, Jean Michel Salanskis, Houria Sinaceur, Giusto Traina, Alberto Voltolini, Benoit Winiger, Angelica Zucconi.

Un grand apport, pas seulement d'ordre intellectuel, m'est venu de l'amitié que m'ont toujours démontré Roberto Casati, Luigi Cataldi-Madonna, Bianca Concolino Mancini, Michele Di Francesco, Maria Teresa Beonio-Brocchieri Fumagalli, Massimo Galuzzi, Angelo Guerraggio, Niccolò Guicciardini, Massimo Mastrogregori. Je ne saurais trop dire la reconnaissance que je dois à Clotilde Calabi, Anna Capelli et Agnese Grieco qui, à des distances très différentes, ont marqué mon travail par leur présence constante.

Aucune des personnes que je viens de citer ne doit être tenue pour responsable des imprécisions et des erreurs qui seraient contenues dans ma dissertation, ainsi que de ses défauts.

Je n'aurais certainement pas pu supporter l'effort et la tension de l'écriture de la dernière version de mon ouvrage sans les encouragements, la compréhension, la disponibilité et l'affection d'Alessandra Facchi. C'est à elle que je dédie la première partie.

La deuxième partie est dédiée à la mémoire d'Eugenio Randi. dont la disparition a laissé autant de vide dans mon âme que de souvenirs, de suggestions, d'images d'allégresse et d'intelligence dans mon cerveau.

C'est enfin à ma sœur Laura et à mon frère Francesco qu'est dédiée la troisièmepartie. C'est un signe discret de la joie que j'éprouve à constater jour après jour que le lien naturel de l'enfance et de l'adolescence n'a fait que changer de statut, sans guère s'affaiblir. C'est certainement quelque chose que nous avons appris de nos parents qui nous ont toujours offert un exemple de civilité, de respect humain et une capacité à ne jamais oublier ou refouler les affections, nous ont enseigné la liberté et nous ont donné les moyens pour pouvoir la goûter.

Je voudrais enfin remercier tous les amis qui ont partagé avec moi d'autres aspects de la vie, dont une recherche intellectuelle n'est jamais vraiment séparée. Je ne saurais tous les citer. Je laisse au souvenir d'Elisabeth, que je ne pourrai jamais plus rencontrer, la charge d'en parler.

Genève, juillet 1991.

P.S. La date précédente ne se réfère qu'à l'écriture de la préface. Sauf pour quelques corrections locales, le texte que je présente ici n'a pas été modifié par rapport au texte de ma thèse, déposée en février 1990.

RESUME

Première partie - Analytique générale

I.1 OBJETS ET CONCEPTS

Il s'agit dans le chapitre I.1. de déterminer les notions générales d'objet et de concept et de présenter les distinctions entre objets mathématiques, empiriques et philosophiques et concepts mathématiques, empiriques et philosophiques.

Un concept est considéré ici comme la raison d'usage d'un mot, et un objet comme une unité qui existe. Exister n'est d'ailleurs que faire partie d'une structure de relations, autrement dit d'un monde, de sorte qu'un objet n'est qu'un *relatum*. Chaque concept est ainsi un objet qui appartient à un monde différent du monde auquel appartiennent les objets qui tombent sous un tel concept. Toutefois, un objet peut ne pas être un concept. Parmi les objets qui ne sont pas des concepts, on peut distinguer les objets empiriques et les objets mathématiques. On peut opérer sur ces sortes d'objets sans aucune référence aux concepts correspondants: on peut lancer un caillou vers la mer sans envisager aucunement le concept de caillou, ou résoudre une équation différentielle sans tenir le concept de la différentielle, mais simplement en appliquant (machinalement) certaines règles. Il n'y a, en revanche, aucune manière d'opérer avec un concept sans produire une pensée qui ne contienne un tel concept. Si, à des concepts comme ceux de caillou et de différentielle correspondent des objets sur lesquels on peut opérer tout à fait indépendamment du concept, cela n'est pas le cas pour des concepts comme ceux de cause ou de conscience. Opérer avec ces sortes d'objets n'est rien d'autre qu'évoquer un concept: le concept même qui constitue ces objets. Je qualifie cette sorte de concepts de purement philosophique. La philosophie n'étant qu'un opérer avec des concepts, il n'y pas une manière d'opérer avec des concepts non purement philosophiques qui ne soit pas faire de la philosophie. Il y a toutefois des concepts non purement philosophiques. Parmi ces concepts, je distingue les concepts empiriques et les concepts mathématiques. Un concept empirique est le concept d'un objet empirique, tandis qu'un concept mathématique est un concept qui peut être objectivé au moyen de la construction d'un système symbolique régi par des règles adéquates. Un tel acte d'objectivation n'est en soi qu'un opérer avec des concepts et il est donc un acte philosophique. Il appartient toutefois à la mathématique en étant l'acte générateur de sa partie formelle. Ainsi, aux distinctions logiques entre objets mathématiques, empiriques et philosophiques et concepts mathématiques, empiriques et philosophiques ne correspond pas une démarcation de la même nature entre mathématiques, sciences empiriques et philosophie. Dès lors, le problème d'une philosophie de la science n'est pas de rechercher cette démarcation, mais d'étudier tant sur le plan général que sur le plan particulier, les relations entre les objets et les concepts des trois sortes.

I.1 OBJETS ET CONCEPTS MATHEMATIQUES

Le propos du chapitre I.2. est d'étudier d'une manière plus approfondie les rapports entre les deux notions de concepts mathématiques et d'objets mathématiques. Une telle étude est menée, entre autre, au moyen d'une discussion de certaines idées clefs des philosophies mathématiques de Kant, Cavaillès, Lautman et Lakatos. Il ne s'agit pas de fournir une reconstruction complète de ces philosophies, mais bien plus simplement d'évaluer comment elles peuvent contribuer à une clarification de la question abordée.

L'activité productrice des mathématiques est une activité complexe. Si elle est constituée en partie par un ensemble d'actes de calcul, ses composants plus importants résident dans l'édification même des systèmes formels, dans l'interprétation des structures symboliques qui les composent et dans la construction des structures des concepts dont ces systèmes ne sont qu'une objectivation (parfois seulement partielle), ou, si on veut, une expression symbolique. Ainsi conçue, l'activité mathématique est essentiellement une activité dialectique, fondée sur une pratique de traduction des structures conceptuelles en structures symboliques et sur une activité herméneutique d'interprétation de ces dernières structures en termes de concepts. Le problème se pose de savoir si, tout au long de cette activité, on parvient ou non à une connaissance, et si oui, en quel sens. L'hypothèse qui affirme qu'une connaissance a lieu est en général connue comme hypothèse platoniste. C'est à elle que les considérations précédentes semblent mener très naturellement. Toutefois la position platoniste peut être soutenue de différentes manières: soit à la Boutroux, en concevant les idées mathématiques comme des existences *a priori* relativement à chaque activité de l'homme qui ne peut, au plus, qu'arriver à les connaître; soit à la Lautman, en postulant l'existence d'idées dominatrices et qui, *a priori*, n'appartiennent pas directement aux mathématiques, mais dont les mathématiques sont la seule expression possible; soit à la Cavaillès, en pensant à l'activité mathématique comme à une activité singulière et individuelle (qu'on ne peut pas saisir comme une suite d'exemplifications d'un schéma général), régie par une nécessité interne dont l'accomplissement est un acte de connaissance. On retrouve ici trois manières d'entendre la nature gnoséologique des mathématiques, trois véritables hypothèses épistémologiques. C'est, a mon sens, à la mise en place d'hypothèses de cette sorte que doit viser le philosophe des sciences, et non à la construction d'un modèle général d'évolution de la science. Ainsi que je la conçois, une hypothèse épistémologique ne peut jouir des confirmations directes qui proviennent de l'histoire des sciences. Elle dicte le cadre catégoriel au sein duquel une reconstruction historique est possible. La plausibilité ou non plausibilité d'une hypothèse de cette nature ne dépend ainsi que de la possibilité d'exhiber une structure catégorielle - ou alors, au sens large, une logique - qui en relève. Les notions introduites dans les chapitres I.1-I.2. visent à fournir les outils aptes à la formulation d'une hypothèse épistémologique platoniste, fondée sur une représentation du monde des idées mathématiques en tant qu'un monde en évolution, produit par l'activité humaine, mais capable de se rendre tout à fait indépendant d'une telle origine et se présenter aux hommes futurs comme un monde donné indépendamment d'eux, qu'il s'agit autant de connaître que d'élargir.

I.3. ANALYSE PHILOSOPHIQUE

Un tel monde ne se présente aux hommes qui veulent le connaître qu'au moyen d'une représentation objectuelle, évoquée, dans la plupart des cas, par un ensemble de textes. Bien qu'ils ne contiennent que des symboles linguistiques, ces textes sont l'expression de plusieurs structures conceptuelles qui sont évoquées, soit par des artifices linguistiques, soit au moyen de structures symboliques qui exhibent des véritables objets mathématiques. Je qualifie d'analyse philosophique la recherche de la structure conceptuelle originelle dont ces textes sont une manifestation accidentelle (ou bien la reconstruction de cette structure). Une telle activité est intrinsèquement conjecturelle et ne peut se fonder que sur une suite d'actes herméneutiques tout à fait similaires aux actes herméneutiques qui participent de l'activité mathématique elle-même. Ma thèse est conçue comme l'exposition des résultats d'une analyse philosophique, comme la tentative de reconstruction de la structure conceptuelle qui a généré un ensemble de textes formant le matériel empirique de ma recherche.

Deuxième partie - Analytique des concepts

II.1. LA QUESTION DES FONDEMENTS DU *CALCUL*

Le chapitre II.1. est consacré à la présentation sommaire des différentes formulations du *calcul* proposées tout au long du XVIIIème siècle. Depuis longtemps, les historiens ont interprété ces différentes construction théoriques comme des réponses au problème de fournir une base logiquement acceptable aux découvertes de Newton et

Leibniz. En suivant Carnot, ils ont vu une discussion qui a engagé les mathématiciens pendant plus d'un siècle, dont l'enjeu aurait été de déceler la forme la plus adéquate d'un contenu unique qui, en tant que tel, était accepté. On trouve pourtant très difficilement, dans les reconstructions de cette controverse, une caractérisation précise de la nature d'un tel contenu. Au plus, on se limite à dire de différentes théories qu'elles sont la reformulation l'une de l'autre, et ceci en s'appuyant, soit sur l'exhibition de la concordance de leurs résultats (une fois qu'elles sont appliquées à la solution de quelques problèmes classiques), soit sur la comparaison des règles de transformation fonctionnelle qu'elles nous fournissent. Ma proposition est d'entendre ce contenu comme un ensemble de règles pour opérer sur des symboles, règles qui nous fournissent la possibilité de passer de certaines structures symboliques à d'autres; ces règles donnent lieu à une classe d'objets mathématiques qu'on qualifiera différemment selon l'interprétation proposée. Je qualifie de *calcul* la théorie formelle qui est ainsi mise en place et je présente le problème de la fondation du *calcul* - ou, comme on le disait à l'époque, de sa métaphysique - comme le problème: i) de fournir des interprétations différentes des règles données, et des justifications correspondantes autant pour ces même règles, que pour leurs applications géométriques ou mécaniques; ii) de donner au *calcul* une organisation interne convenable et de le situer à l'intérieur de l'architectonique d'ensemble des sciences mathématiques.

On peut, me semble-t-il, regrouper les différentes solutions proposées pour ce problème en quatre "traditions" mathématiques que j'ai essayé de présenter au moyen d'une analyse de certains textes exemplaires. J'ai qualifié la première de ces traditions de *tradition fluxioniste*: le *calcul* est interprété à l'intérieur d'une théorie générale des relations entre différentes modalités de génération de certaines classes de quantités liées fonctionnellement l'une à l'autre. Une interprétation de telle sorte fut, comme on le sait, présentée pour la première fois par Newton; d'après celui-ci les règles du *calcul* direct constituent un algorithme apte à la détermination des vitesses instantanées de la variation des valeurs d'une classe de quantités données. La deuxième tradition est celle que j'ai appelée *infinitésimaliste* et qui remonte aux travaux de Leibniz et Johann I Bernoulli: le *calcul* est considéré comme un algorithme des différences infiniment petites qui se produisent dans une certaine quantité lorsqu'une différence de la même sorte se produit dans une quantité liée. A la différence que dans la tradition fluxioniste on ne peut, de ce point de vue, fournir une justification de l'algorithme du *calcul* qu'à l'aide d'un ensemble de présuppositions infinitésimalistes et, en particulier, du principe d'omission des infiniment petits d'ordre supérieur. La troisième tradition peut se qualifier de *indéfinitésimaliste*: le *calcul* est envisagé à l'intérieur d'une théorie générale et analytique des limites; il se présente comme un algorithme apte à la détermination de la limite de certains rapports entre des quantités variables. Une telle idée (qui remonte à Newton) fut soutenue par d'Alembert et mise en place dans de véritables traités par l'Huilier et Cousin. Ce que ces trois traditions ont en commun est de penser le *calcul* comme la théorie de certaines classes particulières de quantités dont la caractérisation repose sur les interprétations des symboles. Dans la quatrième tradition, que j'ai qualifiée de *réductioniste*, on considère en revanche le *calcul* comme l'algorithme des coefficients des développements en série entière d'une fonction donnée; les quantités concernées ne sont ainsi que des "quantités abstraites". Bien que le premier à construire une théorie relevant d'une telle idée fût Lagrange en 1797, on peut voir dans le travail de celui-ci l'aboutissement d'un programme qui remonte à Euler et qui vise à une réorganisation unitaire de la science mathématique, conçue comme une science analytique des quantités abstraites. C'est à la reconstruction des origines de ce programme et de ses développements jusqu'à la théorie de Lagrange que vise la recherche historiographique dont relève ma thèse.

II.2. LA FORME DE LA QUANTITE

Les historiens des mathématiques ont depuis longtemps accepté l'idée que l'histoire de l'analyse supérieure (ou, comme on le dit souvent, infinitésimale) puisse être partagée en trois grandes périodes: à la période de la découverte et de la première diffusion du *calcul* fait suite une période intermédiaire, qui s'étend de la moitié du XVIIIème siècle jusqu'aux premières années du XIXème et qui précède la période de l'analyse moderne ouverte par les travaux de Cauchy et Bolzano. Même si elle a été plusieurs fois critiquée, une telle périodisation semble très bien résister face aux recherches les plus détaillées, en se montrant fondamentalement correcte. On ne peut pourtant pas dire la même chose des raisons que les historiens ont bien souvent apportées pour justifier cette périodisation, longuement envisagée comme le corrélat du passage de la géométrie au formalisme et enfin à la "rigueur". Un problème historique très intéressant est alors celui de fournir une caractérisation plus adéquate des trois périodes. La tâche du chapitre II.2. est celle de fournir une caractérisation convenable de la deuxième période.

Ma proposition est fondée sur l'idée qu'on peut interpréter les efforts d'une grande partie des mathématiciens de la seconde moitié du XVIIIème siècle comme visant à une réorganisation de toute la science mathématique, programme qui remonte pour l'essentiel à l'*Introductio in analysin infinitorum* d'Euler, publiée à Lausanne en 1748. L'idée centrale sur laquelle porte un tel programme peut être présentée dans les termes suivants.

Pour tout ensemble fini de quantités (homogènes) la représentation la plus générale et complète, autant de ces quantités que de leurs relations, est fournie par un système fini d'équations finies, toute quantité étant représentée au moyen de différents symboles littéraux liés entre eux par les opérations de l'algèbre et les quatre opérations transcendantes élémentaires (exponentielle, logarithme, sinus et arcsinus). Si, parmi ces équations il y en a une de la forme $F(x, ..., z) = y$, on dira que la quantité y est représentée de manière explicite, au moyen d'une *forme analytique simple.* C'est justement à l'idée d'une quantité représentée (ou représentable) au moyen d'une forme analytique simple que revient la notion eulérienne de fonction. Une telle notion contient ainsi une duplicité originelle: on considère d'après Euler comme une fonction, autant la quantité qui est représentée par une forme analytique, que la forme analytique qui représente une quantité. Comme une quantité est ici représentée dans ses relations avec des autres quantités et non dans sa nature intrinsèque, la science des quantités qui se développe à partir d'un tel mode de représentation peut bien être considérée comme une science des quantités abstraites. La dualité forme/quantité conduit d'une manière très naturelle à la formation d'un ensemble de notions différentes tenant toutes à la relation générique d'identité: une identité A = B peut être envisagée soit comme une identité entre quantité, soit comme une identité entre formes, soit enfin comme l'assignation d'une forme à une quantité.

Bien que les représentations explicites d'une quantité au moyen d'une forme analytique explicite tiennent un rôle privilégié dans le programme d'Euler, elles ne sont certainement pas les seules représentations analytiques possibles d'une quantité (abstraite). Une autre manière de représenter une quantité explicitement (mais non directement) est d'exhiber une opération dont le résultat est une nouvelle forme analytique qui représente explicitement (et directement) une quantité. La forme $d/dx(x^2)$ nous présente un exemple d'une telle sorte de représentation. Une quantité peut d'ailleurs être représentée implicitement au moyen d'une équation (ordinaire, différentielle, fonctionnelle, &c.), dont la solution est censée être une forme analytique simple.

Tout à fait différent est, en revanche, le cas d'une forme infinie, comme une série entière ou un produit infini, car elle ne représente véritablement une quantité que sous certaines conditions. Une forme infinie n'est ainsi conçue à l'intérieur du programme eulérien que comme la transformée d'une forme finie; une identité entre une forme finie et une forme infinie y est donc lue comme la manifestation d'une possibilité opératoire de passer, par des règles *standard*, de l'une à l'autre de ces formes. Entre les formes infinies un rôle essentiel est joué par les séries entières: la transformation d'une forme non polynomiale en une série entière permet d'introduire une simplification importante dans les calculs. Une théorie générale - et tout à fait formelle - des développements des formes finies en séries entières prend ainsi un rôle essentiel dans l'analyse eulérienne. C'est justement à l'intérieur de cette théorie qu'en 1797 Lagrange proposera d'interpréter le *calcul*.

Troisième partie - Analytique des objets

Une vision d'ensemble ayant été donnée dans la deuxième partie de ma thèse, je consacre la troisième à des analyses détaillées d'un ensemble de textes, que j'ai choisis dans le but d'évoquer les étapes principales de l'évolution de la théorie des séries entières, dans ses rapports avec l'édification de l'analyse et le problème de la fondation du *calcul*. Mes thèses étant dans cette troisième partie beaucoup plus locales et liées à l'interprétation même des textes, je me limiterai à l'indication des sujets de ma recherche.

III.1. LA QUESTION DE LA SERIE DE GRANDI

Dans le chapitre III.1. il s'agit de reconstruire le débat qui a suivi la présentation du résultat bien connu de Grandi: 1-1+1-1+1-&c = 1/2. Grandi démontre son résultat par un raisonnement géométrique tout à fait correct, sauf en ce qui concerne une fausse application du principe géométrique de continuité. Une telle démonstration peut donc être lue comme une démonstration de l'impossibilité de garder la validité générale de ce dernier principe sans perdre l'univocité des opérations d'algèbre, appliquées à des contextes infinitaires. La controverse autour du résultat de Grandi relève ainsi d'une opposition entre l'intuition géométrique qui était à la base du calcul différentiel et l'intuition analytique qui nous pousse à croire - et même à prétendre - que les opérations de l'algèbre doivent continuer à s'appliquer, d'une manière univoque, dans des contextes infinitaires. Les deux pôles de cette controverse sont tenus respectivement par Leibniz - qui dans deux lettres publiques déclare que le résultat de Grandi est correct - et par Varignon - dont le mémoire du 1715 est le véritable acte de naissance de la théorie des séries entières au XVIIIème siècle.

III.2. LES "THEOREMES" DE TAYLOR ET BERNOULLI (1692- 1742)

Le chapitre III.2. vise à reconstruire l'histoire du "théorème" de Taylor, à partir de sa première formulation - dans un manuscrit de Newton de 1692 - jusqu'au traité de Maclaurin de 1742. En me ralliant à la terminologie de l'époque, je qualifie ici de "théorème" de Taylor la simple exhibition du développement de Taylor, indépendamment de toute détermination ou représentation du reste. Dans la quatrième partie du chapitre j'analyse certains textes de Leibniz et Johann I Bernoulli, où un théorème que l'on sait aujourd'hui être équivalent, est démontré. La difficulté de saisir l'équivalence entre les deux résultats est une manifestation évidente d'une interprétation différente du développement. Dans la forme de Newton-Taylor-Maclaurin le "théorème" de Taylor était d'ailleurs inconcevable à l'intérieur d'un point de vue strictement infinitésimaliste, en se réduisant à l'identité triviale $y(x+dx) - y(x) = dy$.

III.3. LE PREMIER TOME DE L'*INTRODUCTIO IN ANALYSIN INFINITORUM* D'EULER: LE PROGRAMME DE L'ANALYSE ALGEBRIQUE (1748)

Le but du chapitre III.3. est d'étudier d'une manière détaillée le premier tome de l'*Introductio in analysin infinitorum* d'Euler, texte que je considère comme l'acte fondateur du programme de l'analyse algébrique. L'analyse s'y présente, pour la première fois en termes explicites, comme une science des fonctions, *i.e.* d'objets intérieurs à sa propre construction; le projet d'une réinterprétation analytique unitaire de toutes les mathématiques est posé et partiellement réalisé. La tâche principale de mon étude est de reconstruire la structure théorique d'ensemble de l'analyse algébrique, en cherchant à dégager l'idéal mathématique qui régit cette construction et le projet de recherche qu'elle propose à l'avenir.

III.4. L'INTEGRATION DU CALCUL DANS L'EDIFICE DE L'ANALYSE EULERIENNE: LAGRANGE, LAPLACE ET "L'ANALOGIE DE LEIBNIZ" (1768-1779)

Dans un mémoire de 1768 Lagrange découvre la manière d'exprimer une fonction quelconque d'une racine d'une équation au moyen d'une série présentant des termes différentiels. En 1772, il retrouve la même série par l'application d'un nouveau théorème qui fournit une généralisation puissante du "théorème" de Taylor. Dans sa démonstration Lagrange se sert pourtant d'une inférence conjecturelle basée sur l' "analogie de Leibniz" entre puissances d'un binôme et différentielles d'un produit. La démonstration des mêmes résultats, sans l'aide d'une telle inférence, est l'objectif de deux mémoires du jeune Laplace, qui tente en même temps d'expliquer l' "analogie de Leibniz". C'est par le moyen d'un approfondissement de ces recherches que Laplace parvient, en 1779, à sa théorie des fonctions génératrices: les bases du calcul formel des opérateurs sont ainsi jetées.

Il s'agit dans le chapitre III.4. de reconstruire une telle histoire, en cherchant à dégager le rôle des mémoires de Lagrange et Laplace à l'intérieur du processus d'intégration du *calcul* dans l'édifice de la nouvelle analyse eulérienne.

III.5. L'ECOLE COMBINATOIRE ALLEMANDE ET LE PROBLEME DE LA PUISSANCE D'UN POLYNOME (1778-1803)

Par l'appellation d' "Ecole combinatoire allemande" on se réfère à un cercle de mathématiciens réunis autour d'Hindenburg et de son programme de fondation de l'analyse sur des bases strictement combinatoires. L'acte de naissance d'un tel programme est constitué par la découverte de la part de Hindenburg de la possibilité de calculer en termes combinatoires, et d'une manière non récursive, les coefficients du développement d'une puissance quelconque d'un polynôme. A partir de cette découverte, Hindenburg propose de renverser les procédés d'Euler et de chercher dans la combinatoire la solution des problèmes de l'analyse et l'expression de ses résultat principaux.

On suit, dans le chapitre III.5. l'évolution du programme de Hindenburg jusqu'aux premières années du XIXème siècle, avant que se dégage la polémique entre les représentants de l'école combinatoire et les partisans d'une approche opposée, inspirée par le calcul des dérivations d'Arbogast.

III.6. LA THEORIE LAGRANGIENNE DES FONCTIONS ANALYTIQUES (1797-1813)

L'objet du chapitre III.6. est la théorie des fonctions analytiques de Lagrange. Au moyen de cette théorie le *calcul* est finalement intégré au corpus de l'analyse eulérienne, en tant que théorie des coefficients du développement en série entière des fonctions. Ce qui pour Leibniz était le rapport différentiel dy/dx d'une fonction $y = y(x)$ devient, dans la théorie de Lagrange, le coefficient d'ordre un du développement en série entière de $y(x+\xi)$. La théorie de Lagrange a fait l'objet de nombreuses reconstructions, qui ont largement insisté sur ses limites et ses difficultés. Une bonne partie de ces difficultés ne le sont, toutefois, que du point de vue de l'analyse moderne, et elles semblent se dissoudre une fois qu'on plonge ses résultats à l'intérieur de l'analyse eulérienne. Mon propos est de montrer comment ceci a lieu, en analysant en détail les textes de Lagrange, à la lumière des reconstructions contenues dans les chapitres qui précèdent.

III.7. CONCLUSIONS

Parte I

Analitica generale

A Alessandra

I. 1.
OGGETTI E CONCETTI

I. 1. α. *Premessa*

La *filosofia* è il manifestarsi di un atto di comprensione. Essa presuppone un'esistenza di cui è *analisi*. Questa esistenza è un *mondo*. Comprendere un mondo è ordinarne gli *oggetti* per mezzo di un sistema di *concetti*.

La trattazione filosofica si serve del linguaggio come di un mezzo espressivo. La rappresentazione che essa fornisce del mondo si presenta dunque sotto la forma di una produzione linguistica. Una produzione linguistica è una successione di termini correlati fra loro secondo regole sintattiche fornite *a priori*. Ogni termine ha (almeno) un significato. Una produzione linguistica rappresenta un sistema di significati. E' tale sistema che fornisce la comprensione del mondo.

Il significato di un termine è ciò per cui sta questo termine. L'insieme delle occorrenze di un termine nel corso di una produzione linguistica (indipendentemente dal come e perché di queste occorrenze) è l'uso di un tale termine in una tale produzione linguistica. In ogni sua occorrenza in una produzione linguistica un termine può stare per quattro entità di genere differente, esso può quindi avere quattro differenti tipi di significato. Nel primo caso un termine può stare per la parola che lo costituisce (per la stringa dei simboli elementari da cui è composto); nel secondo caso può stare per sé stesso in quanto termine; nel terzo per l'insieme di termini che sono stati a esso associati per mezzo di una regola di sostituzione in occasione di una precedente occorrenza (nella quale esso sta per sé stesso in quanto termine) nel corso della stessa produzione linguistica; nel quarto caso esso può stare infine per un'entità di carattere differente, in quanto tale intrinsecamente non linguistica.[1] L'insieme delle occorrenze di un termine corrispondenti a ognuna di queste modalità costituisce un uso di genere differente. Per

---

[1]Ecco quattro semplici esempi di queste differenti occorrenze: "cane fa rima con pane"; "il termine cane è assai diffuso nel linguaggio naturale praticato dai cacciatori"; "il cane ha quattro zampe" (in seguito a: "chiamo cane il mammifero caratterizzato *così e così*"); "il cane di Maria ha abbaiato tutta la notte". Una maggiore precisione linguistica richiederebbe l'introduzione di opportune virgolette per segnalare i primi due usi del termine "cane". Tuttavia se concepiamo l'atto filosofico come un atto di comprensione di una realtà *già* data indipendentemente da esso, non possiamo richiedere che tale realtà si conformi per se stessa alle distinzioni introdotte da tale atto. L'aggiunta delle virgolette indica che la distinzione fra i differenti usi à *già* stata compiuta e che l'asserto in questione non si presenta quindi (sotto questo rispetto) come una realtà da comprendere, ma come una realtà già compresa. Nel seguito limiterò così l'uso delle virgolette ai casi in cui esse indicano l'avvenire stesso dell'atto di comprensione.

maggiore precisione impiegherò d'ora in poi (tranne esplicita indicazione contraria) i termini composti "uso (proprio) del termine *x*" (o "uso di *x*") e "significato (proprio) del termine *x*" (o "significato di *x*") per riferirmi solo al quarto di questi usi. I primi tre non sono infatti che usi impropri e possono venir convertiti in usi propri solo sostituendo al termine in questione degli adeguati termini composti.

Ogni impiego di un termine è regolato da una ragione, la quale agisce in condizioni date e in presenza di uno scopo.[2] Questa ragione è un concetto. Un concetto non può essere nominato che per mezzo del termine di cui esso regola l'uso e non può esprimersi che tramite questo stesso uso. Il concetto che regola l'uso di un termine è il concetto *di* quel termine. Conoscere il significato di un termine è, almeno in parte, conoscere il concetto che regola l'uso di un tale termine.[3]

Il concetto è il contenuto di un pensiero (anche se non di tutti i pensieri si può dire che il loro contenuto sia un concetto). La correlazione di un insieme di concetti che si esprime tramite un enunciato di forma assertoria è un giudizio. Chiamo determinazione di un concetto l'insieme dei giudizi che vengono formulati nel corso di una produzione linguistica allo scopo di evocare un tale concetto. Non vi è nessuna maniera di confrontare direttamente i contenuti dei pensieri. E' tuttavia un fatto che la produzione linguistica produce negli astanti dei pensieri i cui contenuti sono in generale dei concetti.

Nessuna produzione linguistica è isolata, né può essere intesa come tale. Ogni produzione linguistica possiede un *a priori*. Questo *a priori* è un mondo - o meglio un insieme di mondi. L'uomo accede a un mondo quando lo rappresenta a se stesso come una struttura di relazioni fra individui distinti o come una successione di immagini che (se non si compongono a loro volta di individui) sono esse stesse individui. Se un mondo esiste prima di essere rappresentato, noi non possiamo immaginare nessuna forma possibile per la sua esistenza che sia diversa dal suo essere una struttura di relazioni fra individui distinti. Nella nostra immaginazione forma del mondo e forma della

---

[2]Si possono immaginare situazioni in cui, in presenza di condizioni date, lo scopo contiene esso stesso la ragione dell'impiego di un termine. Se un bandito mi minacciasse di morte intimandomi di obbedire al suo ordine di pronunciare l'asserto "il furto è la base del diritto", la ragione del mio impiego dei termini contenuti in questo asserto è compiutamente contenuta nello scopo di salvare la mia vita. Se è in primo luogo dubbio che si possa qui parlare di uso proprio (non sarebbe forse più soddisfacente sostenere che il termine "furto" sta qui per la parola che lo costituisce?), si possono d'altra parte caratterizzare simili impieghi di un termine come propri di un *uso non libero*. Quando parlerò di ragione di un uso mi riferirò d'ora in poi alla ragione dell'*uso libero* di un termine.

[3]Ciò non implica che il concetto di *x sia* (in generale) una parte del significato di "*x*". E' infatti facile immaginare dei casi in cui il significato di un termine non comprende per nulla il concetto di quel termine. L'asserto "la casa (di Maria) è verde" fornisce un semplice esempio di tale distinzione. Chiunque non voglia sostenere una posizione radicalmente anti-realista riconoscerà che qui il termine "casa (di Maria)" sta per la casa (di Maria) e certamente non per il concetto di casa (di Maria). Nonostante questo la possibilità di identificare tale significato (di riconoscerlo) dipende dalla mia conoscenza del concetto in questione. La conoscenza di tale concetto è parte della conoscenza del significato.

sua rappresentazione devono quindi coincidere. La rappresentazione di un mondo è un mondo.

Un mondo è una struttura di relazioni fra individui distinti. Per un individuo esistere è partecipare a una struttura di relazioni; per un mondo è essere una struttura di relazioni. Ogni individuo, in quanto partecipa a una struttura di relazioni, esiste. Un oggetto è tutto ciò che esiste. Ogni mondo si compone di oggetti.

Di nulla si può dire che esista senza dire di altro che esiste. Ma se di qualcosa possiamo dire che abbia relazioni con qualcosa, allora possiamo dire di entrambi che esistono. Se di Dio possiamo dire che abbia relazioni con gli Angeli, allora possiamo dire che Dio e Angeli esistono. Lo stesso vale per un albero. Se possiamo dire di un albero che esso fa ombra al pastore, allora possiamo dire di albero e pastore che esistono. Ma possiamo dire di Dio e degli Angeli che essi partecipano alla *stessa* struttura di relazioni dell'albero e del pastore? Esistere si può dire solo relativamente a un mondo. Nel mondo delle divinità celesti vi sono Dio e gli Angeli e nel mondo che è percepito dai nostri sensi vi sono l'albero e il pastore. Si potrà voler sapere se si tratta qui dello stesso mondo o di due mondi separati, ma allora non è dell'esistenza di Dio che occorre chiedere, ma della sua partecipazione al mondo degli alberi, delle montagne e degli uomini e, in particolare, del suo essere la causa prima di questo.

Così di nessun concetto si dovrà dire che esso è vuoto, ma che esso è vuoto in un mondo, a meno che non si tratti di un concetto fra le cui note caratteristiche non ve ne sia nessuna che dica delle sue relazioni o ve ne sia qualcuna che dica di relazioni con gli oggetti di un solo mondo. Così se Dio non è altro che il creatore del mondo sensibile, allora il concetto di Dio può essere vuoto.

E' l'essere di una relazione che determina l'esistenza dei *relata*. Chiedersi di qualcosa se esiste in un mondo non significa altro che chiedersi se esso è il *relatum* di una relazione che ha luogo in quel mondo. Ma questo io lo posso affermare in due modi. Io posso dire che una relazione ha luogo prima di conoscere i *relata* e non dire altro di questi se non che essi sono i *relata* di questa relazione; oppure posso conoscere i *relata* e dir di questi che partecipano a una relazione. Qui conoscere significa avere posto il concetto di ciò di cui parlo. Ma un concetto è il contenuto di un pensiero e il contenuto di un pensiero non è che una relazione fra concetti o un'immagine, e l'immagine è un concetto quando è detta, ovvero è correlata a dei concetti. E nessun concetto, d'altronde può venir pensato per sé solo. Così porre un concetto è porre una relazione fra concetti. Il porre un concetto è allora far che esso esista. Ma un concetto è direttamente il suo porsi.

Un concetto è dunque un oggetto, anche se certo non è sempre vero l'opposto. Se volessi dire dell'albero che esso fa ombra al pastore io direi qualcosa di un individuo di un mondo che non ha nulla a che fare, per il suo far ombra al pastore, con i contenuti dei miei pensieri. Qui il significato è un oggetto che non è per nulla il concetto.

Del mondo che è una mia rappresentazione io posso dire che esiste. Gli oggetti di cui esso si compone sono o i concetti che operano nel mio pensiero per regolare il linguaggio con cui io lo dico a me stesso o le immagini che in esso si muovono. Ma se io parlo di questo mondo, allora i suoi oggetti sono senz'altro concetti.

Nessuna produzione linguistica può evitare il ricorso a un uso proprio di alcuni termini. Il significato di questi termini è fornito da oggetti dei mondi che esistono prima che tale produzione abbia luogo. L'uso proprio di un termine in un contesto comunicativo presuppone così che questi oggetti possano venir individuati nel contesto delle loro relazioni (o almeno di alcune di esse). In alcune produzioni linguistiche (e in particolare in alcune produzioni filosofiche) si cerca di ridurre al minimo l'uso proprio dei termini. Ma ridurre questo uso è ridurre l'insieme delle informazioni cui la produzione linguistica può aspirare. Il significato di ogni termine utilizzato in modo improprio non è infatti altro che un oggetto della produzione linguistica stessa (nel caso di termini introdotti per mezzo di una regola di sostituzione si dirà in particolare che il significato è dato dalla successione di termini che essi sostituiscono). Il mio scopo è al contrario quello di rendere minimo l'uso improprio dei termini. Per rendere chiaro il mio intento ho usato e userò *marker* espliciti (come "chiamo x..." o "definisco x come...", &c.) per introdurre quelle poche regole di sostituzione atte a permettere alcune semplificazioni sintattiche. In ogni altro caso le mie affermazioni devono venir intese come asserzioni relative agli oggetti dei mondi che io assumo esistere prima di esse.[4] Se ciò aumenta considerevolmente i rischi di ambiguità (e errore) è anche del tutto conseguente al presupposto principale del mio lavoro secondo il quale l'uomo possiede la capacità innata di trasmettere e recepire contenuti di

---

[4]La determinazione di un concetto deve quindi venire intesa come la descrizione delle proprietà di un oggetto e delle relazioni che lo connettono a altri oggetti appartenenti al medesimo mondo. Una tale descrizione può assumere (almeno) tre modalità differenti (che si ritrovano d'altra parte anche nel parlare di oggetti assai più semplici di un concetto, come una sedia o un tavolo). In primo luogo essa può avere la forma di una semplice affermazione relativa a un oggetto già individuato come tale; in secondo luogo essa può tendere alla precisa individuazione dell'oggetto; in terzo luogo essa può esprimere un nuovo e del tutto originale contenuto di pensiero. Nel primo caso il concetto è inteso come un oggetto di un mondo intersoggettivamente accessibile in modo chiaro, che il locutore si incarica di descrivere; nel secondo caso il concetto è ancora un oggetto di un mondo indipendente dal soggetto, ma il nome che a esso è associato non è reputato capace di condurre l'astante a una individuazione precisa (si noti che nel caso in cui il nome fosse vuoto di ogni contenuto referenziale si passerebbe dal caso di una determinazione al caso di una *definizione*: cfr. il prossimo paragrafo I.1.ζ.); nel terzo il mondo a cui il locutore si riferisce è del tutto soggettivo e l'atto della determinazione si qualifica come un atto di esteriorizzazione. Mentre negli ultimi due casi il carattere determinativo dell'atto dovrebbe risultare immediatamente chiaro, la cosa può non apparire altrettanto perspicua nel primo. Ciò che fa di un semplice atto descrittivo una determinazione è il riferimento a certe relazioni (di cui il concetto in questione è uno dei *relata*) particolarmente rilevanti per il prosieguo del discorso. Dire che un concetto è la ragione di un uso di un termine è presentare una determinazione di questo genere. Si tratta di chiarire che l'oggetto 'concetto' (che appartiene al mondo delle idee filosofiche anteriori) sarà qui considerato essenzialmente per il suo essere ragione di un uso linguistico.

pensiero. Questa capacità fa la sua intelligenza molto di più di quanto la faccia la sua capacità di pensare.

I. 1. β. *Concetti I*

Questo presupposto corrisponde all'altro per cui l'uso di un termine in un contesto comunicativo non è un atto gratuito, ma corrisponde a uno schema regolativo che si può cercare di descrivere scalando un ordine nella gerarchia necessariamente infinita dei linguaggi. L'osservazione fin troppo scontata (e banale) che ogni successione di parole si riduce alla manifestazione di un uso non può che giustificare la necessità di distinguere fra un semplice uso contestuale, un uso con intenti espressamente esplicativi (che ha luogo in un metalinguaggio e non deve essere confuso con una regola di sostituzione) e ciò che giustifica il primo uso (o, direi meglio, la sua ragione) e che il secondo cerca di esprimere. Con il porre questa distinzione è posta l'esistenza stessa del concetto.[5]

Vi sono, a me pare, almeno due posizioni alternative. La prima afferma che tutto ciò che possiamo associare a un termine è l'uso che di esso *è stato* fatto da una determinata comunità di parlanti (qui per uso si intende, come ho già detto, l'insieme delle occorrenze del termine nel tempo di vita della comunità in questione - e non il come o il perché di queste occorrenze); la seconda intende invece tale uso come il risultato dell'applicazione di un insieme di regole finite e esplicite in un gioco linguistico. Entrambe le posizioni (che restano in se stesse certamente differenti) mi paiono insoddisfacenti.

Chiunque cercasse di spiegare le attitudini linguistiche di un parlante adottando il primo dei due punti di vista dovrebbe arrendersi all'impossibilità di vedere in esso null'altro che il capriccio del caso. Questa conclusione, che potrebbe anche essere agnosticamente soddisfacente per un crittografo intento alla decifrazione di un messaggio espresso in un linguaggio estraneo e definitivamente conchiuso in se stesso (quale potrebbe essere quello di un gioco enigmistico), può difficilmente essere accettata da chiunque pretenda di disporre di categorie interpretative almeno abbastanza forti da permettere l'analisi della propria produzione linguistica, intesa come atto continuativo. Il prezzo pagato da un tal genere di riduzionismo fenomenologico (che potrebbe venir giustificato come una estrema necessità del razionalismo, alle prese con le esigenze di un rasoio, che vorrebbe eliminare qualsiasi categoria che possa venir sospettata di essere - in qualche senso - metafisica) è l'estrema limitatezza delle possibilità di esplicazione.

Non molto diversa è la situazione in cui verrebbe a trovarsi chiunque scegliesse la seconda strada. Anche ammettendo la possibilità di produrre una buona analisi del linguaggio attraverso l'adozione di un insieme di regole

[5] L'uso di un termine non è infatti che la correlazione del concetto associato a questo termine con altri concetti.

finite e esplicite, ci si troverebbe ancora nella difficoltà di spiegare l'origine di tali regole e quindi il consenso a esse concesso.

A tutto ciò si potrebbe certo contro obiettare che le capacità esplicative non sarebbero molto più grandi qualora si ammettesse - come io ammetto - il ricorso a qualcosa che non può determinarsi in generale che come un contenuto di pensiero e che non può manifestarsi che per l'uso di cui esso è ragione, e che anche qualora possa venire volta per volta descritto, non lo possa essere che, tramite un nuovo atto linguistico. Per quanto ciò sia senza dubbio vero, un tale arretramento mi pare, in se stesso, ricco di interessanti conseguenze, la prima delle quali è la possibilità stessa di formulare esplicitamente il problema: qual è la ragione di un certo uso o di una certa regola? Questo problema resta ovviamente incomprensibile per chiunque neghi ogni nozione differente da quella di uso o di regola (esplicita). Ma io credo che ogni persona intelligente capisca perfettamente ciò che io intendo quando mi domando: "perché Giovanni mi parla di amore quando io gli chiedo di dirmi perché ha deciso di andare a vivere con Maria?" Dunque io credo che ogni persona intelligente abbia la capacità di comprendere nozioni diverse da quelle di uso o di regola, e in particolare le nozioni di ragione di un uso o di una regola.

I. 1. γ. *Geach e Croce*

La totalità della mia dissertazione non sarebbe probabilmente sufficiente per render conto dei differenti orientamenti filosofici variamente espressi in letteratura, i quali potrebbero in qualche modo richiamarsi alle posizioni cui ho succintamente fatto cenno nel precedente paragrafo. Lasciare questi impliciti mi permette di evitare una incompleta e comunque troppo estesa digressione.

Due riferimenti mi paiono tuttavia indispensabili, non tanto per completamento erudito di quanto detto, quanto piuttosto allo scopo di un chiarimento del mio punto di vista.

Riproponendo, ormai più di trent'anni fa, un'idea antica contenuta in tutti gli "*old-fashioned logic-books*", Peter Geach ha definito il concetto come "la specifica abilità mentale esercitata nell'atto del giudizio e espressa nell'uso intelligente delle parole".[6] Ecco come egli si esprime più dettagliatamente:

> The ability to express a judgment in words [...] presupposes a number of capacities, previously acquired, for intelligently using the several words and phrases that make up the sentence. I shall apply the old term "concepts" to these special capacities - an application which I think lies fairly close to the historic use of the term. It will be a *sufficient* condition for James's having the concept of *so-*

[6]Cfr. Geach (1957), p. V.

> *and-so* that he should have mastered the intelligent use (including the use in made-up sentences) of a word for *so-and-so* in some language.[7]

Secondo Geach una tale definizione non appartiene tuttavia alla logica, ma alla psicologia. In tal senso il concetto non sarebbe infatti altro che una "capacità mentale" propria di un soggetto e avrebbe quindi una "natura soggettiva". Dire di due persone che hanno lo stesso concetto significa allora dire che esse "hanno la stessa capacità mentale". L'esempio scelto da Geach per chiarire il proprio punto di vista è tuttavia *ad hoc*:

> Thus, if each of two men has mastered the intelligent use of the negative construction in his own language, we may say that they have the same mental capacity, the same concept.[8]

Ma come interpretare l'asserzione che due persone posseggono il medesimo concetto del bello? Si dovrebbe forse dire che esse hanno la medesima "capacità" di dire: "bello", nel corso delle loro locuzioni? E' l'introduzione dell'idea di capacità che mi pare qui fuorviante. Nella maggior parte dei casi interessanti l'uso di un termine non esprime una capacità, ma una scelta, un'attitudine rappresentativa o esplicativa. La definizione di Geach mi sembra quindi dover essere corretta. Piuttosto che a capacità è infatti a *ragioni* che io credo ci si debba riferire.

Prima di domandarci se questa correzione della posizione di Geach permetta di continuare a parlare di logica, anziché di psicologia, vi è tuttavia altra strada da compiere e un buon modo per prepararsi a questa è forse quello di introdurre il secondo riferimento e discutere quindi la posizione di B. Croce. Sebbene le "rappresentazioni o intuizioni" siano un "presupposto dell'attività logica",

> la conoscenza logica è qualcosa di là dalla semplice rappresentazione: questa è individualità e moltiplicità, quella l'universalità della individualità, l'unità della molteplicità: l'una intuizione, l'altra concetto: conoscere logicamente è conoscere l'universale o concetto.[9] [...]
>
> Il concetto, dunque, non è rappresentazione né pratico miscuglio o condensamento di rappresentazioni. Sorge dalle rappresentazioni come qualcosa che è in esse implicito e deve farsi esplicito, come esigenza o problema, di cui le rappresentazioni pongono le premesse, ma che non sono in grado di soddisfare e non possono nemmeno formulare. Il soddisfacimento è dato dalla forma non più meramente rappresentativa ma logica del conoscere; e si effettua in perpetuo, a ogni istante della vita dello spirito.[10]

Ma che genere di contenuto implicito delle rappresentazioni costituisce per Croce il concetto? Mi pare si possa rispondere che questo è dato dalle modalità universali che queste condividono o di cui in qualche modo sono partecipi. Concetti solo la *qualità*, così come la *bellezza* o la *finalità*, contenuti

[7]Cfr. *ivi*, p. 12.
[8]Cfr. *ivi*, p. 14.
[9]Cfr. Croce (1909), p. 6. Per il riferimento precedente cfr. *ivi*, p. 3.
[10]Cfr. *ivi*, p. 12.

"superiori a ogni determinazione rappresentativa e abbraccianti in sé tutte le rappresentazioni". Proprio *ultra* e *omni* rappresentatività sono per Croce i caratteri essenziali del concetto, il quale deve quindi distinguersi dalle finzioni concettuali o pseudoconcetti, espressi da termini come "casa" o "gatto", il cui "contenuto rappresentativo è fornito da un gruppo di rappresentazioni", o da termini come "triangolo" o "moto libero", i quali "non hanno alcun contenuto rappresentabile".

L'orientamento di Croce sembra fare del concetto una determinazione *reale* in se stessa del tutto indipendente dal linguaggio e allontana quindi ogni forma di psicologismo. E' proprio su questo genere di determinazioni che verte il giudizio. Ma, almeno nella sua forma esteriore, un giudizio non è che un asserto e richiede quindi il possesso di un linguaggio. O si assume che le stesse determinazioni reali posseggono, in quanto tali, una forma linguistica o si apre il problema del passaggio da esse a una loro espressione linguistica. In entrambi i casi il concetto non può venir isolato dal linguaggio che lo esprime. La posizione di Croce può quindi ridursi all'affermazione di un *a priori* obiettivo rispetto al linguaggio e alla distinzione fra giudizi conoscitivi (in cui occorrono concetti puri) e giudizi pratici (in cui non occorrono che pseudoconcetti).

I. 1. δ. *Sulla distinzione fra tre generi di concetti*

Tale distinzione ha, contrariamente a quanto si è spesso sostenuto nell'ambito della "filosofia scientifica", un suo indubbio fondamento.

Croce ha certamente ragione di distinguere fra le nozioni generiche che riassumono il riferimento a rappresentazioni[11] singolari appartenenti a una e determinata classe (che resta una sottoclasse del "reale" o, se si preferisce, del mondo) e le categorie universali del conoscere che esprimono le modalità stesse secondo le quali una determinata rappresentazione può essere riguardata. Si può tuttavia osservare che la conoscenza di un mondo non si esaurisce nella semplice determinazione delle generali categorie del conoscere, ma comporta una descrizione delle strutture relazionali che vigono, se non fra gli oggetti singolari, almeno fra le classi cui queste appartengono.[12] Siamo

---

[11]Croce accetta evidentemente l'idea secondo la quale l'uomo non ha accesso agli oggetti di un mondo che per tramite di una rappresentazione di questi oggetti. Il concetto di casa non sussume quindi sotto di sé oggetti singolari, quali la casa di Maria o quella di Piero, ma le singole rappresentazioni di questi oggetti. La non rilevanza della questione ai fini del mio argomento mi permette di accettare *provvisoriamente e localmente* un simile punto di vista. La distinzione di Croce ne è infatti, in sé, indipendente.

[12]Si ha qui ovviamente a che fare con una contrapposizione metafisica fondamentale che determina due differenti nozioni del conoscere, la quale ha d'altra parte la sua radice nella concezione stessa del reale (della forma del mondo). Non si tratta certamente qui di opporre un punto di vista a un altro, ma semplicemente di osservare come la distinzione di Croce mantenga la sua ragione anche in un contesto metafisico diverso dal suo, nel quale tuttavia essa non conduce agli esiti cui egli - del tutto correttamente dal suo punto di vista - è approdato.

quindi portati a rigettare la generale qualificazione di giudizi *pratici* per quei giudizi in cui occorrono pseudoconcetti "rappresentativi ma non ultra-rappresentativi", quali `casa´ e `gatto´.

La conclusione non mi sembra debba essere diversa qualora ci si sposti a considerare il secondo genere di pseudoconcetti crociani, quali quelli espressi dai termini "triangolo" o "moto libero". L'argomentazione deve essere tuttavia qui più prossima ai fondamenti stessi della distinzione. Ecco come Croce la giustifica:

> [...] se codeste nuove finzioni concettuali lasciano cadere la zavorra delle rappresentazioni, fuggono poi in una zona senz'aria, dove non si vive; e acquistano bensì l'universalità, ma con la perdita della realtà. Un triangolo geometrico non c'é mai nella realtà, perché nella realtà non sono linee rette, angoli retti e somme di angoli eguali a due retti. Un moto libero non c'é mai nella realtà, perché ogni moto reale si effettua in condizioni determinate e necessariamente tra ostacoli. Ora un pensiero che non abbia per oggetto niente di reale non è pensiero; e perciò quei concetti non sono concetti, ma finzioni concettuali.[13] [...]
>
> Poiché si conosce per operare [...] sorge l'interesse pratico di provvedere alla conservazione del patrimonio delle conoscenze acquistate. [...] A tal fine si costruiscono gli strumenti delle finzioni concettuali, che rendono possibile, per mezzo di un nome, di risvegliare e chiamare a raccolta moltitudini di rappresentazioni, o almeno di indicare con sufficiente esattezza a quale forma di operazione convenga ricorrere per mettersi in grado di ritrovarle e richiamarle. [...] il triangolo geometrico non serve né alla fantasia, né al pensiero, che compiono il loro ufficio senza e oltre quell'astrazione; ma è indispensabile al misuratore di un campo, e può eventualmente anche servire a un pittore negli studî preparatorî per un quadro, o a uno storico, che voglia bene intendere la configurazione di un terreno, sul quale fu combattuta la battaglia che egli si appresta a narrare.[14]

Indubbiamente vi è un senso in cui Croce ha ragione quando nega realtà a un triangolo o al movimento libero di un corpo; si tratta di quello stesso senso per cui la determinazione quantitativa di un campo, la misura delle sue "dimensioni", resta "inessenziale"[15] rispetto al campo in quanto oggetto determinato, considerato in sé stesso. Nessuna informazione, nessuna conoscenza effettiva ci è ovviamente trasmessa dall'asserto isolato: "x ha una superficie uguale a 57 m^2". E neppure la precisazione che x ha forma triangolare ci è, in se stessa, di un qualche aiuto. Dobbiamo sapere che x è un campo, che esso si trova in una data regione e che la sua terra è stata negli anni precedenti coltivata così e così, che è esposto al sole per un certo periodo del giorno e così via; solo a questo punto possiamo dire di sapere qualcosa di x.

Ma il punto su cui Croce (così come Hegel) ha torto è nel negare alla nozione di triangolo *ogni* potere rappresentativo, ogni possibile essenzialità. Vi sono contesti conoscitivi in cui la determinazione della triangolarità di x è senza dubbio essenziale e non si riduce in nessun modo a un semplice ausilio pratico. Se giungessimo a esempio a sapere che ogni forma reale può essere scomposta in forme triangolari semplici ne trarremmo una chiave esplicativa

---

[13] Cfr. *ivi*, pp. 17-8.
[14] Cfr. *ivi*, pp. 23-4.
[15] Cfr. Hegel (1807), 3316: "inessenziale e aconcettuale" (*unwesentliche, begrifflose*).

e interpretativa del mondo e potremmo perfino giungere a costruire su di essa un'immagine della creazione. Ma non vi è nessuna necessità di considerare alcuna collezione di oggetti (qualitativamente) determinati per giungere a una siffatta conclusione, la quale non avrebbe altra forma che quella pura e *a priori* di un teorema matematico. Allo stesso modo, il presupposto fondamentale della fisica classica, che ci dice che un qualsiasi corpo isolato in movimento continua indefinitamente il suo moto senza alterazioni possibili, ci indica la maniera per conoscere le conseguenze provocate dall'introduzione di ostacoli. L'inesistente corpo isolato ci fornisce la chiave per conoscere le traiettorie dei corpi reali.

Ma una differenza permane. Nessun asserto isolato che involva non marginalmente pseudoconcetti crociani del secondo tipo avrà mai una reale portata conoscitiva. E' soltanto la costruzione di una struttura relazionale che involve tali nozioni che può aspirare a divenire un atto conoscitivo. Questo non può inoltre aver luogo che a seguito di una reinterpretazione trascendentale o comunque di una rilettura dell'esperienza nel contesto concettuale determinato da una tale struttura. Il principio di inerzia non potrà mai esserci di nessun aiuto per studiare il movimento di un corpo nell'aria se non interpretiamo l'ostacolo che questa frappone come una resistenza di un fluido, ovvero come una forza che agisce lungo la direzione della tangente alla traiettoria percorsa dal corpo. La portata conoscitiva dei giudizi che involvono pseudoconcetti è dunque mediata da un insieme di atti concettuali piuttosto complessi. Se ciò non giustifica la conclusione di Croce, rende almeno manifesto il contenuto non arbitrario della sua distinzione.

Tutto ciò ci conduce a modificare il vocabolario di Croce e a cancellare la linea di separazione fra giudizi conoscitivi e giudizi pratici, per ridisegnarla secondo altri e assai differenti criteri, ma ci porta anche a riconoscere il carattere non arbitrario della distinzione fra tre generi di concetti. Non è tuttavia sul potere rappresentativo che una distinzione più corretta dovrebbe a mio parere basarsi. Vedremo che, percorrendo una strada assai differente da quella crociana, e anzi per molti versi opposta, si potranno raggiungere conclusioni vicine, anche se certamente non perfettamente coincidenti. La differente giustificazione della distinzione permetterà inoltre di evitare la conseguenza più deleteria dell'impostazione di Croce, quella inevitabile devalorizzazione del conoscere scientifico che è stata più volte denunciata. Non è infatti tanto sulla distinzione fra concetti e pseudoconcetti che tale conclusione riposa, quanto piuttosto sulla nozione crociana di "realtà".

Mi sia quindi permesso di tornare al mio originario percorso e chiudere qui la mia digressione.

I. 1. ε. *Esistenza e accessibilità*

Per quanto la nozione di concetto non sia, in se stessa, una nozione linguistica, essa è stata qui apertamente associata a un atto linguistico. Se è forse possibile generalizzare le proprietà del concetto referendole anche a contesti non linguistici,[16] la possibilità di approdare a una determinazione non disposizionale (diversa dalla semplice affermazione che il concetto è un contenuto di pensiero) mi pare assai remota. Così come la forza attrattiva newtoniana, un concetto non sembra poter manifestare se stesso in un contesto intersoggettivo[17] che tramite gli effetti che esso produce. Questa considerazione, che resta a me pare assai banale, non deve tuttavia condurci a negare l'esistenza del concetto e, *a fortiori*, a evitare ogni ricorso alla nozione corrispondente. Una distinzione deve essere mantenuta fra esistenza e accessibilità.

Questa distinzione sembra assai chiara in alcuni semplici casi, ma molto presto si offusca, tanto da essere stata spesso dimenticata. L'esistenza di un corvo bianco non ha naturalmente nulla a che vedere con la concreta possibilità di avvistare un animale così raro, il quale potrebbe, a esempio, volare nei cieli solo in condizioni di perfetta e totale oscurità. La situazione diviene tuttavia assai più dubbia qualora ci si sposti a considerare non più l'esistenza di un tale corvo, ma la *verità* dell'asserto: "esiste un corvo bianco". Popper ha, come è ben noto, qualificato un simile asserto come metafisico, non facendo per questo riferimento a null'altro che alla sua forma logica.[18] Egli non ha tuttavia mai negato la possibilità che un simile asserto possa essere vero, né il fatto che esso sia certamente o vero o falso. Ritengo questa posizione perfettamente corretta.[19] Vi sono tuttavia posizioni diverse che dopo aver affermato l'impossibilità di stabilire definitivamente la verità di un asserto qualsiasi traggono la conclusione che non esistono asserti veri, ovvero che la nozione stessa di verità debba essere scartata dall'orizzonte gnoseologico. Questo genere di relativismo ontologico mi pare del tutto ingiustificato, anche ammesso che si voglia concedere che di nessun asserto sia possibile stabilire definitivamente la verità. Esso non può che fondarsi su una identificazione fra verità e esistenza di una prova: "l'asserto x è vero se e solo se esiste una prova (definitiva) di x". Ma l'esistenza di una prova è, a sua volta, un fatto di cui deve essere provata tanto la verità che la falsità. Così la conclusione: "non esiste alcuna prova (definitiva) di x" deve essere assunta

---

[16] Confesso che la sola generalizzazione possibile che intravedo è quella che passa attraverso una considerazione del concetto come ciò che rende ragione di un comportamento di un qualche tipo (e non solo di un comportamento linguistico). I concetti cui farò riferimento nella presente dissertazione non mi pare abbiano tuttavia altra manifestazione che quella fornita da determinate *performance* linguistiche. Non vedo quindi, nel caso della mia indagine, alcuna necessità per scegliere questa strada, che mi sembra d'altra parte irta di ben più grandi difficoltà rispetto a quella che ho imboccato. Sospetto che a ciò debba invece essere costretto chi voglia fornire a se stesso una chiarificazione della nozione di concetto atta a una applicazione più ampia (penso, a esempio, al caso della storiografia politica).

[17] L'esperienza del pensiero può forse convincere qualcuno della possibilità di accedere direttamente al concetto in quanto protagonista di un vissuto interiore. Se non voglio certo negare il possibile interesse filosofico di una fenomenologia dell'atto di pensiero, mi pare certo che questa debba comunque fuoriuscire dal contesto di una simile esperienza privata e rapportarsi alle conclusioni cui tale esperienza conduce.

[18] Il riferimento classico è ovviamente a Popper (1934) e (1959).

[19] Anche se credo che possano esservi ragioni diverse dalla semplice considerazione della forma logica per dire di un asserto che è metafisico.

come vera in un senso diverso da quello proposto. In questo senso (originario) la verità di x riguarda semplicemente le connessioni fra x e il mondo (a cui x si riferisce) e non ha nulla a che fare con la nostra capacità di indagare il mondo. Così l'asserto: "esiste un corvo bianco" è vero o falso del tutto indipendentemente dalla nostra possibilità di sapere se esso è effettivamente vero o falso.

La situazione può tuttavia essere facilmente complicata. Si immagini a esempio di discutere dell'esistenza di un essere che possieda l'essenziale caratteristica di sottrarsi alla possibilità stessa di cadere sotto uno qualsiasi dei nostri sensi o perfino alla possibilità, da parte nostra, di una caratterizzazione positiva. L'esempio più facile è ovviamente quello di Dio, che potremmo per un momento accordarci nel definire come "colui che ha creato l'universo". La nostra impossibilità a accedere al cospetto del creatore dipende infatti dal carattere stesso di questo: noi non possiamo esistere che dopo l'atto della creazione e quindi, anche se si ammettesse la nostra possibilità di individuare il legame causale fra la volontà di Dio e la nascita dell'universo, si dovrebbe concludere che, quale che sia il nostro stato, non ci è concesso di assistere alla manifestazione della proprietà che assegniamo al nostro oggetto. Ciò non sembra tuttavia implicare che la questione relativa all'esistenza o meno di Dio non possa venire legittimamente[20] posta e anzi che una sua risposta negativa o positiva possa influenzare la stessa impresa scientifica. Il carattere espressamente metafisico del problema non implica la mancanza di ogni suo interesse conoscitivo. La situazione mi pare qui analoga a quella relativa a certe nozioni scientifiche come quella di forza o a altre nozioni filosofiche come quella di causa o di fine.

Essenzialmente di questo tipo è la questione relativa all'esistenza del concetto. Per isolare in essa il punto a cui rivolgerò qui la mia attenzione, immaginiamo di rivolgerci a un astante che affermi di non saper associare alcun significato al termine "concetto", ma che sia, ciò nonostante, disposto a accettare che questo possa individuare qualcosa in un mondo indipendente da lui (l'astante si troverebbe qui nella stessa situazione di un bambino che chiede al genitore che cosa voglia dire la parola "talismano"). Se volessimo chiarire al nostro interlocutore la nostra attitudine linguistica dovremmo allora cercare di presentare a questi un certo numero di esplicazioni, il più più possibile perspicue. Per quanto le nostre risorse filosofiche si rivelino ampie, dubito che saremmo in grado di fornire delle effettive determinazioni esplicite e positive (che non si riducano ad affermare che il concetto è un contenuto di pensiero, un'idea, un vissuto di coscienza, o cose di questo tipo). Il mio tentativo, nei precedenti paragrafi, potrebbe d'altra parte venir inteso proprio in questo modo da un qualsiasi lettore totalmente digiuno di filosofia. Ora, il problema è questo: pur ammettendo che la mia esplicazione sia una buona esplicazione, qual é la legittimità dell'inferenza da essa all'esistenza? o meglio: quale forma ha tale inferenza?

A me pare che un tale procedimento intellettuale possa schematizzarsi come segue. Si individua un carattere distintivo (o, se si vuole, un insieme di

---

[20] Per il senso di questa precisazione cfr. *sotto*.

caratteri); si introduce un termine per designare ciò che possiede questo carattere; si assume che la precisione con cui il carattere distintivo è stato espresso permetta di assegnare un senso all'affermazione o alla negazione dell'esistenza di ciò che questo termine designa; si afferma l'esistenza. Ammettiamo ora che la determinazione del carattere distintivo sia una buona e precisa determinazione, ovvero che essa chiarisca all'interlocutore senza equivoci ragionevoli ciò che per esso viene inteso. Si può negare che ciò sia sufficiente per assegnare un senso all'affermazione o alla negazione dell'esistenza del *designatum*. In particolare si può negare che questo sia il caso qualora ci si trovi nell'impossibilità di individuare tramite procedimenti indipendenti un'entità che risponde a quella data caratterizzazione. Il caso della mia determinazione del concetto è proprio un caso del genere e è in questo senso che io credo si debba propriamente parlare di inaccessibilità. Nonostante questo vi sono molti casi in cui una buona determinazione, espressa a esempio per mezzo dell'individuazione di una funzione (nel nostro caso: essere ragione di...) è tale che, anche in assenza di qualsiasi indipendente possibilità d'accesso, resta possibile costruire una struttura rappresentativa che fa uso di essa in termini esplicativi. Detto in altri termini, é possibile assegnare a tale funzione un ruolo entro un contesto esplicativo.

Sono allora portato a pensare che una determinazione assegni di per se stessa legittimità alla questione relativa all'esistenza di ciò che essa designa, e che una risposta positiva (l'affermazione dell'esistenza) dipenda dalla possibilità di assegnare al *designatum* un ruolo in una struttura in cui esso interagisce con il *designatum* di altre determinazioni. Tale struttura è un *mondo* e il *designatum* di cui si afferma l'esistenza è quindi un *oggetto*.

Per rendere più chiaro ciò che qui intendo con "legittimità" formulerò il mio punto di vista nei termini seguenti: il termine x designa qualche cosa che può o non può esistere se e solo se è stata prodotta una determinazione del concetto corrispondente a questo termine, e (ciò che) x (designa) esiste se e solo se esso partecipa a una struttura relazionale che individuo come un *mondo*. Se (ciò che) x (designa) esiste, esso potrà dirsi un *oggetto*.[21]

Per quanto riguarda la prima condizione è del tutto chiaro che se l'esistenza o meno di un cavallo alato ci appare del tutto indipendente dal linguaggio che noi utilizziamo per parlare di esso, non è questo il caso per l'esistenza di un animale avverbiale o di un liquido acuto. Abbiamo qui infatti a che fare con dei termini che non sembrano designare alcun concetto, che non esprimono alcuna determinazione, né possono in qualche modo venir associati a una determinazione precedente. E' così soltanto l'uso di un linguaggio almeno approssimativamente stabile che ci permette di affermare che il *designatum* di un dato termine esiste o non esiste indipendentemente da noi e dal nostro linguaggio.

La questione è essenzialmente diversa per ciò che riguarda la seconda condizione. Non vi è qui infatti alcuna possibilità di fornire un'argomenta-

[21] Naturalmente queste affermazioni assumono sensi completamente diversi a seconda del significato che si vuole assegnare al termine "determinazione". Per questo rimando ai prossimi paragrafi.

zione logica a sostegno di una affermazione che si riduce essa stessa alla determinazione di un concetto.[22]

Per chiarire ancor meglio ciò che intendo dire applicherò il mio punto di vista a qualche esempio. Di Pegaso potrò certo dire che esso esiste o non esiste, sapendo bene che esso è un cavallo dotato di ali. Se cercassi Pegaso nel mondo degli animali in carne ed ossa, sarei poi portato a pensare (e quindi a affermare) che Pegaso non esiste (anche se certo potrei sbagliarmi in questo) perché non troverei alcuna relazione che lega Pegaso agli animali che sono abituato a conoscere. Tuttavia potrei cercare Pegaso nel mondo dei personaggi dei miti e in questo caso dovrei dire che esiste, così come dovrei certo arrendermi all'esistenza del concetto di Pegaso che potrei connettere ai concetti di animale e di essere alato. L'universo viene così a popolarsi di due oggetti forse un po' strani ma che a me paiono indiscutibilmente presenti: il Pegaso mitologico e il concetto di Pegaso, anche se tali oggetti appartengono certamente a due mondi fra loro distinti e distinti entrambi dal mondo degli animali in carne ed ossa.

E' proprio allo stesso modo che affermo l'esistenza del concetto (in quanto tale). Mi pare si possa infatti parlare di un oggetto designato dal termine "concetto" (o se si vuole dell'oggetto `concetto di concetto').[23]

I. 1. ζ. *Definizioni / determinazioni*

Certo, in tal modo non ho dimostrato nulla; e nemmeno credo di aver argomentato a favore di una determinata posizione. Ho solo cercato di chiarire ciò che intendo qui parlando di esistenza. Spero che ciò sia anche servito per chiarire le nozioni di concetto e di oggetto, anche se su di esse tornerò ancora. Nonostante ciò mi sono mosso senza dubbio in un circolo vizioso.

---

[22]Mi rendo conto che un tal modo di parlare di esistenza (da cui segue che *x* esiste se e solo se partecipa a una struttura di relazioni) può non corrispondere alla nozione comunemente accettata. Ciò non implica tuttavia che la mia affermazione debba intendersi come una semplice definizione convenzionale dell'esistere di qualche cosa. Credo infatti che questa nozione corrisponda all'uso del termine "esistere" in molte discussioni filosofiche e scientifiche (anche se certo non in tutte). Sostenere d'altra parte che i concetti filosofici cui faccio qui riferimento esistano in quanto tali ben prima del mio modesto tentativo di descriverli, non implica che i termini che li nominano non siano stati utilizzati anche per designare concetti diversi (e siano quindi stati usati secondo una differente ragione) a quelli cui io mi riferisco qui. (Non vedo come poter esprimere questa idea - che mi pare peraltro abbastanza semplice - senza utilizzare lo stesso termine "esistere" di cui è qui questione. E' evidente che anche qui il mio uso si conforma d'altronde al concetto a cui questo termine è stato sopra associato).

[23]Non mi sembra qui di essere molto lontano dal Frege di "Über Begriff und Gegenstand", anche se la mia lettura di Frege è senza dubbio piuttosto personale [cfr. Frege (1892)]. La sorpresa che la mia conclusione può indurre discende in ultima analisi da un'abitudine diffusa a considerare oggetti e concetti come entità originariamente contrapposte. E' proprio questa abitudine che vorrei mettere in causa. Per ciò che riguarda il passaggio dall'affermazione dell'esistenza *del* concetto all'affermazione dell'esistenza dell'oggetto `*concetto di* concetto', vorrei soltanto osservare, per evitare fraintendimenti, che l'uso dell'articolo determinativo indica il riferimento non tanto a *un* concetto particolare, ma al concetto in generale, ovvero proprio al concetto di concetto.

Come i "negatori" del concetto "muovono all'assalto contro il concetto armati di concetto",[24] io ho cercato di determinare la nozione di concetto armato di concetti. Chiunque voglia negare il concetto può quindi semplicemente dire che non sa di che cosa io abbia parlato, e certo io non potrò allora spiegarglielo. Ma vi è qui un carattere essenziale della filosofia che è spesso un ragionare che si tiene insieme come un tutto, ma che crolla se è scomposto nelle sue parti. Ecco come si è recentemente espresso G. G. Granger, proprio all'inizio del suo manifesto a favore di una conoscenza filosofica:

> [...] qui veut éviter absolument tout cheminement circulaire doit renoncer tout de bon à penser. [...] Le vrai problème pour une discipline de connaissance, le seul apparemment dont la solution nous soit accessible, serait non point d'éviter à tout prix le cercle, mais de préciser, dans chaque domaine, une certaine manière de le rompre, de dire jusqu'où l'on peut, en quelque sorte, *remonter trop loin* sans faillir, comment, selon le mot du Maître Aristote, on peut et doit *s'arrêter*. Sur ce point, l'activité philosophique se présenterait comme la recherche la plus générale concernant les différentes façons de décider d'un point d'arrêt.[25]

A ben guardare tuttavia i "punti di arresto" sono sempre più di uno e il chiarimento di un concetto, l'esposizione di un pensiero, richiede la comprensione di altri concetti, la messa in moto di altri pensieri. Ma proprio questa rete è in fondo ciò che in filosofia deve essere mostrato: il legame che il procedere del ragionamento istituisce fra punti diversi di uno spazio. Difficile è dire che uno spieghi l'altro. Il mio ricorso alla nozione di struttura può forse *spiegare* (in un qualche senso accettabile) il senso che assegno qui alla nozione di esistenza? Io credo di no. Ma è questo legame che volevo mostrare, questo e alcuni altri. Nient'altro, perché nient'altro mi sembra possibile.

Si può allora discutere se le determinazioni di cui ha fatto uso siano o meno delle definizioni. "Définir - scrive ancora Granger - c'est ramener un concept à être un nœud de relations entre d'autres concepts, pris en fin de compte comme indéfinissables."[26] E' l'ultima precisazione di una tale "definizione" che mi pare problematica. In primo luogo, come pretendere di usare il termine "indefinibile" per definire una definizione? In secondo luogo, come rendere compatibile l'uso del termine "concetto" in quanto indefinibile[27] con lo sforzo che una così vasta parte della filosofia moderna ha dedicato al problema di chiarire una tale nozione (e a cui lo stesso Granger consacra quasi interamente il suo libro)? Il punto è che la filosofia ben difficilmente può, nel suo complesso, accontentarsi di far uso di "indefinibili" (ma io direi meglio: indeterminabili[28]). E anche quando accade (come è certo inevitabile) che in una singola produzione filosofica certi termini vengano utilizzati senza che il corrispondente concetto sia stato determinato o lo sia stato in modo vizioso è

---

[24] Cfr. Croce (1909), p. 10.

[25] Cfr. Granger (1988), p. 9.

[26] Cfr. *ivi*, p. 179.

[27] E' evidente che - se ci riferiamo ai concetti, dove non è possibile un passaggio di ordine - la definizione di definizione deve essere data *prima* di ogni definizione e non può quindi contenere (secondo la definizione precedente) che degli "indefinibili".

[28] Cfr. *sotto*.

a un orizzonte di senso determinato che si dà fiducia, allo sforzo già compiuto da altri, spesso da un'intera tradizione. E' solo immerso in un simile orizzonte che un testo filosofico risulta non solo comprensibile, ma significante.

E' essenzialmente per questa ragione che ho preferito utilizzare fino a qui il termine hegeliano "determinazione", che meno di altri (e certamente meno del termine "definizione") mi pare evocare l'idea di un procedere "rigoroso" del tutto interno alla singola produzione linguistica.

Ma la questione non è solo questa. Essa nasconde una insidia più grande. Ho fino a questo punto dato per scontato che non solo è possibile parlare significatamente di concetti, che si può cercare di spiegare quello che con questo termine si vuole intendere, ma anche che ogni concetto particolare può essere in qualche modo esplicato, determinato. Nel corso di una tale impresa si mescolano tuttavia, assai spesso, due gesti diversi e forse perfino contrapposti, fra i quali occorre invece discernere. Un conto è fornire delle regole esplicite che consentano di sostituire un certo insieme di termini (che dirò *substituendum*) con un solo termine - o con un altro insieme di termini - (che dirò *substituens*), un altro è cercare di chiarire ciò che con un termine si intende, quello che questo vuole significare. Vorrei tornare brevemente a discutere di entrambe queste operazioni.

La prima può apparire più semplice e sotto alcuni rispetti lo è. Se essa, in quanto tale, non si riduce a altro che a una mera convenzione linguistica, non per questo può qualificarsi come un atto puramente arbitrario. Nessuno accetterebbe seriamente, senza ulteriori esplicazioni, una regola che proponesse di chiamare "liquallo" un qualsiasi liquido giallo, indipendentemente da ogni sua altra caratteristica. I termini che compongono il *substituendum* non possono venir scelti a caso. La loro connessione deve essere in qualche maniera rilevante nel contesto di una struttura di senso precedentemente acquisita. La regola di sostituzione non può che essere una trasposizione terminologica della raggiunta consapevolezza di una tale rilevanza. Ma a ben guardare ciò non significa altro che tale regola debba essere intesa come la presentazione di un nuovo nome (costituito in generale da un morfema meno complesso del precedente) per un oggetto determinato indipendentemente. Il significato del nuovo termine non è allora che la sequenza di termini che esso sostituisce e solo indirettamente l'oggetto a cui questa sequenza si riferisce. La capacità referenziale del nuovo termine dipende *completamente* dalla capacità referenziale del *substituendum*. Così tramite una simile operazione io non faccio che proporre un artificio atto a conseguire una certa economia linguistica, ma non introduco nessun nuovo oggetto (a parte il termine stesso che fornisce il nuovo nome). L'introduzione di un nuovo oggetto è del tutto indipendente e verte unicamente sulla capacità referenziale del *substituendum*; è il significato di questo che è qui in questione. Un tale oggetto è semplicemente ribattezzato. Così se il *substituens* è un termine già in uso nel linguaggio corrente indipendentemente dalla regola in questione, la presentazione di questa deve venir intesa come l'eliminazione del significato di questo termine dall'insieme degli oggetti cui il nostro linguaggio si riferisce. Se si può certamente sostenere che una buona regola di sostituzione debba essere tale che il significato del *substituen-*

dum sia lo stesso oggetto che forniva il significato del *substituens* nel linguaggio usuale, occorre osservare che questa fortunata circostanza dipende soltanto dalla capacità dello stesso *substituendum* di essere una buona determinazione di quell'oggetto. Se è a questo che si vuole mirare non è tuttavia una regola di sostituzione che deve venir presentata, ma direttamente una determinazione che descriva il vecchio concetto nei termini di un insieme di concetti correlati. Il rischio di una tale procedura è ovviamente che la determinazione non permetta una identificazione esaustiva e apra la possibilità di situazioni nelle quali un astante usi il termine associato al vecchio oggetto per indicare un oggetto (di ordine inferiore) che non gode affatto delle proprietà espresse dalla determinazione. Ma questo rischio (inevitabile) non è eliminato dalla presentazione di una regola di sostituzione che per mezzo della semplice espulsione *a priori* di oggetti di tal genere dall'estensione del significato associato al vecchio termine che entra in essa in quanto *substituens*. L'impoverimento della capacità referenziale del linguaggio è quindi una inevitabile conseguenza del suo "rigore". Per evitare ogni genere di confusione impiegherò d'ora in avanti il termine "definizione" per riferirmi esclusivamente a regole di sostituzione. Una definizione sarà così una semplice assegnazione di un nuovo nome a un oggetto *già* determinato. Dire che a è stato definito per mezzo della sequenza di termini x significa quindi dire che il *termine* "a" è stato associato all'oggetto identificato da una tale sequenza di termini. E' propriamente tale oggetto che riceve un nome e non viceversa. Non si potrà dunque dire che sia l'oggetto `a´ a essere definito. "a" non è infatti che un termine che sta per la sequenza di termini che determinano l'oggetto. Così definire il termine "a" come (tramite la sequenza di termini) x significa associare a questo termine un oggetto determinato indipendentemente per mezzo della sequenza di termini x, mentre definire un oggetto significa associare a esso un nuovo nome dopo averlo indipendentemente determinato. Solo *dopo* che la definizione è stata data si potrà dire che il termine "a" indica un oggetto (ovvero lo stesso oggetto indicato dalla sequenza x).

Ma di che genere di oggetti si tratta? In primo luogo è chiaro come si possano definire oggetti che, in quanto tali, non sono concetti. Posso puntare il mio cannocchiale verso il cielo e avvistare una intermittenza luminosa in una data posizione relativamente alle stelle conosciute e proporre un nome per questo nuovo oggetto. Posso trovare una classe di funzioni che si comportano in modo specifico rispetto a un determinato operatore (le funzioni monotòne rispetto all'integrale di Riemann, per esempio) e decidere di introdurre un termine unico per parlare di questa classe. Certo, in entrambi i casi al nuovo nome corrisponderà anche un concetto, ma tale nome non dovrà venire inteso come un nome per un tale concetto, ma come un (nuovo) nome per l'oggetto corrispondente, il quale interagirà in quanto tale in una determinata struttura relazionale.[29]

[29]Se ciò mi sarà facilmente concesso per quanto riguarda una stella, potrebbe risultare più dubbio relativamente a una classe di funzioni. Vi è qui tuttavia uno dei punti centrali del mio argomento, sul quale verrò più dettagliatamente più avanti.

Consideriamo allora un oggetto che sia anche, in quanto tale, un concetto, a esempio l'oggetto `concetto di stella più prossima alla terra´. Immaginiamo di possedere una definizione che associa al termine "sole" l'oggetto individuato come la stella più prossima alla terra. Diremo allora che l'oggetto `concetto di stella più prossima alla terra´ è associato al nome "concetto di sole". Questa definizione tuttavia non è affatto in se stessa una determinazione del concetto di sole. Se la sostituzione del termine "concetto di sole" al termine "concetto di stella più prossima alla terra" può infatti avvenire senza alcuna difficoltà, e anzi con notevoli vantaggi espressivi, in molti contesti in cui compaia il secondo termine, ciò non significa per nulla che, in quanto tale, l'esibizione di questa regola di sostituzione esaurisca la richiesta di un astante che voglia una delucidazione sul concetto di sole. Una tale delucidazione può dirsi realizzata solo se l'astante possiede già le nozioni di stella e di maggiore o minore prossimità, ciò che non è per nulla necessario per il successo della definizione. L'apparente paradossalità del ragionamento è dovuta al fatto che nel caso in questione il concetto di sole denota un oggetto, il quale è individuato facilmente per mezzo di un connotato operazionale come un elemento di una classe di oggetti già determinati. La situazione è così abbastanza semplice per pensare che basti la presentazione della regola per evocare il concetto. Se certamente questo è vero, occorre osservare: i) che non è la regola di sostituzione che, in quanto tale, conduce alla determinazione del concetto, ma il fatto che l'astante intende la regola come lo specchio di una determinazione precedente; ii) che questo non è certo il caso generale.

Immaginiamo che si abbia a che fare con il concetto di coscienza e che si proponga la regola di sostituzione: "coscienza $=_{df}$ vissuto interiore istantaneo". Si può pensare che questa stessa regola fornisca, da sola, una determinazione del nostro concetto? Evidentemente no.

Tutto ciò non è altro che una conseguenza della distinzione che sto commentando da alcuni capoversi. Determinare un concetto è cosa diversa da definire un oggetto, ovvero fornire un nome per esso, associarvi un termine. Una determinazione tende allo scopo di comunicare un concetto e per raggiungere questo scopo occorre trovare la strada per condurre un certo numero di astanti a accedere a un certo contenuto di pensiero e quindi a usare in futuro un certo termine - associato a quel pensiero - così come lo userei io nelle medesime circostanze, e certo per questo non basta dire: "usa "coscienza" ogni volta che useresti "vissuto interiore istantaneo"".

Ciò conduce tuttavia a vedere un nuovo e assai ostico problema. Il lucido e ormai classico esempio fornito da Quine a proposito del termine "gavagai"[30] mostra che non vi è nessun comportamento accertabile, e certamente nessun comportamento linguistico capace di assicurare l'avvenuta comunicazione di un concetto. Nessun indizio sarà così mai abbastanza probante per assicurare a un filosofo che la sua *performance* ha condotto una certa comunità a uniformare un certo uso a quello suo proprio e, tanto meno, a accedere al suo stesso contenuto di pensiero. Inoltre, per essere più precisi, occorrerebbe dire che la comunicazione è perfettamente avvenuta qualora

[30] Cfr. Quine (1959).

l'uso della comunità in questione si uniformi all'uso futuro del filosofo, a condizione che questi non abbia cambiato opinione, e che ciò non sia determinato da ragioni esterne (non sarebbe certo un indizio favorevole il fatto che alcuni uomini ripetano per tutta la vita esattamente e soltanto le parole pronunciate dal "maestro", sotto la minaccia di essere uccisi[31]). E' così chiaro che non vi sarà mai la prova che un concetto sia stato perfettamente comunicato. Quello precedente non può quindi essere inteso come un criterio.

I. 1. η. *Determinazione / comunicazione*

Questa ovvia conclusione non implica tuttavia che una comunicazione non *possa* avere successo e, in particolare, che non si possa comunicare un concetto, e anzi mi pare assai più facile spiegare l'insieme dei nostri comportamenti (in particolare dei nostri comportamenti linguistici) assumendo che una tale comunicazione abbia luogo piuttosto che negandolo. Anche in tal caso credo che una distinzione debba essere mantenuta fra il fatto che ciò sia avvenuto e avvenga e la possibilità di provare o negare questo fatto. L'ipotesi negativa è d'altra parte un'assunzione metafisica tanto forte quanto quella positiva e, a differenza di questa, ha il difetto di rendere la conoscenza un mistero del tutto inesplicabile.

Ciò detto, occorre comunque badare a distinguere fra un concetto, la determinazione di un concetto, l'effettiva capacità della determinazione di comunicare un concetto, la comunicazione di questo e il termine che è associato a quel concetto, il suo nome. Mentre il nome è certamente un'entità linguistica, questo non vale per il concetto, che è piuttosto il protagonista di un atto intuitivo. Perché questo atto possa dar luogo a una determinazione occorre che esso assuma la forma di una connessione di concetti diversi che l'intuizione coglie in quanto tali (richiamandosi a precedenti determinazioni). La determinazione è proprio la descrizione linguistica di questa connessione intuitiva fra contenuti intuitivi e la sua capacità di dar luogo a una comunicazione dipende dalla forza evocativa di tale descrizione, la quale è una proprietà che non può certo essere linguisticamente precisata. La comunicazione ha d'altra parte luogo quando la determinazione produce nell'astante la stessa connessione intuitiva che essa descrive.

Naturalmente anche qui io non sto facendo altro che servirmi di un certo insieme di termini allo scopo di evocare un pensiero che permetta il riferimento a un certo numero di oggetti che posseggono proprietà che sono a noi più o meno chiare (l'intuizione non è a esempio per noi che una certa capacità dell'uomo che gli permette certi comportamenti, ma che forma abbia questa capacità, come essa si esplichi fisiologicamente resta ancora da dire in modo chiaro). D'altra parte il mio scopo è qui proprio quello di fornire una determinazione capace di comunicare il concetto di determinazione e per

[31]Si noti che prendendo la condizione precedente come un criterio, si dovrebbe concludere che una macchina che registri costantemente la mia voce e legga ciò che scrivo, per ripetere il mio atto una frazione di tempo dopo di me, sarebbe un astante a cui io ho perfettamente comunicato un concetto.

questo non posso che utilizzare il linguaggio come mezzo evocativo di un pensiero. E' proprio e solo il realizzarsi dell'evocazione che dà luogo alla comunicazione. Il filosofo può quindi limitarsi a sperare nella riuscita del suo sforzo. Così una buona determinazione non è altro che una descrizione congetturalmente ben organizzata.

Questa conclusione ci permette di porre il problema precedente sotto una forma un poco differente. Anche ammettendo che la possibilità di una comunicazione sia garantita, non dovremmo leggere questa come una fortunata evenienza dovuta a accidenti fortuiti e interpretare quindi ogni impresa intellettuale come una sorta di più o meno articolata esplosione della coscienza individuale che non può trovare nessuna ragionevole rappresentazione al di fuori di una psicologia del soggetto individuale? Se non vi è un criterio oggettivo per caratterizzare una buona determinazione e, quindi, *a fortiori*, l'edificazione di una struttura relazionale, non dovremmo concludere che l'esistenza stessa è un dato irrimediabilmente soggettivo? che di nessun altra oggettività è possibile parlare se non dell'oggettività che il soggetto individuale pone compiendo una sorta di processo di espulsione di alcuni contenuti di coscienza, che casualmente possono trasmettersi, dando luogo alle stesse sensazioni?

Vi sono, io credo, molti e buoni argomenti contro questa conclusione. Tutti partono tuttavia dal presupposto che il linguaggio ha il potere di evocare non solo immagini, ma anche pensieri, o se si preferisce di provocarli, metterli in moto.[32] Naturalmente questo non vale per i bruti. Il presupposto è che l'uomo possieda una capacità (innata o originariamente acquisita) di tradurre stimolazioni in pensieri, di descrivere pensieri tramite un'organizzazione simbolica che, a sua volta, produce pensieri. Questi argomenti hanno poi, per la natura stessa del problema, una forma particolare. Essi disegnano per così dire uno stato di cose possibile, mostrano un modo in cui l'edificio intellettuale costruito dagli uomini può venir letto, interpretato, ma non forniscono alcun *contraint* a accettare una tale lettura, che sia diverso dalla plausibilità di questa.

Detto ciò, il primo punto che va messo in evidenza è che se l'esistenza di un oggetto determinato *in quanto tale* dipende dalla determinazione di un concetto che corrisponde a tale oggetto, l'esistenza dell'insieme disarticolato delle nostre sensazioni può essere intesa come un *a priori* alla nostra attività filosofica. A me pare anzi che si possa dire che la filosofia ha la sua origine nell'atto di comprensione di tale esistenza, la quale costituisce, per se stessa, una struttura relazionale che deve venir indagata. Un buon numero di concetti può quindi venir associato a altrettanti oggetti di cui occorre *solo* determinare i limiti e i caratteri atti a un riconoscimento. L'esperienza ci mostra che, pur fra le infinite possibili difficoltà, questa operazione riesce assai spesso: essa dà luogo a un linguaggio primario il cui utilizzo è ragionevolmente stabile.

[32] Si noti che è ben diverso affermare che il linguaggio possa evocare pensieri dall'affermare che esso permetta di comunicare concetti (ovvero pensieri determinati e stabili). Il presupposto, per quanto forte, non contiene quindi, esso stesso, la conclusione.

Il secondo punto è che un altro rilevante gruppo di concetti sorge in connessione con un simile atto di comprensione e con le attività pratiche richieste dalla sussistenza. Così non sembra molto difficile insegnare a un bambino che cosa sia la fame o metterlo nella condizione di distinguere certe classi di forme.

Il terzo punto è che il pensiero sembra poter riconoscere delle modalità invarianti e farle quindi osservare, rappresentarle simbolicamente e fornire regole per agire operazionalmente su di esse. Ciò fornisce un insieme di concetti a cui sembrano corrispondere oggetti tanto stabili quanto quelli del mondo percepito dai nostri sensi (e forse più stabili). Questi oggetti che diciamo usualmente matematici[33] (o logici) permettono di assegnare una relativa stabilità a un'ampia classe di concetti che non si limitano a interagire fra di loro.

Il quarto punto è che tutto ciò fornisce un insieme già assai vario di mondi, su cui il pensiero può agire promuovendo ulteriori costruzioni, che se divengono via via più instabili, sembrano possedere sufficienti punti d'appoggio per condurre a evocazioni sostanzialmente regolate.

Il quinto punto, infine, è che le esperienze a cui i membri di una comunità possono fare riferimento per cercare di capire un parlante sono in genere assai simili, così come dovremmo supporre che, a un certo grado di evoluzione della specie, siano simili i processi psichici e neurologici individuali.

I. 1. θ. *Concetti II*

Tutto ciò mi conduce a proporre una nuova - e questa volta positiva, ma solo in quanto metaforica - determinazione del concetto come una sorta di attrattore all'opera nel pensiero. Non postulo certo l'esistenza indipendente di campi di forze, mi limito a suggerire l'idea di percorsi che, indefinitamente divergenti fra loro su uno spazio, convergono in un punto di esso ogni volta che entrano in un suo intorno di raggio non infinitesimo.

---

[33]Recentemente P. Kitcher ha difeso le ragioni di una concezione genealogica della conoscenza matematica, intesa come esito di successive estensioni a partire da basi empiriche.

> I propose - egli scrive [cfr. Kitcher (1984), p. 92] - that a very limited amount of our mathematical knowledge can be obtained by observations and manipulations of ordinary things. Upon this small basic we erect the powerful general theories of modern mathematics.

Se credo che la tesi di un'origine "pratica" dei primi problemi e concetti matematici debba essere accettata e penso anzi che la matematica non tragga il suo interesse da altro che dalle sue capacità rappresentative, non capisco come questa idea possa convertirsi in una concezione della matematica come scienza empirica. Il fatto che la nozione di funzione possa essere intesa come l'oggettivazione di una modalità reale (la correlazione di un *input* con una dato *output*) non implica certo che tale concetto sia un concetto empirico, ovvero che a esso corrisponda un oggetto o a una relazione nel mondo materiale che ci circonda.

I. 1. ι. *Determinazioni*

Se spero di aver chiarito che una determinazione non debba venir confusa né con una definizione, né - su un piano del tutto diverso - con l'avvenuta comunicazione di un concetto, ciò che ancora non ho detto è in che modo una determinazione debba per sé stessa caratterizzarsi. Se una determinazione si presenta linguisticamente come una sequenza di termini, essa *é* la descrizione di un concetto, prodotta allo scopo di dar luogo a una comunicazione di questo. Se ho già detto che un criterio capace di discriminare una *buona* determinazione (in riferimento a tale scopo) non mi pare possibile, il problema che resta ancora aperto è quello di chiarire sotto quali condizioni una certa sequenza di termini possa essere una determinazione, ovvero possa considerarsi come una descrizione di un concetto. Anche in questo caso non mi pare possibile formulare un preciso criterio linguistico applicabile al linguaggio naturale (che è il solo in cui, in ultima istanza, può avvenire una comunicazione e può quindi essere formulata una produzione filosofica[34]). Alcune precisazioni possono tuttavia venir introdotte e ciò può essere fatto in modo che se il linguaggio naturale in questione (o una sua parte) fosse rappresentato da un sistema artificiale sufficientemente strutturato, queste possano trasformarsi in un criterio formale.

L'idea è semplicemente quella di considerare l'insieme dei concetti già determinati come una struttura a albero in cui i rami esprimano delle relazioni di connessione già avvenute. Siccome ogni concetto (già determinato) può essere espresso tramite un termine, questa struttura può essere rappresentata come un albero linguistico, il cui grado di complessità dipenderà dall'ampiezza delle connessioni concettuali di cui si voglia tener conto e dalle modalità di queste che vorranno essere distinte. Una condizione necessaria e sufficiente perché una sequenza di termini possa esprimere una determinazione potrebbe essere allora che essa dia luogo a un asserto ben formato (o a un insieme di asserti) i cui termini siano connessi secondo regole grammaticali tali da esprimere delle relazioni di una certa modalità, le quali abbiano luogo solo fra termini che esprimano concetti a cui la struttura precedente dell'albero concede la possibilità di essere dei *relata* di quella relazione. Come questo albero possa venir strutturato e che cosa si debba intendere per "concedere la possibilità di essere un *relatum* di una certa relazione" è una questione che non può certo venir qui affrontata. L'idea che qui si propone per giungere a una caratterizzazione di una determinazione mi pare tuttavia chiara. L'albero può infatti intendersi come una sorta di struttura categoriale

[34]Un linguaggio artificiale non mi pare infatti possa essere inteso che come un insieme strutturato di simboli sui quali si operi in modo regolato da una precisa serie di norme, il cui contenuto rappresentativo non può venir fornito che da un certo numero di esplicazioni fornite in un metalinguaggio. Il regresso ai metalinguaggi ci impone quindi di approdare, in ultima istanza, a un linguaggio naturale. L'interesse di ogni linguaggio artificiale mi pare, d'altra parte, quello di poter qualificarsi come una rappresentazione "distillata" di alcune componenti del linguaggio naturale.

che concede certe connessioni impedendone altre,[35] ma che non dipende da altro che dallo stato precedente delle connessioni concettuali o, detto in altri termini, dalla struttura del mondo a cui la determinazione si riferisce.

In ciò sono implicite due cose. La prima è che una determinazione può essere espressa solo da asserti che si riferiscono a dei concetti (e non agli oggetti sussunti sotto quei concetti). Questa condizione implicita non può naturalmente essere resa manifesta in termini puramente linguistici. In molti casi è infatti il contesto che decide di uno o dell'altro riferimento. La seconda condizione è che ogni determinazione richiede delle determinazioni precedenti. Ma qui non faccio che ritornare allo stesso punto da cui ero partito, all'inizio del precedente paragrafo I.1.ζ.. Il carattere originariamente vizioso della filosofia non mi pare possa essere negato.

I. 1. κ. *Oggetti filosofici*

Ogni volta che una determinazione è data è stabilita non solo la possibilità che l'oggetto corrispondente al concetto esista o meno in un mondo, ma anche l'esistenza dell'oggetto costituito da quel concetto. Così determinando il concetto di Pegaso (cavallo alato) si è stabilita tanto la possibilità che Pegaso sia o meno un oggetto appartenente al mondo degli animali in carne ed ossa, che l'esistenza dell'oggetto `concetto di Pegaso´. Dirò che un simile oggetto è un *oggetto filosofico*.

La nozione di oggetto filosofico può apparire ardua, ma a me pare perfettamente naturale una volta che si sia accettato di pensare un oggetto come qualcosa che opera entro una struttura relazionale e su cui si può quindi operare. Il concetto di Pegaso può infatti essere indagato, connesso a altri concetti, utilizzato nel contesto di una spiegazione.

Ogni concetto è quindi un oggetto filosofico.

---

[35] Non mi è per nulla chiaro se contraddizioni e tautologie debbano essere intese o meno come asserti tali da poter esprimere una determinazione. Mi pare tuttavia che ciò debba essere concesso per contraddizioni o tautologie non puramente logiche che sono determinabili come tali sulla base della struttura precedente dell'albero. Se questo non fosse il caso simili asserti non potrebbero infatti essere in senso stretto riconosciuti come contraddittori o tautologici. [Con il termine "contraddizioni o tautologie non puramente logiche" intendo fare riferimento a quegli asserti che si trasformano rispettivamente nella negazione di una verità logica o in una verità logica (contraddizioni o tautologie puramente logiche) "sostituendo in essi sinonimi con sinonimi" [cfr. Quine (1951), in particolare p. 23]

I. 1. λ. *Operare filosofico*

La legittimità di una simile affermazione dipende ovviamente da un modo di intendere la filosofia come un operare, il quale può essere un operare su concetti o un operare che produce concetti.

Consideriamo per primo l'operare su concetti, ovvero su contenuti determinati che vengono assunti come dati e che possono, in generale, essere connessi fra loro, scomposti, ordinati ma anche negati o *oggettivati*. La connessione e la scomposizione di concetti - su cui non mi soffermo qui - dà a sua volta luogo a nuovi contenuti determinati, a nuovi concetti, i quali debbono venir ordinati secondo una gerarchia la più possibile precisa. Nemmeno su questa attività mi sembra qui il caso di soffermarmi; vale invece la pena di chiarire ciò che intendo con negazione e oggettivazione.[36]

La negazione di un concetto non consiste tanto nel rigetto della sua determinazione come insoddisfacente (ché un contenuto non determinato o mal determinato non è un concetto e non può quindi venir inteso), ma nella sua espulsione da una data struttura relazionale. E' chiaro che non si tratta qui nemmeno di espulsione da *ogni* struttura relazionale. Ogni concetto, in quanto contenuto determinato, mantiene infatti pur sempre un ruolo almeno nella sottostruttura costituita dalla sua stessa determinazione. Posso negare il concetto di coscienza come vissuto interiore istantaneo, ma per far ciò devo intendere tale concetto, ciò che equivale all'affermazione della bontà della sua determinazione e accettare quindi che esso entri in relazione con i concetti di vissuto, di interiorità e di istantaneità (che a loro volta devono ben essere stati intesi). La negazione di tale concetto corrisponderà allora al rifiuto di accettare l'idea che esso possa entrare causalmente in relazione con altri concetti - estranei alla sua determinazione - e possa quindi fornire una qualche spiegazione o rappresentazione in qualche modo connessa al mio tentativo di comprensione. Naturalmente concetti e termini a questi associati non corrispondono fra loro in nessuno dei due sensi secondo un'applicazione iniettiva: esistono termini che vengono applicati a più concetti e viceversa. Così la negazione di un concetto non comporta anche l'espulsione del termine corrispondente che può essere fatto corrispondere a un nuovo o differente concetto e quindi usato diversamente.

---

[36]Mi sia consentita una citazione di Kant [cfr. Kant (1770), p. 55]:

> [...] l'uso dell'intelletto, cioè della facoltà superiore dell'anima, è duplice: al primo di essi *sono assegnati* i concetti stessi sia delle cose sia delle relazioni, e questo è l'uso reale; al secondo, invece, comunque essi siano assegnati, semplicemente *sono subordinati* gli inferiori ai superiori (per le note comuni), e sono messi in relazione tra loro secondo il principio di contraddizione, e questo è il cosiddetto uso logico.

E' allo statuto di quel "venire assegnati" di cui parla Kant che ho cercato fin qui di dedicare la mia riflessione. Vorrei ora spostare l'attenzione tanto su alcuni caratteri che distinguono fra loro i concetti particolari, che sulle modalità dell'operare su di essi.

Se la negazione è così un processo di eliminazione, l'oggettivazione[37] è un processo di costituzione e, in particolare, di costituzione di nuovi oggetti. Esistono a esempio concetti la cui determinazione è tale da suggerire la possibilità di una traduzione nel contesto di una struttura simbolica essenzialmente differente dal linguaggio evocativo di pensieri in cui questa stessa determinazione è data e nella quale operino regole esplicite capaci di connettere fra loro differenti combinazioni simboliche Consideriamo, a esempio, il concetto di commutatività fra operatori: due operatori sono detti commutativi fra loro qualora producono lo stesso risultato qualunque sia l'ordine della loro successiva applicazione al loro argomento. Come si vede la determinazione di questo concetto non richiede né la determinazione del carattere dell'argomento, né quella delle restanti caratteristiche degli operatori. Possiamo allora scegliere tre simboli neutri e indicare l'argomento con z e gli operatori con G e Γ, la commutatività di questi operatori verrà allora indicata dalla regola di sostituzione $G[\Gamma(z)] = \Gamma[G(z)]$. Una tale regola potrà non solo esprimere in numerosi contesti la determinazione esplicita del concetto di commutatività, ma permetterà di manipolare operatori commutativi senza alcun riferimento a tale concetto, per la semplice applicazione di una regola puramente sintattica. Il concetto di commutatività di due operatori ha così dato luogo a una classe di oggetti che possono venir manipolati senza fare alcun riferimento alla determinazione stessa di tale concetto, esattamente come un sasso può essere tirato verso il mare senza chiamare in causa in nessun modo la determinazione del concetto di sasso. Dirò che l'oggettivazione è la trasposizione di un concetto in un dato contesto relazionale in cui questo è sostituito da un oggetto o da un insieme di oggetti che, in quanto tali, non sono più concetti. Naturalmente la riuscita di una tale operazione di "deconcettualizzazione" dipende da numerosi fattori che vertono tanto sul carattere specifico del concetto che su quello della struttura relazionale a cui esso viene associato. Essa non sembra in particolare poter essere un'operazione isolata. Nel caso che ho esemplificato - in cui la struttura relazionale nella quale il concetto è trasposto è costituita da un universo simbolico nel quale agiscono regole esplicite di connessione fra gli oggetti (e che è il solo che qui mi interessa considerare) - il concetto non viene semplicemente messo in relazione con una stringa simbolica, ma più in generale con un'intera struttura simbolica che nella maggior parte dei casi è già largamente acquisita. Spesso tale operazione può essere inoltre solo parziale e riguardare solo alcuni caratteri del concetto originario. Ciò che mi interessa sottolineare qui è tuttavia il passaggio che essa comporta da un oggetto concetto a un oggetto o a una classe di oggetti che non sono *più* concetti.

Una volta che la modalità dell'operare filosofico come operare *su* concetti è stata affermata, si dovrà anche accettare l'idea che la filosofia sia ine-

---

[37]Mi riferisco qui esplicitamente all'unica modalità di oggettivazione che mi pare rilevante in relazione al tema della mia dissertazione. Non nego tuttavia (né affermo) la possibilità di altre e differenti modalità atte a realizzare il passaggio da un concetto alla sua trasposizione sotto forma di oggetto non concettuale [cfr. la prossima nota (40)].

vitabilmente presente ogni volta che si operi su concetti. L'affermazione che ogni concetto sia un oggetto filosofico diviene così comprensibile. Secondo questo punto di vista l'ipotesi di una demarcazione fra filosofia e scienza, intese come discipline, sembra tramontare. Tornerò su questo più avanti.

Ma esiste anche un operare che produce concetti, il quale non sia un operare su concetti? Anche se ciò mi sembra dubbio, io credo che questa possibilità non possa, in linea di principio, venir negata. Di primo acchito si potrebbe pensare che si tratti qui di un operare direttamente su oggetti che non sono concetti (oggetti non concettuali, come dirò d'ora innanzi), ma non è questo il caso. Un oggetto non può essere tale in assenza dell'operare di un qualche concetto. L'atto di interpretazione che conduce, a partire da un oggetto prodotto per oggettivazione, al ritrovamento del corrispondente concetto o comunque alla determinazione di un concetto che potrebbe venire genericamente associato a questo, potrebbe in primo luogo venire inteso come un operare di tal genere: un operare su oggetti non concettuali che produce concetti. Tuttavia perché l'interpretazione possa aver inizio, occorre che l'oggetto in questione sia isolato come tale dal contesto cui partecipa e se questo può essere fatto (e anzi in qualche circostanza - come molte di quelle in cui consisterà la mia ricerca - non può che essere fatto in tal modo) anche senza riferirsi al concetto che lo ha originato, è a qualche concetto già dato che occorre per questo affidarsi e sarà proprio come un operare riferito all'oggetto determinato da un tale insieme di concetti, ovvero direttamente a questi concetti, che l'atto di interpretazione dovrà venir pensato. D'altra parte, se è certo vero che un sasso può colpirmi senza che io abbia la minima idea di che cosa sia un sasso e di come esso si comporti, nessun osservatore che non possegga il concetto di sasso (e tanto meno io) potrà mai descrivere l'avvenimento come il mio essere stato colpito da un sasso. Io posso agire sul sasso anche dimenticando o ignorando molte delle caratteristiche di tale oggetto, ma non potrò mai dire di stare agendo su un sasso senza possedere in qualche modo l'idea del sasso, senza saper distinguere questo dallo sfondo disordinato delle mie sensazioni. Ciò non toglie che vi siano relazioni causali fra un soggetto e l'esterno che non sono assolutamente mediate da strutture concettuali. Per quanto io non sappia per nulla ciò che mi è successo, il sasso che mi colpisce provocherà in me una alterazione riconoscibile e istantanea e il fatto che io possa non sapere di doverla assegnare al sasso non implica che essa non sia effettivamente dovuta a questo. E' proprio a seguito di questo genere di relazioni che l'uomo potrebbe aver prodotto originariamente almeno alcuni dei propri concetti e forse continuare a produrli. Egli potrebbe cominciare, a esempio, a individuare un'invarianza, una modalità dell'esterno che potrebbe ben presto divenire il concetto stesso di sasso. Naturalmente nell'uomo che partecipa a una comunità evoluta (a esempio nel bambino) questo processo può senza dubbio essere più complesso e senza dubbio lo sarà, ma non è questo il punto. Il punto è che si dovrà pur ammettere una delle due ipotesi: i) l'uomo possiede dei concetti innati e non fa che operare intellettualmente su di essi; ii) l'uomo produce o ha prodotto dei concetti a partire da qualcosa che non è un concetto e che non può nemmeno essere, in quanto tale, un oggetto. Se questo operare volesse venir accettato, esso dovrebbe, io credo, venir ancora inteso come un operare filosofico. Naturalmente a favore della seconda ipotesi non vale l'ovvia considerazione che l'uomo produce continuatamente nuovi concetti interagendo con la propria esperienza. L'esperienza, si potrebbe infatti rispondere, può essere intesa come una relazione fra il soggetto e dei concetti o almeno degli oggetti precisamente caratterizzati da corrispondenti concetti i quali entrano in modo essenziale nella relazione fra il soggetto e l'oggetto, in modo che questo non sia riconosciuto che come il referente di un concetto, almeno approssimativamente determinato. Se io credo che l'esperienza che l'uomo ha degli oggetti che lo circondano non possa che essere intesa secondo una tale modalità, non sono per nulla certo che non possa esistere un qualche tipo di operare, il quale produca anch'esso direttamente dei concetti senza essere un operare su concetti e che io propongo quindi di intendere come un operare filosofico. Anche se questo secondo operare della filosofia fosse riconosciuto, non si potrebbe certo dire che esso sia un operare direttamente su oggetti non concettuali. Operando direttamente su oggetti non concettuali non sembra possibile produrre concetti.

Ogni oggetto filosofico è quindi un concetto.

I. 1. μ. *Agire pratico: operare su oggetti*

Tutto ciò non deve per nulla far pensare che io voglia ridurre l'operare dell'uomo a un operare filosofico. Una volta che io ho riconosciuto un oggetto per alcune delle sue caratteristiche proprie, facendo intervenire per questo il concetto corrispondente o almeno una parte di esso o un altro opportuno insieme di concetti, io posso certamente agire su tale oggetto e non sul concetto corrispondente. Una volta che io abbia riconosciuto un sasso in quanto tale, potrò certamente sollevarlo e lanciarlo verso il mare. Ciò non provocherà alcuna alterazione del mondo a cui partecipano il concetto di sasso e i concetti a questo strutturalmente connessi (a meno, ovviamente, che io non tragga un qualche insegnamento da una tale esperienza, ma questo è già un altro operare). Non solo: questo tipo di agire può perfino essere diretto a uno scopo, il quale, in quanto tale, non potrà che essere concettualmente determinato. Potrò, a esempio, cercare di accumulare molti sassi per ripararmi dal vento. Nemmeno questo operare sembra tuttavia provocare una qualche alterazione in un mondo diverso da quello cui appartiene il sasso in quanto oggetto. Questo tipo di operare io lo chiamo agire pratico.

Un agire pratico può tuttavia esser di due tipi. Tutto ciò che esso richiede è la possibilità di operare su oggetti senza dover chiamare direttamente in causa, in quello stesso operare, i corrispondenti concetti e senza aver quindi alcuna possibilità di interagire con il mondo cui questi concetti appartengono. Occorre quindi poter accedere alla struttura relazionale cui partecipa l'oggetto (una volta che esso è stato riconosciuto, almeno per alcune delle sue proprietà) senza passare per l'intermediario del concetto. Questo è possibile in due differenti situazioni.

La prima (e si tratta del caso esemplificato sopra) è quella in cui l'oggetto sia un oggetto materiale, partecipi al mondo che interagisce direttamente con i nostri sensi. In questo caso la possibilità logica di questa azione è, mi pare, sempre garantita.

La seconda situazione in cui questo è possibile è quella in cui l'oggetto sia costituito da una combinazione simbolica appartenente a una struttura relazionale retta da regole esplicite di connessione fra i simboli. Se vi è certamente un senso in cui si possa dire che l'immersione stessa di un oggetto del genere entro una tale struttura di relazioni le assegni automaticamente un posto come nodo di tutte le relazioni possibili di cui esso è un *relatum*, è certo che l'individuazione effettiva di queste relazioni (o di alcune fra esse) richiede un operare sui simboli. Per quanto un tale oggetto corrisponderà a un concetto e anzi ne sarà, comme abbiamo visto, un'oggettivazione, si potrà ben agire su di esso senza richiamare alcun concetto se non per riconoscere l'oggetto in questione e, quindi, l'insieme delle regole a esso applicabili. Il risultato di tale azione sarà inoltre una combinazione simbolica che potrà essere riconosciuta, o come un nuovo oggetto particolare (diverso da un semplice esempio del concetto `combinazione simbolica´) o come l'espressione di una relazione fra oggetti già dati, solo tramite il ricorso a un nuovo concetto o agli stessi concetti originari cui gli oggetti in questione sono associati. Nel primo caso non sarà tuttavia l'agire simbolico secondo le regole a produrre il nuovo concetto, ma piuttosto l'interpretazione di tale agire. Un tale tipo di agire pratico mi pare possa identificarsi come un operare matematico.

I. 1. v. *Oggetti empirici / oggetti matematici*

Le precedenti distinzioni riposano, come è chiaro, sulla distinzione fra diversi tipi di oggetti. Ho già parlato di quelli che io vorrei chiamare oggetti filosofici; tali oggetti non sono altro che i concetti: il concetto di Pegaso, il concetto di casa, ma anche il concetto di coscienza, il concetto di causa o perfino il concetto di concetto o il concetto di oggetto.

Se secondo questo punto di vista ogni concetto é un oggetto, non è certo vero che ogni oggetto é un concetto. La casa di Maria non é certamente, in quanto tale, un concetto, essa è piuttosto ciò che il concetto `la casa di Maria´ rappresenta, ma non si identifica con esso. Così il concetto `la casa di Maria´, ma anche più generalmente il concetto di casa, sono esemplificati da degli oggetti non concettuali, ovvero da oggetti che partecipano a una struttura relazionale che, in quanto tale, con coinvolge alcun concetto.

Questo non è tuttavia il caso generale, alcuni concetti si trovano nella particolare circostanza di non essere esemplificati che da oggetti i quali non sono a loro volta che dei concetti (in modo che il significato dei termini corrispondenti a questi concetti non può che essere esso stesso un concetto). Ciò vale a esempio per il concetto di coscienza o quello di causa e naturalmente anche per il concetto di concetto. Mi pare che tali concetti possano venir detti *puri*; avremo così degli *oggetti filosofici puri* o se vogliamo degli oggetti *pu-*

ramente concettuali, i quali non possono venir esemplificati che attraverso la determinazione di un altro concetto di carattere meno generale.

Consideriamo allora concetti non puri e domandiamoci che genere di oggetti possano costituire una loro esemplificazione. Vi sono certamente concetti esemplificabili da oggetti che possono cadere sotto i nostri sensi, essere parte della nostra esperienza (esterna), ovvero da entità occupanti una certa e determinata porzione dello spazio-tempo. Una volta che il concetto di casa sia stato in qualche modo determinato, sarà possibile riconoscere nel campo delle nostre sensazioni un certo numero di case[38] e si potrà dire che il concetto di casa possiede una esemplificazione che, in quanto tale, partecipa a una struttura relazionale che è indipendente da questo e da altri concetti. Una tale struttura può a esempio venir parzialmente descritta da una asserto come "la casa di Maria è di fronte alla casa di Giacomo" che certamente non parla di concetti. Si può certo obiettare che la relazione \`essere di fronte a´ rimanda a un concetto (o perfino che è un concetto), ma questo non è differente dal dire che l'oggetto \`casa di Maria´ non è identificabile senza riferirsi al concetto corrispondente. Il punto è che l'insieme di concetti di cui occorre disporre per comprendere l'asserto in questione costituisce un insieme di strumenti atti a parlare di un mondo che *non è* una struttura relazionale fra concetti. L'asserto in questione non è quindi che una descrizione di questo mondo e è quindi vero o falso in relazione alla modalità dell'essere di questo mondo.

Qualcosa di simile mi pare possa valere anche per oggetti corrispondenti a concetti assai più sofisticati (almeno sotto un certo rispetto[39]), come a esempio il concetto di elettrone o quello di cellula. Oggetti come questi possono certo interagire con i nostri sensi solo per l'intermediario di certi strumenti, la cui costruzione ha richiesto concetti, ma una volta che lo strumento è stato costruito, l'oggetto interagisce con i nostri sensi per l'intermediario di oggetti, non di concetti. Forse vi saranno oggetti che neppure in tal modo potranno essere visti, toccati, uditi e neppure gustati o odorati, ma che potranno tuttavia manifestare la loro presenza disposizionalmente, tramite un'alterazione di certi indici. La descrizione sarà allora di genere diverso. Si dirà, a esempio, che la presenza di un flusso di elettroni (piuttosto che di un elettrone) si manifesterà così e così. Ma ancora il significato dei termini di un asserto come "il flusso di elettroni che possiede *queste e queste* caratteristiche provoca *questa e questa* reazione" non sarà costituito che da oggetti che

[38] S. Kripke ha come è noto proposto [cfr. Kripke (1972)] di intendere il termine "casa" come riferito a tutto ciò che corrisponde, secondo una data catena causale, a quell'oggetto particolare che ho originariamente battezzato come "casa". Un tale punto di vista mi pare comporti numerosi problemi. In primo luogo, come identificare l'oggetto originario in quanto tale senza disporre del suo concetto (come distinguere una casa dal terreno su cui è costruita se non si dispone *a priori* del concetto di casa)? e se di questo concetto si dispone, perché non dire che il termine "casa" si riferisce a tutto ciò che corrisponde a questo concetto? In secondo luogo, come identificare la catena e assicurarsi della sua continuità? E infine, anche se a tutto ciò si potesse dar risposta, come continuare la catena, ovvero come sapere ciò che si deve intendere per casa?

[39] Vi è infatti sicuramente un senso in cui è assai più difficile dire ciò che sia o non sia una casa, piuttosto che ciò che sia o non sia un elettrone.

non sono concetti o da relazioni fra questi; esso descriverà quindi un mondo che non è una struttura di relazioni fra concetti. Gli oggetti che compongono questo mondo (che non è altro che il mondo percepito dai nostri sensi) mi pare possano qualificarsi come empirici.[40]

Ma vi è un altro genere di concetti non puri a cui vorrei dedicare ora la mia attenzione. Nel precedente paragrafo I.1.λ. ho discusso di quel genere di operare filosofico che ho detto oggettivazione e che consiste nella trasposizione di un concetto entro una struttura relazionale nella quale esso si trasforma in un oggetto non concettuale e mi sono in particolare riferito alla costruzione di oggetti simbolici connessi fra loro entro una struttura relazionale per mezzo di un insieme di regole esplicite. Nel successivo paragrafo ho poi identificato l'agire su oggetti di tal genere per mezzo dell'applicazione di regole esplicite di connessione fra le combinazioni simboliche come un agire matematico. E' quindi naturale identificare un tal genere di oggetti come matematici. Il punto è ora capire quale tipo di relazione possa istituirsi fra un oggetto matematico e un concetto.

---

[40]Tutto ciò non toglie che molti oggetti che appartengono a questo mondo non possano sorgere in quanto tali che tramite un processo assai complesso di mediazione concettuale e nemmeno che per parlare di essi non si debba realizzare una struttura teorica alla quale partecipino oggetti (come forza, energia, &c.) che non esprimono in realtà che un modo di essere di oggetti di questo mondo. Anzi la maggioranza delle teorie scientifiche parla in realtà di oggetti appartenenti a una struttura relazionale del tutto artificiale e variamente connessa con il mondo degli oggetti empirici. Ciò è tuttavia possibile solo grazie alla costruzione di un tale genere di oggetti, ciò che mi pare necessariamente richiedere un processo di oggettivazione di certi concetti. Nel paragrafo I.1.λ. ho descritto l'oggettivazione come il processo di trasposizione di un concetto in un oggetto simbolico appartenente a una struttura relazionale retta da regole esplicite. Questo è senza dubbio il caso più frequente e è proprio da una rappresentazione del mondo empirico come una struttura di relazioni fra oggetti di tal genere che nasce una scienza matematica della natura. Si tratta qui di quell'operazione complessa che J. Petitot ha interpretato come un passaggio dal fenomeno all'oggetto scientifico e all'indagine della quale egli sta da qualche anno dedicando la sua riflessione epistemologica fondata su una reinterpretazione del criticismo [cfr. a esempio Petitot (1987a) e (1987b), ma anche - in riferimento al programma di una matematizzazione catastrofista di alcuni fenomeni semiotici - (1984) e (1985)]. Non voglio tuttavia negare che altre modalità di oggettivazione possano essere in qualche modo possibili e dare così luogo a strutture relazionali variamente rapportate con il mondo degli oggetti empirici, e capaci di fornire un modello di questo (potrebbe *forse* essere il caso della biologia molecolare o di altre scienze cosiddette non matematizzate). Perfino la scrittura di un romanzo potrebbe forse intendersi come un atto di oggettivazione di qualche tipo. In fondo un asserto come "Madame Bovary si è suicidata ingoiando arsenico" ha certamente un senso e dovrebbe perfino - io credo - essere inteso come vero relativamente a un mondo i cui oggetti non sono direttamente dei concetti (non è certo qui il concetto di Madame Bovary a essersi suicidato). In tal caso occorrerà tuttavia osservare che tali nuovi oggetti non potranno mai essere tali da permettere un operare diretto su di essi che non sia un operare sul concetto. Tutte queste questioni esulano tuttavia dal soggetto della mia dissertazione, in relazione al quale mi è sufficiente indagare la nozione di oggetto matematico in quanto tale, distinguendola, per ragioni di chiarezza espositiva, dall'abituale nozione di oggetto empirico.

I. 1. ξ. *Oggettivazione interna / oggettivazione esterna*

La prima relazione possibile è naturalmente quella che si istituisce fra un oggetto matematico e il concetto di cui questo è una oggettivazione. Ciò che è qui importante sottolineare è che questa relazione non è in nessun modo una sussunzione dell'oggetto sotto il concetto. L'oggetto matematico non è né un individuo che esemplifica il concetto, né - se non accidentalmente - una classe di individui di tal tipo. Esso è direttamente una trasposizione oggettuale del concetto la quale conserva, in linea di principio, il suo grado di generalità. Se consideriamo l'esempio avanzato nel paragrafo I.1.λ. non abbiamo difficoltà a comprendere che la classe A, delle coppie di operatori tale che se $\{G, \Gamma\} \in A$, allora, per ogni argomento z, $G[\Gamma(z)] = \Gamma[G(z)]$, corrisponde esattamente all'estensione del concetto di operatori commutabili fra loro. E' del tutto evidente che questa trasposizione deriva da un'interpretazione della determinazione del concetto entro un contesto linguistico diverso da quello in cui tale determinazione è data; essa può quindi venir discussa, modificata e perfino mostrarsi inadeguata anche nel caso in cui si voglia ammettere che la determinazione di tale concetto ha permesso una adeguata comunicazione di questo. Discuterò queste evenienze nel prossimo capitolo I.2.. Qui mi basta sottolineare che esse non implicano che la trasposizione conduca da un concetto a una sua esemplificazione singolare e nemmeno a una classe di esemplificazioni. Certo *può* avvenire che il nuovo oggetto sia tale da condurre a considerare come esclusi dal dominio che esso definisce (in questo caso come non appartenenti alla classe che lo costituisce) degli oggetti individuali che invece sarebbero sussunti sotto il concetto secondo la sua determinazione originaria. Ma ciò non riduce ancora la relazione di corrispondenza per oggettivazione a una sussunzione, ma semplicemente a una trasposizione oggettuale non completa o inadeguata.

La considerazione di questa possibilità mostra assai bene come sia possibile indicare una differenza fra due tipi di oggettivazione. Nel primo caso il concetto non fa che esprimere alcune proprietà di una classe di oggetti già determinati entro un mondo. Questo è proprio il caso esemplificato sopra (a meno che nella determinazione del concetto non si voglia intendere il termine "operatore" come riferito genericamente alla funzione dell'operare in tutte le sue possibili modalità). In una situazione del genere una trasposizione non completa (la quale semplicemente caratterizzi solo alcune delle note comuni espresse dalla determinazione) o inadeguata mette effettivamente luogo alla costituzione di una sottoclasse propria dell'insieme che costituisce l'estensione del concetto (pur non riducendosi in senso stretto a una sussunzione). Indicherò questo caso come una *oggettivazione interna*. Nel secondo caso il concetto esprime una determinazione più generica riferita a oggetti di un mondo non (ancora) determinato in modo preciso. Si pensi per esempio a un concetto come quello di tipo di forma di un'estensione di terreno, tale da permettere la scomposizione dell'estensione in estensioni di forma comune. Il passaggio da un tale concetto all'oggetto `figura geometrica piana con contorni rettilinei´ (poligono regolare o irregolare) e la successiva identificazione del triangolo come una forma comune richiede evidentemente una trasposizione di ben altro genere rispetto a quella considerata in precedenza relativamente agli operatori commutativi. In casi come questo il processo di oggettivazione prevede la costituzione o almeno la scelta dell'universo simbolico verso il quale attuare la traduzione. E' così molto difficile pensare che una trasposizione incompleta o inadeguata possa dar luogo a una sottoclasse propria dell'insieme che costituisce l'estensione del concetto originario. Una simile rappresentazione dell'esito di una tale operazione mi pare qui perlomeno imprecisa. Gli individui sussunti sotto il concetto originale vengono qui infatti *interpretati* come individui appartenenti a una certa struttura simbolica e le modalità di questa operazione di interpretazione non sono per nulla contenute in tale concetto. La trasposizione in un oggetto comporta qui anche una trasposizione da un mondo a un altro. Parlerò a questo proposito di oggettivazione *esterna*.

Il confronto fra i due tipi di oggettivazione mostra una differenza importante fra i due casi che non è altro che una conseguenza della loro distinta caratterizzazione. Mentre nel primo caso il processo di oggettivazione conduce direttamente da un concetto a un oggetto non concettuale, nel secondo vi è la necessità di un intermedio che è a sua volta un concetto, il quale sussume sotto di sé oggetti appartenenti all'universo simbolico in cui il concetto originario è trasposto e che anzi non è che una trasposizione ancora concettuale di questo nel nuovo universo. Nel caso del mio precedente esempio si potrà dire infatti che il concetto originario è trasposto nel *concetto* di poligono che, a sua volta, è oggettivato nell'oggetto geometrico.[41] Il passaggio dal concetto intermedio all'oggetto matematico è allora una oggettivazione interna. Potremmo allora dire che una oggettivazione esterna contiene una oggettivazione interna.

La possibilità di una oggettivazione incompleta mette in evidenza un'ulteriore modalità del rapporto fra concetto e oggetto matematico. Nel caso in cui l'oggetto non sia costituito che dalla trasposizione di alcuni dei ca-

[41] Se qualcuno volesse negare questa distinzione fra il concetto di poligono e l'oggetto non concettuale corrispondente, gli chiederei di riflettere sulla dimostrazione del teorema che afferma che un poligono irregolare *qualsiasi* è scomponibile in regioni triangolari. Disegnata una figura polinomiale qualsiasi si traccino dei segmenti che uniscono ognuno dei vertici a uno dei due vertici che, seguendo il contorno della figura, risultano separati da questo dall'interposizione di un solo vertice. Se questa operazione non permette di giungere alla partizione desiderata si applichi ancora la stessa procedura alla regione di piano interna al poligono che non ha forma triangolare e si continui così fino al raggiungimento dell'esito voluto. Si vede qui che il concetto di poligono ha suggerito una regola esplicita che permette di operare su un oggetto qualsiasi che è considerato *solo* per le caratteristiche che lo rendono un particolare poligono (è chiaro che qui ci si limita a considerare, come nel linguaggio usuale, figure poligonali omeomorfe al disco). L'individuazione di una simile procedura richiede certamente una riflessione, così come non è affatto meccanico rendersi conto che questa sfrutta solo i caratteri essenziali dell'oggetto a cui essa è volta a volta applicata (a meno che non si disponga di un ulteriore traduzione in un linguaggio formale sufficientemente potente, come quello della topologia algebrica), ma una volta che l'operazione è stata codificata, essa potrà essere applicata a ogni poligono senza *alcun* riferimento al concetto di poligono.

ratteri descritti dalla determinazione del concetto si può essere in una situazione (analoga in questo alla situazione in cui ci si trova prima di realizzare un'oggetivazione interna) in cui non si dispone della possibilità di discriminare il nuovo oggetto relativamente a altri oggetti dello stesso dominio e in cui non si sappia, quindi, null'altro se non che a questo possono applicarsi alcune regole esplicite, le quali tuttavia si applicano *anche* a rappresentanti di oggetti non corrispondenti al concetto in questione. Ciò nonostante un matematico può voler determinare alcuni ulteriori caratteri di quell'oggetto o utilizzarlo nel corso delle sue derivazioni e può per questo servirsi di alcuni suggerimenti intuitivi forniti dal concetto. Un esempio assai semplice (che ritroveremo nei successivi capitoli della presente dissertazione) è quello del concetto di *numero*[42] infinitamente piccolo. Se oggi conosciamo più d'una oggettivazione completa di questo concetto, questo non era certo il caso di un matematico come Leibniz, il quale indicando con ω un numero di tal genere, si permetteva procedure del tipo seguente:

$$(x + \omega)^2 = x^2 + 2x\omega + \omega^2 = x^2 + 2x\omega$$

in cui solo il primo passaggio è concesso dalle regole esplicite con cui si può operare sui numeri, mentre il secondo è semplicemente suggerito dal carattere infinitesimale del questo numero (e è strettamente contraddittorio con le regole accettate). In tal caso si assiste a quello che chiamerei un *prolungamento* del concetto nel mondo degli oggetti matematici che in verità è stato assai spesso - come nel caso in questione - assai fruttuoso.

Un'ultima modalità del rapporto fra un concetto e un oggetto matematico a cui vorrei fare qui cenno è quella di un rapporto di associazione per mezzo di una deoggettivazione. Si tratta del caso in cui un oggetto simbolico prodotto da un operare matematico su certi oggetti si rileva tale da meritare una caratterizzazione autonoma, la quale non può che passare dalla determinazione di un nuovo concetto. Un esempio potrebbe essere quello del concetto di numero immaginario, sorto essenzialmente come caratterizzazione di una possibile combinazione simbolica, prodotta dall'applicazione di certe operazioni, nel contesto delle ricerche sulla soluzione di equazioni algebriche di terzo e quarto grado.

Dagli esempi precedenti risulterà chiaro che tanto un'oggettivazione interna che un'oggettivazione esterna può dar luogo (e anzi nella maggior parte dei casi *dà luogo*) a un oggetto che è esemplificato da altri oggetti. Per quanto questa conclusione possa apparire ostica, essa discende da una parte dalla convinzione che un concetto debba essere inteso come il contenuto di un pensiero e quindi distinto dal simbolo che lo nomina e dall'altra da quel carattere tipico della matematica che Kant ha assai chiaramente messo in luce nel suo saggio sulla "distinzione fra i principi della teologia naturale e

[42]Per riportare correttamente il contesto storico a cui l'esempio si riferisce si dovrebbe dire: "grandezza". L'uso del termine "numero" mi permette tuttavia qui di evitare ulteriori precisazioni del tutto inessenziali ai fini della discussione di cui è ora questione.

della morale": il suo essere un operare sul "generale in concreto".[43] Il fatto che l'oggetto `funzione´ possa essere esemplificato dall'oggetto `funzione polinomiale´ e questo dall'oggetto `funzione polinomiale di secondo grado´ e così via non impedisce che vi siano regole atte a operare direttamente su funzioni generiche, così come si può operare su triangoli generici non considerando della figura particolare che si ha di fronte che i caratteri essenziali di un triangolo. Questo significa che un oggetto matematico debba *sussumere* sotto di sé altri oggetti? Questa conclusione mi pare francamente azzardata. Dirò piuttosto che è il *concetto* di funzione a sussumere l'oggetto `funzione polinomiale´ sotto di sé, così come è il *concetto* di `funzione polinomiale´ a sussumere l'oggetto `funzione polinomiale di secondo grado´ sotto di sé.[44] Naturalmente questa catena di sussunzioni corrisponde a una catena di relazioni di inclusione fra i concetti. L'oggetto x è sussunto sotto il concetto y qualora esso sia un'oggettivazione interna di un concetto che è incluso nel concetto y. Questa è una banale conseguenza dell'idea secondo la quale la rete relazionale degli oggetti matematici è una traduzione di una rete relazionale fra concetti. Il termine "traduzione" deve tuttavia essere inteso qui in senso non meccanico. L'adeguatezza di una traduzione non è d'altra parte garantita che dalla stessa intuizione che la prospetta. Il caso precedente non è così che un caso ideale e situazioni nelle quali si possa dimostrare (secondo le regole accettate) che la relazione di inclusione fra due concetti non corrisponde per nulla a una relazione di esemplificazione fra i due oggetti associati sono tutt'altro che rari. L'esempio più classico di una tale situazione è quello della *scoperta* della non differenziabilità globale di alcune funzioni continue: il concetto di funzione continua che per lungo tempo era stato ritenuto estensionalmente equivalente al concetto di funzione differenziabile era stato associato a un oggetto che si dimostrava non equivalente all'oggetto che era stato associato al concetto di funzione differenziabile. Ciò non toglie tuttavia che l'oggettivazione permette la sussunzione di certi oggetti sotto un concetto associato a un oggetto matematico (e non sotto altri oggetti). Un tale concetto non può quindi essere inteso come puro. Nel caso in cui l'associazione sia interna questa sussunzione è per così dire *diretta* e dipende dalla stessa determinazione del concetto (l'oggettivazione non fa che determinare in modo preciso l'insieme degli oggetti che vengono a essere sussunti sotto il concetto). Nel caso in cui l'oggettivazione sia invece esterna, la sussunzione è *indiretta* e la sua stessa possibilità dipende da un'interpretazione, la quale è così responsabile della trasformazione di un concetto puro in un concetto non puro.

Così come gli oggetti empirici, anche gli oggetti matematici possono infine, in certi asserti, costituire, in quanto tali, il significato di alcuni termini: un asserto come "la funzione $y = \sin x$ può essere espressa per mezzo di

---

[43]Cfr. Kant (1764), pp. 225.

[44]Ciò non è per nulla contraddittorio con quanto ho affermato in precedenza. Il fatto che il concetto di funzione sussuma sotto di sé l'oggetto `funzione polinomiale´ non implica infatti che esso sussuma sotto di sé anche l'oggetto `funzione´ che è piuttosto associato a questo per mezzo di una oggettivazione interna.

esponenziali immaginari" non esprime che il fatto che le regole accettate relativamente a un certo universo simbolico permettono di passare dalla stringa $y = \sin x$ alla stringa[45] $y = \dfrac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$, previa il semplice riconoscimento delle condizioni in cui esse possono (e devono) venir applicate.[46]

I. 1. o. *Concetti empirici / concetti matematici*

La qualificazione di ogni concetto come un oggetto filosofico non suggerisce affatto di astenersi da ogni classificazione dei concetti in base agli oggetti cui essi risultano connessi. Abbiamo già detto dei concetti puri. Fra i concetti non puri, diremo empirici quelli che sussumono sotto di sé degli oggetti empirici e matematici quelli che posseggono una traduzione simbolica in termini di oggetti matematici o - pur non essendo stati (completamente) oggettivati - sussumo sotto si sé degli oggetti matematici. A seconda se l'oggettivazione sia interna o esterna o la sussunzione sia diretta o indiretta,[47] il concetto matematico può poi essere a sua volta detto interno o esterno. Mentre è chiaro che un concetto matematico interno é *per sua natura* non puro, ciò non vale per un concetto matematico esterno che lo è piuttosto grazie a un'interpretazione che lo rende tale. L'atto dell'interpretazione corrisponde d'altra parte all'edificazione o almeno alla scelta di una struttura relazionale in cui il concetto possa venir oggettivato. Questa non può quindi aver luogo senza che il concetto cessi di essere esterno per divenire interno. Un concetto matematico esterno non è quindi altro che un concetto che è stato tradotto in un concetto matematico interno.

La mia distinzione fra concetti puri, concetti empirici e concetti matematici può forse non apparire troppo differente da quella crociana fra con-

---

[45]Questa situazione può forse far pensare che la mia descrizione del concetto come la ragione dell'uso di un termine sia, in senso stretto, inaccettabile. Le regole esplicite di manipolazione degli oggetti matematici permettono infatti in molti casi di produrre stringhe simboliche composte da un certo insieme di termini per mezzo di un semplice operare pratico. Per respingere questa obiezione è tuttavia sufficiente osservare che le regole in questione sono il prodotto stesso di un'interpretazione del concetto e che questa interpretazione non può dar luogo a un'oggettivazione che per mezzo della presentazione di una o più regole di sostituzione. Se d'altra parte si volesse insistere sulla possibilità che un concetto sorga solo *dopo* che un certo operare sugli oggetti ha prodotto certe invarianze simboliche, si risponderà che è *solo* la nascita del concetto che trasforma tali invarianze in un termine associato a un concetto.

[46]Che l'effettiva realizzazione di questo passaggio richieda una certa abilità non è qui rilevante. Il punto è che la sua possibilità sia garantita dalle regole in modo che l'asserto possa essere inteso come esprimente questa possibilità che è, in quanto tale, del tutto indipendente dai concetti che sono stati oggettivati tanto nelle regole quanto nei simboli funzionali.

[47]Una sussunzione potrebbe dirsi "diretta" solo qualora la determinazione del concetto indica espressamente il riferimento a una certa classe di oggetti matematici (come nel caso del concetto di *numero* infinitamente piccolo); altrimenti potrebbe dirsi indiretta.

cetti e pseudoconcetti del primo e del secondo tipo. Essa[48] non si fonda tuttavia, come quella, sul potere rappresentativo dei concetti, ma sui caratteri dei suoi correlati oggettuali. E' per questo che tale distinzione non sfocia nell'opposizione fra giudizio conoscitivo e giudizio pratico, ma piuttosto in quella fra *operare* filosofico e *operare* pratico, il quale non è un operare su concetti non puri, ma un operare su oggetti. E' proprio a una simile opposizione che sembra riferirsi Hegel nel criticare l'idea di Spinoza di un'etica *ordine geometrico demonstrata:*

> Parrebbe dunque - egli scrive - che il metodo dimostrativo matematico di Spinoza sia unicamente un difetto della forma esteriore: invece è l'errore fondamentale di tutta la sua concezione. Questo metodo misconosce affatto la natura del sapere filosofico e l'oggetto di esso; infatti la conoscenza e il metodo della matematica sono meramente formali, quindi affatto disadatti alla filosofia. La conoscenza matematica applica la dimostrazione all'oggetto esistente in quanto tale, non in quanto concepito; le manca affatto il concetto, mentre il contenuto della filosofia è il concetto e il concepito.[49]

Ciò che Hegel chiama qui "matematica"[50] non sembra infatti identificabile con la concreta attività dei matematici, ma soltanto con l'aspetto operativo di tale attività e corrisponde quindi a ciò che io chiamo piuttosto "operare matematico". Compiuta tale sostituzione terminologica, il precedente brano di Hegel può essere letto come un'esposizione succinta della tesi che ho cercato fin qui di difendere.[51]

I. 1. π. *Demarcazione*

Il contesto della mia distinzione fra concetti puri, concetti empirici e concetti matematici renderà d'altra parte chiaro che i concetti empirici e matematici non vanno in nessun modo intesi come tali in quanto *non* filosofici. Ciò rende impossibile continuare a sostenere la possibilità di una demarcazione fra filosofia e scienza o, più in particolare, fra filosofia, matematica e scienze empiriche. Lungi dal pensare che questo sia un esito negativo del mio modo di intendere le categorie fondamentali di un atto conoscitivo, credo che si manifesti qui una caratteristica essenziale di tale atto che a me pare inevitabilmente unitario.

Ciò non significa ovviamente dover rinunciare alla comodità espositiva garantita da una distinzione storicamente accettata e codificata estensional-

---

[48] Vorrei ripetere che nel presentare questa distinzione non ho alcuna intenzione di sostenere che essa esaurisca tutte le possibilità.

[49] Cfr. Hegel (1833-36), trad. it., vol. III, 2, p. 137.

[50] Cfr. anche, a esempio, Hegel (1807), 3135 - 3427.

[51] Naturalmente la differenza fra il punto di vista di Hegel e quello difeso nel presente capitolo non è solo terminologica: essa consiste in una diversa interpretazione dell'attività del matematico, di cui "l'operare matematico" non è per me che un aspetto, caratteristico, ma per sé incapace di dare luogo a una scienza. Non si tratta quindi di contrapporre "matematica" e "filosofia", ma di cercare la filosofia nell'attività matematica. Questo è d'altra parte l'argomento dei prossimi paragrafi.

mente in modo abbastanza preciso. Si tratta piuttosto di mettere in dubbio che tale distinzione abbia un contenuto essenziale di carattere formale, che essa verta su differenti modalità conoscitive, in una parola che sia una distinzione logica.

Ciò non significa neppure che non possano venir individuate delle distinzioni logiche il cui contenuto possa in qualche modo imparentarsi con quello che una tale demarcazione ha storicamente perseguito. La precedente classificazione degli oggetti in oggetti filosofici, oggetti empirici e oggetti matematici è ovviamente una di queste, così come lo è la distinzione correlata fra operare filosofico e agire pratico. Se tuttavia si volesse trarre da qui una distinzione disciplinare ci si troverebbe nella necessità di negare alla matematica ogni contenuto, riducendola a un gioco simbolico e si sarebbe nel grande imbarazzo di non trovare alcun operare che potesse nel contempo dirsi empirico e scientifico.

E' certo possibile dire come si intendono la filosofia, la scienza empirica o la matematica, ma simili determinazioni non possono in nessun modo separare, fare di uno scienziato qualcuno che non è filosofo, o di un filosofo qualcuno che, continuando a essere tale, non possa trovarsi nella necessità di divenire scienziato.

Che cosa intenda per filosofia ho già detto. Qui potrei aggiungere che la matematica è insieme l'attività di produrre concetti matematici interni, di interpretare e tradurre concetti matematici esterni, di costruire oggetti matematici, di organizzarli in strutture relazionali compatte e di reinterpretare in termini di concetti gli esiti dell'operare formale secondo le regole esplicite di cui si è detto, così come la scienza empirica è insieme l'attività di produrre concetti empirici, di costruire modelli regolati del mondo che esiste indipendentemente da noi[52] (utilizzando a questo scopo - se necessario - tanto i concetti che gli oggetti matematici), di valutare e discutere l'adeguatezza descrittiva di questi modelli, di trarre da essi previsioni e di controllarle sperimentalmente, di avanzare nuove congetture al fine di accrescere le capacità esplicative e descrittive della realtà. Ma questo non è ancora tutto. Nessun concetto verrà mai seriamente preso in conto da un matematico semplicemente in considerazione della sua traducibilità simbolica; è solo il potere rappresentativo - tanto di una modalità del pensiero che di una connessione reale - o la speranza di una sua correlazione possibile con strutture relazionali già date in cui si presentano problemi aperti che rendono un concetto matematico degno di un qualche interesse. Allo stesso modo non è semplicemente la capacità descrittiva di un frammento di realtà ciò che caratterizza un buon modello scientifico, ma piuttosto le possibilità di previsioni su larga scala che a esso sono legate e il potere esplicativo che esso manifesta, due cose che assai spesso sembrano indissolubilmente legate ai suoi rapporti

---

[52]Per quanto l'ipotesi realista non sembri possedere definitivi argomenti a suo favore, è difficile immaginare una situazione nella quale l'esistenza esterna sia ridotta a zero. Anche l'ipotesi di Putnam del cervello in provetta [cfr. Putnam (1981)] postula in fondo l'esistenza indipendente (oltre che della provetta e del liquido nutritivo anche) delle scariche elettriche che vengono inviate a tale cervello.

con un insieme di teorie matematiche che forniscono a questo non solo uno strumentario deduttivo, ma l'insieme stesso dei concetti su cui esso lavora.

I. 1. ρ. *Popper, Lakatos e Granger*

Per quanto una tale ricchezza dell'attività scientifica e matematica possa difficilmente venir contestata, si potrebbe cercare di individuare comunque una buona demarcazione fondata su una limitazione del campo della filosofia a qualche cosa che non sia né scienza empirica né matematica. In fondo si potrebbe sostenere che sia la mia estensione della filosofia a un operare concettuale a essere arbitraria e inaccettabile. Confesso di non avere alcun argomento positivo contro una tale contestazione, ma credo anche che nessuna delle demarcazioni di questo tipo che sono state fino a ora proposte sia più soddisfacente della mia ammissione che un confine non è tracciabile in termini logici. A sostegno di questa affermazione considererò tre differenti proposte: quella di Popper, quella di Lakatos e quella recentissima di Granger.

L'idea di Popper[53] è, come è ben noto, quella di utilizzare un criterio di falsificazione come criterio di demarcazione fra scienza e metafisica. Una prima versione del criterio potrebbe essere la seguente: un asserto è scientifico se e solo se esso è (logicamente) falsificabile da asserti singolari; altrimenti esso è metafisico. Naturalmente una tale formulazione non è sufficiente: in base a essa un asserto come: "tutti gli angeli hanno la coda" risulterebbe infatti scientifico, mentre risulterebbe metafisico un asserto come: "sul primo foglio del mio quaderno vi è una macchia rossa". Per evitare la seconda conclusione occorre considerare l'asserto in questione come singolare, traducendolo nei termini seguenti: "il primo foglio del mio quaderno è macchiato di rosso" e assumere che ogni asserto singolare spazio-temporalmente determinato sia un asserto scientifico. Ma la semplice correzione del criterio che assumesse questa precisazione, e richiedesse inoltre che l'asserto singolare falsificante fosse spazio-temporalmente determinato, non risolverebbe ancora tutte le difficoltà. Un asserto come: "il mio angelo custode non ha la coda" non solo sarebbe infatti scientifico, ma renderebbe scientifico, anche nel nuovo caso, l'asserto universale che costituisce il primo controesempio alla prima versione criterio. Non vedo altro modo di uscire dalle ambascie che non sia quello di limitare il campo degli individui e dei predicati che possano occorrere in un asserto scientifico, richiedendo la possibilità di una verifica empirica dell'asserto singolare falsificante. Le difficoltà a esprimere questa precisazione in termini puramente linguistici sono note,[54] e di fronte a una simile

[53]Cfr. in particolare, Popper (1934) e (1959), ma anche (1983) e (1979).

[54]In termini linguistici questa condizione non può infatti tradursi che nella richiesta che in un asserto scientifico non occorrano che predicati empirici. Per le difficoltà classicamente contrapposte alla possibilità di determinare un criterio di distinzione fra predicati empirici e non empiriche cfr., fra gli altri: Carnap (1936-37) e (1956), Hempel (1950) e (per una discussione dei tentativi neopositivisti di far fronte a tale difficoltà) Gylmour (1980). Non mi pare che queste difficoltà abbiano un qualche rapporto con le

obiezione lo stesso Popper risponderebbe probabilmente che il suo criterio "applies to *theoretical systems* rather than to statements picked out from the context of a theoretical system".[55] Perché questa contro-obiezione (in sé altrettanto banale quanto l'obiezione stessa) sia cogente, occorre tuttavia saper dire ciò che deve intendersi come un "sistema teorico" legittimamente scientifico. Una dottrina teologica delle apparizioni divine costituisce infatti un contesto logicamente del tutto equivalente a quello fornito da una qualsiasi "teoria scientifica" (a meno che non si voglia valutare la legittimità del contesto in base alla falsificabilità degli asserti che lo compongono, ciò che riporterebbe al problema di partenza). Se queste considerazioni non implicano certamente la nullità del criterio popperiano - che, inteso con quel *grano salis* che manca a molti attuali filosofi, infaticabili produttori di controesempi, resta certamente perspicuo - esse mostrano che è solo a una classificazione di asserti che questo può ragionevolmente mirare. Il passaggio da esso a una demarcazione disciplinare fra scienza e *filosofia*, la quale continui a essere una demarcazione logica sembra assai difficile e io credo del tutto impossibile.[56]

---

mie precedenti distinzioni. Non ho infatti nessuna pretesa che queste siano distinzioni tali da permettere una classificazioni di asserti (distinzioni puramente linguistiche); esse non fanno che classificare *a priori* modalità dell'atto conoscitivo, il quale pare a me un atto essenzialmente concettuale. L'indubbio interesse della logica formale (che a me pare una delle più importanti acquisizioni della matematica di quest'ultimo secolo) e della critica formale del linguaggio non possono nascondere il fatto che l'uomo conosce utilizzando concetti, non formule simboliche o algoritmi, e che una buona teoria delle modalità di questo conoscere (quella che dovrebbe ancora chiamarsi logica, in senso stretto) non può quindi che correre tutti i rischi di imprecisione corsi dalla conoscenza stessa.

[55]Cfr. Popper (1983), p. 178.

[56]Per ciò che riguarda la non corrispondenza fra la nozione popperiana di metafisica e quella di filosofia di cui è qui questione basti osservare che il criterio di Popper non ammette terze possibilità (egli stesso lo interpreta d'altra parte come "a criterion of demarcation between empirical science on the one hand and pure mathematics, logic, metaphysics, and pseudo-science on the other" [*ivi*, p. 175]) e che quindi il solo modo per garantire, in base a esso, la possibilità di una filosofia che non sia né scienza né metafisica é quello di pensare l'ambito di una filosofia genuina come quello di una meta-disciplina. Qui sorgono tuttavia due questioni differenti. La prima è che una buona demarcazione dovrebbe garantire la distinzione fra scienza e filosofia relativamente a una data impresa conoscitiva; dire che la riflessione sulla scienza non è scienza resta fare un'affermazione vuota fino a che non si sappia dire che cosa sia la scienza. (Non vale naturalmente qui la semplice scappatoia consistente nell'affermare che è filosofia ogni riflessione che promuove delle meta-riflessioni essenzialmente analoghe a sé stessa; per capirlo basta domandarsi in che senso si debba qui intendere il termine "analoghe".) La seconda questione deriva dalla semplice osservazione che anche a un meta-livello potrebbe essere posta la questione di una distinzione fra una procedura che soddisfa il criterio e una procedura che non lo soddisfa o almeno fra una procedura legittima e una procedura non legittima. Popper ha affrontato questo problema affermando che una buona filosofia della scienza deve produrre modelli falsificabili della dinamica scientifica relativamente a un insieme di falsificatori potenziali costituito dagli asserti di base della storia della scienza. Non capisco bene come si possa dire che cosa è la storia della scienza fino a che non si sappia dire con precisione che cosa è la scienza; e non capisco neppure come un tale criterio possa funzionare fino a che non si possano scartare tutti gli asserti singolari che descrivono procedure "pseudoscientifiche". Ma se questo fosse veramente il caso, o se comunque un altro e migliore criterio

Una strada potrebbe forse essere quella di trasporre il criterio logico popperiano in una norma etica. Fondandosi su alcune affermazioni dello stesso Popper, Lakatos ha sostenuto che tale criterio debba essere inteso nei termini seguenti:

> Una teoria è «scientifica» se si è disposti a specificare in anticipo un esperimento (o un'osservazione) cruciale che sia in grado di falsificarla, ed è pseudoscientifica se ci si rifiuta di specificare un simile «falsificatore potenziale».[57]

Ma qui non è certo la scienza a essere distinta dalla pseudoscienza; la demarcazione vige al più fra un atteggiamento scientifico e un atteggiamento dogmatico. Se un teologo ammettesse che l'esistenza di Dio sarebbe contraddetta dall'osservazione di un impatto cosmico che spegnesse (anche solo momentaneamente) il sole, non per questo la sua dottrina si trasformerebbe in una genuina "teoria scientifica".

In una situazione abbastanza simile ci si troverebbe anche se si volesse caratterizzare l'impresa scientifica per mezzo del rifiuto di ogni "mossa *ad hoc*". La nozione di mossa *ad hoc* è d'altra parte stata originariamente proposta da Popper che l'ha introdotta per caratterizzare la strategia consistente nel rispondere alla falsificazione di una teoria, tramite la sua sostituzione con una nuova teoria con minor contenuto empirico e/o senza corroborazione addizionale.[58]

Un tal modo di porre il problema può tuttavia condurre a esiti assai interessanti una volta che sia accettato di "generalizzare" il problema della demarcazione trasformandolo nel problema della valutazione delle produzioni scientifiche. Proprio questa è la proposta di Lakatos[59] che ha sostenuto che il problema principale di una filosofia della scienza è quello di discriminare fra "programmi di ricerca" progressivi e regressivi. Non entrerò qui nel merito del criterio proposto da Lakatos (che, detto per inciso, è tutt'altro che esente da difficoltà interne). Ciò che mi interessa sottolineare è che da un simile punto di vista la metafisica trova esplicito diritto di cittadinanza all'interno della scienza. Un asserto è per Lakatos metafisico quando un decreto metodologico lo dichiara inconfutabile e lo introduce per ciò stesso nell' "*hard core*" di un programma scientifico, il quale non è, in ultima istanza, che un programma di spiegazione dei fenomeni fondato sulle assunzioni metafisiche del nucleo.

Se il carattere sofisticato della metodologia lakatosiana contiene, oltre a indubbi elementi di fascino, anche il vizio tipico di un'impostazione che sembra fare della filosofia della scienza un'arte della produzione di modelli tanto elaborati, quanto ristretti nella loro capacità di render conto dei carattere es-

---

potesse venir fornito, ciò non comporterebbe automaticamente la possibilità di una "filosofia scientifica"? [Assai interessanti mi paiono, a questo proposito, le poche osservazioni contenute in un frammento pubblicato in Popper (1979), pp. 405-8.]

[57]Cfr. Lakatos (1978), vol. I, p. 6.

[58]Cfr. Popper (1934) e (1959), cap. IV e (1963), p. 418.

[59]Cfr. in particolare il noto saggio sulla "metodologia dei programmi di ricerca scientifici" [ora in Lakatos (1978), vol. I, pp. 11-130].

senzialmente libero dell'operare scientifico, l'affermazione che un agire metafisico possa (e debba) venir rintracciato entro i confini stessi di ciò che è stato storicamente inteso come *scienza*, mi pare uno dei principali contributi della riflessione epistemologica più recente. Purtroppo la nozione di metafisica che risulta dalla metodologia di Lakatos è assai povera e in qualche punto confusa. In particolare non è affatto chiaro se un programma scientifico sia un insieme di ipotesi teoriche (tradotte in altrettanti asserti), il cui nucleo è costituito da ciò che resta in esse di invariato dopo ogni correzione o se questo è piuttosto un insieme di regole euristiche che si traducono in certe ipotesi scientifiche, le quali corrispondono (per tramite di queste stesse regole euristiche) a una metafisica, intesa come immagine del mondo (o almeno di una parte di esso).

Il punto è che Lakatos non ha mai inteso indagare lo statuto del "decreto metodologico" che istituisce un'ipotesi metafisica, limitandosi all'uso di un linguaggio men che metaforico. Dietro questa rinuncia si intravede un altro vizio della tradizione epistemologica di origine popperiana e/o neopositivista che ha variamente creduto di poter arrestarsi (a livelli differenti) di fronte alla semplice dichiarazione del carattere convenzionale di certe presupposizioni. Questa rinuncia resta certo indispensabile se si intende garantire alle proprie riflessioni quella sorta di perspicuità formale tipica dei modelli che in questa tradizione sono stati presentati sotto la forma di ipotesi epistemologiche. Essa è tuttavia inaccettabile se si intende la filosofia della scienza come un'indagine relativa alla natura e ai caratteri dell'impresa conoscitiva. Non solo non è allora più possibile rinunciare a indagare il processo di formazione delle presupposizioni convenzionali, ma è anche necessario spostare la propria riflessione dal terreno dell'analisi linguistica a quello delle strutture concettuali su cui prende corpo una teoria scientifica. E' a questo livello che il problema della demarcazione perde il suo interesse e che si presentano al contrario come urgenti tanto il problema di render ragione di quella indissolubile relazione fra matematica e comprensione della realtà che si realizza nella quasi totalità delle scienze fisiche,[60] che quello di mettere luogo a una adeguata griglia categoriale entro la quale si possano rappresentare le principali modalità del conoscere: due problemi che non a caso sono stati spesso eliminati insieme e che sono comunque del tutto estranei tanto al falsificazionismo popperiano che alla metodologia lakatosiana dei programmi di ricerca.[61]

---

[60]Ecco come già nel 1935 Albert Lautman aveva deciso di cominciare la sua comunicazione al congresso internazionale di "filosofia scientifica" [ora in Lautman (1977), pp. 281-85]:

> Les logiciens de l'École de Vienne prétendent que l'étude formelle du language scientifique doit être le seul objet de la philosophie des sciences. C'est là une thèse difficile à admetre pour ceux des philosophes qui considèrent comme leur tâche essentielle d'établir une théorie cohérente des rapports de la logique et du réel. Il y a un réel physique et le miracle à expliquer, c'est qu'il soit besoin des théories mathématiques les plus dévéloppées pour l'interpréter.

[61]Un discorso diverso dovrebbe in realtà essere fatto (e in parte verrà fatto nel prossimo capitolo I.2.) a proposito della filosofia della matematica di Imre Lakatos, che questi ha comunque sempre tenuto distinta dalla sua filosofia delle scienze empiriche.

Di tutt'altro genere è il tentativo di Granger che, partendo dalla convinzione che "aucun des caractères les plus nettement marqués et les plus disctinctifs des [...] sciences ne se rencontrât dans les œuvres philosophiques"[62], ha comunque cercato di caratterizzare la filosofia come una conoscenza. Secondo Granger la distinzione fra scienza e filosofia verte sui tre punti seguenti:[63]

> i) le sciences visent à *construire des modèles abstraits des phénomènes.* Elles les représentent dans des «espaces» de plus en plus éloignés du vécu, comme des structures abstraites sur les éléments desquelles il est possible de «calculer». On entend bien que ce mot de *calculer* n'implique ici rien qui concernerait nécessairement le nombre ou la grandeur, mais évoque seulement l'idée d'opérations explicitement et univoquement définies et réglées. [...] La philosophie, au contraire, n'est jamais parvenue à proposer de véritables modèles des phénomènes, pour la bonne raison que tel ne peut être son dessein. Chaque fois que la philosophie, s'aveuglant lui-même sur son propre ouvrage, a volu donner une représentation de l'expérience par un système abstrait de concepts où se déploierait un «calcul», cet aspect de son entreprise s'est soldé par un échec [...].
> ii) Aussi bien, la philosophie, contrairement aux diverses sciences, ne prétend-elle pas *expliquer des faits.* Les sciences définissent les faits dont elles traitent, avec plus ou moins de précision, mais en tout cas toujours de façon telle qu'il soit possible de mettre en doute, d'infirmer ou de confirmer ce qu'elles en affirment, au moyen d'operations soumises à un protocole déterminé de règles et d'usages. [...] Qu'un philosophe parvienne à élucider à sa manière cette notion de «fait», il n'aura pourtant ainsi déterminé aucun fait qu'il pourrait alors explorer à la façon du savant.
> iii) Ainsi peut-on dire que la philosophie n'a pas d'*objets*, pour peu que l'on ait souci de donner à ce mot une portée raisonnablement précise, quoique encore assez large pour s'appliquer à la fois aux objets du sens commun et aux objets de la science. [...] [L'] intention plus cachée, qui habite, à ce que nous croyons, toute philosophie, vise à organiser non des faits mais des *significations*.

Per quanto la nozione di oggetto cui Granger sembra pensare resti essenzialmente differente da quella che sto cercando qui di determinare - e pare piuttosto coincidere con la mia nozione di oggetto non concettuale - mi è difficile immaginare un brano che più di questo si avvicini, nella "sostanza", a quello che io penso a proposito della natura della scienza e della filosofia. Nonostante le intenzioni del suo autore, esso non mi pare tuttavia fornire alcuna demarcazione e senz'altro nessuna "demarcazione logica" fra differenti modalità conoscitive. Ciò di cui è questione è piuttosto una distinzione in base agli scopi, e, direi di più, in base agli "scopi ravvicinati" dell'impresa. E' in questo senso che io affermo tutto il mio accordo. Si può certo negare che

[62]Cfr. Granger (1988), p. 12. Non è certo su questo punto che il mio modo di vedere le cose differisce da quello di Granger, ammesso che egli si riferisca qui alle opere storicamente dette filosofiche. Il mio punto è che le stesse modalità del pensiero che agiscono in tali opere agiscono *necessariamente* nelle opere storicamente dette scientifiche. D'altra parte è anche vero che in almeno alcune opere storicamente dette filosofiche agiscano modalità che saremmo invece portati a classificare come scientifiche. Chi volesse un bell'esempio di un'opera che ponesse (anche da un punto di vista puramente pragmatico) un difficile problema di classificazione potrebbe d'altra parte leggere l'ultimo volume di René Thom [cfr. Thom (1988)]: matematico, filosofo, fisico o biologo?
[63]Cfr. Granger (1988), pp. 12-4.

nessuno che sia stato storicamente chiamato filosofo abbia mai inteso costruire modelli fenomenici o spiegare connessioni fattuali,[64] ma non è certo per il suo potere descrittivo di ciò che é stato inteso come filosofia (e da chi, poi?) che la proposta di Granger deve essere valutata. Che la filosofia non debba tendere né a costruire "modelli astratti dei fenomeni", né a "spiegare dei fatti" sembra a me un'idea che deve essere accettata. Non vedo la possibilità né di modelli né di esplicazioni fattuali[65] che possano venir presentati in assenza di quelli che io chiamo oggetti non concettuali, e proprio questa assenza pare a me, come a Granger, caratterizzare l'operare filosofico. Ma, come sarà mai possibile "costruire modelli" e "spiegare fatti" senza "organizzare dei significati"? e perché mai si dovrebbe cercare di "organizzare significati" se non allo scopo di "spiegare" (capire, conoscere) qualcosa? e, in ultima istanza, che cosa mai si dovrebbe voler spiegare se non dei "fatti", dei "fenomeni"? Certo è un'esistenza che la filosofia cerca in generale di capire, e un'esistenza può certo essere un'esistenza concettuale. Ma che cosa è un concetto, quale valore mantiene, se perde potere rappresentativo? e, in ultima istanza, non sono forse i "fatti" che devono essere indagati in una genuina impresa conoscitiva? Aveva ben ragione Marx: "i filosofi non hanno finora che interpretato diversamente il mondo[...]";[66] è una fortuna che, in buona parte, abbiano continuato e continuino a farlo.

I. 1. σ. *Esistenza per me / esistenza per sé*

La principale difficoltà di una teoria della conoscenza che voglia salvaguardare tanto l'aspetto concettuale di questa - il *fatto* che non si conosce se non per mezzo di pensieri - che il carattere non soggettivo delle sue acquisizioni - il *fatto* che la conoscenza si trasmette nel suo contenuto essenziale e che questo riguarda dei mondi che sono esterni al vissuto interiore individuale dei soggetti di questa trasmissione[67] - risiede nel *fatto* che non vi è nessun modo di comunicare un pensiero che non paia in sé stesso *altro* rispetto al pensiero stesso. Questo altro è il linguaggio (o, se si preferisce, un linguaggio).

Da questa difficoltà (che a me pare intrinseca) dipende la principale problematicità di quanto ho fino a qui esposto. Da una parte ho parlato infatti di concetti come ragioni di un uso linguistico, dall'altra ho non solo preteso che un concetto possa possedere una determinazione (che non può che essere linguistica), ma ho anche connesso questa determinazione alla legittimità di

[64] Valga per tutti il poco edificante esempio del materialismo storico e/o dialettico.

[65] Ma è possibile un'esplicazione fattuale che non sia un modello astratto?

[66] Cfr. Marx (1845), XI tesi.

[67] Questi *fatti* possono certo venir contestati e negati in quanto tali. A me pare tuttavia che il problema principale non sia quello di argomentare a favore del loro essere tali (un fatto in generale si mostra, non si tratta che di vederlo), ma quello di fornire una teoria che ne sia una buona esplicazione possibile e che sia nel contempo compatibile con altri fatti, altrettanto evidenti.

un'affermazione di esistenza. Ma una determinazione del concetto di casa richiede l'uso del termine "casa" e questo uso dovrà pur essere regolato da un concetto, dunque un concetto deve poter agire, in origine, prima di essere determinato, ma se agisce, si dovrebbe dire, esiste; quindi, esso esiste prima di venir determinato. Non è questa forse una contraddizione, la quale resta immanente a tutto ciò che ho detto fin qui?

La risposta più semplice - e forse la sola possibile - è che l'esistenza può essere un'*esistenza per me*, senza essere un'*esistenza per sé*.

Mi spiego meglio. Un contenuto di pensiero (o, come qualcuno direbbe, un vissuto di coscienza) può condurmi a un uso di un termine nel contesto di un'esplicazione - e anzi in origine deve necessariamente farlo - prima che tale esplicazione fornisca la determinazione del concetto corrispondente a quel termine. Ora, se questo uso possiede una ragione, essa non può che essere data da quello stesso concetto che *è* in qualche modo *en train* di spiegare sé stesso. E questa ragione non può essere operante che se partecipa a una struttura di relazioni che la legano a altri concetti. L'appartenenza a una tale struttura determina quella che io chiamo *esistenza per me*. In questo senso un concetto è dunque ancora un oggetto, ma un *oggetto per me*. Il completamento della determinazione traspone l'esistenza per me in una *esistenza per sé*. Da quel momento il concetto è un oggetto, in quanto partecipa alla struttura relazionale data dalla sua stessa determinazione: un *oggetto per sé*.

I. 1. τ. *Soggettivismo / oggettivismo*

Affermare la precedente distinzione non corrisponde in nessun modo alla postulazione di una concezione soggettivistica della conoscenza. Il punto di vista soggettivista non sembra tanto distinguersi dal punto di vista oggettivista per il riconoscimento di una dimensione interna al soggetto, quanto piuttosto per l'affermazione di una sorta di impermeabilità di questa dimensione. Questa posizione potrebbe articolarsi in due modi.

In un primo senso un soggettivista non solo non dovrebbe limitarsi a affermare che l'esistenza per me differisce dall'esistenza per sé, ma dovrebbe anche sostenere che un'esistenza per sé *non possa mai interagire* con un'esistenza per me, ovvero che il pensiero, in quanto atto individuale, dovrebbe ridursi a una concatenazione di oggetti per me. In una tale situazione la stessa esistenza per sé non sarebbe null'altro che un'apparenza; una determinazione non sarebbe altro che una trasposizione soggettiva di una relazione interna in un linguaggio standardizzato, la quale non avrebbe nessun carattere differente da un'articolazione di suoni o da una giustapposizioni di simboli, non richiamerebbe null'altro che la stessa esistenza per me che l'ha generata e sarebbe quindi muta per un differente soggetto. L'opacità del linguaggio rispetto al pensiero sarebbe allora totale e una teoria della conoscenza dovrebbe ridursi o a una teoria del procedere meccanico secondo regole (che non si sa bene come possano venir apprese) o a una teoria dell'indicibile.

Ma certo si può essere soggettivisti anche in un senso meno radicale. Per questo occorre tuttavia modificare opportunamente la nozione stessa di esistenza per me. Un concetto, si potrebbe dire, è un oggetto per me ogni volta che partecipa alla determinazione dei miei usi linguistici e è soltanto la comparazione con questi usi (con le loro ragioni) che mi permette di intendere un asserto che utilizza un termine corrispondente a quel dato concetto. Si vede bene che anche in questo caso la nozione di oggetto per sé verrebbe a essere svuotata. Dove mai potrebbe dimorare infatti un concetto in quanto oggetto per sé? La sola risposta sarebbe che esso dimora nel linguaggio stesso, ma si tratterebbe qui di un linguaggio privo di ogni dimensione semantica, ancora una volta di una combinazione di segni. Un tale linguaggio potrebbe essere pensato come una sorta di nastro trasmettitore. Trasmettendo simboli, esso permetterebbe di innescare un processo di riconoscimento interno al soggetto, il quale sarebbe, esso solo, responsabile della comprensione. Un soggettivista di tal genere direbbe allora che il soggetto non interagisce con oggetti per sé se non previa una loro traduzione in concetti intesi come oggetti per me.

La mia distinzione fra oggetto per me e oggetto per sé mantiene tuttavia un senso logico solo se essa non è connessa a una posizione soggettivista. Essa dipende essenzialmente dal fatto che un soggetto può apportare un contenuto originale di pensiero, proponendo nuovi e differenti concetti. L'esposizione di questi concetti richiede il ricorso a determinazioni in cui l'uso dei termini corrispondenti (che possono ben essere dei vecchi termini usati in modo nuovo) non segue una determinazione *già* data. Nel corso della nuova determinazione è tuttavia necessario fare spesso uso di concetti già stabilizzati, che il soggetto intende per la determinazione che essi posseggono indipendentemente da sé. L'esistenza per me si distingue così dall'esistenza per sé in base alla relazione che essa mantiene con la determinazione originaria del concetto corrispondente e non persiste, in quanto tale, che durante l'atto stesso di tale determinazione.

Naturalmente che un soggetto possa pervenire a concetti intesi come oggetti per sé, o che la stessa determinazione possa mai dirsi avvenuta, sono questioni di natura del tutto differente. Qui sono la categorie logiche a essere in gioco in quanto tali, non le modalità della loro interazione nell'atto della conoscenza. Il mio punto è ora semplicemente che per salvare la concezione del conoscere cui ho fatto cenno all'inizio del precedente paragrafo, occorre distinguere fra un atto interno di produzione di nuovi concetti e un atto di correlazione di concetti già dati.

Il mio argomento è così il seguente. Perché si possa intendere la conoscenza come un'impresa che possa dirsi nello stesso tempo concettuale e oggettiva, occorre distinguere fra esistenza per me e esistenza per sé e postulare la capacità del soggetto tanto di accedere a esistenze per sé, che di produrre esistenze per me; ma che la conoscenza sia da intendere in tal modo è qui assunto; *ergo*: occorre assegnare al soggetto entrambe le capacità.

Si tratta allora di indagare il linguaggio come strumento atto a permettere tanto la produzione di determinazioni (il passaggio da oggetti per me a oggetti per sé) che la comunicazioni di esse (la possibilità del soggetto di accedere a concetti intesi come oggetti per sé).

I. 1. υ. *Pensiero e mondo delle idee*

La possibilità del soggetto di accedere a determinazioni già date dipende, come è ovvio, tanto da una capacità di questo che da una proprietà del linguaggio. Il modo più semplice di render conto di questa situazione è quello di postulare l'identità fra il pensiero e l'articolazione di giudizi linguisticamente espressi. Ciò comporta tuttavia altre e più serie difficoltà, la prima delle quali consiste nell'impossibilità che se ne trarrebbe di collocare nel pensiero stesso la giustificazione dei giudizi. Occorrerebbe per questo ricorrere all'intuizione (a sua volta promossa dalla sensibilità interna e esterna) e - ciò che sarebbe meno accettabile - collocare questa al di fuori dal pensiero, il quale dovrebbe venir inteso come una sorta di organizzatore di intuizioni.

La sola strada praticabile sembra allora quella di assegnare al pensiero l'aspetto di un giano bifronte, le cui due facce contrapposte garantiscono tanto la duplicità delle funzioni che la loro unità intrinseca. Pensare è fornire il materiale di un giudizio, la sua ragione, così come passare da questa all'articolazione del giudizio stesso. L'unità intrinseca di queste contrapposte funzioni (che con Kant potremmo qualificare come "intuizione" e "intelletto") dà al pensiero la possibilità di riconoscersi in ogni ulteriore e differente giudizio. Una determinazione può così venir ripensata senza cessare di essere in senso pieno per sé. E essa può venir posta senza che questo significhi che essa non possa essere stata per me. L'immagine che suggerisco è dunque quella di un mondo platonico delle idee - o meglio di più mondi platonici - in continua e perenne estensione. L'oggettività delle idee che popolano questi mondi non deve contraddire la loro origine determinata, il loro essere non solo delle produzioni umane, ma delle produzioni di uomini determinati.

Che le cose *stiano effettivamente* così non posso certo provarlo (in nessun senso di questo termine), né ciò pare debba venir richiesto a un'ipotesi metafisica. Essa ha il solo obbligo di esprimere apertamente se stessa e di corredarsi di una logica opportuna. Il tentativo compiuto nel presente capitolo è proprio quello di far fronte a quest'ultima esigenza.

I. 1. φ. *Asserti / giudizi*

Ma se il pensiero è insieme articolazione e ragione di giudizi e se il giudizio non si esprime che tramite un'asserto, si deve da questo concludere che ogni asserto è esso stesso pensiero o almeno manifestazione di un pensiero?

Se ho finora implicitamente o esplicitamente fatto esclusivamente riferimento a contesti conoscitivi, la questione non è certo banalmente risolvibile dicendo che è proprio la partecipazione a un contesto conoscitivo che fornisce la garanzia di una correlazione costante fra una *performance* linguistica e un pensiero. Da una parte infatti non vedo nessuna possibilità di distinguere un atto conoscitivo se non relativamente alla forma del giudizio e in particolare alla sua correlazione con certe strutture concettuali (l'uso che ho finora fatto dei termini "conoscenza", "conoscitivo", &c. corrisponde d'altra parte alla vaga determinazione che questi termini richiamano usualmente alla mente e non mi pare che una più precisa determinazione possa prescindere dalla soluzione del problema che è qui in esame); dall'altro mi pare che anche asserti che saremmo senz'altro pronti a escludere dall'ambito conoscitivo, come un verso poetico, non possano certo venir considerati come indipendenti da ogni atto di pensiero.

Potremmo certo affermare che un asserto esprime un giudizio se e soltanto se corrisponde a un atto di pensiero; ma anche in tal modo non troveremmo alcuna risposta alla nostra questione e non faremmo che precisare un po' meglio il nostro vocabolario. Per essere ancora più chiari potremmo dire che un un giudizio è ciò che può essere vero o falso[68] e un atto di pensiero è ciò che presiede all'articolazione di un giudizio (senza per questo voler affermare che a ogni atto di pensiero debba corrispondere un giudizio). Per quanto una tale precisazione mi pare debba venir accettata,[69] è altrove che dobbiamo cercare una risposta, perché è altrove che il problema si pone. Esso può d'altra parte venir così formulato: se a ogni giudizio corrisponde un asserto, occorre anche riconoscere che a ogni asserto corrisponda un giudizio? La questione è qui simile, ma non analoga, a quella discussa nel paragrafo I.1.ι.. Se possiamo stabilire le condizioni sotto le quali un asserto (o un insieme di asserti) esprime una determinazione, non possiamo certo pensare che queste condizioni siano le sole che fanno di un asserto l'espressione un giudizio. Se pensiamo inoltre che un concetto sia la ragione di un uso, non possiamo accettare l'idea che certe occorrenze di un termine siano del tutto estranee a tale ragione, cosicché anche quando avessimo accertato che un certo asserto non può mettere capo a una determinazione perché esprime relazioni concettuali non concesse, dovremmo ancora dire in che modo tale asserto mantiene dei rapporti con i concetti associati ai termini che lo compongono. E quest'ultimo problema è del tutto differente da quello di stabilire le condizioni sotto le quali un asserto possa essere una determinazione.

---

[68]Risulterà chiaro che il termine "pensiero" rinvia qui alla facoltà del pensare e non, come per Frege, al "contenuto" di certi enunciati [cfr. Frege (1918), pp. 47 e segg.]. Ciò che io chiamo giudizio è d'altra parte molto vicino a ciò che Frege chiama pensiero.

[69]E' chiaro che in tal modo si presuppone implicitamente che un asserto corrisponde a un atto di pensiero se e solo se esprime qualcosa (diciamo un contenuto) che possa essere vero o falso. Vi sono tuttavia moltissimi asserti (a esempio certi versi poetici) di cui potremmo voler dire che essi corrispondono a un atto di pensiero senza per nulla impegnarci nel sostenere che essi esprimono un contenuto che possa essere vero o falso. Il punto è qui relativo a ciò che si vuole intendere dicendo che un asserto "esprime un contenuto". La difficoltà è infatti effettiva solo se la precedente condizione viene intesa come un modo di affermare che un asserto "x" corrisponde a un atto di pensiero se e solo se affermare che x equivale a affermare qualche cosa che possa essere vero o falso. Non è tuttavia in tal modo che io credo si debba intendere la relazione fra un asserto e un giudizio. Proprio questo è il punto che cercherò di chiarire nel corso del presente paragrafo.

Parlando di asserti, piuttosto che di semplici locuzioni, voglio d'altra parte evitare il rischio di una seconda possibile risposta non cogente. Un linguaggio possiede usualmente regole interne di buona formazione che (a prezzo di una certa fatica) possono venir rese indipendenti dal referente concettuale dei termini (un modo per fare questo è quello di assegnare a ogni termine una data funzione linguistica, ciò che certo non richiede alcun riferimento alla determinazione completa del concetto corrispondente e può, in linea di principio, derivare dalla semplice classificazione delle stringhe simboliche che danno luogo ai termini).[70] Il termine "asserto" deve quindi intendersi come riferito a una collezione di termini che corrisponde a tali regole e che dia luogo a un enunciato che, in base a esse, possa dirsi di forma assertoria.

Queste precisazioni suggeriscono una risposta che da Kant a Husserl è divenuta classica.[71] Essa corrisponde al progetto (qualche volta realizzato, come nel caso di Kant) di una tavola delle categorie atta a fornire una sorta di regole di buona formazione degli asserti (non più semplicemente sintattiche), il cui rispetto possa essere inteso come una condizione necessaria e sufficiente affinché l'asserto in questione sia tale da esprimere un giudizio conoscitivo. Fra gli asserti che non esprimono giudizi conoscitivi si tratterà poi di distinguere, in base a altri criteri (che tuttavia non saranno più dei criteri logici), quelli che corrispondono a altre forme di giudizio da quelli (se ve ne sono) che non corrispondono a alcun giudizio. Anche ammesso che una simile impresa possa effettivamente venir portata a compimento, la risposta cui essa prelude mi parrebbe effettiva solo qualora si coniugasse con una posizione in qualche maniera innatista - la quale non affermasse soltanto un innatismo delle facoltà, ma anche un innatismo delle categorie stesse, dei principali contenuti di tali facoltà. Ma, indipendentemente da questo, vediamo come questa risposta potrebbe funzionare.

Consideriamo l'asserto "la casa lentamente inclina all'essenza" (o se vogliamo essere ancora più precisi: "la casa di Maria lentamente inclina all'essenza") e ammettiamo che, in base a una "logica trascendentale", esso possa dirsi mal formato. Ciò non toglie che il locutore nell'articolarlo lo abbia distinto dall'altro, anch'esso malformato: "la casa lentamente pervade l'essenza", il quale avrebbe potuto anch'esso venir articolato. Sembra quindi che accettando l'ipotesi kant-husserliana saremmo nella necessità di sostenere una delle seguenti tesi: i) La tavola delle categorie esaurisce le possibilità del pensiero, se non vogliamo contraddire il principio di ragion sufficiente dobbiamo quindi ammettere che l'uomo possieda una facoltà differente dalla facoltà di pensare, la quale contiene in sé la ragione dell'articolazione di ogni

---

[70]Non voglio naturalmente far credere che il problema di determinare un criterio di grammaticalità sia un problema semplice o anche solo "semplicemente tecnico" [per un'interessante discussione del problema cfr. Gardies (1975)]. Voglio solo affermare il carattere differente e successivo del problema che è qui in esame.

[71]I riferimenti principali sono ovviamente a Kant (1781) e a Husserl (1900-01) [in particolare: *Prolegomeni*, cap. XI e *Quarta ricerca*].

asserto particolare che non sia un giudizio (conoscitivo[72]). ii) La tavola delle categorie esaurisce le possibilità del pensiero; se si ammette che possano venir articolati asserti mal formati rispetto a questa tavola e si nega la possibilità di una facoltà differente dalla facoltà di pensare che presieda all'articolazione dei giudizi si deve quindi rinunciare al principio di ragion sufficiente: l'articolazione di un dato asserto, il quale non corrisponda a un giudizio, deve essere intesa come un avvenimento totalmente casuale. iii) La tavola delle categorie non esaurisce la possibilità del pensiero e si deve quindi ammettere la possibilità di giudizi che non corrispondono alle regole di buona formazione che essa prescrive.[73]

Nel caso in cui si accettasse (i) si dovrebbe dire che l'articolazione del primo dei due precedenti asserti in luogo del secondo dipende da pulsioni non razionali, indipendenti dal pensiero (ciò che porterebbe a concludere che se un concetto è la ragione di *un* uso, esso non può che essere la ragione dell'uso *razionale* di un termine, ovvero che esso è, in ultima analisi, una diretta espressione della tavola delle categorie). Non solo sembrano esservi tuttavia casi in cui la scelta di un termine, piuttosto che di un altro sia dettata - anche in un contesto che accetteremmo volentieri di intendere come non conoscitivo, come quello poetico - da motivazioni che difficilmente qualificheremmo come non razionali (in un qualche senso), ma è anche facile vedere che un asserto come "il cielo è bello" (che difficilmente potrebbe essere inteso come l'espressione di un giudizio *conoscitivo*) non può essere reso del tutto indipendente dal concetto di cielo e quindi dalla sua determinazione per mezzo di un giudizio conoscitivo. Così l'articolazione dell'asserto "il cielo è bello" in luogo dell'altro "la volta dell'universo è bella" dipende (o comunque può dipendere) da ragioni logiche. Nel caso in cui si accettasse la tesi (iii) si dovrebbe cercare la ragione dell'articolazione di un giudizio non conoscitivo nella sussistenza di una differente tavola delle categorie, la quale dovrebbe rapportarsi a una facoltà diversa da quella che presiede alla conoscenza. Anche una volta che ciò sia stato ammesso, non sarebbe tuttavia difficile produrre almeno due asserti tali da non corrispondere a nessun tipo di giudizio, ciò che riproporrebbe inalterato il problema. A meno che la tesi (iii) non venga intesa come una semplice variazione linguistica della tesi (i), essa si rivela quindi assai debole. La scelta è allora fra l'affermazione del fatto che l'articolazione di un dato asserto possa essere un evento completamente casuale (ciò che contraddirebbe la stessa possibilità di individuare il concetto come la ragione di un uso linguistico) e l'affermazione di un ambito extraca-

[72]Si noti che se si assume che la tavola delle categorie esaurisce le possibilità del pensiero, si deve anche ammettere che i soli giudizi possibili sono quelli che essa concede. La distinzione fra giudizi conoscitivi e giudizi non conoscitivi diviene dunque vuota.

[73]Naturalmente l'ordine dei fattori può venir invertito e sostenere che ogni pensiero è regolato da una tavola categoriale *a priori* e che l'articolazione di ogni asserto è il risultato di un'attività di pensiero; sebbene la tavola sia *a priori* essa dovrà così essere determinata *a posteriori* in modo che ogni asserto che si reputa articolabile possa corrispondere alle regole che essa prescrive. Poste così le cose, l'ipotesi di una tavola delle categorie diviene tuttavia un'ipotesi metafisica vuota di ogni contenuto logico.

tegoriale in cui venisse a collocarsi questa ragione (e che fosse in qualche modo connesso all'ambito categoriale).

Se si assume che un asserto corrisponde a un giudizio se e solo se esso è formulato secondo una certa struttura categoriale si deve quindi ammettere o che fuori da questa struttura categoriale agisca una qualche ragione[74] capace di condurre all'articolazione di certi asserti (che non esprimono alcun giudizio) in luogo di altri o che quest'ultimo sia un esito del tutto casuale.[75]

Abbiamo ancora la possibilità di dire che un asserto esprime un giudizio se e solo se esso può in qualche modo essere descrittivo ovvero, per usare una terminologia sedimentata, se esso descrive un possibile stato di cose.[76] Se vogliamo che questa risposta non sia circolare dobbiamo però determinare la nozione di possibilità di uno stato di cose in modo del tutto indipendente da ogni ricorso al giudizio che lo descrive. Se si assume che lo stato di cose che rende vero il giudizio espresso dall'asserto "l'erba è verde" sia proprio l'essere verde dell'erba, ciò corrisponde a affermare che un tale stato di cose possieda in sé stesso le caratteristiche che lo rendono possibile e che un giudizio non è quindi altro che la descrizione di una possibilità che è tale in un senso per così dire intrinseco. Anche se questa ipotesi metafisica fosse condivisa, essa non ci aiuterebbe a rendere chiara la distinzione fra asserti che esprimono giudizi e asserti che non esprimono giudizi e non metterebbe capo che a un diverso modo di interpretare questa distinzione, la quale si trasformerebbe nella distinzione fra asserti che descrivono una possibilità e asserti che non la descrivono. La situazione non mi pare essenzialmente differente anche qualora si volesse sostenere che lo stato di cose che rende vero l'asserto "l'erba è verde" sia una modalità del mondo che sussiste del tutto precedentemente alla determinazione dei concetti di erba e di verde.[77]

---

[74] Il termine "ragione" intende rimandare qui all'idea di essere ragione di..., piuttosto che a una qualche determinazione del concetto di ragione in senso più generale.

[75] D'altra parte, se si ammettesse che esistono giudizi (a esempio giudizi non conoscitivi) non regolati categorialmente (come sembra fare Kant nella terza critica [cfr. Kant (1790)], si dovrebbe anche ammettere che la presentazione di una o più tavole categoriali non è una buona risposta al problema costituito dalla determinazione della distinzione fra asserti che esprimono giudizi e asserti che non esprimono giudizi.

[76] Il riferimento classico per la nozione di stato di cose è Wittgenstein (1921). Dal mio punto di vista uno stato di cose non può tuttavia essere inteso che come l'aver luogo di certe relazioni, ovvero come un modo di essere di un mondo.

[77] Per sostenere questo punto di vista si potrebbe argomentare nel modo seguente. Se uno stato di cose è certamente ciò che rende vero un certo giudizio, una certa relazione fra oggetti o fra oggetti e proprietà degli oggetti, questo non implica affatto che uno stato di cose debba intendersi come una modalità dell'essere di certi oggetti e delle loro relazioni. Un oggetto è infatti tale solo in dipendenza da un certo concetto che lo identifica come oggetto, distinguendolo dal magma del suo "sfondo", così come una relazione non può essere tale che in dipendenza di un concetto che identifica un modo di essere di un gruppo di oggetti. L'affermazione che uno stato di cose è una modalità dell'essere di certi oggetti e delle loro relazioni comporta quindi o che i concetti di certi oggetti e di certe relazioni siano parte dello stato di cose, ci vengano dati con esso (esistano in dipendenza dallo stesso atto che fa esistere gli oggetti e le relazioni corrispondenti) o che il verificarsi di un certo stato di cose dipenda a sua volta da un essere precedente totalmente indipendente da tali concetti. Ma allora perché non dire direttamente dello stato di cose che esso è una modalità precedente al concetto, di cui il concetto non è che una

Ciò che renderebbe questa modalità possibile sarebbe infatti precedente non solo al nostro asserto, ma perfino alla edificazione del nostro linguaggio. Così se si volesse affermare che un asserto esprime un giudizio se e solo se esso descrive un possibile stato di cose ci si troverebbe anche nella necessità di caratterizzare in termini non linguistici la nozione di possibilità di uno stato di cose.[78]

Le principali difficoltà che questo ragionare ha messo in luce mi paiono tuttavia venir meno qualora si osservi da una parte che l'articolazione di un asserto avviene sempre in date circostanze che possono considerarsi come un *a priori* relativamente a un tale atto e dall'altra che il problema che ci ha condotto a cercare una distinzione fra asserti che esprimono giudizi e asserti che non esprimono giudizi sorge solo relativamente a asserti effettivamente articolati.[79] Ma se è questo il caso, il problema può trovare, io credo, una risposta legittima nell'affermazione della corrispondenza fra ogni asserto (effettivamente articolato) e un giudizio. La tesi che vorrei difendere è quindi la seguente: ogni asserto (effettivamente articolato) esprime un giudizio, la cui verità o falsità dipende dal mondo a cui l'asserto in questione si riferisce.

Ma - è certo facile obiettare - che tipo di giudizi potranno mai corrispondere a asserti come quelli che costituiscono i due precedenti esempi o come quelli che compongono il seguente brano, che pure qualcuno ha scritto e pubblicato?

> Les *Nombres* s'énumèrent, s'écrivent et se lisent. Eux-mêmes, d'eux-mêmes. Par quoi ils se marquent aussitôt, toute nouvelle marque de lecture devant souscrire à leur programme.
>
> Texte remarquable à ce que (ici exemplairent) jamais le lecteur ne pourra y choisir sa place, ni le spectateur. La place en tout cas est pour lui intenable en face du texte, hors du texte, en un lieu où il pourrait se passer d'avoir à écrire ce qui à lire lui paraîtrait *donné, passé,* où il serait devant un *écrit* déjà. Ayant à mettre en scène, il est mis en scène, il se met en scène. Le récit dès lors s'adresse au corps du lecteur qui est mis par les choses en scène, elle-même. «Donc» s'écrivant, le spectateur peut moins que jamais choisir sa place. Cette impossibilité - cette puissance aussi du lecteur s'écrivant - depuis toujours travaillait le texte en général. Ouvrant ici, limitant et situant toute lecture (la vôtre, la

---

rappresentazione. Noi non possiamo immaginare questa modalità che come una certa struttura di relazioni, ma non possiamo dire che questa struttura è il modo di essere fra loro di certi e determinati oggetti che rispondono ai nostri concetti secondo certe e determinate relazioni rispondenti anch'esse ai nostri concetti relazionali. Esso è piuttosto una struttura che può essere descritta (più o meno dettagliatamente) secondo i nostri concetti e che rende vere alcune delle nostre descrizioni e false altre.

[78] Si noti che una simile posizione incontra una difficoltà supplementare (anche se forse meno radicale). Essa ci condurrebbe infatti a affermare che un asserto, che non avremmo nessuna difficoltà a considerare come falso - come: "Maria ha disegnato un quadrato rotondo" - non esprime alcun giudizio [cfr. su questo punto Husserl (1900-01), *Prima ricerca,* par. XV].

[79] La questione è infatti qui la seguente: qualora si volesse affermare che un asserto che sia stato effettivamente articolato non esprime un giudizio, in che modo potremmo continuare a dare ragione di tale articolazione?

> mienne), la voici, *cette fois enfin*, montrée: comme telle. Par une certaine composition de surfaces retournées. Par une mise en scène matérielle exacte.[80]

E se anche potessimo riscontrare in questi asserti un contenuto di pensiero qualsiasi (cosa che *a priori* sembra certo difficile) dovremmo forse abdicare alla possibilità di possedere differenti categorie logiche per classificarli sotto un registro diverso da quello cui assegniamo gli usuali giudizi contenuti in un trattato scientifico o in un opera di filosofia?

Per rispondere a una simile obiezione è sufficiente mettere in rilievo il presupposto principale su cui essa pare fondarsi e che ha anche caratterizzato tutto il precedente ragionare. Tale presupposto è che se un asserto del tipo[81] $A(x, y, z)$ esprime un giudizio, allora tale giudizio verte proprio sugli oggetti corrispondenti ai termini x, y e z. Se ciò è certamente vero in molti casi e in particolare nella maggioranza dei casi che si incontrano qualora si tratti di imprese conoscitive, non si può certo dire che ciò sia vero in generale. Consideriamo il semplice esempio dell'asserto "cane fa rima con pane". Certamente si tratta qui di un giudizio e anche di un giudizio conoscitivo, ma - è facile capirlo - si tratta di un giudizio che non si riferisce per nulla né ai cani, né al pane; esso verte piuttosto sulle *parole* "cane" e "pane". Così il giudizio a cui si fa qui riferimento può essere precisato meglio riscrivendo l'esempio sotto la forma "la parola «cane» fa rima con la parola «pane»". Il caso qui è semplice e questa precisazione risulta tanto pedante che essa è spesso evitata. Nonostante ciò l'esempio mi pare significativo. Esso ci dice che vi sono casi in cui un asserto potrebbe corrispondere a un giudizio che, quando fosse più precisamente formulato, non corrisponderebbe più letteralmente all'asserto di partenza ma che, nonostante questo, potrebbe venir veicolato da quell'asserto, qualora fossero chiare certe modalità del riferimento.

La mia idea è che qualche cosa di simile succeda anche relativamente a un asserto come "la casa (di Maria) lentamente inclina all'essenza". La mia articolazione di tale asserto non dovrà certo intendersi come un atto del tutto gratuito, e ciò è chiaro se l'asserto è collocato nel suo contesto. Io volevo mostrare un caso in cui a un termine che indicava un dato concetto (il concetto di essenza) venissero fatti corrispondere (secondo regole sintatticamente accettabili) altri termini associati a concetti che non partecipano a sottostrutture relazionali connesse a questo termine secondo le determinazioni di cui io disponevo. Così il giudizio espresso da questo asserto non verte sull'oggetto casa (di Maria), né sulla proprietà di questo di inclinare verso qualcosa e sull'essere questo qualcosa un'essenza (o l'essenza). Se intendiamo l'asserto nel suo contesto comprendiamo abbastanza facilmente che il giudizio che io intendevo esprimere era piuttosto il seguente: `se scelgo "casa" come soggetto, "inclinare lentamente verso" come predicato verbale e "essenza" come complemento di luogo connesso a questo predicato, ottengo un asserto che (isolatamente preso) non potrà essere interpretato secondo le determinazioni concettuali di cui dispongo per i termini in questione´. Così se

[80] Cfr. Derrida (1972), p. 322.

[81] Uso qui la notazione $A(x, y, z)$ per indicare un asserto qualsiasi in cui occorrano i termini x, y e z.

cerco di trovare il giudizio corrispondente all'asserto isolato "la casa (di Maria) lentamente inclina all'essenza" inteso come usualmente, compio un duplice errore: determino male i limiti dell'asserto in questione e lo leggo come se esso parlasse del concetto di essenza, mentre in realtà esso parla dell'oggetto costituito da un concetto che designa un oggetto che non può essere (secondo le determinazioni concettuali di cui dispongo) il termine *ad quem* dell'inclinare di una casa.[82] Non molto diverso sembra il caso del brano di Derrida (in cui semplicemente il contesto interpretativo viene scrupolosamente nascosto ai lettori[83]) o quello di una composizione poetica.

L'uso della nozione di possibilità non mi pare qui comportare alcuna difficoltà. Essa non rimanda infatti che alle connessioni realizzate entro la struttura relazionale cui partecipano i concetti cui faccio riferimento. Il parametro da cui dipende l'essere o non essere possibile è proprio e solo l'essere di una certa struttura di relazioni che precede tanto l'articolazione dell'asserto che la formulazione del giudizio.

L'ipotesi che ogni asserto corrisponde a un giudizio equivale allora all'ipotesi che sia sempre possibile determinare un contesto in cui l'asserto in questione (se correttamente determinato) si trasformi in un altro asserto che è possibile intendere secondo le determinazioni concettuali di cui dispone il parlante.[84] Questo non ha naturalmente nulla a che vedere con il fatto che l'asserto in questione sia vero o falso, ma solo con la possibilità che esso sia vero o falso.

Una tale ipotesi (che resta ovviamente un'ipotesi metafisica) non impedisce peraltro di tracciare una linea di distinzione fra differenti tipi di asserti. Diremo che un giudizio è conoscitivo quando esprime il sussistere di una relazione fra concetti o fra questi e oggetti non concettuali o fra oggetti non concettuali e oggetti non concettuali.[85] Un asserto sarà poi *conoscitivamente significante* solo nel caso in cui il contesto della sua trasposizione in un giudizio sia esplicito e il giudizio in questione sia conoscitivo.

Resta da comprendere il rapporto fra una locuzione linguistica ben formata, ma di forma non assertoria e l'insieme delle determinazioni concettuali

---

[82]Naturalmente potrei anche sostenere che si tratta qui dell'oggetto costituito da un concetto che designa qualcosa che non può inclinare verso l'essenza o meglio: dell'oggetto costituito da un concetto che designa qualcosa che non può inclinare se non a qualche cosa che sia un oggetto che non può essere designato dal concetto di essenza. L'ambiguità dipende però qui *solamente* dalla relativa imprecisione propria della lingua italiana.

[83]Naturalmente questo dipende dallo scopo per cui il brano è stato scritto.

[84]Per quanto non voglia certo far uso qui di un argomento d'autorità vorrei osservare che l'idea che per "la corretta comprensione" di un "pensiero" [leggi: "giudizio" (cfr. la precedente nota (68))] occorra "la conoscenza di certe circostanze concomitanti che possono venir utilizzate come mezzo per esprimerlo" è di Frege [cfr. Frege (1918), p. 53].

[85]Non so se di debba trarre da qui la conclusione che tutti i giudizi sono conoscitivi. In fondo il giudizio "il cielo è bello" stabilisce una relazione fra l'oggetto indicato dal concetto di cielo e il concetto di bello (secondo me) che il parlante dovrebbe sempre essere in grado di determinare almeno parzialmente. Si potrebbe dire che questa determinazione può non essere possibile per il parlante in termini precisi, ma si può rispondere che, in assenza di essa, il giudizio in questione partecipa alla determinazione del concetto di bello di cui il parlante si serve (l'esistenza è qui ancora soltanto per me).

di cui dispone il parlante. A me pare che si possa sostenere che l'uso di ogni termine in ogni locuzione ben formata dipenda da un insieme di determinazioni concettuali. Si tratterà di capire che forme assuma questa dipendenza nel caso in cui l'enunciato in questione non sia di forma assertoria. Tale questione non mi pare tuttavia rilevante per le parti successive del mio lavoro.

I. 1. χ. *Riepilogo*

Ricapitoliamo. Il presupposto da cui mi muovo è che il linguaggio esprime relazioni o più in particolare che esso *è* l'aver luogo di relazioni fra un insieme di termini. Le modalità di queste relazioni rispondono a regole interne di buona formazione. A ogni linguaggio corrisponde quindi un insieme di termini e un insieme di sequenze possibili di termini che diciamo enunciati. Fra gli enunciati alcuni hanno forma assertoria. Ogni atto linguistico può essere inteso come un atto di scelta di un enunciato fra gli altri. La facoltà di compiere atti linguistici è una facoltà dell'uomo. L'uomo compie atti linguistici in vista di uno scopo la cui determinazione corrisponde a una pulsione interna che qui viene presa per data. Lo scopo orienta la scelta su un sottoinsieme dell'insieme degli enunciati. Se questo sottoinsieme è costituito da un solo elemento lo scopo è esso stesso la ragione dell'atto linguistico. Se esso é composto da più elementi, la scelta è determinata da una causa di natura diversa. Consideriamo solo il secondo caso (che dà luogo a usi liberi di certi termini). Scopo e causa agiscono in condizioni date.[86] La forma dell'enunciato dipende dallo scopo. Uno scopo possibile è di dire qualche cosa che possa essere vero o falso. Esso dà luogo a un enunciato di forma assertoria. Ma un enunciato non può, in se stesso, essere né vero né falso. Esso è vero o falso solo in relazione alle condizioni date. Un enunciato di forma assertoria espresso in condizioni date che lo rendano vero o falso esprime un giudizio. Il pensiero è la facoltà che presiede all'articolazione di giudizi. Fra le condizioni date alcune possono essere esterne al soggetto, altre interne. L'insieme delle condizioni esterne è l'essere di certe relazioni. L'insieme delle condizioni interne è l'essere presente al soggetto di queste relazioni. Il pensiero intuisce le condizioni esterne trasformandole in condizioni interne. Così come fra le condizioni interne alcune non dipendono da questa trasposizione, ma si impongono al pensiero, così come avviene per lo scopo, fra le condizioni esterne, alcune sono tali da rendersi presenti alla possibilità dell'intuizione, mentre altre restano escluse da tale possibilità, senza che il pensiero possa nulla contro questa limitazione. Del primo tipo sono le condizioni che derivano dal fatto che nell'atto della articolazione del giudizio il pensiero si esercita secondo alcune direzioni, trascurandone altre. Del secondo tipo sono quelle che derivano dalle limitate capacità dell'intuizione. E' chiaro che in entrambi i casi si tratta di limiti interni al soggetto. Il primo dipende

---

[86] Non è qui rilevante sapere se le condizioni sono esse stesse determinate da un'azione continuata della medesima causa, come nel caso di una forza attrattiva in un istante diverso da quello iniziale. Si tratta qui semplicemente di distinguere fra la causa, lo scopo e le condizioni che danno origine al determinato atto linguistico preso in esame.

dall'impossibilità che l'intuizione si eserciti contemporaneamente su tutto ciò su cui potrebbe esercitarsi, il secondo dall'impossibilità che essa si eserciti su tutto ciò che esiste indipendentemente dall'essere del soggetto. Possiamo distinguere quindi fra condizioni compresenti all'atto dell'articolazione di un giudizio e condizioni che limitano l'accesso del soggetto a tali condizioni. Se entrambe partecipano, in qualche modo, all'atto dell'articolazione del giudizio, le seconde vi partecipano solo negativamente rendendo del tutto ininfluenti alcune condizioni compresenti. Fra le condizioni esterne al soggetto alcune sono il risultato di altri e precedenti esercizi del pensiero e si presentano sotto la forma di giudizi già articolati che l'intuizione riconosce sotto le spoglie degli asserti che li esprimono. Alcuni di questi giudizi trattano di relazioni che hanno luogo indipendentemente da ogni presente e passato esercizio del pensiero. Anche in tal caso tuttavia la formulazione del giudizio in quanto tale è un atto del pensiero (così come lo è l'intuizione che lo riconosce). L'asserto che forma il giudizio parla infatti di quelle relazioni solo a condizione che i termini che lo compongono individuino certe invarianti a cui sia possibile riferirsi per descrivere tale relazione. L'individuazione di queste invarianti non appartiene alle relazioni stesse, ma alle modalità con cui esse si presentano al soggetto; essa è quindi originariamente un prodotto dell'intuizione, la quale dà luogo a un esistenza del tutto soggettiva (esistenza per me). Tale esistenza non ha tuttavia alcun rapporto con nessun termine del linguaggio fino a che essa non vi é stata associata e questa associazione non può che avvenire tramite l'articolazione di un asserto che è per ciò stesso un giudizio. La difficoltà qui non sta tuttavia nell'associare, ma nel determinare, ovvero nel descrivere l'invarianza. Quando ciò è stato fatto si ha un nuovo giudizio che partecipa alle condizioni esterne della determinazione di ogni ulteriore giudizio e in particolare dei giudizi che trattano di relazioni che hanno luogo indipendentemente dal pensiero. Sulla base di questi giudizi nuovi giudizi possono venir formulati che vertono su invarianti dipendenti dal pensiero e in particolare su invarianti relative alle modalità di esercizio del pensiero stesso. Abbiamo così le condizioni esterne che dipendono da precedenti esercizi del pensiero e trattano di relazioni che hanno luogo in dipendenza del pensiero stesso. L'insieme delle condizioni così definite permette allo scopo di precisarsi in modo più particolare: non più dire qualche cosa che possa essere vero o falso, ma dire qualche cosa di vero su qualcosa che è determinabile in base ai giudizi che forniscono le condizioni esterne che sono state trasformate in condizioni interne. Se lo scopo è sufficientemente determinato e le condizioni adeguatamente articolate l'atto linguistico deriva da un nuovo atto del pensiero che connette un termine a un altro termine. Se accettiamo che tanto il primo termine che le modalità secondo le quali il secondo deve inerire a questo siano selezionati dallo scopo, si tratta di trovare fra le condizioni influenti quelle che partecipano alla individuazione di tale termine. La causa ultima della individuazione del secondo termine (qualora essa abbia luogo) è un *concetto*, così come tutto ciò di cui parlano i giudizi che costituiscono le condizioni compresenti è un *oggetto*. Un concetto è quindi, esso stesso, un oggetto. L'atto di pensiero che conduce alla formulazione del giudizio a partire dall'insieme delle condizioni interne compresenti è invece ciò che io chiamo *analisi*.

I. 2.
OGGETTI E CONCETTI MATEMATICI

I. 2. α. *Premessa*

Il pensiero sembra avere questo di particolare: che esso è un'*azione* che non si manifesta come tale che al soggetto che la compie. Tale azione può comporsi di due atti successivi. Il primo consiste nell'accedere a un contenuto, il secondo nel connetterlo a contenuti distinti. Se il realizzarsi del primo atto è già un pensiero, è solo tramite il realizzarsi del secondo che il pensiero assume una forma propria a innescare nel soggetto un'azione di un genere differente che ne è la manifestazione esterna e, in un certo senso, l'esito. Tra tutte le azioni particolari che possono seguire un pensiero (e esserne manifestazione) solo alcune rispondono allo scopo preciso di esprimere quel pensiero, di esserne una manifestazione pura. Se è solo l'intenzionalità del soggetto che può fare qui la distinzione, lo scopo che essa consegue sembra in generale realizzabile solo a condizione che l'azione si conformi a certi canoni che non dipendono da questa intenzionalità. Uno fra questi è il ricorso a un sistema *già dato* di simboli.

La funzione di tali simboli è quella di evocare un contenuto più o meno complesso. L'idea stessa che un pensiero possa in qualche modo esprimersi contiene una presupposizione che fa del suo contenuto qualcosa di riducibile a una combinazione di elementi stabili, che la combinazione dei simboli in qualche modo riproduce. Ciò non vale soltanto per la possibilità di comunicare un pensiero *a altri*, ma riguarda la possibilità stessa di esprimerlo e quindi di tradurlo in un dato di memoria. La memoria è d'altra parte una facoltà essenziale per permettere a un essere finito di realizzare un percorso argomentativo, ovvero per trasformare un pensiero nell'anello di una catena e per far quindi un solo pensiero di due (o più) atti in se stessi distinti. La possibilità di associare simboli a contenuti (stabili) è quindi una delle condizioni originarie della possibilità stessa di produrre un pensiero in quanto catena di pensieri, di fare di un'esperienza interna - "concreta e individuale"[1] - un atto non isolato che partecipa a una conoscenza.[2]

Il problema gnoseologico non è quindi quello di sapere sotto quali condizioni un pensiero possa connettersi a una struttura simbolica - questa con-

---

[1]Cfr. Cassirer (1923-29), vol. III, 2, p. 69.

[2]Si osservi che la questione non è qui tanto quella della trasmissione di una conoscenza, quanto quella della possibilità stessa che una conoscenza abbia luogo, che una differenza possa essere rintracciata fra un essere razionale e l' "animale da preda nel deserto" [cfr. Nietzsche (1874), 37329 - 3743].

nessione è infatti un dato originario e la ricerca delle sue condizioni di possibilità non può che identificarsi con un'indagine descrittiva, sia essa fenomenologica o scientifica - ma quello di distinguere e studiare le differenti modalità che questa connessione può assumere.

Allo scopo di focalizzare meglio il problema che mi interessa qui affrontare presupporrò da una parte che la relazione fra il pensiero e la sua espressione per mezzo di un linguaggio naturale (nel nostro caso la lingua italiana) si riduca a un semplice atto di trasposizione verbale - di modo che la proposizione espressa da un dato enunciato (in generale da un enunciato di forma assertoria) sia direttamente il contenuto di un pensiero - e dall'altra che l'intenzionalità di questo pensiero (il suo originario dirigersi verso uno scopo determinato) sia data con esso e non sia ulteriormente analizzabile.[3] Il problema sarà allora quello di studiare le relazioni che possono essere istituite fra asserti di un linguaggio naturale e forme simboliche di genere differente, le quali possano farsi carico di una rappresentazione del pensiero di genere essenzialmente diverso da quella che il linguaggio naturale può (anche all'interno della precedente presupposizione) garantire. Le forme simboliche di cui sarà qui questione saranno ovviamente quelle le cui carat-

---

[3]Questa presupposizione è mi pare generalmente accettata e anzi nella maggioranza dei contesti filosofici essa sembra un punto di partenza essenziale che corrisponde a una naturale "divisione del lavoro". Nell'assumerla non si fa infatti che limitare il campo della propria indagine ai processi di interazione fra prodotti psichici *già* confezionati sotto una forma analizzabile in termini logici, lasciando a altre ricerche - condotte con metodo e strumenti differenti - tanto il problema di studiare i rapporti fra certi fatti psichici e certi comportamenti linguistici che quello di analizzare le ragioni di un determinato orientamento della vita psichica. L'opposizione fra logica, o, più in generale, teoria della conoscenza e psicologia, neurologia o fenomenologia dell'atto di pensiero non mi pare tanto un'opposizione fra differenti orientamenti teorici, che si confrontano proponendo risposte di genere differente per il medesimo problema, quanto una assai naturale distinzione fra campi d'indagine orientati alla soluzione di differenti problemi. Il fatto che fra questi problemi esista una connessione non conduce che a cercare di rispettare certe condizioni di compatibilità fra i risultati che nei differenti campi si considerano come acquisiti.

Vorrei cogliere l'occasione di questa nota per aggiungere un ulteriore chiarimento. Buona parte della moderna filosofia della scienza ha considerato il proprio problema come tale da rendere totalmente estranea al proprio scopo ogni considerazione del soggetto conoscente, negando quindi perfino l'esistenza di una connessione fra tale problema e i problemi affrontati da indagini tese a studiare i differenti aspetti della vita psichica o, se si preferisce, del vissuto di coscienza. Questo punto di vista, senza dubbio legittimo, mi pare non possa tuttavia essere mantenuto qualora non si accetti anche l'ipotesi secondo la quale il terzo mondo di Platone e Popper sia un mondo già dato nella totalità della sua estensione prima che l'evolversi della conoscenza permetta di scoprirlo tramite una semplice applicazione della sensibilità esterna (la quale deve peraltro essere pensata come una mera facoltà di rispecchiamento). La semplice messa in discussione di questa ipotesi, anche qualora essa si limiti a intendere diversamente l'esistenza indipendente di questo mondo e a rappresentarselo come un insieme di produzioni umane che si oggettivano nel corso di una certa evoluzione temporale, conduce a riproporre anche per l'indagine epistemologica un problema del soggetto e a intendere questo come un problema centrale. La questione sarà allora quella di capire sotto quale aspetto una tale indagine dovrà essere svolta e quali confini essa dovrà rispettare per restare epistemologicamente rilevante. Proprio questo è uno dei punti su cui ho cercato di concentrare le mie riflessioni.

teristiche permettono la trasposizione di un concetto in un oggetto matematico. Si tratterà di determinare in modo più preciso queste caratteristiche, di precisare meglio la nozione di oggetto matematico, di studiare più in dettaglio le relazioni che un tale oggetto mantiene con il concetto di cui è una trasposizione e di comprendere se e come questa indagine logica possa fornirci categorie interpretative adeguate per descrivere e spiegare certe tipologie caratteristiche dell'evoluzione della conoscenza matematica.[4]

I. 2. β. *Descartes e Leibniz*

La tredicesima *regula* proposta da Descartes *ad directionem ingenii* contiene una norma di esposizione di ciò che è (stato) "perfettamente compreso":

> Si quæstionem perfectè intelligamus, illa est ab omni superfluo conceptu abstrahenda, ad simplicissimam revocanda, & in quàm minimas partes cum enumeratione dividenda.[5]

La presentazione di questo criterio sembra dividere il testo cartesiano in due parti in qualche modo separate. Mentre l'obiettivo delle prime tredici regole sembra infatti quello di stabilire dei canoni astratti per il (buon) ragionare totalmente indipendenti dalle forme specifiche che un ragionamento può assumere, dalla quattordicesima regola in poi l'intento sembra spostarsi verso la determinazione dei modi del conoscere. Basta leggere una dopo l'altra le tre regole successive per rendersi conto di questo cambio di orientamento.

> REG. XIV: Eadem est ad extensionem realem corporum trasferenda, & tota per nudas figuras imaginationi proponenda: ita enim longè ab intellectu percipientur.
> REG. XV: Juvat etiam plerumque has figuras describere, & sensibus exhibere externis, ut hac ratione faciliùs nostra cogitatio retineatur attenta.
> REG. XVI: Quæ verò præsentem mentis attentionem non requirunt, etiamsi ad conclusionem necessaria sint, illa melius est per brevissimas notas designare quàm per integras figuras: ita enim memoria non poterit falli, nec tamen interim cogitatio distrahetur ad hæc retinenda, dum aljs deducendis incumbit.[6]

Commentando quest'ultima regola Descartes scrive:

> Cæterùm, quia non plures quàm duas dimensiones diversas, ex innumeris quæ in phantasiâ nostrâ pingi possunt, uno & eodem, five oculorum, sive mentis intuito contemplandas esse diximus: operæ pretium est omnes alias ita retinere, ut facilè occurrant quoties usus exigit; in quem finem memoria videtur à natura instituita. Sed quia hæc sæpe labilis est, & ne aliquam attentionis nostræ partem in eâdem renovandâ cogamur, dum aljs cogitationibus incumbimus, aptissimè scribendi

[4] Spero che il modo in cui quest'ultima parte del mio programma troverà una sua realizzazione nel corso dei prossimi paragrafi sia tale da rendere esplicita la differenza fra ciò che io intendo come una tipologia caratteristica dell'evoluzione della conoscenza matematica e ciò che si è spesso inteso come un "modello" di questa stessa evoluzione.

[5] Cfr. Descartes (1701), 430, 7-10. [Il riferimento è qui all'edizione del testo cartesiano contenuta nel volume X di Adam-Tannery (1897-1913)].

[6] Cfr. *ivi*: 438, 8 - 11; 453, 1 - 4; 454, 9 -15.

> usum ars adinvenit; [...] ut si scribam $2a^3$, idem erit ac dicerem duplum magnitudinis notatæ per litteram *a* tres relationes continentis. Atque hac industriâ non modò multorum verborum compendium faciemus, sed, quod præcipuum est, difficultatis terminos ita puros & nudos exhibebimus ut, etiamsi nihil utile omittantur, nihil tamen unquam in illis inveniatur superfluum, & quod frustra ingenij capacitatem occupet, dum plura simul erunt mente complectenda.[7]

I simboli algebrici sono quindi un ausilio all'attenzione e alla memoria. Ma contengono essi anche un'autogeneratività propria capace di condurre il ragionamento secondo direzioni che non sono quelle immediatamente poste dalla stessa formulazione di un problema e dalla sua comprensione intuitiva? Se è certo che le cinque regole che seguono contengono l'*esquisse* di una teoria algebrica delle proporzioni (ma forse, più in generale, delle equazioni), la quale troverà nella *Géométrie* la sua naturale applicazione,[8] si può sostenere che la pratica matematica di Descartes sia sotto questo aspetto più avanzata della sua teorizzazione metodologica.[9]

Ma, che si voglia o meno concordare con questa interpretazione, ciò che mi pare difficilmente discutibile è il fatto che nelle *Regulæ* Descartes presenti sotto due forme essenzialmente diverse il rapporto che un pensiero intrattiene con certe forme simboliche a seconda se queste siano delle figure geometriche o dei segni algebrici. Se le prime possono divenire esse stesse un oggetto d'indagine, i secondi restano dei simboli che stanno per qualcosa d'altro, a cui essi sono associati per mezzo di un atto battesimale. Una tale distinzione non impedisce tuttavia, di per se stessa, di giungere alla teorizzazione di una possibile autogeneratività dei simboli algebrici. Il caso di Leibniz sembra sotto questo rispetto illuminante. Alla concezione del calcolo infinitesimale come una teoria delle curve (piuttosto che delle equazioni), egli accompagna un ostinato interesse verso problemi di natura strettamente algoritmica. Ma è proprio il modo in cui egli concepisce questo genere di problemi che a me pare illuminante. In un breve saggio comparso sugli *Acta Eruditorum* nel novembre del 1684 egli distingue fra differenti tipi di conoscenza:

> Est [...] cognitio vel obscura vel *clara*, et clara rursus vel confusa vel *distincta*, et distincta vel inadæquata vel *adæquata*, item vel symbolica vel *intuitiva*: et quidem si simul adæquata et intuitiva sit, perfectissima est.[10]

La questione che è qui in discussione verte ovviamente sulla "conoscenza simbolica", la quale non solo è imperfetta, ma è propriamente "cieca":

---

[7]Cfr. *ivi*, 454, 16 - 25 e 455, 16 - 24.

[8]Per i rapporti fra le *Regulæ* e la *Géométrie* cfr. Israel (1987).

[9]Il problema dell'interpretazione della geometria cartesiana continua a dividere gli interpreti: da una parte chi sostiene che in essa si è ormai realizzata una essenziale riduzione della geometria alla teoria delle equazioni; dall'altra chi non vede nella pratica algebrica cartesiana che uno strumento per risolvere problemi che restano in se stessi essenzialmente geometrici [ho cercato di presentare un succinto riepilogo di questa discussione in Panza (1989), pp. 110-15]. E' chiaro come il problema a cui intendo fare riferimento qui sia strettamente connesso a questa difficoltà interpretativa.

[10]Cfr. Leibniz (1684b), p. 537.

> Plerumque autem, præsertim in Analysi longiore, non totam simul naturam rei intuemur, sed rerum loco signis utimur, quorum explicationem in præsenti aliqua cogitatione compendii causa solemus præmittere, scientes aut credentes nos eam habere in potestate: ita cum Chiliogonum seu Polygonum mille æqualium laterum cogito, non semper naturam lateris et æqualitatis et millenarii (seu cubi a denario) considero, sed vocabulis istis (quorum sensus obscure saltem atque imperfecte menti obversatur) in animo utor loco idearum quas de iis habeo, quoniam memini me significatione istorum vocabulorum habere, explicationem autem nunc judico necessariam non esse; qualem cogitationem *cæcam* vel etiam *symbolicam* appellare soleo, qua et in Algebra et in Arithmetica utimur, imo fere ubique. Et certe cum notio valde composita est, non possumus omnes ingredientes eam notiones simul cogitare: ubi tamen hoc licet, vel saltem in quantum licet, cognitionem voco *intuitivam*. Notionis distinctæ primitivæ non alia datur cognitio, quam intuitiva, ut compositarum plerumque cogitatio non nisi symbolica est.[11]

Per quanto cieca, la conoscenza simbolica ha dunque una funzione essenziale. Tanto essenziale che nei *Nouveaux Essais* Leibniz ascriverà a se stesso il merito di aver trovato, per mezzo del calcolo differenziale (che egli aveva presentato per la prima volta in un breve saggio[12] comparso sugli *Acta Eruditorum* nel mese di ottobre dello stesso 1684), un metodo capace di condurre alla soluzione di numerosi problemi senza alcun ricorso all' "immaginazione" (geometrica), contribuendo *quindi* a un decisivo progresso matematico. Ecco come egli si esprime:

> [...] on peut [...] dire que la Specieuse en general, c'est à dire, l'art des caracteres est un secours merveilleux parcequ'elle decharge l'imagination. L'on ne doutera point, voyant l'Arithmetique de Diophante et les livres Geometriques d'Apollonius et de Pappus, que les anciens n'en ayent eu quelque chose. Viete y a donné plus d'etendue, en exprimant non seulement ce qui est demandé, mais encor les nombres donnés, par des caracteres generaux, faisant en calculant ce qu'Euclide faisoit déjà en raisonnant[13] et des Cartes a etendu l'application de ce calcul à la Geometrie, en marquant les lignes par les Equations. Cependant encor après la decouverte de nostre Algebre moderne, M. Bouillaud (Ismael Bullialdus) excellent Geometre sans doute, que j'ay encor connu à Paris, ne regardoit qu'avec etonnement les demonstrations d'Archimede sur la Spirale et ne pouvoit point comprendre comment ce grand homme s'estoit avisé d'employer la tangente de cette ligne pour la dimension du cercle. Le Pere Gregoire de St. Vincent le paroist avoir deviné, jugeant qu'il y est venu par le parallelisme de la Spirale avec la parabole. Mais cette voye n'est que particuliere, au lieu que le nouveau calcul des infinitesimales qui procede par la voye des differences dont je me suis avisé et dont j'ay fait part au public avec succès, en donne une generale, où cette decouverte par la spirale n'est qu'un jeu et qu'un esaay des plus faciles, comme presque tout ce qu'on avoit trouvé auparavant en matiere de dimensions des Courbes. La raison de l'avantage de ce nouveau Calcul est encor, qu'il decharge l'imagination dans les problèmes, que M. des Cartes avouit exclus de sa Geometrie sous pretexte qu'ils menoient au mecanique le plus souvent, mais dans le fond parcequ'ils ne convenoient pas à son calcul.[14]

---

[11]Cfr. *ivi*, p. 538.

[12]Cfr. Leibniz (1684a).

[13]Si noti l'opposizione fra calcolare e ragionare.

[14]Cfr. Leibniz (1765), p 457.

Se il pensiero produce quindi il *concetto* di forma di una data estensione o di curva con questa e questa caratteristica, la rappresentazione geometrica di questi concetti è tale che essa fornisce all'intuizione un'immagine su cui essa possa immediatamente esercitarsi, sia ritenendola come proprio oggetto, sia operando *concretamente* su di essa. Qui il rapporto fra pensiero e simbolo è assai stretto e il secondo non è che una raffigurazione del primo. Certo, un cerchio disegnato su di un foglio di carta non sarà mai una esemplificazione perfetta del concetto di cerchio, la linea che indica la circonferenza avrà pur sempre una larghezza e non potrà quindi intendersi che come una rappresentazione simbolica di quel concetto, ma la relazione fra il concetto e il simbolo è qui tale che non occorrerà nessuna ulteriore precisazione (salvo quella di astrarre da una delle dimensioni della linea) perché il simbolo possa cominciare a vivere di vita propria e presentarsi come tale al pensiero. Qui l'autogeneratività simbolica appare come un'autogeneratività intuitiva dello stesso genere di quella che permette di connettere fra loro contenuti di pensiero o perfino di costruirne di nuovi.

Il caso è assai differente per un simbolo algebrico. Se vogliamo indicare con πr^2 l'estensione della porzione di piano compresa entro la circonferenza che abbiamo appena disegnato, dobbiamo precisare *prima* che qui la lettera greca "π" indica il rapporto fra la lunghezza del diametro e quella della circonferenza, che la lettera latina "r" indica il raggio e la cifra "2", posta in quella particolare posizione indica che il valore del raggio deve essere moltiplicato per se stesso. Così per rappresentare all'intuizione l'estensione della nostra porzione di piano dobbiamo ripresentare a essa i concetti che ci hanno permesso di identificarla. Se un'autogeneratività simbolica può qui avere ancora luogo, essa deve essere di genere totalmente differente da quella precedente; essa non dipenderà dalla possibilità dell'intuizione di rappresentarsi i simboli come propri oggetti, ma dalla possibilità di disporre di certe regole convenzionalmente[15] associate a certi simboli, la cui meccanica applicazione può produrre nuove stringhe simboliche, nelle quali ogni simbolo elementare starà per un oggetto preciso che è stato precisato *prima* di intraprendere le operazioni. Per usare le parole di Leibniz, si tratta qui di un'autogeneratività *cieca* per rapporto all'intuizione, la quale libera l'immaginazione da ogni necessità di intervento e assegna all'attenzione il solo compito di garantire una corretta applicazione delle regole.

1. 2. γ. *Contenuto simbolico*

Per quanto la differenza fra i due casi precedenti sia senza dubbio grande, essa non impedisce di riscontrare alcune analogie fra l'operare su figure e l'operare su segni algebrici di cui parla Leibniz. In entrambi i casi si tratta infatti di realizzare una trasformazione degli oggetti simbolici costituiti da una certa combinazione di segni elementari e, in ultima istanza, questa

[15]E' chiaro che ciò che è convenzionale e qui l'associazione che si istituisce fra regole e simboli e non quella che ha luogo fra regole e concetti.

trasformazione non può seguire - anche nel primo caso - che dalla applicazione di certe regole che governano la manipolazione dei simboli. Se questa trasformazione permette di produrre nuovi oggetti simbolici che vengono nei due casi riguardati in un modo del tutto differente, essa sembra, in quanto tale, possedere dei connotati comuni che le vengono dal suo derivare da un operare grafico sottoposto a certe regole di riproduzione dei segni. Se una differenza può certo venire individuata relativamente allo statuto di queste regole, che nel primo caso sembrano stabilire semplicemente la *possibilità* di certe modalità costruttive, mi pare che ciò non sia che un aspetto di una differenza più profonda che riguarda il modo in cui i segni sono intesi, il rapporto che essi stabiliscono con il concetto corrispondente. Ma riconoscere il sussistere di una differenza, la quale sia relativa al rapporto fra simbolo e concetto, significa anche affermare che il nostro operare su segni algebrici sia un operare su simboli che rappresentano dei concetti i quali restano a questi essenzialmente estranei?

Per rispondere (negativamente) a questa domanda mi servirò di alcune lucide riflessioni di Husserl.

> Deve essere ben chiaro che in ampi tratti del pensiero, non tanto del pensiero vago e quotidiano, ma di quello rigorosamente scientifico, l'immaginatività della traduzione intuitiva svolge una funzione minima, se non addirittura nulla, e che possiamo giudicare, inferire, riflettere e confutare, nel senso più attuale, sulla base di rappresentazioni "puramente simboliche". Si descrive in modo assai inadeguato questa situazione, quando si parla a questo proposito di una *funzione supplente dei segni*, come se i segni stessi fossero i succedanei di qualcosa, e l'interesse del pensiero, nel pensiero simbolico, fosse rivolto ai segni stessi. In realtà questi non sono affatto, e tanto meno lo sono secondo la modalità della supplenza, gli oggetti della considerazione del pensiero: noi viviamo piuttosto interamente all'interno della coscienza del significato o della comprensione, coscienza che non viene meno per la mancanza di intuizione di accompagnamento. Si deve tener presente che il pensiero simbolico è pensiero solo in virtù del nuovo carattere "intenzionale" o carattere d'atto che costituisce l'elemento distintivo del segno significativo [significante] di fronte al segno "puro e semplice"[...].
>
> A questa interpretazione del pensiero simbolico si obietterà forse che essa si trova in contrasto con i fatti più sicuri che siano emersi nell'analisi del *pensiero simbolico-aritmetico* su cui io stesso ho insistito in altra sede (nella *Filosofia dell'aritmetica*[16]). In effetti, nel pensiero aritmetico i segni puri e semplici sono surrogati dei concetti. "Ridurre la *teoria delle cose* alla *teoria dei segni*", per dirla con Lambert, è l'operazione messa in atto da ogni tecnica calcolistica. I segni aritmetici sono "scelti e perfezionati in modo tale che la teoria, la combinazione, la trasformazione, &c., dei segni può servire in luogo di ciò che altrimenti dovrebbe essere fatto con i concetti".[17]
>
> Ma ad un esame più attento, ci si rende conto che non sono i segni puramente nel senso di oggetti *fisici*, e la teoria, la combinazione, &c., dei segni intesi in questo modo, che possono avere per noi qualche utilità. [...] Il vero senso dei segni in questione si rivela nel momento in cui pensiamo alla ben nota similitudine tra le operazioni di calcolo e quelli che si compiono nei *giochi* che si svolgono secondo regole, come quello degli scacchi. [...] I segni aritmetici posseggono accanto al loro significato originario, per così dire, il loro significato di gioco, un

[16]Cfr. Husserl (1891).

[17]Cfr. Lambert (1764), vol. II, p. 16.

> significato cioè orientato secondo il gioco delle operazioni di calcolo e delle sue ben note regole.
> Se si assumono i segni aritmetici puramente come pezzi di gioco nel senso definito da queste regole, la soluzione dei compiti del gioco calcolistico conduce a segni numerici, a formule numeriche, la cui interpretazione nel senso dei significati originari, propriamente aritmetici, presenta al tempo stesso la soluzione dei compiti aritmetici corrispondenti.
> Nelle sfere del calcolo e del pensiero simbolico-aritmetico non si opera dunque con di segni *privi di significato*.[18]

L'idea che Husserl ci presenta qui è quella di un "contenuto" sul quale non si eserciti alcuna intuizione, un contenuto simbolico che dipenda da connessioni formali stabilite *a priori* in modo precisamente definito. Ora, a guardare le cose dappresso, ci si accorge abbastanza facilmente che una situazione simile si riproduce anche nel caso dell'operare geometrico. Il nostro riflettere su un triangolo non è infatti certo un riflettere sul disegno "in quanto oggetto fisico"; questo non si presenta certo alla nostra intuizione grazie ai suoi caratteri di oggetto specifico e determinato, ma soltanto grazie alla nostra possibilità di astrarre da questi caratteri e di non cogliere altro che le connessioni che esso evidenzia fra certi segni elementari.[19] Così sembra abbastanza facile convincersi che situazioni nelle quali una rappresentazione simbolica possa aver luogo e possa condurre a un operare sui simboli, senza l'instaurazione di un "contenuto simbolico", il quale regga, in ultima istanza, la legittimità dell'intera rappresentazione, sono assai difficilmente immaginabili. Se vi è quindi un senso in cui l'operare matematico sia un operare su oggetti che non sono concetti, questo non va ricercato nel carattere segnico di questo operare, nel suo avere a che fare con segni puri. Ciò che ho chiamato "oggetto matematico" non dovrà quindi essere confuso né con il disegno del triangolo, né con il grafema che indica un numero o una funzione. Ciò di cui è questione è piuttosto ciò che permette a questi simboli di intrattenere un certo rapporto con una struttura corrispondente di concetti e ciò non può essere, in ultima istanza, che un insieme di regole di trasformazione dei simboli. Un oggetto matematico non è quindi altro che l'argomento di un insieme di regole di trasformazione simbolica.

Se, sulla base di queste considerazioni, vogliamo tornare alla distinzione fra intuire e calcolare, dobbiamo io credo concludere che la possibilità stessa di un calcolo dipenda dal realizzarsi di un atto intuitivo, il quale sia responsabile dell'edificazione di un contenuto simbolico o, per dir meglio, di un oggetto matematico. Tale atto intuitivo - che io chiamo oggettivazione - è

---

[18] Cfr. Husserl (1900-01), Prima ricerca, pp. 335-37.

[19] Scrive ancora Husserl [*ivi*, pp. 332-33]:

> Ad essere esatti, tutti sanno che non si può rendere sensibile in modo adeguato alcun concetto geometrico. Noi immaginiamo o disegniamo una linea e diciamo, o pensiamo, che si tratti di una retta. E così per ogni altra figura. L'immagine serve sempre e soltanto come appiglio per l'*intellectio*. Essa non presenta un modello reale della forma intesa, ma soltanto un modello di quelle figure sensibilmente determinate che sono il naturale punto di partenza delle "idealizzazioni" geometriche. In questi processi intellettivi del *pensiero* si costituisce l'*idea* della forma geometrica, idea che viene impressa nel significato fissato dall'espressione definitoria.

d'altra parte necessario anche per trasformare un disegno nella rappresentazione di un concetto geometrico. Se a questo disegno può applicarsi quindi una nuova intuizione - che agisce ora direttamente sull'oggetto (e non più sul concetto, come sembra credere Leibniz) - ciò non dipende che dai caratteri particolari del contenuto simbolico che la prima intuizione ha permesso di costruire. Ridurre l'opposizione fra algebra e geometria a un'opposizione fra calcolare e intuire significa quindi non prendere in considerazione che l'aspetto più superficiale dell'attività matematica, quello che si manifesta, per così dire, solo nel suo ultimo stadio. La conclusione che Cassirer trae dalla sua lucida analisi della differenza fra le filosofie della matematica di Leibniz e di Kant mi pare quindi del tutto inaccettabile.

> Per Leibniz - egli scrive - il campo della conoscenza intuitiva, che si riferisce alla connessione oggettiva delle idee, è distinto dal campo della conoscenza simbolica in cui abbiamo a che fare non con le idee stesse, bensì con i segni che le rappresentano [...]. Per Kant la linea di confine non passa fra il pensiero intuitivo e il pensiero simbolico, bensì fra il concetto "discorsivo" e l' "intuizione pura", cosicché il contenuto della matematica può essere fornito e giustificato solo mediante quest'intuizione.
> Se si considera questo contrasto metodologico dal punto di vista della matematica moderna, bisogna dire che quest'ultima non ha percorso le vie indicate da Kant, bensì quelle indicate da Leibniz. Fu particolarmente la scoperta delle geometrie non euclidee ad additare queste vie. La matematica, grazie ai nuovi problemi che di qui trassero origine, è diventata sempre più un "sistema ipotetico deduttivo", il cui valore di verità consiste soltanto nel suo interno nesso logico e nella sua coerenza e non si fonda su alcuna testimonianza dell'intuizione. Essa non si richiama all'intuizione come a un mezzo positivo di dimostrazione e di prova, ma se ne serve soltanto per dare una rappresentazione concreta dei nessi universali che essa costruisce nel pensiero puro.[20]

Per quanto l'aspetto esteriore di una dimostrazione formale sia quello di una semplice correlazione simbolica, ciò che rende tale correlazione una dimostrazione matematica non è solo l'originaria assegnazione di un significato a i simboli che compaiono in essa - significato dal quale si possa fare completamente astrazione nel corso della prova - ma la corrispondenza fra certi simboli e certe regole. E' proprio questa corrispondenza (la quale è espressa da precisi vincoli deduttivi, che sono del tutto estranei al contenuto puramente logico della prova[21]) che contiene un contenuto essenziale il quale mette capo all'edificazione di un oggetto matematico. Così, non solo la correttezza interna di una deduzione non sembra riducibile alla pura coerenza logica, ma, in termini ancora più radicali, il "contenuto di verità" di una dimostrazione matematica si discosta da questa correttezza per riferirsi piuttosto alla capacità da parte del sistema delle regole di essere una rappresentazione adeguata dei concetti originari. E è proprio di questa connessione fra oggetto e concetto che non può essere responsabile che un'intuizione ori-

---

[20]Cfr. Cassirer (1923-29), vol. III, 2 pp. 113-14.

[21]Il teorema di incompletezza di Gödel può proprio essere letto come una prova dell'impossibilità di ridurre questi vincoli deduttivi alle regole puramente logiche della teoria.

ginaria, la quale - se non può forse essere detta "pura" nel senso di Kant - è senza dubbio fondante.

I. 2. δ. *Concetto e rappresentazione simbolica*

Questa conclusione non cancella tuttavia il problema da cui eravamo partiti e ripropone anzi la necessità di un'indagine, la quale sappia render conto delle principali modalità della relazione fra un concetto matematico e la sua rappresentazione simbolica.

Se il disegno che io traccio su di un foglio di carta non è una rappresentazione simbolica del concetto di triangolo che a condizione che esso sia connesso operativamente a altri simboli dello stesso genere, esso mantiene un rapporto con questo concetto che è essenzialmente differente dal rapporto che lega il segno "2" al concetto di secondo numero naturale (o, se vogliamo, di estensione del predicato 'equinumeroso alla classe {0, {0}}'[22]). Il concetto di triangolo è il concetto di una forma particolare, di cui il simbolo corrispondente è una rappresentazione sia pure imperfetta. Se ora traccio un segmento che partendo da un punto interno al triangolo ne taglia uno dei lati e costruisco su questo segmento un nuovo triangolo, la semplice ispezione del disegno sarà sufficiente per assicurarmi del fatto che almeno uno dei due lati restanti del nuovo triangolo taglierà un lato del primo triangolo in un punto diverso da quello in cui era avvenuta la prima intersezione. I due triangoli saranno allora tali che i loro lati avranno almeno due punti in comune. Immaginiamo ora di indicare con le lettere "*h*" e "*b*" le misure dell'altezza e della base di questo triangolo. La relazione che questi concetti hanno con i simboli corrispondenti è ora di genere totalmente differente e deriva da un legame di natura puramente convenzionale.[23] La manipolazione algebrica di questi simboli corrisponde a regole che non hanno più nulla a che vedere, in quanto tali, con tali concetti, ma dipendono semplicemente dall'essere "*h*" e "*b*" dei segni che stanno per certe quantità. Il contenuto simbolico che questi segni si portano appresso non deriva più dal concetto che rappresentano, ma semplicemente dal cadere di questo concetto sotto un concetto più generale, come quello di quantità, il quale, a sua volta, può essere rappresentato simbolicamente solo da un posto vuoto nell'argomento di certe operazioni. Allo stesso modo se indico queste misure per mezzo di due numeri qualsiasi, le moltiplico fra loro e divido il prodotto per due, troverò un nuovo numero, il quale non risulterà che da una manipolazione regolata di certi segni, i quali non sottostanno a quelle regole che per il fatto di essere dei simboli numerali. E' proprio all'opposizione fra queste due situazioni che pare debba ricondursi la distinzione operata da Lambert fra "teoria delle cose" e "teoria dei segni" e è solo in questo quadro che l'idea intuitiva e ancora assi diffusa dell'operare algebrico e aritmetico come un operare su segni può trovare una sorta di giustificazione.

---

[22]Cfr. Frege (1884).

[23]Cfr. Vuillemin (1955), p. 31.

Non è tuttavia difficile rendersi conto che la pratica matematica presenta assai spesso situazioni essenzialmente differenti da queste, in cui la relazione fra simbolo e concetto risponde a modalità del tutto diverse. Per comprendere questo fatto non è certo necessario inoltrarsi in teorie eccessivamente complesse. Immaginiamo, a esempio, di voler dimostrare che la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale alla somma di due angoli retti. Per fare questo non basta certo indagare il disegno di un triangolo e neppure quello che risulta dopo aver tracciato da due dei suoi vertici delle parallele al lato opposto. Occorrerà anche sapere che in quel disegno vi sono due coppie di segmenti paralleli fra loro e che le coppie di segmenti paralleli fra loro godono di certe proprietà. Il nostro disegno - inevitabilmente imperfetto - non potrà darci alcuna assicurazione del parallelismo effettivo di questi segmenti e saremo quindi costretti a tracciare accanto al disegno simboli come questi: "AB // CD; ED // BC", i quali conterranno informazioni essenziali per l'esito della dimostrazione e permetteranno di assegnare a certi angoli certe proprietà che in casi differenti non avremmo certo potuto assegnare. Il disegno qui fungerà semplicemente da supporto denotativo di certi simboli, i quali verranno connessi fra loro in base a certe proprietà dei segmenti che il disegno non può in nessun modo precisare. Un altro esempio potrà forse essere altrettanto istruttivo. Immaginiamo di voler dimostrare la derivabilità di una funzione polinomiale. Per far questo sarà sufficiente scrivere questa funzione nella sua *forma* canonica e compiere sui simboli certe facili operazioni come le seguenti:

$$F(x) = A + Bx + Cx^2 + \dots + Nx^n$$

$$\frac{d}{dx}[F(x)] = \lim_{h \to 0} \frac{A + B(x+h) + C(x+h)^2 + \dots + N(x+h)^n - A - Bx - \dots - Nx^n}{h} =$$

$$= B + 2Cx + \dots + nNx^{n-1}$$

Qui la stringa simbolica che rappresenta la nostra funzione mantiene un rapporto con il concetto corrispondente che è assai differente dal rapporto che si istituisce fra la lettera "*h*" e l'altezza di un dato triangolo. Tale concetto non contiene nulla che questa stringa simbolica non esprima direttamente in modo del tutto esplicito, una volta che i simboli operazionali siano stati interpretati. Esso non è infatti altro che il concetto di un certo legame operazionale, di cui i simboli sono una rappresentazione diretta.

Se una distinzione può allora essere introdotta fra due differenti modalità dell'agire matematico, essa non può certo ridursi all'opposizione fra un pensare intuitivo sui disegni e una pratica combinatoria di simboli privi di contenuto. Ciò che caratterizzerà questa distinzione sarà piuttosto l'opposizione fra la manipolazione di rappresentazioni simboliche convenzionali e quella di rappresentazioni simboliche capaci di esprimere in quanto tali il concetto corrispondente. Se é del tutto ovvio che ogni trasposizione simbolica prevede uno stadio convenzionale originario, il quale permette l'istituzione di un sistema di simboli significanti elementari, è anche chiaro che lo sviluppo di una teoria matematica si misura dalla capacità di costruire concetti di ordine superiore che sussumono sotto di sé precisi oggetti matematici caratterizzati dal possesso di certe proprietà operative. Così se è certo una convenzione quella che permette a un tratto di inchiostro di rappresentare un segmento e a un foglio di carta una regione di piano, il passaggio da queste rappresentazioni elementari alla rappresentazione del concetto di triangolo per mezzo di tre tratti di inchiostro, disposti su quel foglio in modo che essi si intersechino due a due, non ha più nulla di convenzionale. Allo stesso modo se è certo una convenzione quella che stabilisce che la lettera "x" indichi una quantità incognita, che le lettere "a", "b", "c" indichino quantità determinate, che i segni "0", "2", "+" e "=" indichino rispettivamente lo zero, il secondo numero naturale, l'operazione di addizionare e la relazione di eguaglianza, mentre un certo esponente esprime una potenza, la rappresentazione di un'equazione di secondo grado per mezzo della stringa simbolica "$ax^2 + bx + c = 0$" non è, in sé, per nulla convenzionale. Questo concetto non è infatti null'altro che il concetto di quella particolare connessione operazionale che la stringa rende manifesta.

E' in questo quadro (meta)concettuale che mi pare possibile reinterpretare l'idea kantiana dell'operare matematico come un operare sull' "universale in concreto".[24] Se la concretezza è data dalla possibilità di agire secondo regole esplicite, l'universalità è garantita dal carattere non esemplificativo e non convenzionale della rappresentazione simbolica.[25] Con questo non voglio tuttavia sostenere che tutto ciò che è stato storicamente inteso come una dimostrazione matematica debba sottomettersi a un simile modello. Al contrario, io credo che non tutte le dimostrazioni matematiche possano intendersi come il risultato di un agire matematico. Nella maggioranza dei casi è infatti solo l'intuizione del concetto che permette certe associazioni simboliche e che conduce a certe conclusioni. Ciò di cui si tratta è piuttosto il procedere *rigoroso*, che io identifico con un procedere simbolico secondo regole esplicite date *a priori*, il quale permette di associare a una combinazione simbolica iniziale una combinazione simbolica finale (teorema) composta da simboli di uno stesso alfabeto. Se l'obiettivo delle riflessioni precedenti era quello di chiarire la mia nozione di oggetto matematico, si tratterà ora di comprendere come questa nozione possa essere utile per un'analisi di quell'attività ben più ampia del dimostrare rigorosamente che è il "far matematica" e di cui quest'ultimo non è che una parte estensionalmente minore.

---

[24]Cfr. Kant (1764) e (1781), p. 469 e segg..

[25]A prima vista una tale reinterpretazione dell'idea di Kant può forse apparire troppo restrittiva. Kant non ha infatti alcuna difficoltà a considerare come un operare matematico anche l'operare algebrico - in cui "si fa completa astrazione dalla natura dell'oggetto" [cfr. (1787), p. 471]. Il carattere non convenzionale della rappresentazione potrebbe quindi essere inteso, almeno dal punto di vista di Kant, come una condizione inessenziale. La questione è tuttavia più sottile. L'operare algebrico appare infatti un operare matematico solo nella misura in cui esso si presenta come un operare sulla quantità in generale e non come un operare su certe e determinate quantità. Lo studente delle prime classi che risolve algebricamente un qualsiasi problema relativo a certe quantità non è certo un matematico e ciò che sta imparando non è - da un punto di

I. 2. ε. *Kant*

L'idea che Kant possiede della matematica è quella di un operare su intuizioni pure, le quali sono direttamente una manifestazione di un concetto. Per quanto assai noti i seguenti passaggi della "dottrina trascendentale del metodo" possono ben servire a chiarire un tale punto di vista e a introdurre il nostro prossimo argomento di discussione.

> La conoscenza filosofica è la conoscenza razionale fondata su concetti. La conoscenza matematica è la conoscenza razionale fondata sulla costruzione di concetti. Costruire un concetto, peraltro, significa presentare *a priori* l'intuizione ad esso corrispondente. Per la costruzione di un concetto si richiede quindi un'intuizione non empirica, la quale di conseguenza, intesa come intuizione, è un oggetto singolo, ma d'altra parte, intesa come costruzione di un concetto (di una rappresentazione universale), deve esprimere nella rappresentazione una validità universale per tutte le intuizioni possibili, che rientrano nel medesimo concetto. Io costruisco un triangolo, così, rappresentando l'oggetto che corrisponde a questo concetto, o nell'intuizione pura, mediante una semplice immaginazione, oppure (in base all'intuizione pura) sulla carta, nell'intuizione empirica; in entrambi i casi, io rappresento però tale oggetto del tutto *a priori*, senza averne tratto il modello da nessuna esperienza. La singola figura disegnata é empirica, ma serve nondimeno per esprimere il concetto (nonostante l'universalità di questo), poiché in tale intuizione empirica si considera sempre il solo atto della costruzione del concetto - al quale risultano indifferenti parecchie determinazioni, quelle per esempio della grandezza dei lati e degli angoli - e sia fa perciò astrazione da queste differenze, che non mutano il concetto di triangolo. [...]
>
> Si dia a un filosofo il concetto di triangolo, e gli si faccia scoprire in base al suo modo di pensare, quale rapporto la somma degli angoli di tale triangolo debba avere rispetto all'angolo retto. [...] Egli può analizzare e chiarire il concetto di linea retta, o di angolo, o del numero tre, ma non potrà giungere ad altre proprietà che non si trovino affatto in questi concetti. Si supponga invece che debba occuparsi di questa questione il geometra. Egli comincerà senz'altro a costruire un triangolo. In quanto egli sa che due angoli retti, presi assieme, equivalgono alla somma di tutti gli angoli contigui, che possono venire costituiti, partendo da un punto, sul semipiano limitato da una retta che contiene quel punto, egli prolunga allora un lato del suo triangolo, ed ottiene due angoli contigui, la cui somma è uguale a due angoli retti. Di questi due angoli, egli divide poi quello esterno, conducendo una linea parallela al lato opposto del triangolo, e vede sorgere così un angolo contiguo esterno, che è uguale ad un angolo interno, &c. In tal modo, mediante una catena di inferenze egli giunge, sempre guidato dall'intuizione, ad una risoluzione del problema pienamente evidente, e al tempo stesso universale.[...]
>
> Esiste, è vero, una sintesi trascendentale fondata su semplici concetti [...].Ma nei problemi matematici si tratta non già di questo [...], bensì delle proprietà degli oggetti in se stessi, solo in quanto queste sono connesse al concetto di essi.

---

vista matematico - che l'uso corretto di certe regole. Inteso in tal modo - come un operare sulla quantità in generale - un procedimento algebrico non è allora per nulla estraneo alla "natura dell'oggetto" e, anzi, l'insieme delle regole algebriche non sono che il risultato di una oggettivazione del concetto di quantità e non esprimono, in quanto tali, alcuna convenzione differente dalla semplice scelta dei segni elementari.

> [...] Dal concetto [...] io posso procedere all'intuizione pura [...] che corrisponde ad esso, al fine di considerarlo *in concreto* entro tale intuizione e di conoscere [...] *a priori* [...] ciò che appartiene all'oggetto del concetto.[26]

Per quanto da questi brani sia sufficientemente chiaro che per Kant l'oggetto matematico non corrisponda all'oggetto empirico costituito dai simboli o dalle figure in quanto combinazioni grafiche,[27] lo statuto della relazione fra oggetto e concetto matematico resta tutt'altro che chiarito e con esso è la nozione stessa di oggetto matematico che appare sotto molti aspetti oscura.

Una prima interpretazione possibile è quella che vede il carattere saliente della concezione kantiana nell'identità che essa affermerebbe aver luogo in matematica fra oggetto e concetto. L'affermazione di tale identità non dovrebbe naturalmente confondersi qui con la semplice accettazione di una posizione platonista. Il punto non sarebbe infatti che ogni concetto matematico è un oggetto, ma piuttosto che in matematica ogni concetto si identifica direttamente con un *oggetto universale* di cui ogni oggetto particolare che è sussunto sotto quel concetto è una esemplificazione. Per fare un esempio, non si tratta semplicemente di affermare che il concetto di triangolo è un oggetto, ma piuttosto che esso si identifica direttamente con l'oggetto `triangolo´. La principale difficoltà di una tale interpretazione deriva dal fatto che essa sembra contraddire numerosi passaggi kantiani - e, fra questi, alcuni appena citati - in cui la dualità oggetto/concetto mantiene tutta la sua forza. Se infatti la "presentazione di un'intuizione" equivale secondo Kant alla "costruzione di un concetto", l'idea che egli ci presenta è quella della rappresentazione di un oggetto che *corrisponde* a un concetto, il quale può, peraltro, essere pensato e analizzato in termini puramente discorsivi.

La questione non è semplicemente esegetica. Con l'eliminazione della dualità oggetto/concetto sembra infatti venir meno tanto la fondamentale distinzione fra intuizione e intelletto che la stessa possibilità di intendere la sinteticità della matematica come una proprietà dei suoi giudizi. Se l'oggetto `triangolo´ equivale al concetto, l'individuazione di ogni proprietà di tale oggetto è immediatamente il risultato di un'analisi del concetto e la sinteticità della matematica non può quindi che ridursi all'originario atto intuitivo che dà vita all'oggetto-concetto. La situazione non muta qualora si voglia prendere in considerazione l'esempio di un giudizio aritmetico. Se l'oggetto complesso costituito dalla somma `5+7´ fosse identificato con il concetto di questa somma, l'identità `5+7=12´ sarebbe il risultato di una semplice analisi di tale concetto e l'atto sintetico dovrebbe ridursi alla costruzione originaria della serie numerica. Accettare queste conclusioni equivale, io credo, a impoverire in modo sostanziale la tesi kantiana, fino a mettere luogo a un suo vero e proprio snaturamento. Presa nella sua accezione originaria una tale

[26] Cfr. *ivi*, pp. 469-75.

[27] E' proprio questo che invece sembra credere Milhaud - uno fra gli altri - nel suo classico articolo del 1904 sulla filosofia kantiana della matematica [cfr. Milhaud (1904), p. 387]:

> [...] nous voyons Kant affirmer nettement le rôle du symbole concret et particulier, et placer les éléments essentiels de la Géométrie et de l'Arithmetique dans des objets singuliers qui se posent sous le yeux du savant, qu'il construit en intuition.

tesi afferma infatti la possibilità di acquisire conoscenza per mezzo di un operare su oggetti che non sono (i) concetti (corrispondenti). Il seguente brano mi pare a questo proposito del tutto esplicito.

> A dire il vero si potrebbe da principio pensare che la proposizione: 7+5=12, sia una proposizione semplicemente analitica, che consegua, sulla base del principio di contraddizione, dal concetto di una somma di sette e cinque. Senonché, quando si considera la cosa più da vicino, si trova allora che il concetto della somma di 7 e 5 non contiene null'altro, se non l'unione dei due numeri in uno solo: mediante ciò non viene affatto pensato, quale sia quest'unico numero, che riunisce gli altri due. Il concetto di 12 non è per nulla già pensato, per il fatto che io pensi semplicemente quell'unione di 7 e 5, ed io posso analizzare sinché voglio il mio concetto di una tale somma possibile, ma non ritroverò in esso il 12. Si deve uscir fuori da questi concetti, prendendo in aiuto l'intuizione che corrisponde ad uno dei due - ad esempio le proprie cinque dita, oppure, come fa Segner nella sua aritmetica,[28] 5 punti - ed aggiungendo così successivamente le unità del 5, dato nell'intuizione, al concetto del 7.[29]

Sembra così aprirsi la strada per una seconda interpretazione, la quale pensa la costruzione di un concetto (*Konstruktion der Begriff*) come un processo di oggettivazione, nel quale è più propriamente l'oggetto a venir costruito. La dualità oggetto/concetto non verrebbe allora a essere intaccata e la sinteticità di un giudizio dipenderebbe esattamente dalla possibilità di trarre conoscenze manipolando oggetti (intuizioni pure) che mostrano in quanto tali delle proprietà che non erano comprese nel concetto corrispondente. Un esempio può forse chiarire un tale punto di vista. Dato il concetto di triangolo, inteso come quella porzione di piano che appartiene contemporaneamente ai tre semipiani individuati da tre angoli i cui lati si intersecano a due a due, l'atto costruttivo corrisponde alla trasposizione di questo concetto in un oggetto determinato (entro un certo contesto operativo), la cui manipolazione simbolica può mettere in luce certe proprietà non incluse nel concetto originario. Un giudizio come `la somma degli angoli interni di un triangolo è uguale alla somma di due angoli retti´ conterrà allora una informazione essenzialmente nuova: non è possibile individuare alcuna regione di piano, la quale abbia le caratteristiche indicate nel concetto di triangolo e che non sia *anche* tale che la somma dei tre angoli che la individuano sia uguale alla somma di due angoli retti. Per quanto tale informazione derivi deduttivamente da altre e precedenti informazioni, le regole che permettono questa deduzione non sono che l'espressione di un concetto, in cui la proprietà in questione non era per nulla inclusa.

Se una tale interpretazione può apparire per molti versi convincente, essa sembra condurre abbastanza facilmente a una conclusione che Kant non avrebbe mai potuto accettare: se l'informazione contenuta in un giudizio matematico è qui *a priori*, essa non può anche considerarsi come l'espressione di una verità necessaria. Due sono infatti i casi. O il giudizio verte sull'oggetto (che se non vuole essere identificato con il semplice disegno deve contenere come proprie proprietà relazionali l'insieme delle regole con cui si

---

[28] Cfr. Segner (1739).

[29] Cfr. Kant (1787), p. 37.

opera su di esso), ma allora è la sinteticità stessa che viene meno; o il giudizio verte sul concetto, ma allora la sua verità dipende dalla trasposizione oggettuale, dalla relazione che il concetto intrattiene con un dato oggetto e può quindi venir contraddetta da una differente rappresentazione. Anche se il caso della geometria non euclidea è la più esplicita manifestazione di questa possibilità, la difficoltà è qui interna alla nozione stessa di costruzione di un concetto e è tale che Kant non avrebbe certo potuto ignorarla.

Per quanto entrambe inaccettabili, queste due interpretazioni mettono bene in luce, a me pare, le due essenziali esigenze della concezione kantiana: la distinzione fra concetto e oggetto - senza la quale sembra impossibile parlare di giudizi sintetici - e l'instaurazione di un legame non arbitrario fra questi - senza il quale i giudizi non potrebbero essere necessari. L'unica strada che pare restare aperta è allora quella di un'affermazione di priorità dell'intuizione sul concetto, il quale non dovrebbe intendersi che come una descrizione discorsiva di un contenuto che si presenta alla sensibilità come un dato originario. Sarebbe allora il concetto di triangolo a dover essere inteso come una rappresentazione all'intelletto di un oggetto che è dato prima di questo concetto. Se vi sono molte ragioni per riconoscere questo come il punto di vista di Kant, spero che la discussione precedente sia servita per rendere esplicita l'inadeguatezza di un tale punto di vista. Ciò che infatti risulta difficile - e forse impossibile - da capire è che cosa si debba esattamente intendere come il contenuto originario di una intuizione pura, ovvero come un oggetto matematico, il quale dovrebbe esistere prima di venir pensato, come il fantasma di un concetto non ancora venuto alla luce. Certo non si può trattar qui di un'immagine, a meno che non si voglia privare l'oggetto delle sue essenziali proprietà relazionali, e neppure di una figura, la quale serve piuttosto "per esprimere il concetto". Ma di che cosa si tratta allora? La contraddizione insita nella concezione kantiana della matematica sta proprio in questo: nella contraddittoria esigenza che essa manifesta di una priorità dell'intuizione pura sul concetto (la quale sia una garanzia di apoditticità) e di una priorità del concetto sull'intuizione pura (la quale permetta di assegnare a questa un contenuto).

E' la difficoltà già evidenziata da Cavaillès che si propone quindi sotto un altro punto di vista. Il confronto con le lucide osservazioni di questi è così doveroso:

> [...] la démonstration mathématique elle-même est loin [nella concezione kantiana] d'être définie avec clarté. La validité de la construction qui permet de sortir du concept est fondée sur l'unité de l'intuition formelle de l'espace. Mais le caractère extra-intellectuel de celle-ci rend illusoire tout effort de transformer en système déductif une science quelconque, à commencer par la géométrie. Même le modèle euclidien se trouve - peut-être à l'insu de Kant - impossible à maintenir. En fait il n'y aurait plus en géométrie que constatations enchaînées les unes aux autres sans que le lien d'enchaînement ait autre autorité encore que l'affirmation autonome d'un acte.[30]

[30]Cfr. Cavaillès (1947), p. 13.

Prise [...] dans son authenticité [...] [la teoria kantiana della matematica] reste inadéquate en tant qu'elle confond le moment dialectique de la position du concept et le moment transcendantal de sa schématisation. La notion de construction dans l'intuition doit concilier l'exigence de domination par le concept avec l'insertion de son objet dans une multiplicité qui lui procure une sorte d'indépendance par rapport à tout contenu actuel de pensée. Il y a dans l'objet mathématique singulier comme une affinité avec ce qui n'est pas lui, par quoi il échappe à sa définінition et justifie le progrès hors de lui. Mais comment, dans la théorie kantienne du concept, poser en termes intellectuels une liason qui semble comporter un élément irréductible d'exteriorité?[31]

Ma alla critica Cavaillès sembra far seguire l'indicazione di un programma:

A chaque étape du progrès mathématique de nouvelles notions se voient refuser leur droit de cité, parce qu'elles ne peuvent procurer des représentations dans le système intuitif préexistant. Ainsi pour le nombre négatif, pour les imaginaires, pour l'infiniment petit et l'infiniment grand à l'époque de Kant. La solution chaque fois n'est pas, comme on le croit superficiellement, la découverte d'une traduction dans une intuition spatiale immuable (représentant des nombres négatifs sur une droite, des imaginaires dans le plan): aussi bien faudrait-il donner un sens à la notion confuse de traduction. La solution consiste dans une transformation de la zone intuitive c'est-à-dire des règles qui en posent l'emploi de pensée, ou le système schématique. L'exemple le plus frappant est le continu numérique avec la définition donnée par Dedekind. Autrement dit l'intuition dans sa quiddité progresse parallèlement à l'enchaînement dialectique des concepts. Elle n'est que la manifestation pour la conscience empirique, d'une indépendance relative des méthodes et des théories qui permettent des élaborations autonomes provoquant par leurs résultats rencontres et renversements. [...] Le lien entre cette superposition intuitive et la dialectique du concept rest le problème fondamental de la philosophie mathématique.[32]

E' il problema della relazione fra oggetto e concetto che si presenta quindi come il problema centrale.

I. 2. ζ. *Ipotesi epistemologiche*

La seconda delle precedenti interpretazioni della filosofia kantiana contiene, nei suoi caratteri essenziali, un'ipotesi epistemologica che io credo possa costituire un generale punto di riferimento per indagini successive e più particolari. Il mio proposito nelle pagine che seguiranno sarà proprio quello di fornirne un'esposizione più dettagliata e precisa di questa ipotesi.

Il senso in cui parlo qui di "ipotesi epistemologica" si avvicina a quello in cui Cavaillès ha parlato di "teoria della scienza".[33] Ciò a cui penso non è ne né un modello generale per la dinamica matematica, né un insieme di tesi più o meno precise che riguardino la "natura" della conoscenza matematica, la sua origine, la fonte da cui essa scaturisce, il suo statuto ontologico, il suo rapporto con le altre scienze o, come spesso si dice, con la realtà. Io credo che

[31]Cfr. Cavaillès (1941), pp. 271-2.
[32]Cfr. *ivi*, pp. 272-3.
[33]Cfr. Cavaillès (1947).

la possibilità di affrontare con successo[34] questioni come queste dipenda dal possesso di una adeguata struttura interpretativa che trasformi un insieme disordinato di dati in un *corpus* di fenomeni sottoponibili come tali alla nostra riflessione. Il compito di fornire questa struttura mi sembra debba essere ascritto a una riflessione in qualche modo precedente, la quale si limiti a immaginare interazioni possibili, o meglio a fornire "l'alfabeto elementare" di queste interazioni, isolando l'aspetto puramente formale[35] di certe strutture relazionali che costituiscono l'*a priori* originario dell'indagine epistemologica, il *mondo* a cui essa si riferisce. Si tratta di stabilire una certa struttura categoriale che permetta di parlare in termini sufficientemente dettagliati di questo mondo, di descriverlo, di intenderlo come il realizzarsi di una possibilità fra altre.

Un simile tentativo si trova tuttavia subito alle prese con una difficoltà preliminare, che proietta un'ombra sulla possibilità stessa di stabilire precisamente ciò in cui esso dovrebbe consistere. E' proprio dall'esame di questa difficoltà che a me pare si debba prendere le mosse.

Ciò che resta del tutto indiscusso nella teoria kantiana è l'oggetto stesso dell'indagine filosofica. La matematica è data come tale e il compito del filosofo critico è quello di individuarne alcuni caratteri essenziali. Ora, la matematica può essere intesa in due sensi distinti: o come una certa attività intellettuale o come il prodotto finale di questa attività. Un'attività intellettuale non ha tuttavia nessun modo di manifestarsi che sia differente dall'esibizione dei suoi prodotti, i quali non sono, in ultima istanza, che delle produzione linguistiche redatte secondo differenti alfabeti simbolici. Se vogliamo quindi intendere la matematica (tanto come attività che come insieme di prodotti) come oggetto di una indagine, dobbiamo rassegnarci a rivolgere la nostra attenzione a un certo insieme di prodotti linguistici. Indipendentemente dallo scopo con cui questa indagine potrà essere condotta, così come dagli strumenti di cui essa vorrà servirsi, la possibilità stessa di determinarne in modo preciso i confini dipenderà dalla possibilità di distinguere fra le altre le produzioni linguistiche che potranno esser dette matematiche. Se qualcuno potrebbe certo proporre un qualche criterio logico atto a fornire

---

[34] Personalmente non credo, in verità, che la determinazione di un modello generale per la dinamica matematica debba essere uno dei compiti della riflessione filosofica. Ritornerò su questo punto più oltre.

[35] Una delle principali ambiguità dell'usuale vocabolario epistemologico riguarda a mio avviso il curioso fenomeno di metonimia che ha ristretto in molti contesti l'uso del termine "formale" limitandone la portata denotativa a processi inferenziali o a costruzioni teoriche realizzate entro strutture simboliche ben determinate e, come si suol dire, artificiali. Benché questo uso sia largamente diffuso, io credo indispensabile rivendicare il potere esplicativo di una nozione più ampia (e originariamente connessa a questo termine) che individua i caratteri universali di certi oggetti (o strutture di oggetti), relativamente a un certo livello ontologico che ne fissa i contenuti specifici. Si potrà così parlare delle proprietà formali di un tavolo in contrapposizione con le proprietà individuali di un tavolo particolare che è ora parte del mio campo visivo. La distinzione fra ciò che è forma e ciò che è contenuto è ovviamente relativa alla intenzionalità di certe indagini, ma questo non toglie che essa possa, e assai spesso debba, essere stabilita.

questa distinzione, un tale criterio non potrà mai fare altro che selezionare un certo sottoinsieme di enunciti fondandosi sulla loro forma logica, sull'uso di un certo alfabeto simbolico o su altri caratteri per così dire "esteriori" di tali enunciti. Anche ammesso che in questo modo si possa giungere a disporre di una caratterizzazione adeguata degli enunciati che partecipano a una dimostrazione matematica, sembra assai più difficile stabilire una distinzione capace di isolare tutte e sole quelle produzioni linguistiche che un matematico realizza nel corso della sua attività: da quelle che esprimono la prima intuizione di un risultato, a quelle che chiariscono lo scopo di una certa dimostrazione o mostrano il rilievo di un certo teorema o, ancora più significativamente, quelle che stabiliscono un'analogia fra differenti campi di ricerca, inaugurano un programma o mettono capo a una nuova teoria fondata sull'introduzione di nuovi oggetti che dovranno lentamente venir precisamente determinati.

Così o ci si rassegna a limitare l'estensione della matematica a un certo universo di inferenze intensionalmente definito in modo più o meno preciso - o, che dir si voglia, all'attività che mette capo alla produzione di queste inferenze - o si è costretti a abbandonare la speranza di poter giungere a una determinazione *a priori* di quel mondo che costituisce l'oggetto stesso della nostra indagine epistemologica. Ciò significa che l'oggetto di tale indagine ha un'intrinseca dimensione storica. Esso è un certo insieme di produzioni linguistiche la cui determinazione (inevitabilmente imprecisa) è essa stessa parte dell'indagine e manifesta una sorta di "valutazione etica" che la riflessione filosofica traduce nei termini più rassicuranti di una struttura categoriale.[36] Questa struttura categoriale possederà poi dei caratteri essenzialmente diversi qualora si voglia limitare l'indagine ai prodotti linguistici in quanto tali o la si voglia al contrario allargare all'attività stessa che si esprime attraverso questi prodotti. Sarà solo l'esibizione di questa struttura categoriale che potrà in qualche modo fornire una determinazione *a posteriori* dell'oggetto a cui l'indagine *era* rivolta.[37]

I. 2. η. *Crescita della conoscenza matematica*

L'idea centrale da cui prende avvio l'ipotesi epistemologica che cercherò di presentare qui è la possibilità di distinguere fra (almeno) tre differenti modalità dell'intuizione. L'intuizione è in primo luogo la facoltà che rende presente un oggetto esterno alla sensibilità e che permette quindi di riferirsi

[36]Questo vale naturalmente anche qualora ci si accordi di limitare l'indagine a un certo insieme di produzione linguistiche oggettivamente determinato sulla base di un criterio esplicito (per considerare un'esempio assai semplice, si può decidere di considerare la scienza come l'attività che si manifesta mediante l'enunciazione di tutti e soli gli asserti che soddisfanno il criterio di Popper). La valutazione etica non si manifesta tuttavia qui in termini direttamente storici, ma contiene un esplicito riferimento assiologico che il criterio non fa che esprimere in termini più o meno precisi.
[37]Se il mio obiettivo sarà in qualche modo raggiunto i prossimi paragrafi dovranno così contenere una chiarificazione di alcuni dei concetti che ho utilizzato per fornire la determinazione del concetto di matematica nel corso del paragrafo I.1.π.

a esso. Essa è in secondo luogo la facoltà che permette di dar vita a un'esistenza per me o, se si preferisce, che fornisce il materiale per la determinazione originaria di un concetto. L'intuizione è poi in terzo luogo la facoltà da cui dipende la trasposizione di un concetto in un determinato oggetto. E' solo la compartecipazione di queste modalità che permette l'edificazione di una conoscenza matematica.

Ogni produzione matematica si erige sulla base di una conoscenza già data, la quale si esprime per mezzo di un insieme di produzioni linguistiche o, più in generale, di combinazioni simboliche che l'intuizione, nel suo primo uso, permette di intendere come la manifestazione di strutture relazionali di concetti e/o di oggetti non concettuali. L'accrescimento di tale conoscenza dipende dalla realizzazione di almeno una fra le seguenti *performance*.

i. Sfruttando adeguatamente le regole di inferenza accettate si possono individuare nuove relazioni fra oggetti già dati. Queste relazioni essendo già in qualche modo contenute nelle proprietà degli oggetti, l'accrescimento di conoscenza deriva qui da un atto di scoperta simile a quello che permette ogni giorno di individuare proprietà non ancora note degli oggetti che ci circondano. Se tale acquisizione dipende da un semplice operare pratico, essa richiede un doppio intervento dell'intuizione nel suo primo uso. Da una parte essa permette di delineare un percorso inferenziale fra gli infiniti possibili, dall'altra essa permette di rileggere la combinazione simbolica conclusiva come l'espressione di una relazione fra certi oggetti, i quali non sono più individuati dalle regole operative che li caratterizzano, ma dai concetti corrispondenti. Quest'ultimo passaggio pare a me essenziale per qualificare una simile *performance* come un atto accrescitivo della nostra conoscenza. Senza di esso tutto ciò che la combinazione simbolica può esprimere è che gli argomenti di certe operazioni possono venir combinati secondo una certa successione di quelle operazioni. Consideriamo il semplice esempio di una derivazione algebrica elementare. Il passaggio dalla scrittura "$x^2 + 6x + 9 = 0$" all'altra scrittura "$x = -3$" contiene un accrescimento delle nostre conoscenze solo nella misura in cui esso è letto come l'individuazione del valore della *radice* (doppia) dell'*equazione* assegnata. In caso contrario esso resta una combinazione simbolica possibile che è stata semplicemente esplicitata su un certo pezzo di carta. Tutto ciò non pare a me particolarmente problematico. Qui gli oggetti matematici si comportano infatti esattamente come gli oggetti empirici. Se io posso lanciare un sasso verso il mare senza chiamare in nessun modo in causa il concetto di sasso, non potrò certo dire (o sapere) di aver lanciato un sasso verso il mare senza far ricorso a questo concetto. La conoscenza è qui il riconoscimento degli esiti di un certo atto compiuto su certi oggetti. Ma è proprio questo riconoscimento che richiede l'intermediazione del concetto.[38]

---

[38] Se, come abbiamo visto, in molti contesti matematici il concetto non è che la rappresentazione discorsiva di certe proprietà operative, ciò non toglie che una conoscenza effettiva debba richiedere l'intermediazione di questa rappresentazione discorsiva. Nessun oggetto matematico potrà infatti identificarsi con la rappresentazione discorsiva dell'insieme delle relazioni che certe operazioni permettono.

ii. L'analisi di certi concetti matematici può suggerire certe connessioni indipendentemente dalla individuazione di una catena inferenziale che esprime una relazione fra gli oggetti corrispondenti. Qui l'intuizione interviene ancora nel suo primo uso, manifestando delle proprietà relazionali che hanno luogo in un certo mondo. Queste connessioni possono suggerire certi tentativi computazionali realizzati secondo le regole di cui già si dispone o possono portare alla introduzione di nuove regole e quindi di nuovi oggetti. Esse possono tuttavia anche restare delle ipotesi generali che esprimono la convinzione da parte di una certa comunità dell'impossibilità di costruire degli oggetti particolari che godono o non godono di certe proprietà operative. Ciò è in particolare assai frequente in almeno due differenti casi. Il primo è quello in cui una certa oggettivazione non è completa e non permette quindi di individuare in ogni contesto, delle regole operative adeguate per esprimere delle proprietà assegnate a una certa classe di oggetti (l'esempio del concetto di numero infinitamente piccolo presentato nel paragrafo I.1.ξ. mi sembra significativo). Il secondo è quello in cui la correlazione proposta individua o esprime un'analogia fra certi oggetti appartenenti a differenti strutture teoriche.

iii. L'organizzazione interna di un certo insieme di conoscenze già acquisite può essere modificata, proponendo diversi percorsi inferenziali capaci di produrre quello stesso insieme di conoscenze. L'individuazione di un percorso inferenziale[39] corrisponde a ciò che siamo soliti intendere come l'edificazione di una teoria. L'accrescimento di conoscenza consiste allora qui nella individuazione di una nuova struttura teorica che permetta un passaggio più adeguato (secondo certi canoni) da alcune conoscenze a altre o, nei casi più interessanti, l'unificazione di insiemi di conoscenze ritenute fino a allora separati. Una tale unificazione può suggerire la possibilità di completare o modificare certe oggettivazioni connettendo a un concetto un nuovo e differente oggetto. Fino a che questo secondo atto non è compiuto l'intuizione agisce qui ancora solo nel primo dei suoi usi.

iv. L'analisi di una certa struttura relazionale di concetti matematici può permettere l'individuazione di alcune invarianti, la cui descrizione dà origine alla determinazione di un nuovo concetto che permette il riferimento a una certa sottoclasse di oggetti accumunati dal possesso di certe particolari caratteristiche che li distinguono da altri oggetti appartenenti a una medesima classe. Qui l'intuizione agisce nel secondo dei suoi usi, permettendo l'edificazione di un nuovo concetto la cui (eventuale) trasposizione oggettuale deriva da un atto di oggettivazione interna. Se questo è sicuramente il percorso più usuale tramite il quale prende forma un nuovo concetto, si possono immaginare situazioni diverse, in cui l'individuazione di certe invarianze agisce suggerendo una modificazione di vecchi concetti allo scopo di allar-

[39]Uso qui il termine "percorso inferenziale" per riferirmi tanto ad argomentazioni discorsive che a connessioni deduttive originate da una computazione.

garne la capacità referenziale. L'esempio delle successive estensioni del concetto di numero è a questo proposito significativo. Spesso in casi come questi la determinazione di un nuovo concetto avviene contemporaneamente alla sua oggettivazione e anzi il concetto si presenta proprio e solo come la rappresentazione discorsiva di un certo oggetto. Ciò avviene quando l'invarianza individuata riguarda certe strutture relazionali rese possibili dall'applicazione di certe operazioni. Così il concetto di funzione polinomiale si presenta a esempio come del tutto indissociabile dall'oggetto corrispondente. Anche in tal caso un atto di determinazione concettuale resta comunque indispensabile al fine di fare dell'oggetto in questione il riferimento di un certo insieme di conoscenze.

v. L'accrescimento della nostra conoscenza matematica può derivare inoltre da un atto di oggettivazione, il quale può essere, come abbiamo visto, tanto successivo che contemporaneo alla determinazione di un nuovo concetto. E' del tutto evidente tuttavia che la contemporaneità fra oggettivazione e determinazione é possibile solo nel caso in cui il concetto esprime certe invarianze operazionali riferite a una ben determinata struttura relazionale di oggetti. L'oggetivazione può essere quindi qui soltanto interna. In casi come questi un determinato oggetto matematico può quindi nascere senza nessun intervento dell'intuizione nel suo terzo uso. E' la semplice individuazione di un'invarianza che dà contemporaneamente origine all'oggetto e al concetto. In tutti gli altri casi la determinazione del concetto non è per nulla sufficiente a realizzare l'atto di edificazione di un oggetto. Le proprietà che il concetto esprime devono infatti venir tradotte in un insieme di possibilità operative che in un testo matematico possono essere esibite o per mezzo di una *definizione* esplicita o tramite l'edificazione diretta di una certa struttura relazionale fra simboli. In entrambi questi casi l'intuizione deve agire secondo una differente modalità che assume il carattere di una traduzione simbolica e che esprime il suo terzo uso.

vi. La determinazione di un nuovo concetto matematico può derivare anche dall'analisi di certe strutture relazionali fra concetti non matematici. Si tratta di trasporre una certa invarianza fenomenica, o più semplicemente un concetto già determinato, in un contesto relazionale in cui essa possa mettere capo a una oggettivazione. Qui l'accrescimento conoscitivo si qualifica come un accrescimento della conoscenza matematica nella misura in cui il concetto in questione è realmente oggettivato o è interpretato in un contesto che permette di tradurre la sua determinazione nei termini di una relazione fra altri concetti già intesi come matematici o, semplicemente, è direttamente interpretato nei termini di un concetto matematico interno già disponibile. In tutte e tre i casi è solo una interpretazione di un concetto esterno come un concetto interno che permette quindi di intendere la determinazione del concetto originario come la determinazione di un concetto matematico. Se il concetto interno è a sua volta nuovo, un tale atto permette di introdurre contemporaneamente due nuovi concetti matematici, uno esterno (che pur preesistito come tale è *ora* inteso come un concetto matematico) e uno interno, il quale deriva proprio e solo da questa interpretazione. Una simile *performance* è chiaramente un atto complesso, in cui l'intuizione sembra debba successivamente intervenire secondo i suoi tre differenti usi. Il secondo uso permette infatti la determinazione di un concetto non ancora matematico, che il primo uso permette di trasporre in un concetto interno, il quale, *può* a sua volta, venir oggettivato.

I. 2. θ. *Platonismi*

Se ognuno di questi atti produce per il solo fatto di venir realizzato un accrescimento della nostra conoscenza matematica è solo la combinazione successiva di differenti atti di questo tipo che mette capo a un'attività matematica creativa.[40] Ma, indipendentemente dalle modalità possibili con cui essa si esplica, in che cosa consiste, più in generale, questa attività, o, per dir meglio, qual è la sua natura gnoseologica? Si tratta di un'attività che ci conduce a scoprire mondi già esistenti, oppure essa consiste nella descrizione sempre più dettagliata di un solo modo ideale intrinsecamente unitario? o non è forse una vera e propria attività costruttiva o, ancora, semplicemente, un modo di parlare del mondo degli oggetti empirici che ci circondano, di rappresentarlo al nostro intelletto?

Sebbene spesso presentata in termini essenzialmente metaforici l'ipotesi platonista mantiene inalterato il suo fascino. Dietro le metafore più o meno felici sembrano tuttavia nascondersi orientamenti spesso profondamente differenti, il cui solo denominatore comune consiste nella esplicita affermazione di esistenza delle *idee matematiche.* Fra le innumerevoli versioni di questa ipotesi ne presenterò tre, al confronto delle quali spero che il mio punto di vista possa ulteriormente chiarirsi.

In primo luogo le idee matematiche possono venir intese come un certo insieme di "idee fondamentali" che esistono *a priori* rispetto al nostro tentativo di conoscerle e che devono essere semplicemente scoperte. L'idea deve essere qui intesa come una sorta di unità concettuale elementare, o meglio come *l*'unità concettuale elementare. L'attività matematica non consisterebbe quindi in altro che nel tentativo di accedere a queste idee e di dare di esse una rappresentazione linguistica la più possibile adeguata. Se un tale mondo originario delle idee volesse essere concepito come organizzato secondo una gerarchia data con esso, si tratterebbe allora anche di rintracciare questa gerarchia e di riprodurla per mezzo di un'adeguata struttura teorica.[41] Sebbene

---

[40]Non si confonda la nozione di matematica come attività (o, che dir si voglia, di attività matematica) con la nozione di "operare matematico" che ho presentato nel precedente paragrafo I.1.μ. e che non ne costituisce che un aspetto (spesso marginale).

[41]Una filosofia della matematica che mi pare avvicinarsi a questo modello è quella difesa in Boutroux (1920). Ecco come questi si esprime [cfr. *ivi*, pp. 203, 203-04 e 211-12]:

> Afin de rendre compte de cette résistence opposée par la matière mathématique à la volonté du savant, nous sommes obligés de supposer l'existence de *faits mathématiques* indépendants de la construction scientifique; nou sommes forcé d'attribuer une objectivité véritable aux notions mathématiques; objectivité que nous appellons

il riferimento non sia qui soltanto alle idee matematiche e l'accento non sia messo, per conseguenza, sull'atto della scoperta, ma solo su quello della espressione, mi sembra che l'ultimo paragrafo della prima *Ricerca logica* di Husserl contenga un punto di vista che potrebbe ben servire come fondamento ideale per questa ipotesi, che potremmo intendere come genuinamente platonista.

> Finora abbiamo parlato prevalentemente di significati che, come dice già la parola, la quale nel suo uso normale ha un senso relativo, sono significati di espressioni. Tuttavia, non sussiste di per sé alcun nesso necessario fra le unità ideali che fungono di fatto come significati ed i segni ai quali essi sono legati, cioè per mezzo dei quali essi si realizzano nella vita psichica dell'uomo. Non possiamo quindi neppure affermare che tutte le unità ideali di questo genere sono significati dati in una espressione. Ogni caso di formazione di nuovi concetti ci insegna come si realizza un significato che in precedenza non era ancora realizzato. Come i numeri - nel senso che si presume ideale dall'aritmetica - non appaiono né scompaiono con l'atto del contare, e la serie numerica infinita rappresenta perciò un sistema fissato oggettivamente e nettamente delimitato da una legalità ideale, di oggetti generali che nessuno può accrescere o diminuire; così accade anche per le unità ideali, puramente logiche: per i concetti, le proposizioni, le verità; in breve per i significati logici. Essi formano un sistema idealmente chiuso di oggetti generali, ai quali è accidentale il fatto che siano pensati o espressi. Vi sono dunque innumerevoli significati che sono, nel senso comune relativo del termine significati meramente possibili, mentre essi non vengono mai ad espressione e non potranno mai venire ad espressione a causa dei limiti delle forze di conoscenza dell'uomo.[42]

Ma, per quanto "estremamente seducente", una tale "concezione di un universo immutabile di esseri matematici ideali", la quale contiene, in ultima istanza, l'affermazione di un' "esistenza «in sé» della matematica", presenta - come ha d'alta parte riconosciuto un platonista senza riserve come A. Lautman - "une consistance vraiment trop faible".[43] E' proprio dal tentativo

---

intrinseque pour indiquer qu'elle ne se confonde pas avec l'objectivité relative à la connaissance expérimentale. [...]

Le fait mathématique est indépendant du vêtment logique ou algébrique sous lequel nous cherchons à le représenter: en effet l'idée que nous en avons est plus riche et plus pleine que toutes les définitions que nous en puovons donner, que toutes les formes ou combinaisons de signe ou de propositions par lesquelles il nous est possible de l'exprimer. L'expression d'un fait mathématique est arbitraire, conventionnelle. Par contre, le fait lui-même, c'est-à-dire la verité qu'il contient, s'impose à notre esprit en dehors de toute convention. Ainsi l'on ne pourrait pas rendre compte du développement des théories mathématiques si l'on voulait voir dans les formules algébriques et dans les combinaisons logiques les objets mêmes dont les mathématicien poursuit l'étude. Au contraire tous les caractères de ces théories s'expliquent aisément si l'on admet que l'algèbre et les propositions logiques ne sont que le language dans lequel on *traduit* un ensemble de notions et de faits objectifs. [...]

[...] les verités mathématiques sont des faits objectifs, indépendants de nous, et que nous découvrons et analysons en quelque sorte du dehors.

42Cfr. Husserl (1900-01), vol. 1, pp. 372-3.

43Cfr. Cavaillès-Lautman (1939), p. 13. Cfr. su questo punto anche la conclusione della *Thèse principale* di Lautman [cfr. Lautman (1977), pp. 135-47] e, in particolare, la discussione del punto di vista di Boutroux.

formulare un punto di vista platonista che sia capace di rispondere al pro-
ema ontologico posto dalla nozione stessa di verità matematica, ma che sia
:l contempo compatibile con gli orientamenti e gli sviluppi della ricerca
ontemporanea - e in particolare con la sua attenzione alle strutture relazio-
ıli, piuttosto che a determinate classi di oggetti - che prende origine la ri-
essione epistemologica di Lautman. Piuttosto che avventurarmi in una rico-
ruzione degli esiti cui questa ha condotto,[44] mi limiterò qui a qualche si-
iificativa citazione.

> [L'] objectivité des êtres mathématiques, qui se manifeste de façon sensible dans la complexité de leur nature, ne révèle son sens véritable que dans une théorie de la partecipation des Mathématiques à une réalité plus haute et plus cachée, qui constitue, a mon avis, un véritable monde des Idées.[...]
> Ces notions d'*essence* et d'*existence* comme celles de *forme* et *matière*, du *tout* et de la *partie*, du *contenant* et du *contenu*, &c., ne sont pas des notions mathématiques, et pourtant c'est vers elles que conduit la considération des théories effectives. Je les appelle des *Notions* dialectiques et propose d'appeler *Idées* dialectiques le problème de la liason possible entre notions dialectiques ainsi définies. La raison des rapports de la Dialectique et des Mathématiques réside alors dans le fait que les problèmes de la Dialectique sont concevables et formulables indépendamment des Mathématiques, mais que tout ébauche de solution apportée à ces problèmes s'appuie nécessairement sur quelque exemple mathématique destiné à supporter de façon concrète la liason dialectique étudiée.[...]
> [Si può quindi parlare di] genèse des Mathématiques à partir de la Dialectique. Voici ce que j'entends par là: la Dialectique, en elle-même, est problématique pure, antithétique fondamentale relative à des couples de notions qui paraissent, de prime abord, s'opposer, et à propos desquelles se pose néanmoins le problème d'une synthèse ou d'une conciliation possible. [...] On passe insensiblement de la compréhension d'un problème dialectique à la genèse d'un univers de notions mathématiques et c'est à la reconnaissance de ce moment où l'Idée donne naissance au réel que doit, à mon sens, viser la Philosophie mathématique.[45]

> La réalité des mathématiques n'est pas faite de l'acte de l'intélligence qui crée ou qui comprend, mais c'est dans cet acte qu'elle nous apparaît et elle ne saurait être pleinement caractérisée indépendamment de ces mathématiques qui en sont l'indispensable support. En d'autres termes, nous croyons que le mouvement propre d'une théorie mathématique dessine le schéma des liason que soutiennent entre elles certaines indées abstraites, dominatrices par rapport aux mathématiques. Le problème des liason que ces idées sont susceptibles de soutenir entre elles peut se poser en dehors de toute mathématique, mais l'effectuation de ces liason est immediatement théorie mathématique.
> [...] la conclusion platonicienne que ces recherches nous paraissent imposer [può allora formularsi nel modo seguente]: La réalité inhérente aux théories mathématiques leur vient de ce qu'elles partecipent à une réalité idéale qui est dominatrice par rapport à la mathématique, mais qui n'est connaissable qu'à travers elle.[46]

Quello che Lautman delinea è così un platonismo delle *teorie*, le quali
stono in quanto soluzione d'un problema "logico" posto dalla dialettica di

---

ulla filosofia matematica di Lautman cfr. Petitot (1987) e Chevalley (1987).
:fr. Cavaillès-Lautman (1939), pp. 13-6.
:fr. la comunicazione di Lautman al IX congresso internazionale. di filosofia, Paris 1-
agosto 1937, ora in Lautman (1977), pp. 287-90.

certe *idee dominatrici*, le quali costituiscono un *a priori*, che non trova altra manifestazione che nel suo porsi in quanto problema:

> Les schémas logiques que nous avons décrits ne sont pas antérieurs à leur réalisation au sein d'une théorie: il manque en effet, à ce que nous appelons [...] l'intuition extra-mathématique de l'urgence d'un problème logique, une matière à dominer pour que l'idée de relations possibles donne naissance au schéma de relations véritables. Le sort du problème des rapports du tout et de la partie, de la réduction des proprietés extrinsèques en propriétés intrinsèques, de la montée vers l'achèvement, la consitution de nouveaux schémas de genèse dépendent du progrès des mathématiques elles-mêmes [...]. Le seul élément *a priori* que nous concevions est donné dans l'expérience de cette urgence des problèmes, antérieure à la découverte de leurs solutions.[47]

Se alcuni fra questi "problemi logici" si ritrovano nella storia della filosofia e altri possono derivare dagli sviluppi stessi delle teorie matematiche, che possono far nascere "l'idea di problemi nuovi che non erano stati formulati astrattamente in precedenza",[48] ciò che pare caratterizzare l'epistemologia di Lautman è l'ipotesi di una dialettica ideale che resta precedente e dominatrice rispetto alla teoria in cui essa trova un'espressione concreta. Ma questa preminenza non pare rimandare alla ipostatizzazione di due mondi separati; essa assume piuttosto la forma di quella che potremmo caratterizzare come una dialettica formale dell'astratto e del concreto. L'atto matematico è l'atto di una concretizzazione di un'esigenza astratta che fuori dalla matematica può formularsi *solo* come problema. E' proprio questa esigenza - o, per usare i termini dello stesso Lautman - questa "urgenza del problema logico" - che costituisce la ragion d'essere della ricerca matematica, la quale si qualifica come un'impresa intellettuale per rapporto a una realtà che la trascende e la domina.

Se dietro l'affermazione del carattere "astratto" (la "mancanza di una materia da dominare") dell'intuizione pre-matematica, sembra possibile ritrovare nella filosofia di Lautman l'esigenza kantiana di una preminenza dell'intuizione pura sul concetto matematico in quanto tale, dietro l'affermazione del carattere dialettico della "realtà ideale" - il quale non ci dice solo di contrapposizioni originarie inerenti a un mondo separato che resta in se stesso eternamente stabile, ma anche (e forse essenzialmente) del progressivo prendere corpo di tali contrapposizioni entro un divenire storico a cui la matematica stessa può partecipare - pare emergere il programma di una storicizzazione dell'estetica trascendentale.[49] E' proprio in quanto tentativo di articolare un'ipotesi filosofica in cui entrambi questi obiettivi possano trovare una realizzazione adeguata che l'epistemologia di Lautman trova una

---

[47]Cfr. la conclusione dell' *Essai sur les notions de structure et d'existence en mathématique (Thèse principale pour le Doctorat es lettres)*, ora in Lautman (1977), pp. 21-154, in particolare, p. 142.

[48]Cfr. *ivi*.

[49]Sui legami fra l'ipotesi epistemologica di Lautman e la filosofia trascendentale e in particolare sull'interpretazione della prima come un tentativo di "storicizzazione dell'*a priori*" cfr. Petitot (1987), pp. 90-91.

delle principali ragioni del suo interesse,[50] ma anche, a me pare, le sue principali difficoltà.

Il carattere dialettico dell'*a priori* - nella misura in cui esso non si manifesta semplicemente nella strutturazione aporetica di questo, ma rinvia a un divenire inerente ai contenuti stessi delle aporie - domanda infatti una dimensione concettuale che pare difficilmente conciliabile con le esigenze di astrattezza cui Lautman pare tenere in modo particolare (allo scopo, evidentemente, di evitare una sorta di dualismo ontologico). Così se si può parlare di un' "intuizione extramatematica", questa deve essere un' "intuizione intellettuale"[51] non solo capace di procurare "un'esperienza dell'urgenza di certi problemi logici", ma anche di fornire dei concetti sui quali questi problemi si articolano e nei quali essi ritrovano un'inevitabile autonomia per rapporto all'elaborazione matematica. La distinzione proposta da Lautman, nella sua comunicazione al IX congresso internazionale di filosofia, fra il "problema delle connessioni fra le idee" e l' "effettuazione di queste connessioni" appare sotto questo punto di vista una risposta troppo debole. Come si può affermare infatti che un certo problema possa essere posto "fuori dalla matematica" se non si è anche disposti a ammettere che esistono fuori dalla matematica contenuti analizzabili e quindi confrontabili fra loro? Quindi o ciò che è "fuori dalla matematica" (e prima di essa) è il problema in quanto intuizione di un'aporia originaria propria del mondo cui rivolgiamo la nostra attenzione, il quale è concettualmente formulabile solo in termini matematici, ma allora il rapporto è direttamente fra la matematica e il mondo, o esistono *concetti* extramatematici che partecipano come tali a un divenire storico di cui è necessario studiare le relazioni con l'evoluzione delle teorie matematiche.

Alla originaria difficoltà di assegnare uno statuto preciso all'intuizione fondatrice (che Lautman sembra ereditare dallo stesso Kant) si accompagna qui il problema di tracciare una distinzione precisa fra l'attività matematica in quanto tale e l'*a priori* che solo può garantire un'esistenza ai prodotti di tale attività. L'unica strada che sembra restare aperta per evitare un dualismo ontologico senza abbandonare una posizione concettualista è quella di intendere questo *a priori* come uno stadio precedente della conoscenza (in cui l'unica demarcazione possibile riposa sui caratteri formali di alcuni concetti e sui rapporti che essi intrattengono con certi insiemi di oggetti), il quale non contiene, in quanto tale, alcuna dimensione fondatrice e che esiste

---

[50]Per quanto ancora assai poco noto fuori da certi ambienti epistemologici francesi, A. Lautman merita senza dubbio un posto fra i principali filosofi di questo secolo. Ecco come J. Petitot si è a questo proposito espresso [cfr. *ivi*, p. 80]:

> Pour le dire d'emblée, Albert Lautman représente selon nous, sans emphase, un des philosophe les plus inspirés de ce siècle. Ses thèses sont d'une réelle importance et si on leur avait consacré ne serait-ce qu'une faible partie des réflexions que l'on a consacrées à un autre philosophe, auquel il est comparable quant à la stature et opposé quant aux idées, nommément Wittgenstein, il serait sans doute devenu l'une des figures les plus glorieuses de notre modernité.

[51]Cfr. ancora *ivi*, p. 82.

solo grazie all'innata capacità dell'uomo di accedere ai contenuti di pensiero che i propri simili esprimono per mezzo di un linguaggio.

Chi più di altri mi sembra si sia mosso in questa direzione è stato J. Cavaillès.[52] Ecco come egli riassume la propria posizione nel già citato dibattito con A. Lautman:

> Premier point: l'idée de définir les Mathématiques me semble à rejetter [...].
> Les Mathematiques constituent un devenir, c'est-à-dire une réalité irréductible à autre chose qu'elle-même. [...]
> Les Mathématiques sont un devenir. Tout ce que nous pouvons faire, c'est essayer d'en comprendre l'histoire, c'est-à-dire, pour situer les Mathématiques parmi d'autres activités intellectuelles de trouver certaines caractéristiques de ce devenir. J'en citerai deux:
> 1° Ce devenir est autonome, c'est-à-dire, que il est impossible de se placer hors de lui, on peut, en étudiant le dévelloppement historique, contingent, des Mathématiques, tel qu'il se présente à nous, apercevoir des nécessités sous l'enchainement des notions et des procédés. Ici, évidemment, le mot "nécessité" ne peut pas être précisé d'une autre façon. On note des problèmes, et on s'aperçoit que ces problèmes exigeaient l'apparition d'une nouvelle notion; c'est tout ce qu'on peut faire, et il est certain que cet emploi du mot "exiger" nous est trop facile, puisque nous sommes de l'autre côté, nous voyons les réussites.[...] Autonomie, donc nécessité.
> 2° Ce devenir se développe comme un dévenir véritable, c'est-à-dire qu'il est imprévisible. Il n'est peut-être pas imprévisible pour les intuitions du mathématicien en pleine activité qui devine de quel côté il faut chercher, mais il est imprévisible originairement, d'une façon authentique. C'est ce que l'on pourrait appeler la Dialectique fondamentale des Mathématiques: si les nouvelles notions apparaissent comme nécessitées par les problèmes posés, cette nouveauté même est vraiment une nouveauté complète. C'est-à-dire qu'on ne peut pas, par une simple analyse des notions déjà employées, trouver à l'intérieur d'elles les nouvelles notions: les généralisation, par exemple, qui ont engendré de nouveaux procédés.
> Cette nouveauté, je la caractériserai par le deuxième point de ma conclusion: à savoir que l'activité des mathématiciens est une activité expérimentale.
> Par expérience, j'entends un système de gestes, régi par une règle et soumis à des conditions indépendantes de ces gestes. [...] je veux dire par là que chaque procédé mathématique se définit par rapport à une situation mathématique antérieure dont il dépend partiellement, par rapport à laquelle aussi il entretient une indépendance telle que le résultat de ce geste doit être constaté dans son accomplissement. C'est, je crois, par là qu'on peut définir l'experience mathématique.
> [...] j'ai indiqué quelques-uns des procédés employée par les mathématiciens [...].
> J'ai appelé un premier procédé, en général: thématisation, c'est-à-dire que les gestes accomplis sur un modèle ou un champ d'individus peuvent, à leur tour, être considérés comme des individus sur lesquels le mathématicien travaillera en le considerant comme un nouveau champ.[...]
> Deuxième procédé, nommé par Hilbert: idéalisation ou adjonction d'éléments idéaux; il consiste simplement à exiger qu'une opération, qui se trouvait d'une manière accidentelle limitée à certaines circonstances extrinsèques à l'accomplissement même de cette opération, soit liberée de cette limitation extrinsèque, et ceci par la position d'un système d'objets qui ne coïncide plus avec les objets de l'intuition.[...]
> L'objet mathématique se trouve ainsi, à mon avis, toujours correlatif de gestes effectivement accomplis par le mathématicien dans une situation donnée.[53]

[52]Sull' "epistemologia matematica" di J. Cavaillès cfr. Benis-Sinaceur (1987) e Heinmann (1987).

[53]Cfr. Cavaillès-Lautman (1939), pp. 7-10.

L'ipotesi di Cavaillès è così quella di un divenire singolare e necessario: singolare in quanto non definito da leggi generali che possano essere rintracciate ponendosi a un dato stadio del suo sviluppo, né caratterizzato da un'esigenza trascendente che partecipa a una realtà *a priori* in cui esso trova il proprio carattere obiettivo; necessario in quanto risultato di una sorta di costrizione interna[54] che assegna a ogni suo stadio successivo il carattere *della* soluzione richiesta dai problemi posti nello stadio precedente. Ma se questa nozione di necessità resta inevitabilmente non solo imprecisa, ma anche assai poco esplicativa, essa non è d'altra parte per nulla sufficiente a fornire quei "caratteri generali costitutivi della realtà matematica"[55] che Lautman aveva invece cercato. L'obiettività rischia anzi di trasformarsi nell'ipostatizzazione di una sorta di "sentimento di verità" che a ogni stadio dello sviluppo della conoscenza permette al matematico creatore di individuare la strada dell'evoluzione successiva, la quale mostra d'altra parte, *a posteriori*, la propria incontrovertibilità. Essa si qualifica quindi come una obiettività degli atti, i quali rispondono a una costrizione interna che non è una legge di successione, in quanto verte ogni volta sui contenuti specifici del problema.

> En conclusion, je dirai donc que la notion même d'une existence des objets mathématiques nous intéresse, nous autres philosophes, parce qu'elle pose le problème de la notion même d'existence d'objets de pensée.
> Qu'est-ce, pour un objet, qu'exister? Ici, nous nous trouvons en presence du fait que le type même de la connaissance certaine, rigoureuse, qui est justement la connaissance mathématique, nous empêche de poser des objets comme existant indépendamment d'un système accompli sur ces objets et même indépendamment d'un enchainement nécessaire à partir du début même de l'activité humaine.
> De sorte que nous ne pouvons jamais ni le poser en soi, ni dire exactement: ici est le monde, - un monde que nous décririons. - Chaque fois nous sommes obligés de dire: ce sont là des corrélats d'une activité. Tout ce que nous pensons en eux, ce sont les règles de raisonnement mathématique qui son exigées par les problèmes qui se posent, et il y à même un débordement, une exigence de dépassement qui se trouve dans les problèmes non résolus, qui nous oblige à poser à nouveau d'autres objets ou à transformer la définition des objets primitivement posés.[56]

Ma è la nozione di attività che qui risulta assai ostica. Come riconoscere infatti un'attività al di fuori dagli oggetti che essa manipola o istituisce? Pensare gli oggetti come correlati di una attività significa connetterli a una intenzionalità di coscienza, la quale non ha tuttavia altra manifestazione che gli oggetti stessi. Così se questo può essere il punto d'avvio di una fenomenologia, esso potrà ben difficilmente convertirsi nel frammento di una logica. L'obiezione di Lautman è allora assai più profonda di quanto essa possa apparire. Non si tratta solo di contrapporre un'esigenza metafisica di universalità a una filosofia programmaticamente concepita dell'individualità di

---

[54]Cfr. Benis-Sinaceur (1987), p. 22, che vede qui la diretta influenza delle idee di Hilbert e in particolare di quelle contenute nella sua lezione d'abilitazione, che lo stesso Cavaillès cita come propria fonte a proposito dei movimenti di tematizzazione e idealizzazione [cfr. Dedekind (1854)].

[55]Cfr. Cavaillès-Lautman (1939), p. 13.

[56]Cfr. *ivi*, pp. 12-13.

certi fenomeni; si tratta di esprimere il programma di una teoria generale di questi fenomeni, entro la quale essi si trasformano in manifestazioni particolari di un'impresa conoscitiva formalmente caratterizzabile entro un certo sistema categoriale. Così se il riferimento implicito - ma perfettamente chiaro a chiunque conosca il percorso intellettuale di Cavaillès[57] - alla moderna algebra astratta può forse permettere di intendere l'attività di cui questi parla come una contemporanea posizione di concetti e di oggetti, in quanto insiemi caratterizzati da definite proprietà operazionali, ciò che resta difficile da capire è come all'immagine della matematica come un divenire singolare e necessario possa affiancarsi una struttura categoriale capace di fornire gli strumenti interpretativi atti a intendere questo divenire nella sua generalità come un percorso conoscitivo. Dal tentativo di una difficile conciliazione fra empirismo e necessitarismo sembra emergere così un'ipotesi non solo seducente, ma, a mio parere, ampiamente soddisfacente, la quale non sembra tuttavia in grado di accompagnarsi a degli strumenti interpretativi universali capaci di trasformarla in una vera e propria ipotesi epistemologica, nel riferimento indispensabile di quelle ricerche più particolari che essa implicitamente promuove.

Ma per quanto l'esigenza filosofica sembri differente, questo sembra essere un esito assai simile a quello a cui giunge la riflessione filosofica di Lautman. L'urgenza del problema logico pare infatti difficilmente interpretabile se non nei termini husserliani di un'intenzionalità che si traduce nella costruzione matematica effettiva che, in quanto tale, resta individuale e concreta. Ma se l'intenzionalità può investire una esistenza indipendente, trasformandola in un oggetto determinato, in quanto esemplificazione di un concetto, essa non può spiegare la sussistenza di un oggetto indipendentemente dalla esperienza individuale del pensiero di quell'oggetto. Per fare questo occorre assumere una capacità di permanenza del contenuto di un pensiero. E il problema epistemologico si colloca proprio qui e si differenzia quindi in modo essenziale dal problema fenomenologico dell'intenzionalità.

I. 2. ι. *Obiettività e singolarità*

Nonostante questo, si potrebbe ancora pensare che una riflessione fenomenologica possa essere il punto di partenza per l'edificazione di una struttura categoriale, capace di fornire gli strumenti interpretativi per un'indagine della conoscenza matematica acquisita e dei processi effettivi della sua edificazione. Si tratterebbe allora di pensare l'insieme dei prodotti matematici come il risultato di atti formalmente differenti e cercare di fondare una classificazione di essi a partire dalla classificazione di tali atti. Questa prospettiva incontra tuttavia due difficoltà di principio. La prima verte sul carattere essenzialmente costruttivo che almeno alcuni atti matematici devono possedere. Se ogni introduzione di un concetto trova la sua ragione

57Cfr. ancora Benis-Sinaccur (1987).

ultima in un'esigenza interpretativa, la matematica si qualifica attraverso una capacità differente dalla semplice classificazione o reinterpretazione di esistenze precedenti. Essa è costruzione di nuovi contenuti e per ciò stesso di nuovi oggetti, la quale non si riduce semplicemente all'atto di ridefinizione di una forma per una materia già data; è la materia stessa che è nuova. Una funzione non è semplicemente una classe particolare di relazioni, è l'ipostatizzazione del concetto di relazione come individuo di un mondo che è essenzialmente altro dal mondo delle relazioni fenomenali. In secondo luogo, se l'analisi della nostra esperienza interna può condurci alla individuazione di differenti modalità dell'agire, non esiste nessuna possibilità di riconoscere intersoggettivamente queste modalità, senza mettere in opera un'analisi dei caratteri specifici del prodotto intellettuale di questo agire. Il circolo rischia quindi di essere vizioso. Se la matematica è intesa come un'attività, è soltanto una classificazione ideale dei prodotti di questa attività che può fornire gli strumenti adeguati per ricostruire in termini congetturali il processo originario che ha dato loro la vita.[58]

Proprio questo è il percorso che io intendo proporre. Ma ricostruzione del processo originario si può dire in due modi: in quanto ricostruzione delle esperienze interne del soggetto creatore o in quanto ricostruzione delle interazioni concettuali che hanno condotto all'edificazione di una teoria e che forniscono quindi il suo originario significato. E' in questo significato che una teoria matematica trova la sua obiettività, non nel carattere in qualche modo necessario del suo venire alla luce. E' questo secondo obiettivo che io credo quindi debba contraddistinguere un programma genuinamente epistemologico, il quale prenda atto della singolarità intrinseca del divenire matematico. Si tratterà allora di leggere fenomeni essenzialmente individuali entro una struttura categoriale in cui essi possano qualificarsi come una realizzazione

[58] Non mi pare d'altra parte un caso che il tentativo più serio di condurre un'analisi di una teoria matematica, intendendo gli "oggetti matematici come *oggetti intenzionali*" [cfr. Petitot (1987), p. 93], ovvero quello compiuto da Desanti a proposito della teoria delle funzioni di variabili reali [cfr Desanti (1968)], abbia richiesto una esplicita classificazione dei concetti fondata sulla funzione che essi svolgono nel contesto di una determinata teoria [cfr. *ivi*, pp. 27-29, ma anche (1975), 172-95, a cui si riferiscono tutte le citazioni successive]. I concetti matematici (che Desanti sembra assumere come un insieme in qualche modo dato) si distinguono, secondo questa classificazione, in *concetti-oggetti* e *concetti categoriali*. I primi denotano certi oggetti individuali i quali sono "prodotti e riprodotti nella loro funzione concettuale conformemente agli assiomi che definiscono il sistema a cui appartengono" (`2', `$sin\ x$', `$\int \frac{1}{x} dx$', &c.); mentre i secondi "esercitano rispettivamente a questi una funzione regolatrice" (`continuità', `limite', `numero reale', `gruppo', &c.). I concetti categoriali si distinguono a loro volta in *concetti incompleti* (`continuità', `limite', &c.) e *concetti completi* (`numero reale', `gruppo', &c.). I primi indicano "una classe di proprietà che convengono, sotto certe condizioni, a delle successioni, a degli insiemi di punti &c.", mentre i secondi designano "una classe di oggetti le cui proprietà costituiscono un sistema di razionalità esattamente delimitato". Alcuni concetti incompleti sono poi *operatori*, in quanto codificano procedure costruttive, altri sono invece *tematici* e esprimono certi insiemi di proprietà. Anche i concetti completi possono ulteriormente distinguersi in due sottogruppi, quello dei *concetti naturali* (`numero intero', `numero reale', &c.) e quello dei *concetti strutturali* (`gruppo', `corpo topologico', &c.): i secondi "designano delle strutture generali alle quali i primi si conformano".

di certe possibilità formalmente già definite in termini universali - così come il percorso seguito da un grave nel corso della sua caduta non è altro che la realizzazione di una traiettoria possibile definita in termini universali per mezzo delle categorie e delle leggi della meccanica. E' in questa stipulazione categoriale che consiste un'ipotesi epistemologica, mentre è nella applicazione delle categorie allo studio dei fenomeni individuali che consiste un'indagine particolare. Solo quest'ultima può d'altra parte svelare il contenuto obiettivo di una teoria matematica (o almeno tendere a questo) e rispondere quindi al problema originario del platonismo. E' proprio un tale programma che cercherò qui di perseguire relativamente a un frammento del divenire effettivo della conoscenza matematica. Ma prima di intraprendere l'indagine occorre ancora fissare alcuni strumenti interpretativi capaci di completare il quadro della struttura categoriale di cui intendo servirmi.

I. 2. κ. *Enunciati, teorie, tradizioni*

Come ogni altro ricercatore, il filosofo della matematica è quindi posto dinnanzi a un materiale empirico, a un mondo costituito da un insieme organizzato di oggetti che egli si pone il problema di comprendere. Il primo atto di questa comprensione consiste nell'edificazione di una struttura elementare di concetti interpretativi, capace di fornire gli strumenti per una rappresentazione astratta di questo mondo che lo qualifichi come l'essersi realizzato di *una* possibilità fra altre. Nella maggioranza dei casi il mondo che sta dinnanzi a un ricercatore è un mondo *già* descrivibile (e anzi già descritto), almeno relativamente a alcune sue manifestazioni fenomeniche particolari, per mezzo di un insieme di concetti *già* dati. L'obiettivo della ricerca può tuttavia essere tale da richiedere descrizioni di tipo essenzialmente differente. L'edificazione della struttura di concetti adeguata si pone allora come alternativa (almeno relativamente agli scopi della ricerca) alla struttura precedente, identificando un nuovo orizzonte ontologico. Una delle operazioni più delicate che in casi come questi deve essere realizzata consiste nella caratterizzazione delle unità di differente livello che costituiscono tale orizzonte: dagli individui atomici, la cui rete di relazioni costituisce il mondo o almeno una sua descrizione, alla regione cui si riferisce la ricerca nel suo complesso e che è quindi oggetto del tentativo di comprensione.[59]

[59] Le nuove descrizioni possono differire dalle precedenti almeno secondo due modalità essenzialmente differenti fra loro. In un primo caso posso a esempio descrivere una biblioteca come un certo insieme di pagine ordinate alfabeticamente relativamente alle parole che sono stampate in una certa zona di queste e del tutto indipendentemente dai libri che queste pagine compongono. Qui le pagine esistono nello stesso mondo e nello stesso senso in cui esistono i libri e la differenza delle descrizioni risiede semplicemente nella determinazione di un differente ordinamento concettuale. In un altro caso posso descrivere un corpo che cade come una massa attirata verso il centro della terra da una certa forza costante alla quale si oppone una resistenza puntuale che è funzione della velocità e della densità del mezzo in cui avviene il movimento. Qui la nuova descrizione consiste nella costituzione di un modello che costituisce in quanto tale un mondo differente da quello originario: le forze esistono infatti in un senso assai

Se la maggioranza delle ricerche particolari passa usualmente sotto silenzio questo genere di problemi, sia affidandosi a strutture concettuali già stabilite, sia valendosi di intuizioni particolari che restano molto spesso implicite, non mancano i casi in cui proprio questo sia stato l'oggetto di riflessioni particolari che sono state usualmente intese come "metodologiche". Un esempio significativo è costituito, io credo, dal tentativo di ridefinizione dell'ipotesi strutturalista compiuto da M. Foucault,[60] allo scopo di fare di questa il riferimento di un nuovo (e particolare) genere di ricerche storiche. Il punto di partenza di tale riflessione è l'affermazione di una necessità.

> La mise en jeu des concepts de discontinuité, de rupture, de seuil, de limite, de série, de transformation pose à toute analyse historique non seulement des questions de procédure mais des problèmes théoriques. [...]
> Il y a d'abord à accomplir un travail négatif: s'affranchir de tout un jeu de notions qui diversifient, chacune a leur manière, le thème de la continuité. Elles n'ont pas sans doute une structure conceptuelle bien rigoureuse; mais leur fonction est précise. Telle la notion de tradition: elle vise à donner un statut temporel singulier à un ensemble de phénomènes à la fois successifs et identiques (ou du moins analogues); elle permet de repenser la dispersion de l'histoire dans la forme du même [...]. Telle aussi la notion d'influence qui fournit un support - trop magique pour être bien analysé - aux faits de transmission et de comunication [...]. Telles les notions de développement et d'évolution: elles permettent de regrouper une succession d'événement dispersés, de les rapporter à un seul et même principe organisateur [...]. Telles encore les notions de "mentalité" et d' "esprit" qui permettent d'établir entre les phénomènes simultanés ou successifs d'une époque donnée une communauté de sens [...]. Il faut remettre en question ces synthèse toutes faites, ces groupements que d'ordinaire on admet avant tout examen, ces liens dont la validité est reconnue d'entrée de jeu [...].
> Il faut aussi s'inquiéter devant ces découpages ou groupements dont nous avons acquis la familiarité. Peut-on admettre, telles quelles, la distinctions des grands types de discours, ou celle des formes ou des genres qui opposent les unes aux autres science, litterature, philosophie, religion, histoire fiction, &c., et qui en font des sortes de grandes individualité historiques? [...]
> Mais surtout les unités qu'il faut mettre en suspens sont celles qui s'imposent de la façon la plus immédiate: celles du livre et de l'œuvre. [...] C'est que les marges d'un livre ne sont jamais nettes ni rigouresement tranchées: par-delà le titre, les premières lignes et le point final, par-delà sa configuration interne et la forme qui l'autonomise, il est pris dans un système de renvois à d'autres livres, d'autres textes, d'autres phrases: nœud dans un réseau. [...]
> Quant à l'œuvre, les problèmes qu'elle soulève sont plus difficiles encore. [...] La constitution d'une œuvre complète ou d'un *opus* suppose un certain nombre de choix qu'il n'est pas facile de justifier ni même de formuler [...]. [...] on voit aussitôt qu'une pareille unité, loin d'être donnée immediatement, est constituée par une opération; que cette opération est interprétative. [...]
> Ces formes préalables de continuité, toutes ces synthèses qu'on ne problématise pas et qu'on laise valoir de plein droit, il faut donc le tenir en suspens. [...] Il s'agit de reconnaître qu'ils ne sont peut-être pas au bout du compte ce qu'on croyait au premier regard. Bref, qu'ils exigent une théorie; et que cette théorie

---

differente da quello in cui esistono i corpi che cadono. Parlando di nuovi "orizzonti ontologici" intendo riferirmi genericamente a entrambe queste situazioni, la prima in cui il medesimo mondo è semplicemente differentemente ordinato, la seconda in cui esso è rappresentato per mezzo di un modello che costituisce, come tale, un mondo differente.

[60] Cfr. soprattutto Foucault (1969).

> ne peut se faire sans qu'apparisse, dans sa pureté non synthétique, le champ des faits de discours à partir duquel on les construit.[61]

Se la prosa allegorica di Foucault esprime l'esigenza di un *epoché* che nella sua genuinità dovrebbe costituire la preoccupazione originaria di ogni indagine particolare, essa sembra tradursi, piuttosto che nel programma di edificazione di una "morale provvisoria" (che dalla consapevolezza della propria provvisorietà tragga il beneficio della disponibilità alla critica), nell'improbabile progetto di un'indagine capace di riconsegnare "nella propria non sintetica purezza" l'essere stesso dei fatti, nella sua propria indipendenza da ogni soggettività[62] e, più in generale, dalla figura stessa dell'interprete.[63] Non si tratta qui di esprimere delle pur legittime riserve sull'effettivo potere esplicativo (e ricostruttivo) di categorie largamente metaforiche come quelle di "sistema di dispersione" o "regola di formazione",[64] ma semplicemente di dubitare della possibilità di una descrizione "pura". L'atto descrittivo richiede per la sua stessa natura linguistica il ricorso a strutture concettuali che, come tali, non partecipano al mondo che esso vuole rendere manifesto. L'*epoché* non può quindi che essere - pena l'inevitabile condanna al silenzio - una rinuncia parziale e temporanea che esprime la dimensione interpretativa di una serie di nozioni ricostruttive per cui ogni tentativo di specificazione e/o determinazione rimanda a un insieme di concetti inevitabilmente dati.

Per parte mia assumerò l'enunciato come un'unità atomica[65] e penserò quindi il mondo che farà l'oggetto della mia analisi come un insieme di enunciati, i quali si presentano ordinati secondo raggruppamenti "naturali" (capoversi, capitoli, libri, lettere, &c.), che verranno considerati come modalità di presentazione di questi enunciati, ma non formeranno, a loro volta, un'unità interpretativa di secondo grado.[66] L'atto analitico si comporrà quindi - fra l'altro - di un tentativo di unificazione di un certo insieme di enunciati per mezzo di categorie di ordine superiore fra le quali le principali saranno quelle di *teoria* e di *tradizione*. Non intendo presentare qui - né altrove - un criterio esplicito di ordine generale che indichi sotto quali condizioni un certo insieme di enunciati possa identificarsi come una teoria o possa dar luogo a una tradizione. Desanti ha definito una teoria come

---

[61]Cfr. *ivi*, pp. 31-8.

[62]Cfr. *ivi*, p. 260.

[63]Cfr. a questo proposito Mastrogregori (1987).

[64]Cfr. Foucault (1969), p. 53.

[65]Almeno su questo punto mi pare quindi di convergere con l'approccio di Foucault [cfr. *ivi*, p. 38].

[66]Naturalmente ciò non mi impedisce né di usare il riferimento a questi raggruppamenti per indicare l'insieme degli enunciati che li compongono, né di constatare - *a posteriori* - la corrispondenza estensionale fra alcuni di essi e altre unità interpretative di differente natura. L'esempio dell'*Introductio in analysin infinitorum* di Euler [cfr. il prossimo capitolo III.3.] che verrà considerata come un'esposizione compatta di una *teoria* generale è a questo proposito significativo.

> un système ouvert de propositions compatibles énonçant et enchaînant les propriétés d'un domaine d'objets fermé par rapport à certaines opérations ou relations explicitement formulées.[67]

Io mi limiterò a considerare una teoria come un certo insieme di enunciati (esplicitamente determinati), tali da poter essere interpretati come una descrizione di un certo numero di proprietà di un certo insieme di oggetti (concettuali e/o non concettuali). Dire quindi che un insieme di enunciati costituisce una teoria significa affermare la possibilità di questa interpretazione (che dovrà essere fornita). Qualificare poi questa teoria come una teoria di *questo e questo* insieme di oggetti significa affermare tanto il potere determinativo di un universo di oggetti proprio degli enunciati in questione (o di una parte di essi) che la capacità descrittiva che essi condividono di un insieme adeguato di proprietà relativamente agli scopi cui la teoria risponde[68] (i quali dovranno, a loro volta, essere ricostruttivamente indicati nel corso dell'analisi). Allo stesso modo una tradizione verrà intesa come un certo insieme di teorie unificate sulla base di un criterio esplicito (di genere eventualmente variabile: lo scopo, lo "stile",[69] il ricorso a strumenti comuni, &c.) che dovrà essere reso manifesto nel corso dell'analisi. Affermare quindi che un certo insieme di teorie costituiscono una certa tradizione - definita in base a un certo criterio - significa affermare che queste condividono i caratteri espressi da questo criterio. Quanto ai confini dell'insieme di enunciati che verrà preso in considerazione, esso non sarà stabilito che per mezzo di una scelta arbitraria (la quale agisce nel contesto di una naturale e sconfinata ignoranza), che non può che manifestare se stessa tramite il compimento stesso dell'analisi.

I. 2. λ. *"Formalismo" / fallibilismo*

La precedente determinazione della nozione di teoria non fa alcun riferimento alla necessità che gli enunciati che costituiscono un tale insieme siano a loro volta raggruppati in certi sottoinsiemi particolari individuati dalla presenza di un legame deduttivo che verte su un certo numero di regole esplicite. Se l'introduzione di questa ulteriore richiesta potrebbe caratterizzare una certa sottoclasse di teorie, non credo si debba accettare la tesi che identifica una tale sottoclasse con l'universo delle teorie *matematiche*, sia che

---

[67] Cfr. Desanti (1968), p. 1.

[68] Il termine "teoria" è in realtà usualmente utilizzato in almeno due sensi distinti, di cui uno solo mi pare compatibile con la determinazione precedente. In un altro senso (che resta assai frequente sopratutto nelle discussioni e ricostruzioni storiche) esso si riferisce, piuttosto che a un insieme di enunciati, a un universo di associazioni concettuali, a un punto di vista o perfino a un insieme di risultati o acquisizioni contenuti un una "teoria", nel primo senso del termine. Questa duplicità di significato è così connaturata al linguaggio filosofico contemporaneo che la scelta di limitare l'uso di tale termine *solo* al primo o al secondo senso provocherebbe più incomprensioni di quante potrebbe risolverne. Lascerò quindi al lettore il compito di distinguere fra i due sensi relativamente al contesto.

[69] A proposito della nozione di "stile matematico", cfr. Granger (1968).

si vogliano intendere le regole come puri schemi di inferenza sintattica, sia che si ammetta fra esse anche la presenza di certi canoni inferenziali i quali facciano diretto riferimento alla stessa dimensione semantica degli enunciati. Per quanto l'insieme degli enunciati a cui rivolgerò la mia attenzione sarà determinato in base alla richiesta che essi partecipino (o possano partecipare) a un certo insieme di *teorie matematiche* (che è intuitivamente determinato *a priori* in base agli scopi della mia ricerca), il senso in cui questo termine deve essere utilizzato - affinché esso possa mantenere un adeguato potere descrittivo relativamente alla effettiva attività intellettuale di quanti sono stati e sono tuttora indicati come dei matematici - è io credo essenzialmente diverso.

La tesi secondo la quale la *matematica* si riduce a un insieme di deduzioni fondate sull'impiego di regole puramente sintattiche è stata apertamente criticata - fin dall'inizio degli anni sessanta - da I. Lakatos, il quale si è riferito ad essa come alla tesi "formalista".

> Mi riferirò alla scuola di filosofia matematica che tende a identificare la matematica con la sua astrazione assiomatico-formale (e la filosofia della matematica con la metamatematica) come alla scuola "formalista". Una delle formulazioni più nette di tale posizioni formalista si trova in Carnap.[70] Ecco le richieste di Carnap: *a*) "la filosofia deve essere sostituita dalla logica della scienza...", *b*) "la logica della scienza non è altro che la sintassi logica del linguaggio della scienza...", *c*) "la metamatematica è la sintassi del linguaggio matematico". Dunque alla filosofia della matematica va sostituita la metamatematica.
> Il formalismo separa la storia della matematica dalla filosofia della matematica, in quanto, stando alla concezione formalista della matematica non esiste storia della matematica propriamente detta. Qualunque formalista sarebbe in fondo d'accordo con l'osservazione di Russell, enunciata nel modo "più romantico possibile", ma intesa seriamente, secondo cui *The Laws of Thought* di Boole[71] era il "primo libro che fosse mai stato scritto sulla matematica".[72] Il formalismo nega lo status di matematica a ciò che comunemente si è sempre inteso come matematica e non riesce a dire nulla sul suo sviluppo. Nessun periodo "creativo" e pochissimi periodi "critici" delle teorie matematiche sarebbero ammessi nel paradiso dei formalisti, ove le teorie matematiche dimorano come serafini, purificate da tutte le impurità dell'incertezza terrena. Però i formalisti, in genere, lasciano aperta una piccola porta di servizio per gli angeli caduti: se per qualche "miscuglio di matematica e di qualcos'altro" capita che si riesca a trovare un sistema formale "che in un certo senso l'includa", allora lo si può anche ammettere.[73] Così Newton dovette attendere secoli perché Peano, Russell e Quine, formalizzando il calcolo, lo aiutassero a entrare in paradiso. Dirac è stato più fortunato: Schwartz ha salvato la sua anima mentre era ancora in vita. Forse è bene accennare qui alla situazione paradossale in cui si trova il metamatematico: secondo gli standard formalisti e anche secondo quelli deduttivisti, egli non è un autentico matematico.[74]

Per quanto l'ardore polemico di Lakatos lo conduca assai spesso a riferirsi a delle caricature delle tesi che egli combatte, piuttosto che a punti di

---

[70]Cfr. Carnap (1937), pp. XIII e 9.
[71]Cfr. Boole (1854).
[72]Cfr. Russell (1901).
[73]Cfr. Curry (1951), pp. 56-7.
[74]Cfr. Lakatos (1976), pp. 39-40.

vista effettivamente articolati,[75] è certo che un brano come il precedente individui un serio problema filosofico. Se nessuno sarebbe io credo disposto a condividere l'idea che l'attività matematica si riduca alla pura e semplice computazione - e, al più, alla mera stipulazione degli assiomi e/o delle regole di inferenza - è certo che la posizione in cui si trovano molti dei fautori di una identificazione della matematica con un insieme di ragionamenti perfettamente "rigorosi" o, che dir si voglia, con l'attività di articolare tali ragionamenti, è sotto questo aspetto assai critica. Le strade che a me sembra possibile percorrere per difendere (e precisare) un tale punto di vista senza incorrere nelle spiacevoli conseguenze cui Lakatos fa cenno sono infatti soltanto due.

La prima è quella di precisare diversamente la nozione di rigore, distinguendo un procedimento rigoroso da un semplice atto di computazione.[76] Un tale programma apre, a sua volta, due alternative possibili. Qualcuno potrà infatti cercare un criterio universale di rigore al quale possano ricondursi almeno alcune modalità di inferenza non puramente computazionale. Altri potranno scegliere un punto di vista apertamente storicista, affermando che "gli *standard* di rigore" posseggono essi stessi un'evoluzione storica. Se la prima ipotesi potrebbe anche dirsi soddisfacente, ammesso che essa possa un giorno tradursi in un criterio effettivo (e non puramente arbitrario o semplicemente particolare), la seconda è chiaramente vuota: come stabilire infatti ciò che in una certa epoca è o meno rigoroso se non riferendosi alla pratica stessa dei "matematici"?[77] Se il concetto di rigore vuole mantenere un potere esplicativo, esso deve in qualche modo connettersi con l'idea di incontrovertibilità di un percorso argomentativo, con l'affermazione del suo carattere definitivo e sicuro. Un criterio di rigore non può quindi essere né il risultato di una valutazione assiologica, né l'espressione di una sorta di *Zeitgeist*.

La seconda delle strade possibili verte sulla distinzione fra la matematica come attività e la matematica come insieme di risultati. Si potrebbe infatti affermare che se la matematica si riduce nel secondo senso alla classe delle conseguenze computazionali di un certo sistema di assiomi secondo un certo insieme di regole (o semplicemente alla classe dei risultati di una computazione governata da certe regole di introduzione o eliminazione), ciò non implica che essa non possa corrispondere nel primo senso che al semplice atto di computare. L'attività matematica potrebbe al contrario essere con-

[75] Il senso in cui Lakatos usa il termine "formalista" non deve confondersi con il senso - certamente più corrente in certi dibattiti filosofici - per cui esso si riferisce al punto di vista difeso da Hilbert e da altri nel corso del dibattito sui fondamenti della matematica. L'idea che Lakatos vuole combattere è infatti assai più generale e mi pare ricondursi, in ultima istanza, alla tesi che ho formulato più sopra.

[76] Cfr. Kreisel (1967).

[77] Naturalmente si può pensare che una dimostrazione di Euler - ammesso che si sia in grado di sapere che cosa sia una dimostrazione e come essa si differenzi dalla semplice esposizione di un possibile percorso argomentativo - sia l'esemplificazione implicita di ciò che Euler credeva essere un procedimento rigoroso. Il concetto di rigore non può tuttavia essere impiegato in tale contesto per indicare una demarcazione e perde quindi tutto il suo potere esplicativo.

cepita come allargata a tutto quell'insieme di riflessioni, tentativi, "errori" - o che dir si voglia - che *precedono* la costruzione di un sistema assiomatico o più semplicemente una dimostrazione "rigorosa". Ma a che generi di atti si vuole far qui riferimento? e in che senso si parla qui di precedenza? E' chiaro che non può esistere nessuna risposta a domande come queste, la quale non sia nel contempo l'articolazione di una filosofia della matematica non "formalista" nel senso di Lakatos o almeno un suo primo abbozzo. E una volta che ci si è incamminati su questa strada, la tesi originaria si trasforma in una mera convenzione terminologica, tanto innocua, quanto in se stessa vuota.

Se spogliamo la polemica lakatosiana dalla sua dimensione più superficialmente retorica ne traiamo quindi la messa in cantiere di un programma filosofico che tende a fare oggetto di studio di un insieme di atti e di produzioni intellettuali, la cui connessione con i sistemi formali elaborati dalla matematica moderna è in generale ampiamente riconosciuta, ma sul cui statuto particolare ci si è assai poco interrogati, lasciando al più il compito a qualche ricerca "storica" condotta secondo canoni metodologici molto spesso approssimativi e estemporanei.[78]

Nonostante l'indubbio rilievo della problematica che viene così a prendere corpo, il modo in cui Lakatos ha realizzato il suo programma ha fatto spesso discutere e ha trovato opposizioni anche feroci. Mi limiterò qui a segnalare alcune delle tesi principali che questi ha difeso e su cui maggiormente si è concentrata la critica. Nei due paragrafi successivi cercherò poi di reinterpretare alcune di queste tesi, riformulandole entro il contesto teorico che ho fino a qui cercato di stabilire e di criticarne altre che a me pare debbano essere abbandonate.[79]

La prima di questa tesi è che la matematica è una scienza "fallibile" e che condivide quindi sotto questo aspetto il destino delle scienze empiriche.[80] Se essa si serve certamente di indubitabili inferenze deduttive, queste non sono né autosufficienti agli scopi per cui sono impiegate, né capaci di stabilire l'insieme dei risultati a cui tende la ricerca. L'uso di procedure non deduttive non ha quindi un semplice ruolo euristico;[81] a questo si affianca un

---

[78]Naturalmente ciò non significa che la storiografia della matematica non abbia prodotto e non continui a produrre risultati di notevole valore documentario e esplicativo. Bisogna tuttavia ammettere che molto spesso ciò corrisponde, più che a una effettiva chiarificazione del metodo e dell'oggetto della ricerca, a una pratica empirica più o meno sedimentata sulla quale io credo sia tanto più urgente interrogarsi quanto sempre più dettagliate e raffinate divengono le indagini che essa promuove.

[79]Naturalmente il mio scopo non consiste in nessun modo nel dare una ricostruzione completa (anche se succinta) della filosofia lakatosiana della matematica [per questo cfr. a esempio l'introduzione di G. Giorello all'edizione italiana di Lakatos (1976), in particolare i paragrafi 1 e 3]. Mi limiterò a considerare alcune tesi, la cui riformulazione costituirà una parte integrante dell'ipotesi epistemologica presentata nel presente capitolo, e altre, la critica delle quali spero possa contribuire a rendere più chiaro il mio punto di vista.

[80]Su questo come come su tutti i punti restanti, cfr. - oltre a Lakatos (1976) - anche i saggi contenuti nella prima parte del secondo volume di Lakatos (1978).

[81]Questo sembra essere al contrario il punto di vista di Polya [cfr. Polya (1945), (1954) e (1962-5)].

vero e proprio ruolo argomentativo, che fa sì che queste partecipino alla stessa determinazione dei risultati che in numerosi casi - o, per dir meglio, sotto certi aspetti - non possono venir stabiliti senza un tale ausilio.

Una pratica corrente dei matematici è quella di avanzare congetture e di argomentare a favore di esse in termini prettamente "informali", costruendo un certo numero di "esperimenti mentali che suggeriscono una scomposizione della congettura originale in sottocongetture o lemmi"[82] che potranno essere, a loro volta, posti al vaglio della critica. Questo genere di procedure mette capo a vere e proprie "dimostrazioni" della congettura che diverrà così un "teorema", il quale potrà peraltro essere falsificato dalla presentazione di un "controesempio", che potrà contraddire tanto la congettura ("controesempio globale") che uno o più passi della dimostrazione ("controesempio locale"). Il rapporto fra la determinazione dell'esperimento mentale (ma potremmo forse dire, più in generale, dell'argomento informale) e l'individuazione dei lemmi non è tuttavia immediato e richiede in molti casi un' "analisi della dimostrazione" in cui la considerazione dei controesempi (tanto locali che globali) può svolgere un ruolo essenziale. Tale analisi tende a esplicitare le condizioni generali che permettono agli oggetti particolari su cui verte il teorema di soddisfare le richieste avanzate nel corso della dimostrazione o le generalizzazioni che essa comporta. Qualora i lemmi siano infine stati determinati, essi potranno essere inglobati nella congettura originaria, diminuendo il suo contenuto, ma aumentando la sua affidabilità. La congettura è quindi "migliorata" nell'atto stesso della sua "dimostrazione". La considerazione di controesempi - o, che dir si voglia, di asserti singolari che esprimono la non corrispondenza di un oggetto a una certa condizione o congettura - mette capo a una struttura inferenziale di tipo "quasi-empirico", caratterizzata da un processo di "retrotrasmissione della falsità", la quale si contrappone alle usuali inferenze "euclidee" caratterizzate al contrario dalla "trasmissione della verità".

Il carattere fallibile della conoscenza matematica, ovvero la presenza in essa di risultati tratti per mezzo di procedure informali, non dipende soltanto da una consolidata pratica argomentativa fondata sull'uso di metodi per "tentativi ed errori", ma discende da una necessità intrinseca di cui questi sono la conseguenza più naturale. Il contenuto informativo di un risultato matematico non deriva infatti dalla semplice connessione operazionale che esso esibisce per mezzo di un determinato alfabeto simbolico introdotto o implicitamente (per mezzo degli assiomi) o esplicitamente (per mezzo di certe definizioni, il cui statuto resta assai problematico da un punto di vista formalista), ma verte direttamente sulle proprietà di determinati oggetti, caratterizzati in quanto esemplificazioni di certi concetti.

Anche qualora una teoria matematica sia fondata sulla presentazione di esplicite definizioni dei termini che intercorrono negli enunciati che la costituiscono, queste definizioni non risulteranno che dal tentativo di caratterizzare un concetto e non potranno che contenere termini a loro volta non definiti, la cui capacità referenziale verterà ancora sul concetto corrispondente.

[82]Cfr. Lakatos (1976), p. 49.

Ogni risultato raggiunto entro una tale teoria potrà così essere contraddetto per mezzo dell'introduzione di una nuova interpretazione dei termini, la quale differisca in modo essenziale dalla "interpretazione intesa" o contraddica la definizione in quanto non adeguata relativamente alla sua capacità espressiva del concetto corrispondente. Ogni teoria matematica che faccia uso di definizioni esplicite mette quindi capo a una classe di falsificatori potenziali che (come avviene in una teoria empirica) sono una diretta manifestazione del suo contenuto informativo. Tali falsificatori possono in generale dividersi in due classi: la classe dei "falsificatori euristici" e la classe dei "falsificatori logici". I primi derivano dalla possibilità di immaginare oggetti singolari che pur cadendo sotto certi concetti non soddisfanno certe definizioni corrispondenti o, più semplicemente, contraddicono qualche generalizzazione fondata su interpretazioni intese non (ancora) manifeste. Se questi falsificatori (che non corrispondono in generale che alla presentazione di un controesempio) sono così il risultato di una "tensione di concetto", la loro presa in considerazione permette l'avvio di quella procedura del "migliorare dimostrando" cui si è accennato più sopra. La tensione di concetto si trasforma quindi da uno strumento di falsificazione a un essenziale contributo alla "crescita". Per quanto accuratamente costruita nessuna teoria matematica può contenere in sé stessa la prova della propria coerenza e non può quindi escludere la possibilità che fra le conseguenze dei suoi assiomi possa essere individuata una classe di contraddizioni logiche, la cui eliminazione dipende o da una modificazione degli assiomi o da una riconsiderazione del processo inferenziale che ha condotto a tali conseguenze.

Se grazie al teorema di Gödel sappiamo che neppure una teoria assiomatica formale che definisca implicitamente il suo argomento può essere considerata esente dalla possibilità di incappare in un falsificatore logico, si potrebbe pensare che una teoria di tal genere sia totalmente immune da ogni genere di falsificatore euristico. Tuttavia se pensiamo una teoria formale come la "formalizzazione di qualche teoria informale", possiamo sostenere che essa è "confutata" quando "uno dei suoi teoremi è contraddetto dal corrispondente teorema informale".[83] Anche una teoria perfettamente formalizzata possiede quindi dei falsificatori euristici che vertono sulla sua capacità rappresentativa di una certa struttura concettuale.

Il carattere essenzialmente concettuale della matematica informale e la stretta relazione che lega ogni formalizzazione a una data teoria informale ci permettono non soltanto di pensare la matematica come una scienza fallibile, ma anche di intendere la sua evoluzione nel contesto di un confronto (almeno possibile) fra ipotesi e teorie rivali. Mentre un'ipotesi rivale è in generale caratterizzata da una differente interpretazione intesa di un dato termine, una teoria rivale richiede una differente concettualizzazione di un comune dominio di oggetti.

La distinzione fra procedimenti formali e informali permette di "classificare" le "dimostrazioni riconosciute come tali dai matematici militanti o dai logici" secondo tre "categorie": "dimostrazioni pre-formali", "dimostrazioni

[83]Cfr. Lakatos (1978), vol. II, pp. 55-6.

formali", "dimostrazioni post-formali".[84] Le dimostrazioni del primo tipo non sono altro che le antenate delle dimostrazioni del secondo tipo che possono a loro volta divenire oggetto di una dimostrazione del terzo tipo, la quale fa uso di meta-concetti che vertono sulla teorià formale (due esempi di teoremi stabiliti tramite questo tipo di dimostrazioni sono il principio di dualità in geometria proiettiva e il teorema di indecidibilità nella teoria degli insiemi).

Le precedenti considerazioni permettono di individuare due "schemi tipici" che descrivono lo "sviluppo storico della matematica" a due differenti livelli d'analisi. In primo luogo si potrà infatti dire che nel corso del suo sviluppo la conoscenza matematica passa da uno stadio pre-formale a uno stadio formale e, eventualmente, da questo a un ulteriore stadio post-formale.[85] In secondo luogo si potrà ricostruire uno "schema di scoperta matematica molto generale" che potremmo indicare come il "metodo delle dimostrazioni e confutazioni".[86] Ecco come Lakatos ne ha presentato gli stadi successivi.

(1) Congettura primitiva.
(2) Dimostrazione (un rozzo esperimento mentale o argomento, che scompone la congettura primitiva in sottocongetture o lemmi).
(3) Controesempi "globali" (controesempi alla congettura primitiva).
(4) Riesame della dimostrazione: il "lemma colpevole" per quale il controesempio globale è un controesempio "locale" viene individuato. Questo lemma colpevole può essere rimasto in precedenza "nascosto" o essere stato male identificato. Ora è reso esplicito e viene incorporato nella congettura primitiva come una condizione. Il teorema - la congettura migliorata - viene sostituito alla congettura primitiva con il nuovo concetto generato-dalla-dimostrazione come una sua nuova caratteristica dominante.

Questi quattro stadi costituiscono il nocciolo essenziale della analisi della dimostrazione. Ma vi sono ulteriori stadi standard che si presentano di frequente:

(5) Vengono esaminate dimostrazioni di altri teoremi per vedere se i lemmi recentemente scoperti o il nuovo concetto generato-dalla-dimostrazione vi compaiono: si può addirittura scoprire che questo concetto si situa all'incrocio di differenti dimostrazioni; esso emerge così come concetto di importanza fondamentale.
(6) Le conseguenze fin qui accettate della congettura originale ora confutata vengono sottoposte a controllo.
(7) I controesempi si trasformano in controesempi nuovi; si schiudono nuovi campi di indagine.[87]

L'indagine storica e l'indagine filosofica possono allora coniugarsi nello studio di una serie di "*test-cases*", in cui questi schemi si presentano concretamente all'opera.

[84]Cfr. *ivi*, p. 87.
[85]Cfr. *ivi*.
[86]Cfr. Lakatos (1976), p. 169.
[87]Cfr. *ivi*, pp. 169-70.

I. 2. μ. *Test-cases*

Se fra i numerosi meriti di Lakatos uno dei principali è senza dubbio quello di aver insistito sull'inscindibilità del legame che lega la storia e la filosofia della scienza, la principale debolezza della sua elaborazione filosofica deriva a me pare dal modo in cui egli ha inteso articolare un tale rapporto. Piuttosto che concepire la storia nella sua irriducibile individualità e intenderla come un processo ricostruttibile ma essenzialmente irripetibile che si manifesta a noi per mezzo dei prodotti cui esso ha dato origine e che chiama il filosofo a uno sforzo di comprensione, egli sembra averla intesa come un banco di prova per una sfida intellettuale in cui affermare i valori intrinseci della "fallibilità" e della "critica". Questa impostazione (che spesso ha condotto il dibattito filosofico a confondersi con una sorta di polemica politica) ha spinto Lakatos a porre al centro della sua filosofia la nozione di controesempio e a articolare la sua ipotesi filosofica sotto la forma di un modello di sviluppo che riconoscesse in primo luogo la natura fallibile e congetturale della conoscenza matematica. In tal modo al naturale problema che la conoscenza matematica ha classicamente posto ai suoi interpreti - quello di riconoscere le ragioni di una sorprendente stabilità di una produzione essenzialmente concettuale e propria di un essere finito e fallibile - egli sembra aver sostituito il problema di costruire uno schema sufficientemente articolato da poter rispondere a suoi *desiderata a priori* e essere in qualche modo rintracciabile in un certo numero di significative vicende storiche, esplicitamente intese come semplici *test-cases*. La modalità in cui Lakatos ha proposto di compiere una tale operazione di riconoscimento della fallibilità della conoscenza matematica è quella della "ricostruzione razionale": il modello epistemologico costituisce una griglia interpretativa intorno alla quale deve essere possibile organizzare un resoconto "distillato" degli avvenimenti, il quale racchiuda - entro la sua dichiarata artificiosità - la "dialettica autonoma" della storia. La seguente citazione è sotto questo punto di vista significativa.

> [...] l'attività matematica produce matematica. La matematica, questo prodotto dell'attività umana, "si aliena" dall'attività umana che lo ha prodotto. Diventa un organismo vivente, in crescita, che *acquista una certa autonomia* dall'attività che lo ha prodotto; sviluppa leggi di crescita sue proprie, una propria dialettica. L'autentico matematico creativo è solo una personificazione, un'incarnazione di queste leggi che possono realizzare se stesse solo nell'azione umana. La loro incarnazione, tuttavia, è di rado perfetta. L'attività dei matematici umani, così come essa appare nella storia, è solo una goffa realizzazione della splendida dialettica delle idee matematiche. Ma ogni matematico se possiede talento, inventiva, genio, comunica con, avverte il movimento di, e obbedisce a questa dialettica delle idee.
>
> Dunque, l'euristica ha a che fare con la dialettica autonoma della matematica e non con la sua storia, anche se si può studiare il suo oggetto attraverso lo studio della storia e la ricostruzione razionale della storia.[88]

---

[88]Cfr. Lakatos (1976), pp. 188-9. Occorre osservare, per la verità, che Lakatos non pubblicò mai questo brano, la cui prima redazione risale probabilmente ai primi anni sessanta. Ciò che è tuttavia significativo - al di là del "*background* hegeliano" che Worrall e Zahar tendono a dissociare dalle successive elaborazioni della filosofia di Lakatos [cfr.

E' così che alla necessità di elaborare categorie interpretative capaci di fornire comprensioni adeguate di certi fenomeni specifici e singolari - come l'origine e lo sviluppo di una teoria matematica o la genesi e la trasformazione di una dimostrazione - Lakatos sembra aver sostituito l'esigenza di un modello evolutivo di carattere generale (e, come tale, essenzialmente riapplicabile in una indefinita quantità di casi) che la ricerca concreta è chiamata a valutare. Da strumento di comprensione, l'ipotesi epistemologica diventa così oggetto di un controllo; da mezzo si trasforma in fine.

Se una simile impostazione non ha impedito alla raffinata capacità analitica di Lakatos di individuare alcuni caratteri essenziali della conoscenza matematica, essa ha qualche volta costretto gli esiti della sua riflessione entro i confini di un linguaggio tanto espressivo quanto poco precisato. La distinzione formale/informale, così come le nozioni di tensione di concetto e di ipotesi o teoria rivale sono a esempio rimaste - a dispetto della loro assoluta centralità - essenzialmente imprecisate in termini non semplicemente esemplificativi. Da ciò segue come conseguenza inevitabile che molte delle tesi enunciate da Lakatos hanno uno statuto assai poco chiaro e mettono il lettore in un certo imbarazzo. Mi limiterò qui a un solo esempio, il quale mi sembra tuttavia particolarmente significativo. *Ogni* teoria formale - egli ci dice - non è che la "formalizzazione di qualche teoria informale", mentre *nessuna* teoria informale "è potuta sfuggire all'assiomatizzazione" - dalla quale "qualunque logico competente" può facilmente passare alla formalizzazione.[89] Vi sono molti sensi in cui il termine "formalizzazione" potrebbe essere inteso e che aprono la strada alla presentazione di innumerevoli e interessanti *controesempi* a entrambe questi tesi. Prendiamo la prima tesi e valutiamola relativamente a uno dei caratteri intrinseci della conoscenza matematica che io credo non possa in nessun modo venir disconosciuto. Una delle modalità più interessanti attraverso la quale può manifestarsi una nuova acquisizione matematica è certamente la determinazione di un concetto che verte direttamente su certe proprietà operazionali che fanno oggetto di una teoria già formalizzata. Così se per teoria informale si vuole intendere una teoria matematica compiutamente sviluppata indipendentemente dal ricorso a una precisa assiomatizzazione e/o a definizioni esplicite - come è il caso a esempio dell'analisi infinitesimale settecentesca - è assai difficile capire, per fare solo un altro esempio, come la teoria degli anelli non commutativi possa venir pensata come la formalizzazione di una precedente teoria informale. Si

ivi, nota 9] - è il fatto che in esso il riconoscimento dell'autonomia dei prodotti dell'attività matematica dall'atto stesso della loro produzione si confonde con l'affermazione di leggi universali che regolano quest'ultima. L'autonomia non deriva quindi da una capacità di ricezione di contenuti concettuali in quanto tali, ma prende la forma di un piano prestabilito di cui l'uomo, nella sua individualità, è un attore accidentale. La storia perde così tutta la sua individualità per divenire attuazione di un disegno che può essere svelato o, almeno, cercato. Si confrontano qui due forme di platonismo la cui distinzione è mi pare uno degli esiti più felici della filosofia popperiana [cfr., a questo proposito, Popper (1945), (1957) e (1972)].

[89]Per quest'ultima tesi cfr. Lakatos (1978), vol. II, pp. 93-4.

potrà certamente sostenere che la nozione di anello non commutativo sia sorta intuitivamente dalla individuazione di alcune proprietà interessanti che sembravano dipendere solo da alcune caratteristiche di precedenti strutture algebriche o che i teoremi che costituiscono una tale teoria sono anch'essi in generale prima intuiti e poi rigorosamente dimostrati o perfino che un anello non commutativo non è in ultima analisi che un oggetto già intuitivamente presente in molte teorie matematiche precedenti, ma per sostenere veramente che una teoria come questa sia la formalizzazione di una teoria informale occorre chiarire i termini della questione in un modo certamente più esplicito di quanto abbia mai fatto Lakatos.

Con questa osservazione concludo le mie critiche. Nel prossimo paragrafo cercherò di sviluppare alcune riflessioni dalle quali trarrò delle conseguenze che io credo possano essere intese come delle riformulazioni di certe tesi di Lakatos.

I. 2. v. *Teorie formali e matematica informale*

Se un certo insieme di enunciati è tale che ognuno di essi è inferenzialmente connesso a uno o più enunciati dell'insieme secondo un percorso esplicitamente determinato nell'atto stesso dell'articolazione di tali enunciati, diremo che esso mette capo a una *dimostrazione*. L'ultimo enunciato di tale insieme (relativamente al percorso considerato) sarà allora detto *teorema*. Una dimostrazione sarà poi detta *matematica* se il teorema a cui essa mette capo esprime una o più proprietà di certi oggetti matematici o contiene una correlazione fra concetti matematici. Da ciò segue che ogni dimostrazione matematica può essere intesa come parte di una teoria. L'identificazione di un certo insieme di enunciati come *una* teoria corrisponde tuttavia a un atto interpretativo, il quale non è in quanto tale sottoposto alla condizione che esige che tutti gli enunciati di tale insieme facciano parte di una o più dimostrazioni. Se un insieme di dimostrazioni non mette in quanto tale capo a una teoria, non si può nemmeno affermare che ogni teoria sia a propria volta costituita da un insieme di dimostrazioni - anche se questo è certamente un caso molto frequente: un enunciato può infatti essere interpretabile come espressione di certe (interessanti) proprietà di certe classi di oggetti del tutto indipendentemente dalle sue connessioni inferenziali con altri enunciati.

Se è chiaro che tali precisazioni annunciano un uso dei termini "dimostrazione", "teorema" e "teoria" del tutto differente da quello prescritto dalle usuali definizioni di cui si serve la logica moderna, esse non mi paiono per nulla contrastanti rispetto a un uso più generico, altrettanto diffuso nella maggioranza delle ricerche storiografiche (anche se spesso non codificato). La relazione fra i differenti significati di questi termini può d'altra parte essere abbastanza agevolmente precisata. Per quanto riguarda i primi due è infatti facile vedere che le definizioni precedenti contengono le definizioni "logico-formali" come un loro interessante caso particolare al quale si può semplicemente pervenire introducendo adeguate condizioni relative ai caratteri del legame inferenziale fra gli enunciati. Qualificherò una dimostrazione come *formale* nel caso in cui tale legame corrisponda al rispetto di un numero finito di regole puramente sintattiche precisate *a priori*. L'ultimo enunciato di una dimostrazione formale sarà poi detto *teorema formale* (o *teorema formalmente dimostrato*). Diversa - e in un certo senso più complessa - è invece la questione relativa al termine "teoria". Sembra infatti possibile costruire insiemi di assiomi - anche non banalmente contraddittori - la cui chiusura deduttiva rispetto a un certo insieme di regole di inferenza non soddisfa la condizione di essere interpretabile come una (adeguata) descrizione di un certo insieme di oggetti e/o di concetti. Perché questo sia il caso occorre che gli assiomi siano opportunamente scelti relativamente agli oggetti e/o ai concetti considerati. La definizione "logico-formale" non sembra quindi qualificabile in quanto tale come un caso particolare della definizione presentata nel paragrafo I.2.κ.. Quest'ultima, infatti, rimanda inevitabilmente a un atto valutativo il quale fa riferimento o a certi costrutti concettuali o a certi insiemi di oggetti già determinati. Il solo caso in cui la chiusura deduttiva di un sistema di assiomi deve essere automaticamente intesa come una "teoria" è quello in cui gli assiomi contengono essi stessi la determinazione implicita di certi insiemi di oggetti. Ciò non implica tuttavia che non si possa parlare di "teoria" anche relativamente a un sottoinsieme degli enunciati che costituiscono tale chiusura deduttiva, il quale sia stato effettivamente determinato per mezzo di un certo numero di dimostrazioni formali. Una teoria sarà detta *formale* qualora ognuno degli enunciati che la costituiscono sia a sua volta parte di una o più dimostrazioni formali, indipendentemente dal fatto che queste dimostrazioni mettano o meno capo a una chiusura deduttiva di un certo sistema di assiomi.

Se accettiamo una simile terminologia possiamo anche cercare di riformulare la distinzione lakatosiana fra formale e informale nei termini della distinzione logica fra concetti e oggetti non concettuali. Una dimostrazione formale non è infatti null'altro che una connessione fra certe combinazioni simboliche che esprimono delle relazioni fra certi oggetti matematici. Una dimostrazione corrisponde invece a un argomento informale ogni volta che nello stabilire le inferenze che la compongono ci si richiami in qualche modo a una struttura di concetti, connettendo fra loro certe combinazioni simboliche - o, più semplicemente, certi enunciati - in base alle relazioni che vigono fra i concetti corrispondenti ai termini che vi occorrono. La distinzione fra dimostrazioni formali e informali non verte quindi sul linguaggio che queste utilizzano, ma sulla natura del legame inferenziale che esse esprimono e dipende quindi dallo stadio a cui è giunto il processo di oggettivazione. I termini "argomento (o inferenza) informale" e "argomento (o inferenza) concettuale" devono quindi essere intesi come sinonimi.

Ciò che Lakatos presenta come il carattere fallibile della matematica non è altro che la conseguenza di una constatazione banale: se l'edificazione di una teoria formale può essere intesa come lo scopo intermedio di una ricerca, essa non può venire confusa né con lo scopo finale di questa, né con il prototipo della totalità degli atti linguistici cui la "ricerca matematica" ha storicamente messo capo. Se la stessa presentazione di una teoria formale sembra richiedere il ricorso a un certo insieme di enunciati che non possono venire inclusi entro la teoria stessa (di cui almeno una parte dovrà essere articolata in un metalinguaggio rispetto al linguaggio in cui la teoria è formulata), si possono presentare innumerevoli casi in cui la comunità matematica ha accordato legittimità a produzioni linguistiche essenzialmente differenti da una teoria formale - anche indipendentemente dal loro ruolo semplicemente subalterno rispetto alla presentazione di un tale prodotto - o ha valutato certe teorie formali nel contesto di indagini più generali o relativamente a insiemi già stabiliti di risultati informali. Lo studio dei testi matematici ci pone così di fronte a differenti tipi di enunciati che spesso si mescolano e si richiamano fra loro. Mentre alcuni di questi partecipano a dimostrazioni formali o informali - le quali peraltro si susseguono spesso nel corso del medesimo argomento - altri svolgono differenti e variegate funzioni: stabiliscono le regole di inferenza o si richiamano a consolidate pratiche dimostrative o computazionali, fissano alcune definizioni o connettono certi simboli a certi classi di concetti, giustificano la ricerca relativamente ai suoi obiettivi o a un certo insieme di ricerche o risultati precedenti, contengono congetture o formulano aspettative, criteri di accettabilità o inadeguatezza, presentano presupposti o generalizzazioni isolate. Se è certo che una buona analisi del testo può condurci a distinguere fra enunciati di tipo diverso e a isolare fra questi l'insieme delle asserzioni che esprimono le differenti proprietà di un certo insieme di oggetti, è anche vero che in molte occasioni il significato di tali asserzioni dipende in modo essenziale dal contesto linguistico in cui esse sono inserite. Questo vale a maggior ragione per i teoremi di una teoria (o sottoteoria) formale. Per quanto il sistema assiomatico possa essere costruito in modo da contenere la determinazione implicita del significato dei termini della teoria, è solo la connessione che in qualche modo si stabilisce fra gli enunciati della teoria e un *corpus* precedente di conoscenze o di problemi che trasforma quest'ultima da una successione di segni in un risultato dotato di valore scientifico. Le modalità in cui questa connessione si stabilisce sono varie e assai difficilmente codificabili, così come assai difficilmente codificabile è la nozione di "valore scientifico"; ciò che sembra tuttavia chiaro è che in nessun caso una sequenza per quanto lunga e articolata di teorie formali possa raggiungere uno stadio di totale autosufficienza. Ciò non ha solo a che fare con l'ovvia necessità di fornire interpretazioni concettuali delle stringhe simboliche, allo scopo di assegnare a esse un valore conoscitivo. Il punto è che questa interpretazione risulta essere strettamente impossibile qualora l'insieme delle stringhe simboliche in questione non sia inserito in un contesto linguistico non a sua volta riducibile a una teoria formale.

Vi sono almeno due modi differenti per argomentare a favore di questa tesi. Il primo è quello di riferirsi ai noti teoremi di non categoricità. Il secondo è quello di presentare una adeguata variante del classico argomento della camera chiusa. Il vantaggio di questa doppia argomentazione è dato dal fatto che essa presenta, nei due casi, la stessa tesi sotto due aspetti differenti e, a me pare, ugualmente rilevanti. Mentre i teoremi di non categoricità ci dicono infatti che ogni teoria formale coerente (espressa per mezzo del linguaggio della teoria degli insiemi e limitata al primo ordine) può essere soddisfatta da un'infinità di modelli di differente cardinalità e deve quindi essere relativizzata a un modello dato indipendentemente da essa,[90] l'argomento della camera chiusa[91] ci mostra che nessuna sequenza di simboli non interpretati può dar luogo a una conoscenza effettiva.

Se vogliamo rivolgere quindi la nostra attenzione alla matematica in quanto impresa conoscitiva non possiamo limitarci a studiare le teorie formali in quanto tali, ma dobbiamo almeno allargare il nostro sguardo alle relazioni che intercorrono fra queste e un insieme assai variegato di conoscenze, che - per seguire il suggerimento di Lakatos - potremmo qualificare come matematica informale. La tesi fallibilista può allora essere difesa in due sensi diversi e complementari: da una parte si potrà infatti affermare il carattere fallibile della matematica informale, dall'altra si potrà sostenere che ogni asserzione contenuta in una teoria formale deve essere valutata relativamente alla matematica informale, proponendo di operare una distinzione fra l'incontrovertibilità logica della deduzione e la verità della conclusione relativamente al mondo di concetti che la teoria formale si era proposta di oggettivare.

Per quanto la difesa del fallibilismo matematico non rientri fra gli scopi del presente lavoro, vi sono almeno due procedure di falsificazione alle quali mi pare opportuno rivolgere brevemente l'attenzione. Esse mi sembrano in-

---

[90]Per quanto ulteriori risultati abbiamo mostrato la categoricità di una teoria del second'ordine (nel senso della logica formale), è bene ricordare che questi risultati sono a loro volta relativi a una teoria non categorica come ZF più l'assioma di scelta. Cfr. su questo punto Salanskis (1989), secondo il quale:

> it is precisely to the extent that the presentations of types of object by first-order theories are non-categorial [...], that these presentations are in harmony with the practice, the style and the research orientation of contemporary mathematics. [cfr. *ivi*, p. 7 del dattiloscritto].

Si noti che questi stessi teoremi non impediscono in nessun modo di parlare di "oggetti matematici" nel senso che ho cercato di chiarire nelle pagine precedenti. Tutto ciò che io richiedo è infatti che un certo termine sia associato a un simbolo *standard* che possa venir manipolato secondo un certo insieme di regole (le quali possono peraltro pensarsi anche come implicitamente assegnate: non è forse questo il caso di molte manipolazioni proprie della geometria classica?).

[91]Immaginiamo di allevare un bambino in una camera completamente isolata in cui egli non disponga che di una riserva illimitata di testi i quali contengano ogni sorta di teoria formale (ma rigorosamente null'altro). Assumiamo inoltre la possibilità di poter interagire con il bambino per mezzo di adeguati influssi elettrici i quali siano in grado di trasmettere a questi la capacità di orientarsi nella scelta dei testi e di leggerne e assimilarne perfettamente il contenuto. Dopo un certo numero di anni apriamo la porta della stanza e, rivolgendoci all'uomo ormai adulto in una lingua qualsiasi, invitiamolo a contare un certo numero di mele che abbiamo disposto in buon ordine su di un tavolo e a comunicarci il risultato della sua operazione. Se qualcuno fosse convinto che l'esperimento possa essere condotto in modo tale che questi cominciasse naturalmente a contare e dopo un certo tempo formulasse una risposta adeguata al nostro quesito, egli sarebbe anche convinto dell'autosufficienza di un insieme adeguatamente strutturato di teorie formali relativamente a certi scopi conoscitivi, ma chiunque propendesse per una risposta opposta dovrebbe anche convenire con la tesi che ho avanzato nel testo.

fatti racchiudere due modalità tipiche del dibattito fra i matematici, ancorché non possano certo venir trasformate in modelli generali di crescita.

Il modo più semplice per presentarle è quello di fare riferimento a casi in cui un certo oggetto matematico è introdotto per mezzo di una definizione, la quale assegni un certo nome a un'entità determinata per mezzo del riferimento a oggetti già dati e a loro particolari proprietà monadiche o relazionali. J. T. Desanti ha distinto due differenti tipi di definizione matematica: la "definizione costruttiva" - la quale stabilisce "un modo operatorio di costituzione dell'oggetto" a partire da una classe di oggetti dati - e la "definizione descrittiva" - tramite la quale l'oggetto viene individuato per mezzo della tematizzazione di un certo insieme di attività. [92] La prima procedura di falsificazione cui intendo fare qui menzione è assai semplice e consiste nel negare *d'emblée* che la definizione in questione costituisca un'adeguata trasposizione oggettuale di un determinato concetto: le relazioni operatorie non esprimono in modo adeguato il legame che quel concetto intrattiene in quanto tale con un insieme di concetti preventivamente oggettivati, o le proprietà cui si fa riferimento non permettono di cogliere i caratteri essenziali di quel concetto. La seconda procedura è invece più complessa e può a sua volta presentarsi sotto forme fra loro diverse. Essa deriva dal confronto di alcune aspettative in funzione delle quali la definizione è stata introdotta con le conseguenze effettive che essa produce. Ora, perché una definizione possa produrre delle conseguenze occorre che essa conduca a inserire l'oggetto entro determinate catene inferenziali, il cui carattere formale corrisponde alla effettiva realizzazione di un'oggetivazione. Se la definizione in questione è costruttiva ciò richiede semplicemente che il "modo operatorio di costituzione" dell'oggetto si esprima per mezzo della determinazione di regole puramente sintattiche, mentre se essa è descrittiva occorre che le proprietà siano tali da rimandare direttamente a certe regole già determinate. Nessuna definizione descrittiva può quindi svolgere il ruolo di strumento di oggettivazione a meno che essa non rimandi indirettamente a un certo tipo di definizione costruttiva; il problema legato alla determinazione di una definizione descrittiva è allora quello di isolare un certo insieme di proprietà a partire dalle quali si possa giungere a ricostituire, per mezzo di regole già date, un campo più ampio di proprietà da ascrivere all'oggetto in questione. La determinazione di una definizione costruttiva non risponde d'altra parte, almeno nella generalità dei casi, che al tentativo di stabilire un certo insieme di regole capaci di permettere il passaggio da un certo insieme di oggetti dati a altri oggetti - direttamente individuati come i risultati dell'applicazione delle regole - i quali godano di certe proprietà stabilite *a priori*. Se vi sono certamente dei casi in cui l'introduzione di una certa definizione segue la dimostrazione della sua corrispondenza a certe aspettative, non è affatto raro il caso in cui la ricerca matematica consiste esattamente nel tentativo di mostrare in termini formali la corrispondenza fra certe definizioni (spesso già date) e certe conseguenze solo intuitivamente connesse a quelle definizioni. Ciò che mi interessa sottolineare qui non è tanto che l'esito di una

[92] Cfr. Desanti (1968), pp. 28-9.

tale ricerca possa contraddire le aspettative più radicate, mettendo quindi in luce seri problemi di adeguatezza della teoria formale, ma che la stessa prosecuzione di questa indica come lo scopo di una dimostrazione formale possa consistere nella risposta a problemi strutturalmente simili a quelli posti in una scienza empirica e mettere quindi capo a veri e propri atti di *scoperta* che allargano il bagaglio delle nostre conoscenze.

Ma di che genere di conoscenze si tratta? Mi pare che la risposta che a questa domanda è stata fornita da G. G. Granger tramite l'introduzione della nozione di "contenuto formale" possa considerarsi come assolutamente convincente e del tutto compatibile con l'ipotesi epistemologica che ho fino a qui cercato di difendere. La seguente citazione mi pare così contenere una conclusione del tutto naturale del mio precedente ragionare:

> What engender formal contents in mathematics are the internal limitations encountered by the symbolic imagination, at the point where rationally operational thought wishes to maintain the presence of the invariants that constitute its objects - an exigence that may itself be called logical, or more exactly metalogical, but which is no doubt required by a *strategy* whose status is transcendental, envisaging in the end an understanding of our experience of the real by means of a tactic of appropriately tempered formal construction. [...]
> I proposed [...] to connect the notion of content to that of information. What kind of information, then, do we get from the formal content of mathematics [...]?
> It [...] seems to me that this information consists in the establishment of properties that must be satisfied by all frames of reference for the description of objects. No longer only of the wholly colorless and indeterminate objects of the propositional calculus, but of objects already specified by diverse and multiple operations of thought such as for example comparing, classifyng, measuring. Operations which - and this seems to me of capital importance - are no longer restricted to being carried out only in the field of the sensible delimited by our perceptions. For Kant, if we agreed to get rid of the intuitive *a priori* contraints set out in his Transcendental Aesthetics, *everything whould be permitted*, after a fashion, to a Reason exercising itself deliberately outside the field of experience, but nothing constructed in this way by speculative knowledge could claim the solidity of the objects. The formal content we have recognized in mathematics shows us the contrary, since it seems that thought, even once freed from its application to the sensible, still encounters constraints that guarantee that its operational game remains correlated to a universe of possible objects.
> In this way the legitimacy and fecundity of the applications of free mathematics might be justified. Not that its constructions derive from experience; they are in fact the productions of an essentially creative imagination, even if their psychological and historical point of departure is situated beyond doubt in the effective organization, biological and social, of our experience of the world. But the formal content of mathematics constitues worlds of possible objects. Possible, in that they are the correlates of compatible operations, which dominate the architecture of the subject at least locally - this is lesson of theorems of limitation. In this sense it is true to say, with certain neopositivists, that mathematics, as a formal discipline, teaches us nothing about the world, because it has non empirical content. But it allows us to describe the world, not by means of wholly arbitrary frameworks, but in making explicit the limits within which our system of operation of thought give birth to consistent virtual objects. Such is the type of information carried by formal content.[93]

[93] Cfr Granger (1982), pp. 373-76.

Per quanto la matematica non possa quindi essere identificata con l'attività costitutiva - inferenza dopo inferenza - di una teoria formale, sembra che sia proprio grazie alla possibilità di pervenire a un tal genere di costruzioni che essa contribuisce in modo essenziale alla descrizione e alla comprensione del mondo che ci circonda. Tuttavia il processo di edificazione di una teoria formale è in generale assai complesso e richiede l'impiego inevitabile di strumenti informali dai quali la stessa teoria formale eredita il proprio senso, qualificandosi come un costrutto localmente incontrovertibile solo relativamente a se stesso. Così come essa è il prodotto di un atto interpretativo, è a un ulteriore atto interpretativo che essa richiama. Proprio questa intrinseca mancanza di autosufficienza rende impossibile il raggiungimento di una formalizzazione totale e definitiva, rinviando in ogni occasione a legami essenziali che trascendono il piano puramente sintattico e che garantiscono tanto la fruibilità di una teoria formale nel corso del processo conoscitivo che la possibilità di collegare fra loro teorie differenti, applicandole le une alle altre e facendo di un insieme sconnesso di frammenti formali una rete unitaria (solo localmente deduttiva), la quale ricostruisce sul piano maturo delle teorie quella stessa unità intrinseca che la matematica deriva dalla sua origine comune. L'attività matematica rinvia così al conseguirsi inevitabile di differenti esercizi ermeneutici:[94] dal mondo disordinato delle diversità empiriche a una rete di concetti, da questa a una struttura di costrutti formali, e da qui a una concettualizzazione più matura la quale contiene i principi e gli strumenti di una spiegazione di quella stessa realtà empirica, ciò che costituisce il problema essenziale della conoscenza. Nel corso di questa avventura la duttilità del pensiero si trasforma in incontrovertibilità del linguaggio e questa a sua volta in principio e strumento del pensare. E' la profezia di Euripide che fa della matematica una dialettica senza fine:

ἡ μὲν γὰρ γλῶττα ἀνέλεγκτος ἡμῖν ἔσται, ἡ δὲ φρὴν οὐκ ἀνέλεγκτος.[95]

[94]La concezione della matematica come un'attività ermeneutica è un punto su cui hanno più volte insistito J. Petitot e J. M. Salanskis nel corso di quelle animate conversazioni che contraddistinguono i seminari e le conferenze del primo. E' proprio dalla partecipazione a molti di questi incontri e dalla frequentazione di quel *milieu* di amici cui essi hanno saputo dar luogo che ho tratto una grande parte delle idee che ho cercato qui di presentare nel quadro di una rielaborazione il più possibile unitaria.

[95]Cfr. Platone, *Teeteto*, 154 d.

I. 3.
ANALISI FILOSOFICA

Lo scopo dei due precedenti capitoli era quello di fornire alcune delle categorie essenziali che permettono e strutturano un'indagine che voglia essere insieme storica e filosofica e voglia scegliere come proprio oggetto un frammento di quel divenire concreto e singolare che è l'edificazione della conoscenza matematica. Si tratterà ora di dire molto più brevemente in che cosa questa indagine dovrà consistere o meglio quale forma essa dovrà assumere.

Le riflessioni fino a qui condotte dovranno io credo bastare a rendere la nozione stessa di una storia della matematica meno oscura di quanto essa possa apparire a chi pensi la matematica come un insieme di "teoremi". La matematica è stata infatti presentata come un'attività libera del pensiero che manifesta se stessa per mezzo della produzione di un insieme di testi, la quale si svolge a ogni stadio ulteriore in presenza di un *a priori* che si manifesta a sua volta per mezzo di un altro insieme di testi. La storia della matematica è quindi una certa successione di atti e la sua storiografia non può che consistere in un tentativo di ricostruzione di questi atti attraverso l'*analisi* di un archivio di testi. La mera descrizione di questi testi - per quanto essa possa rivelarsi minuziosa e sofisticata - non si identificherà con una ricostruzione storica più di quanto la descrizione di una pinacoteca si identifichi con la storiografia dell'arte.[1]

Ma dietro la composizione di un testo vi sono diversi e innumerevoli atti la cui natura è necessariamente assai varia, e solo alcuni di questi fanno oggetto di una ricostruzione storica la cui attenzione sia rivolta all'attività matematica. Le modalità secondo le quali questa scelta è compiuta, o meglio le finalità analitiche che la dirigono, distinguono fra differenti orientamenti dell'indagine e conducono a ricostruzioni che rispondono a obiettivi diversi. Si tratterà quindi di dichiarare e giustificare il mio intento.

Vi è un primo e fondamentale criterio a cui nel corso della mia ricerca mi atterrò scrupolosamente: gli atti che cercherò di ricostruire saranno unicamente degli atti di pensiero. Se è certo che nessun atto di pensiero possa manifestarsi intersoggettivamente senza l'ausilio di atti di natura essenzialmente diversa (come il parlare o lo scrivere), mi pare che il carattere proprio del divenire matematico sia del tutto indipendente dalla materialità specifica di questi atti che intervengono in esso solo in quanto veicoli accidentali di un

---

[1] Per ragioni di chiarezza utilizzerò qui il termine "storia" per riferirmi esclusivamente alle "*res gestæ*", lasciando ai termini "storiografia" o "ricostruzione storica" il riferimento alla "*historia rerum gestarum*".

pensiero.[2] Il contrasto fra l'indispensabilità di tali atti al fine dell'edificazione di una conoscenza matematica e la loro accidentalità relativamente alla natura intrinseca di questa mette subito in luce il carattere apertamente interpretativo della mia ricostruzione che non ha in nessun modo la pretesa di descrivere degli accadimenti reali nella loro propria e specifica determinatezza. Che un certo testo sia stato o meno letto da un certo matematico è, a esempio, un fatto la cui influenza sul divenire effettivo della conoscenza matematica apparirà evidente a chiunque e certamente anche a me; in molti casi esso potrà perfino trovarsi all'origine di acquisizioni importanti e forse fondamentali che segneranno in modo inequivocabile tale divenire. Nonostante questo è solo un certo insieme di atti di pensiero che costituisce in ultima istanza e nel senso più proprio l'edificazione di una conoscenza. La ricerca della totalità delle cause a cui un certo atto deve la propria intrinseca determinatezza è un programma che impedisce ogni ricerca la quale scelga come proprio oggetto un qualsivoglia processo storico; questa non può che prendere origine da un atto di arbitraria selezione, che tanto più è esplicito e radicale, tanto più contribuisce a mostrarsi come tale.

Per quanto apparentemente selettivo questo solo principio non consiste, a ben guardare, che in una dichiarazione di rinuncia e non é certamente sufficiente a caratterizzare un'indagine. Non solo la rinuncia non è ancora abbastanza estesa, ma essa lascia intatto il problema dell'individauzione di un canone d'ordine cui la ricostruzione debba conformarsi. Non si tratta infatti solo di dire quali atti di pensiero dovranno essere ricostruiti, ma anche e soprattutto quale ordine dovrà essere rispettato.

Prima di rispondere a queste domande è tuttavia bene annunciare un'altra e altrettanto radicale rinuncia. In un passo di uno dei suoi numerosi saggi cartesiani P. Valéry ha condensato così la sua proposta per "une carrière toute nouvelle pour une «philosophie»":[3]

> Une œuvre exprime non *l'être* d'un auteur, mais sa *volonté de paraître*, qui choisit, ordonne, accorde, masque, exagère. C'est-à-dire qu'une intention particulière traite et travaille l'ensemble des accidents, des jeux du hasard mental, des produits d'attention et de durée consciente, qui composent l'activité réelle de la pensée; mais celle-ci ne vaut paraître ce qu'elle est: elle veut que ce désordre d'incidents et d'actes virtuels ne compte pas, que ses contradictions, ses méprises, ses différences de lucidité et de sentiments soient résorbées. Il en résulte que la restitution d'un être pensant uniquement fondée sur l'examen des textes conduit à l'invention de monstres, d'autant plus incapables de vie que l'étude à été plus soigneusement et rigoureusement élaboré [...]. En somme, le système d'un Descartes n'est Descartes même que comme manifestation de son ambition essentielle et de son mode de la satisfaire.[...] Au contraire, ni la passion de comprendre et de se soumettre par une voie toute nouvelle les mystères de la nature, ni l'étrange combinaison de l'orgueil intellectuel le plus décisionnaire et le plus convaincu de son autonomie avec les sentiments de la plus sincère dévotion, ni la quasi coexistence ou la succession immédiate d'un état qui veut ne reconnaître

[2] Naturalmente ciò è tutt'altra cosa dall'affermare che il linguaggio sia esso stesso un veicolo accidentale del pensiero.

[3] Cfr. Valéry (1986), p. 50.

> que la raison et d'un état qui donne la plus grande importance à des songes ne peuvent jamais perdre tout l'intérêt qu'excite la vie mentale même.[4]

La decisione di trasporre un giudizio su di un foglio di carta - una lettera, una scheda d'appunti, la pagina di un libro - trae certamente la sua origine da un universo di stati mentali, che se difficilmente può essere ricostruito nei suoi dettagli - e certamente non attraverso una semplice analisi del prodotto finale - può costituire il modello a cui ispirarsi nel tentativo, almeno, di restituirne la forma. Se togliamo al brano di Valéry l'enfasi letteraria che lo percorre non è difficile vedere nel suo programma di "ricerca della «poesia» nella produzione e l'organizzazione intrinseca delle idee"[5] un progetto "quasi-fenomenologico", che si ripropone di riportare in vita, almeno nei suoi tratti più generali, il conflitto interiore fra differenti stati di coscienza individuali di cui un testo non è che la maschera più o meno asettica. Questo programma non è il mio. Per quanto indubitabilmente reale e senza dubbio influente sulla produzione effettiva del testo e, quindi, sugli sviluppi della conoscenza a cui questo partecipa, questo conflitto non mi sembra infatti, ancora una volta, che un contesto accidentale dell'espressione di un pensiero, rispetto al quale il divenire matematico mantiene, in quanto tale, la più assoluta indipendenza. Anche in tal senso la mia indagine esclude quindi dai suoi obbiettivi la ricostruzione di un accadere reale e determinato.

Il divenire matematico - così come ogni divenire del pensiero - si trova quindi, in quanto tale, sospeso fra due regioni contrapposte i cui accadimenti contribuiscono in modo essenziale a determinarlo, senza partecipare alla sua natura intrinseca. La sua ricostruzione corrisponde così a un gesto interpretativo che *isola* una successione di atti, i quali, per quanto incapaci per sé soli di dare luogo a una effettiva catena causale, condividono una forma comune che esprime la natura che è propria a questo divenire. All'accidentalità che riveste gli accadimenti reali non si contrappone così una necessità di cui essi sono solo *una* manifestazione possibile, ma una "natura" che non presuppone in nessun modo gli esiti del processo, ma che partecipa inevitabilmente a esso e ne contiene, per così dire, la "ragione *più profonda*".

Questa natura è, a me sembra, quella di un "percorso mentale" contrassegnato dal passaggio da pensiero a pensiero. Il fatto che nessuno stadio di questo processo contenga in sé tutte le ragioni della determinazione dello stadio successivo non impedisce di ricostruire il percorso del tutto indipendentemente dalla presenza di ragioni esterne, mostrandone unicamente il tracciato. Ma per parlare di "ragioni esterne" è necessario un canone che caratterizzi e distingua ciò che è invece "interno". E questo canone non può che essere una forma - la quale non è in ultima istanza che la forma propria del pensiero. Riconoscere questa forma indipendentemente dal riferimento al percorso, rompendo la circolarità e fornendo un possente strumento di analisi è un programma al quale la filosofia è in più occasioni tornata. Ma il solo esito sicuro a cui essa sembra essere giunta è la codificazione di un canone deduttivo - qualcuno dirà di più canoni deduttivi - la cui natura è puramente

[4]Cfr. Valéry (1941), p. 817.
[5]Cfr. Valéry (1986), p. 50.

sintattica. Se è certo che è a questo canone che dobbiamo buona parte delle nostre inferenze, la crescita della conoscenza sembra derivare proprio e solo dalla capacità di connettere pensieri del tutto indipendentemente dalla "forma logica" degli asserti che li esprimono. E è proprio questa capacità di cui è qui questione. La difficoltà di presentare per essa una determinazione non circolare corrisponde alla difficoltà a fornire una determinazione positiva del concetto. A questa difficoltà la filosofia non ha ancora dato risposte e forse essa non è, in ultima istanza, che il segnale di una impossibilità originaria. Non resta quindi che indicare una connessione, arrestarsi a essa, fidando nella capacità del pensiero di riconoscere se stesso (se non la propria forma).

Ciò che cercherò di ricostruire attraverso l'esame di un insieme di testi è la *struttura di concetti* che - in presenza di condizioni date (le "ragioni esterne", appunto) - ha condotto alla composizione di quei testi e ha dato origine, quando ciò è il caso, alle strutture di oggetti matematici che questi testi presentano.

Il perseguimento di un tale obiettivo mi condurrà a un'analisi dettagliata dei testi, la quale cercherà di ritrovare nella successione degli argomenti particolari la traccia di questa struttura, il percorso che essa disegna. Per far questo sarà spesso necessario liberarsi dall'ordine espositivo e dalla stessa unità materiale di un testo, cercando uno schema "più profondo" che, pur rispettando i vincoli cronologici - dai quali non è certo possibile fare astrazione entro un'ipotesi genealogica come quella che ho cercato di presentare nel capitolo precedente - ritrovi la propria legittimità proprio e solo nella forza persuasiva della connessioni che esprime. E' proprio in tal senso che parlerò di teorie e tradizioni, per riferirmi a un insieme ordinato di enunciati che disegna e rappresenta un percorso del pensiero.

Non proporrò quindi alcun modello evolutivo né cercherò nei testi la possibilità di un ordine il quale risponda a un criterio generale formulato *a priori*. E' solo la ricerca di connessioni individuali fra certi e determinati contenuti di pensiero, la quale si imponga per la sua stessa persuasività interna, che mi pare possa infatti rispondere all'obiettivo di ricostruire un divenire singolare, la cui obiettività non deriva in ultima istanza che dal suo essere l'espressione di queste stesse connessioni.

Per quanto, come ogni tentativo di comprensione, la mia indagine non possa cercare la propria legittimità che in un riconoscimento esplicito del carattere puramente ipotetico delle ricostruzioni cui essa darà luogo, questo non basterà ancora a fare di essa una vera e propria ricerca storiografica. Ciò che da questa la distingue in modo inesorabile è infatti il programmatico disinteresse per la individuale e specifica determinatezza degli accadimenti. Così pur se l'oggetto a cui rivolgerò la mia attenzione non sarà altro che una storia, l'esito della ricostruzione sarà assai meno di una storiografia. Il mio intento è piuttosto quello di promuovere un'*analisi filosofica* di certi testi, la quale riporti alla luce un'obiettività di carattere diverso dalla obiettività storica. Il movimento che conduce dall'analisi filosofica alla storiografia mi pare possa contraddistinguersi come un movimento di "aggiunta di realtà" che compia un passo ulteriore, ponendosi l'obiettivo di una ricostruzione di alcune di quelle ragioni esterne che assegnano a un evento la sua più intima determinatezza.

L'uso del termine "analisi" non è per nulla "innocente". Esso costituisce al contrario il più naturale legame fra le riflessioni epistemologiche che ho fin qui svolto e l'indagine specifica a cui mi rivolgerò nelle parti restanti della mia dissertazione. Proprio il concetto di analisi, in almeno una delle sue differenti determinazioni, costituirà infatti l'oggetto principale della mia ricerca. Questo termine designa fra i matematici settecenteschi tanto un *modo* di far matematica che un *corpus* aperto di risultati, della cui unità teorica e della cui organizzazione interna sarà qui questione. Che questa unità sia la diretta conseguenza del realizzarsi di quel modo nel corso di un'evoluzione, il cui oggetto principale è proprio l'organizzazione interna del *corpus*., è poi la tesi centrale che la mia ricostruzione si propone di difendere. Certo qui è all'*analisi matematica* che si fa riferimento, ma che fra questa e la nozione filosofica di analisi, così come essa è venuta determinandosi fra il XVII e il XVIII secolo, non vi sia alcun rapporto è senza dubbio assai difficile da sostenere. L'imprecisione e la vaghezza con cui questo termine è usato dai filosofi dell'illuminismo non impedisce di individuare alcuni tratti distintivi di un'idea che è anche in parte quella che sostiene il mio programma. Basterà forse una citazione per rendersi conto di questo (così come dei legami fra le due nozioni di analisi):

> Les résultats transcendantes de l'analyse - scriverà Laplace nel 1810 - sont comme toutes les abstractions de l'entendement, des signes généraux dont on ne peut déterminer la véritable étendue, qu'en remontant par l'analyse métaphysique, aux idées élémentaires qui y ont conduit; ce qui présente souvent de grandes difficultés car l'esprit humain en éprouve moins encore à se porter en avant, qu'à se replier sur lui-même.[6]

Per quanto scritte in piene epoca napoleonica, quando anche il partito degli "*idéologues*", ultimo residuo del movimento illuminista, era ormai in dissoluzione e Laplace stesso aveva apertamente abbracciato la causa dell'Impero, queste parole segnano in modo difficilmente equivoco l'influenza persistente dell'antico maestro d'Alembert. Ecco come questi si esprimeva in uno degli articoli chiave dell'*Encyclopédie*:

> Les principes philosophiques sur les quels la découverte d'une science est appuyée, n'ont souvent une certaine netteté que dans l'esprit des inventeurs; car soit par négligence, soit pour déguiser leurs découvertes, soit pour en faciliter aux autres le fruit, ils les couvrent d'un langage particulier, qui sert ou à leur donner un air de mistère, ou à en simplifier l'usage: or ce langage ne peut pas être mieux traduit que par ceux mêmes qui l'on inventé, ou qui du moins auroient pû l'inventer [...].
> Mais ce qu'il faut surtout s'attacher à bien développer, c'est la métaphysique des propositions. Cette métaphysique, qui a guidé ou dû guider les inventeurs, n'est

[6]Cfr. Laplace (1810), pp. 281-2.

> autre chose que l'exposition claire et précise des vérités générales et philosophiques sur lesquelles les principes de la science sont fondés.[7]

Al di là del linguaggio che è qui utilizzato, il programma che sembra delinearsi è proprio quello della ricerca di una struttura di concetti che la teoria matematica esprime e traduce nella forma di un discorso.

Un programma illuminista, dunque. Ma anche un programma che - come ho provato a mostrare nel capitolo precedente - può cercare le sue radici in una critica (non forzatamente negativa) di più recenti filosofie matematiche, come quelle di A. Lautman e J. Cavaillès in Francia e di I. Lakatos nel mondo anglosassone. Un programma, infine, che mi pare rincontrare - anche se su di un versante almeno in parte differente - le esigenze epistemologiche nelle quali J. T. Desanti ha inteso tradurre gli esiti, in parte certamente critici, di quella riflessione fenomenologica sulla scienza che ne ha così a lungo e profondamente segnato l'itinerario filosofico. E è proprio sottolineando questo legame che mi piace concludere il mio troppo lungo preludio.

Ecco come questi si esprime nell'ultima pagina di uno dei suoi saggi più impegnativi, dedicato all'esame di cinque "forme storiche" tramite le quali la filosofia ha perseguito il progetto di una "interiorizzazione" della scienza - rispettivamente: "l'interiorizzazione all'*Eidos*" (Platone), "l'interiorizzazione all'intelletto classico" (Descartes), "l'interiorizzazione al soggetto" (Kant), "l'interiorizzazione al concetto" (Hegel) e "l'interiorizzazione alla coscienza" (Husserl e la fenomenologia trascendentale).

> La conclusion à laquelle nous parvenons est-elle entièrement négative? Faut-il se résoudre à ne rien dire des sciences, sauf à en produire soi-même? Il s'en faut. Il est vrai que la tâche critique, celle qui consiste à annuler les discours intériorisants et reproducteurs, exige une installation dans le contenu des énoncés scientifiques. Cette "installation" ne peut être qu'une pratique. [...] Mais cette même tâche critique entraîne, du même mouvement, une destruction systématique des procès d'importation qui articulent, dans le discours philosophique, les formes d'énoncés propres à une science. [...]
> Cela veut dire que les conclusions négatives auxquelles nous parvenons: il n'y a pas de sujet transcendantal; il n'y a pas de dialectique totalisante; il n'y a pas de champ constitutif fondamental; il est impossible de reproduire le fondement de la "scientificité", &c.; ces conclusions ne peuvent être vérifiées que dans la mesure où est mise en œuvre la démarche positive qu'elles appellent.[8]

E ecco come egli presenta, in un altro saggio - raccolto nello stesso volume - la messa in opera, di questa "*démarche* positiva".[9]

> Il n'existe pas d'objet de savoir qui ne se manifeste comme complexe de relations et qui ne désigne un système de possibilités d'effectuation.[...] Il n'y a donc, en principe, aucun inconvénient à employer le mot "objet" pour désigner l'espèce d'entité dénotée par l'expression *mathesis*, en dépit de la complication des réseaux de relations qu'il importe d'y effectuer pur en disposer pleinement. Il nous faut simplement prendre, dans cet usage, quelques précautions qui

---

[7]Cfr. d'Alembert (El. Sci.), p. 492a-b.
[8]Cfr. Desanti (1975), p. 108.
[9]Cfr. *ivi*, p. 109.

tiennent à ceci que l'objet *mathesis* est saisi dans un ensemble de démarches théoriques qui le posent comme objet de savoir. Il s'agit en somme d'un "construit" théoriquement défini, dont la structure n'est pas immédiatement visible à la seule inspection des textes mathématiques. En particulier, il peut arriver que cette structure ne soit pas explicitement posée par ceux qui ont produit le texte mathématique. Cela ne veut pas dire qu'elle n'y soit pas opérante. [...]

Renonçons à chercher l'unité de la *mathesis*: 1° du côté d'un sujet transcendantal; 2° du côté d'un univers d'essences; 3° du côté d'un sol originaire, d'un champ d'intuitions auquel devraient renvoyer en dernière analyse tous les actes de désignation d'objet, qui trouveraient en lui le lieu où naît leur évidence instauratrice. Nous y renonçons parce que, dans chaque cas, la tâche épistémologique (dévoiler les modalités d'enchaînement, de constitution et de reproduction d'un corps bien défini d'énoncés mathématiques) se trouverait ajournée au profit d'une tâche d'une autre nature: démontrer le caractère non fictif de l'instance fondatrice concernée (sujet, essence, champ originaire). Cette démarche entraînerait un déplacement de l'intérêt épistémologique. [...]

Si nous éliminons ces détours philosophiques qui consisteraient, en définitive, à importer dans l'épistémologie mathématique des problèmes et des concepts élaborés en un autre champ, avec toutes les difficultés qu'ils engendrent, une seule voie semble-t-il, nous demeure ouverte: examiner les corps d'énoncés mathématiques (les "textes" effectivement produits) et leur faire subir systématiquement le traitement que nous avons esquissé plus haut à propos d'Euclide XII, 2 [allo scopo di "rechercher si et comment un corps de textes mathématiques renvoie à un noyau producteur"[10]]. Cette méthode est longue et fastidieuse, mais elle peut seule nous montrer la façons dont ces corps de textes, d'âge différents, produits dans des cultures différentes, se distribuent selon les formes de *mathesis* qu'ils designent.[11]

La contraddizione che a me pare flagrante fra le due conclusioni cui questi brani conducono non è in fondo che il segnale di una difficoltà a disegnare in termini positivi quel programma che sembra invece prendere corpo fra opposizioni e rinunzie. Vi è forse un modo per parlare della scienza "dall'interno" senza pretendere o cercare di praticarla. Vi è forse un compito per l'epistemologia che non si riduca alla verifica dello scacco dei tentativi di "interiorizzazione", senza confondere questa né con la riflessione stessa dello scienziato, né con l'elaborazione di un'ipotesi gnoseologica che assegni alla matematica un ruolo e una *natura* nel contesto dell'edificazione della conoscenza. Se in entrambi questi casi il problema che si pone resta prettamente filosofico, vi è un terzo problema che può fare oggetto di una ricerca: il divenire matematico, in quanto essersi realizzato di un processo conoscitivo, chiede infatti di essere compreso e ricostruito, invita a un'analisi il cui scopo sia proprio quello di svelare l'interna dinamica dei concetti che ha dato a esso luogo.

---

[10] Cfr. *ivi*, p. 199

[11] Cfr. *ivi*, pp. 208-12.

Parte II

Analitica dei concetti

Alla memoria di Eugenio Randi

II. 1.
LA QUESTIONE DEI FONDAMENTI DEL *CALCOLO*

II. 1. α. *Carnot e il "Calcolo infinitesimale"*

Nel 1813 il matematico e uomo politico francese L. M. Carnot[1] pubblicava a Parigi la seconda edizione delle sue *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*.[2] Confrontato con quello della prima edizione,[3] il nuovo testo presenta numerose modifiche e sostanziali ampliamenti. Fra questi, il più rilevante è certamente quello costituito dall'introduzione di una parte completamente nuova (che occupa l'intero terzo capitolo[4]) dedicata all'esame e al confronto delle differenti forme sotto le quali una medesima "teoria matematica" - il "calcolo infinitesimale" appunto[5] - era stata successivamente prospettata. Lo scopo di Carnot era chiaramente quello di ricostruire nel breve volgere di poche pagine un dibattito che da più di un secolo coinvolgeva l'intera comunità matematica europea, che certo non poteva ancora dirsi esaurito e al quale egli stesso aveva con il proprio *pamphlet* inteso portare un ulteriore - e forse definitivo - contributo.

Lo statuto di una tale discussione resta ancora oggi imprecisato. Gli innumerevoli tentativi di ricostruzione che si sono succeduti fra loro non hanno infatti ancora chiaramente indicato ciò che in essa debba essere inteso come la "sostanza" invariante che, nel corso del dibattito, avrebbe assunto "forme" differenti fra loro. Ciò risulta tanto più insoddisfacente quanto più manifesto è il fatto che tutti questi tentativi abbiano seguito l'impostazione di Carnot, riproponendo in differenti modi lo schema generalissimo di un susseguirsi di forme per un medesimo e invariabile contenuto, indicato nelle differenti occasioni per mezzo di termini solo apparentemente precisi, ma in realtà quanto mai vaghi e sfuggenti. Sotto questo aspetto anche le ricostruzioni più moderne sembrano aver ereditato quella abitudine all'uso per nulla rigoroso di alcuni termini chiave del vocabolario filosofico che contrad-

---

[1] Fra le numerose biografie di L. M. Carnot, le quali pongono in generale l'accento sulla sua carriera politica e militare, piuttosto che sui suoi contributi scientifici, cfr. H. Carnot (1861-63), Reinhard (1950-52) e Fridberg (1978). Un'ampia raccolta di materiale documentario variamente commentato si trova invece in AA. VV. (1984-85).

[2] Cfr. Carnot (1813).

[3] Cfr. Carnot (1797).

[4] La distinzione del testo in tre capitoli è un'altra delle importanti novità della seconda edizione.

[5] Anche se Carnot utilizza in realtà alternativamente i termini "calcolo infinitesimale" e "analisi infinitesimale" ho preferito qui riferirmi solo al primo di essi, cui mi pare sia possibile assegnare un significato più preciso.

distingue l'illuminismo francese e le sue più o meno dirette filiazioni.[6] I termini "calcolo infinitesimale", "analisi superiore", "geometria trascendente" - per ricordarne solo alcuni - che nei testi settecenteschi ritroviamo con così grande frequenza, hanno in più occasioni svolto il ruolo di indicare una o più regioni della scienza matematica, volta a volta individuate per mezzo del ricorso a implicite classi d'equivalenza, piuttosto che a definizioni o determinazioni esplicite. Se una tale ambiguità terminologica non era certo tale da impedire ai matematici dell'epoca di orientarsi con sufficiente disinvoltura e anzi permetteva una comunicazione più agile, evitando la necessità di precisazioni troppo dettagliate e noiose, essa si presenta all'interprete non più coevo, il quale voglia sottoporre quei testi a un'analisi filosofica non superficiale, come un problema per così dire preliminare. Quella questione filosofica e matematica che, seguendo d'Alembert, Carnot qualifica come la questione della "metafisica del calcolo infinitesimale" ha infatti necessità di essere precisata in termini astratti, isolata in quanto tale dal contesto retorico in cui essa è stata in più occasioni collocata.

Il modo più semplice per raggiungere questo obiettivo è forse proprio quello di servirsi della ricostruzione di Carnot come di un modello negativo,[7] mostrandone le incongruenze teoriche prima ancora che storiche. Essa consiste semplicemente nella successiva presentazione di otto "metodi",[8] dei quali è affermata tanto l'identità matematica[9] che la distinzione "metafisica". Nessuna di queste due tesi è tuttavia adeguatamente argomentata e dalla lettura del testo risulta anzi spesso difficile comprendere il senso preciso di queste

[6]Cfr. su questo punto Gusdorf (1971), pp. 17-9.

[7]Per una critica coeva alla ricostruzione di Carnot, la quale si traduce in una ricostruzione alternativa, cfr. Wroński (1814), in particolare la memoria dal titolo "Philosophie du calcul infinitésimal", per cui mi sia permesso rimandare a Panza (1989), pp. 295-306. La scelta di riferirmi a Carnot (piuttosto che a Wroński o anche a Montucla o Lacroix [cfr. rispettivamente Montucla (1799-1802), parte IV, libro V (vol. II, pp. 347-403) e parte V, libro I (vol. III, pp. 1-426) e Lacroix (1797), vol. I, pp. XIII-XXIX e (1810-19), vol. I, *Preface*, pp. II-XLVIII] o a altri ancora) è qui puramente funzionale ai fini della mia esposizione e non sottintende alcun giudizio di valore relativo all'interesse intrinseco del testo che ha il solo pregio di presentare in termini espliciti un'idea che mi pare ampiamente diffusa - sia pure con accenti e sfumature diverse o in forme meno radicali - in tutta la seconda metà del secolo XVIII, secondo la quale uno dei principali problemi matematici del momento era quello di fornire una versione adeguata del "calcolo infinitesimale", inteso come acquisizione in se stessa raggiunta e in quanto tale indipendente dalle forme particolari della sua esposizione. Il mio scopo non è qui altro che quello di discutere la legittimità di un tale punto di vista, nella prospettiva di una formulazione, la più possibile chiara, del tema stesso della mia ricerca. Quest'uso solo strumentale delle *Réflexions* mi permette d'altra parte di mantenere le mie analisi del tutto indipendenti da quelle di Carnot, che non ho qui in nessun modo la pretesa di ricostruire neppure sommariamente.

[8]Il termine è di Carnot.

[9]Ecco come Carnot si esprime all'inizio della sua "conclusione generale" [cfr. Carnot (1813), p. 199]:

> Les diverses méthodes dont nous avons donné l'idée dans cet écrit, ne sont à proprement parler qu'une seule et même méthode, présentée sous divers points de vue. C'est toujours la méthode d'exhaustion des anciens, plus ou moins simplifiée, plus ou moins heureusement appropriée aux besoins du calcul, et enfin réduite en un algorithme régulier.

affermazioni. Tutto ciò che ne risulta è così l'esibizione estensionale di una classe di equivalenza, la quale manifesta i suoi membri senza indicare i caratteri precisi della relazione che li connette fra loro. L'elenco dei "metodi" è il seguente:[10] metodo di esaustione, metodo degli indivisibili, metodo dei coefficienti indeterminati, calcolo dei differenziali,[11] metodo dei primi e ultimo rapporti o dei limiti, metodo delle flussioni, calcolo delle quantità evanescenti,[12] teoria delle funzioni analitiche. A questi si deve aggiungere, per completare il panorama, la teoria delle "equazioni imperfette" (o degli "errori compensati") che lo stesso Carnot presenta nella prima parte del suo *pamphlet* e che egli considera come una definiva soluzione al problema della fondazione metafisica del "calcolo infinitesimale".

La lettura delle *Réflexions* sembra concedere un solo argomento a favore della tesi dell'identità matematica di questi "metodi": essi possono venire variamente utilizzati nella corretta soluzione di alcuni elementari problemi geometrici del primo ordine che possono ricondursi alla generalissima famiglia dei problemi di tangenza, quadratura o rettificazione. La stessa presentazione dei "principi" sui quali essi si fondano e delle soluzioni cui essi conducono per i problemi proposti sembra poi contenere un argomento implicito a favore della tesi della loro distinzione "metafisica". Una simile *démarche* lascia di per se stessa perplessi, ma lo stupore è ancora più grande quando ci si accorge che Carnot non bada neppure a scegliere i propri problemi in modo che i differenti metodi siano successivamente applicati a problemi anche soltanto analoghi, occupando nella loro soluzione un ruolo in qualche modo consimile. Non è tuttavia difficile rendersi conto che dietro questa apparente mancanza di cura si cela una difficoltà intrinseca. L'elenco di Carnot è infatti incongruo e non fa che giustapporre entità di natura profondamente differente e ben difficilmente comparabili fra loro, anche soltanto in termini indiretti e relativamente al facile banco di prova di problemi geometrici infinitari del primo ordine. Se la tesi dell'identità di un certo insieme di metodi - e quindi della loro interpretabilità in quanto differenti versioni di un medesimo "calcolo" - vuole essere salvata, essa deve allora venire essenzialmente indebolita oppure riferita a un insieme più ristretto di quello a cui intende riferirla Carnot.

Un modo piuttosto semplice per tentare un indebolimento pare esserci implicitamente suggerito dalle stesse considerazioni precedenti. Più che l'identità dei "metodi", Carnot sembra infatti voler mostrare - a dispetto delle sue affermazioni di principio - la mera possibilità di considerare questi ultimi come artifici risolutivi di problemi della stessa specie, concernenti proprietà di figure geometriche non poligonali. Le difficoltà di principio che una simile strategia, per così dire minimale, sembra tuttavia comportare sono tali da rendere immediatamente evidente la sua inadeguatezza rispetto allo scopo prefissato. Anche qualora fossimo in grado di precisare meglio la classe

---

[10]Anche in questo caso ho mantenuto la terminologia di Carnot che sembra usare indifferentemente termini come "metodo", "teoria" e "calcolo".

[11]Cfr. a questo proposito il II capitolo delle *Réflexions*.

[12]Carnot si riferisce qui alla cosiddetta "teoria degli zeri qualitativi" prospettata da Euler nella prefazione delle *Institutiones calculi differentialis* [cfr. Euler (1755)].

dei problemi in questione e il ruolo che nella loro soluzione è svolto dai "metodi" precedenti, non avremmo infatti ancora fornito nessuna giustificazione a favore dell'idea secondo la quale questi metodi non sono in ultima istanza che differenti forme assunte da un solo e medesimo contenuto; detto in un altro modo: il termine generale "calcolo infinitesimale" continuerebbe a rigore a restare vuoto relativamente all'insieme delle produzioni matematiche, non potendo riferirsi a nessuna entità singolare, ma solo a una conglomerazione di "metodi" realizzata per mezzo del riferimento a entità in se stesse esterne. Per contraddire una simile interpretazione della tesi di Carnot non pare quindi necessario osservare come la relazione fra i "metodi" considerati e i problemi a cui essi si rivolgono sia nei differenti casi essenzialmente differente o come questi problemi possano solo assai approssimativamente qualificarsi, a loro volta, come appartenenti a una medesima classe.

Più fortuna sembra invece possibile per la seconda delle alternative prospettate: mantenere la tesi forte dell'identità, cercando per essa un senso sufficientemente preciso, ma riferirla a un insieme più ristretto di "metodi", tali da condividere un sostrato comune, al quale poter legittimamente assegnare la qualifica generale di "calcolo infinitesimale". Il problema interpretativo originario si separa qui in tre problemi distinti anche se fra loro strettamente collegati: restringere adeguatamente l'insieme dei "metodi" a cui ci si intende riferire, individuare un senso preciso per la tesi dell'identità di questi e connettere a essa un sostrato comune precisamente definito. Il modo in cui ognuno di questi problemi viene risolto influisce in modo decisivo sulla stessa possibilità di soluzione dei problemi connessi, tanto che l'ordine in cui le differenti questioni vogliono essere affrontate sembra tutt'altro che irrilevante relativamente alla possibilità di pervenire a una soluzione adeguata del problema originario. Per parte mia comincerò con l'interrogarmi sulla natura matematica dei "metodi", con lo scopo di isolare fra questi un gruppo più ristretto per cui l'idea di un'equivalenza di un qualche genere possa almeno apparire plausibile; a partire da questa selezione cercherò poi un sostrato comune al quale poter relativizzare la tesi dell'identità.

II. 1. β. *Esaustione, indivisibili, coefficienti indeterminati*

Il *metodo di esaustione* non è in se stesso che uno schema generale di dimostrazione matematica, largamente diffuso nei testi classici della geometria antica, da Euclide a Archimede e da Apollonio a Pappo. Ipotizzata un'identità del tipo $S = X$, si tratta di individuare dei procedimenti atti a mostrare come le due ipotesi contrarie $S < X$ e $S > X$ (ovvero: $S = X + \varepsilon$, per un valore qualsiasi, negativo o positivo di ε) conducano a delle contraddizioni relativamente ai dati del problema, in modo che l'identità di partenza possa dirsi dimostrata "per assurdo". Per quanto la maggioranza delle sue applicazioni classiche siano relative a problemi di quadratura di figure non polinomiali, le quali vengono approssimate per mezzo di due polinomi adeguati a un numero sempre maggiore di lati, il metodo sembra in se stesso del tutto indipendente da tale procedura e mantiene una generalità che trascende anche lo stesso contesto geometrico. Questa generalità non è tuttavia che una conseguenza della sua natura di semplice consiglio euristico, il quale non fa che indicare un possibile percorso dimostrativo, la cui realizzazione effettiva dipende dalla possibilità di costruire adeguate classi di diseguaglianza, secondo procedimenti che restano in se stessi indipendenti dalla generalità del metodo e vertono piuttosto sulla specificità del problema affrontato. Se volessimo così intendere il metodo di esaustione come una versione del "calcolo infinitesimale" dovremmo al più intendere questo come un suggerimento per l'organizzazione di una dimostrazione.

Non molto dissimile è la situazione della *teoria degli indivisibili*,[13] la quale si riduce in ultima istanza a un'indicazione generica, confortata dall'ausilio di un certo numero di esempi particolari che possono intendersi come paradigmatici. Data una determinata estensione (a una, due o tre dimensioni) si tratta di immaginarla come costituita dalla somma di infiniti elementi non ulteriormente divisibili (che possono in certi casi mantenere lo stesso numero di dimensioni dell'estensione originaria e conservare quindi una forma specifica che varia da caso a caso) i quali possano venir posti in un certo rapporto con analoghi elementi di altre e correlate estensioni. Se le costruzioni geometriche sono tali che tutti gli indivisibili della prima estensione mantengono il medesimo rapporto con tutti gli indivisibili delle estensioni correlate, allora si dovrà concludere che questo rapporto vige anche fra le somme degli indivisibili e quindi fra le estensioni stesse. Anche in questo caso il successo della dimostrazione dipende essenzialmente dai caratteri particolari e specifici della costruzione impiegata, la quale non fa che adattarsi a un'indicazione euristica generica espressa in termini inevitabilmente qualitativi. Così se il metodo degli indivisibili e quello d'esaustione possono con uguale successo applicarsi alla soluzioni di certe classi di problemi, essi non costituiscono in quanto tali che delle indicazioni generali, il cui sostrato comune appare ben difficilmente individuabile. Interpretare questi come due versioni differenti del medesimo "calcolo" appare quindi per lo meno azzardato.

Il *metodo dei coefficienti indeterminati* (che Carnot assegna a Descartes), può per parte sua ridursi all'assunzione di uno schema assai generale di inferenza. Se adeguate manipolazioni algebriche permettono a un certo stadio di una dimostrazione di pervenire a una relazione del tipo:

(1) $A + Bx + Cx^2 + \&c. = 0$

il cui primo termine sia costituito da un polinomio di grado infinito o indefinito e la cui validità non dipende dall'assegnazione a x di un certo insieme di valori particolari che devono venir determinati, ma è al contrario asserita indipendentemente dal valore assunto da x (posta eventualmente una limitazione relativa all'intervallo di variazione), allora tutti i coefficienti A, B, C,

[13]Cfr. in particolare Cavalieri (1635) e soprattutto Torricelli (1644) (a cui vanno aggiunti i numerosi manoscritti matematici, ora pubblicati in Torricelli (1919-44)).

&c. potranno a loro volta essere separatamente eguagliati a zero, ciò che fornirà un nuovo sistema di equazioni indipendente da x.. La genericità di questa formulazione[14] corrisponde alla pratica matematica settecentesca, nella quale il "metodo dei coefficienti indeterminati" è applicato in contesti assai differenti fra loro che conducono a intendere la (1) in termini volta a volta profondamente diversi fra loro, a esempio: come un'identità numerica garantita dalla convergenza della serie che ne costituisce il primo membro o come una semplice relazione simbolica tratta per mezzo di una generalizzata applicazione delle regole dell'algebra a polinomi di grado infinito.[15] Non sarà qui necessario indagare in dettaglio le origini concettuali di tale pratica matematica, né mostrare come nei differenti casi il "metodo" in questione possa condurre tanto alla soluzione di certe classi di problemi particolari che alla dimostrazione di importanti risultati di carattere del tutto generale. A questo verranno dedicate non poche delle pagine che costituiranno i prossimi capitoli della mia dissertazione. Ciò che per ora è sufficiente notare è che - a dispetto della frequenza con cui i matematici settecenteschi fanno uso di un tale "metodo" e del rilievo assolutamente primario che esso mantiene in tutte le loro dimostrazioni - non vi è qui che una semplice regola di inferenza che permette il passaggio da certe premesse a certe conclusioni. Come costruire queste premesse e quale significato assegnare ai polinomi (eventualmente infiniti) che compaiono in esse o ai loro termini separatamente presi, come passare dall'annullamento dei coefficienti alla soluzioni dei vari problemi o alle dimostrazioni di un certo insieme di teoremi sono questioni che restano del tutto estranee al contenuto del "metodo" che ben difficilmente può quindi intendersi, in quanto tale, come una versione del "calcolo infinitesimale".

Dell'originario elenco di Carnot restano allora soltanto sei "metodi", la cui considerazione richiede una maggiore attenzione e qualche ulteriore dettaglio. Per questo mi servirò direttamente dell'esame, sia pure piuttosto sommario, di alcuni dei testi in cui questi sono stati originariamente esposti.

---

[14]Per quanto sia sotto una tale forma particolare che il "metodo" si presenti nel corso del XVIII secolo nella stragrande maggioranza delle applicazioni, esso non verte evidentemente tanto sul carattere polinomiale del primo membro dell'equazione assegnata, quanto sul suo carattere di equazione identica (ovvero di equazione verificata per ogni assegnazione di valore alla variabile che compare in essa). E' così facile comprendere come lo stesso metodo possa condurre a annullare separatamente i coefficienti di una qualsiasi equazione identica (di forma infinitaria) qualora essi moltiplichino delle funzioni determinate (e ovviamente non costantemente nulle) di una o più variabili indipendenti fra loro e rispetto alle quali tali coefficienti possano venire intesi come "quantità costanti".

[15]Si osservi che se il primo termine della (1) è un polinomio finito (anche se di grado indeterminato), il "metodo" non fa che prescrivere una ovvia implicazione algebrica.

II. 1. γ. *Il calcolo differenziale: la "Nova methodus"*

La prima presentazione pubblica del *calcolo differenziale* risale a una corta memoria pubblicata da Leibniz sul numero dell' ottobre 1684 degli *Acta Eruditorum*,[16] il cui titolo - *Nova methodus pro maximis et minimis* - intende esplicitamente presentare la nuova teoria come un metodo di soluzione di uno dei problemi più classici della matematica seicentesca: data una curva riferita a un certo sistema di coordinate[17] determinare i valori della variabile indipendente ai quali corrispondono dei punti di massimo o minimo relativi. Ridotto ai suoi argomenti essenziali, il contenuto di tale memoria può venir presentato nei termini seguenti.[18]

Data (fig. 1) una curva AYF di ascissa AX = x e ordinata XY = y, sia B il punto in cui la tangente in Y di tale curva incontra l'asse AX. Assunto (come

[16]Cfr. Leibniz (1684a).

[17]Il problema della caratterizzazione di una curva e in particolare del rapporto fra curve (intese come entità geometriche) e equazioni è uno dei problemi più spinosi della storiografia matematica seicentesca a proposito del quale numerose ricerche sono state compiute, le quali hanno condotto a esiti spesse volte contraddittori. Ho prospettato e discusso le principali tesi storiografiche che a questo proposito sono state avanzate in Panza (1989), pp. 110-23 a cui rimando anche per i riferimenti bibliografici del caso. Qui mi limiterò a registrare i termini di questa correlazione relativamente ai testi che prenderò in esame. La questione del rapporto fra geometria e analisi sarà invece affrontata da un punto di vista che a me pare più generale a partire dal prossimo capitolo.

[18]Qui, come in tutti i casi che seguiranno per l'intero svolgersi della mia dissertazione, non riporterò il contenuto dei testi analizzati che attraverso una ricostruzione degli argomenti che dovrà essere intesa come l'esito di un primo atto interpretativo, piuttosto che come un mero riassunto. Non intendo giustificare questa scelta con l'argomento tutto sommato banale secondo il quale nessun riassunto può in senso pieno considerarsi come indipendente da una interpretazione. Se ciò è vero, vi sono certamente innumerevoli tecniche espositive che permettono di raggiungere alti gradi di aderenza al testo originario, inteso come oggetto di una descrizione. La mia convinzione è che la scelta di far uso di queste tecniche, allo scopo di rendere l'esposizione la più possibile fedele, introdurrebbe noiose e *inutili* pedanterie. La stragrande maggioranza dei testi cui mi riferirò è abbastanza facilmente reperibile nelle principali biblioteche europee. Lo scopo del mio lavoro non vuole quindi essere in nessun modo quello di una semplice descrizione che in nessun caso potrebbe esonerare lo studioso dall'esame diretto delle fonti. Cercherò al contrario di fornire delle ricostruzioni le quali contengano in quanto tali il maggior numero di elementi esplicativi, anche se mi sforzerò di rimanere il più possibile ancorato al nucleo essenziale dell'argomentazione, senza permettermi in nessun caso l'introduzione di concetti differenti da quelli che mi sembrerà possibile ritrovare nel testo stesso a cui rivolgerò la mia attenzione. Detto in altri termini, la mia presentazione del contenuto di un testo dovrà essere intesa come il risultato di una già avvenuta analisi filosofica che ulteriori considerazioni potranno al più permettere di dettagliare o approfondire. A questo scopo mi servirò di adeguate trasformazioni notazionali tutte le volte che individuerò la possibilità di rendere più agile l'esposizione senza tradire il contenuto concettuale di cui il testo mi sembrerà portatore (tali trasformazioni saranno ovviamente mantenute in tutte le citazioni, che potranno quindi differire dai testi originali per l'uso di certi simboli in luogo di altri). L'arbitrarietà delle mie scelte è l'inevitabile prezzo di uno sforzo di comprensione. E' proprio questa arbitrarietà che il lettore dovrà in ultima istanza giudicare per accordare o meno legittimità alle mie tesi. Per far questo non vi è tuttavia nessuna possibilità di evitare il ritorno a quelle fonti che il mio lavoro assume come dei dati oggettivi da esplicare piuttosto che da descrivere.

parametro) un segmento arbitrario PQ = dx, sia dy la quarta proporzionale fra i segmenti XB, XY = y e PQ = dx, di modo che si abbia per ipotesi la proporzione:

$$XB : y = dx : dy \tag{2}$$

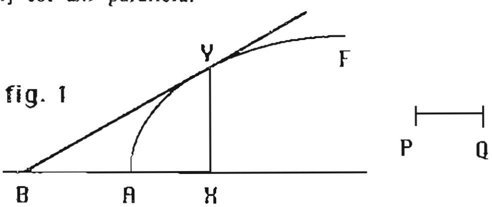
Si tratta di trovare delle regole algoritmiche capaci di condurre da ogni valore di y, espresso relativamente a x, al corrispondente valore di dy espresso relativamente a dx. Evitando ogni sia pur minima giustificazione *a priori*, Leibniz presenta le regole seguenti:

$$\begin{array}{ll}
\text{i)} & y = a \Rightarrow dy = da = 0 \qquad [\text{a costante}] \\
\text{ii)} & y = ax \Rightarrow dy = d(ax) = adx \\
\text{iii)} & y = v + w \Rightarrow dy = d(v + w) = dv + dw \\
\text{iv)} & y = vw \Rightarrow dy = d(vw) = vdw + wdv \\
\text{v)} & y = \dfrac{v}{w} \Rightarrow dy = d\left(\dfrac{v}{w}\right) = \dfrac{vdw - wdv}{v^2} \\
\text{vi)} & y = -v \Rightarrow dy = d(-v) = -dv \\
\text{vii)} & y = x^n \Rightarrow dy = d(x^n) = nx^{n-1}dx \\
\text{viii)} & y = x^{-n} \Rightarrow dy = d(x^{-n}) = -nx^{-n-1}dx \\
\text{ix)} & y = x^{n/m} \Rightarrow dy = d(x^{n/m}) = \dfrac{n}{m}x^{(n/m)-1}dx
\end{array} \tag{3}$$

Dalla (2) segue che la curva AYF è crescente se e solo se il segmento dy assume un valore positivo, mentre essa è decrescente se e solo se questo assume un valore negativo (essendo in tal caso la sottotangente BX collocata a destra del punto X). Ma - continua Leibniz -

> neutrum autem fit in medio circa Y, quo momento ipsæ y neque crescunt neque decrescunt, sed in statu sunt, adeoque fit dy æqu. 0, ubi nihil refert, quantitas sitne affirmativa an negativa, nam +0 æqu. -0: eoque in loco ipsa y, nempe ordinata [...] est *Maxima* (vel si convexitatem Axi obverteret, *Minima)* et tangens curvæ in Y [...] est axi parallela.[19]

fig. 1



[19]Cfr. Leibniz (1684), p. 468.

Consideriamo ora una nuova curva riferita allo stesso asse la cui ordinata sia costantemente uguale al valore di *dy* relativo all'ascissa corrispondente. Per definizione avremo allora:

(4) $XB_1: dy = dx: ddy$

dove B_1 è il punto di intersezione fra l'asse e la tangente alla nuova curva. E' allora chiaro che se alle successive ordinate della curva AYF corrispondono dei valori positivi di *ddy*, i valori di *dy* si succederanno secondo una successione crescente e la curva AYF sarà allora convessa, nel caso contrario essa sarà invece concava. I valori dell'ascissa che annulleranno il segmento *ddy* - senza tuttavia rendere la curva massima o minima - indicheranno allora dei punti di flesso.

L' *algoritmo* fornito dalle regole (3) fornisce un *calcolo* che Leibniz chiama "*differenziale*"; i segmenti *dx*, *dy* e *ddy* possono infatti intendersi come delle "*differenze*" (o "*differenziali*") che queste regole permettono di determinare, permettendo nel contempo di individuare meccanicamente i punti critici e le tangenti di ogni curva (espressa da un'equazione algebrica), senza procedere a preventive trasformazioni.[20]

Questa stessa interpretazione indica secondo Leibniz una via assai semplice per pervenire a una dimostrazione delle regole, tanto semplice che egli non crede opportuno neppure indicarla. Ciò che invece sembra essere tutt'altro che banale è il modo in cui i medesimi problemi possano venir risolti, seguendo i medesimi principi che forniscono la dimostrazione delle regole, anche nel caso di curve trascendenti, "quæ ad calculum Algebriacum revocari non possunt, seu quæ nullius sunt certi gradus".[21] Leibniz sembra qui esitare fra la tentazione di mostrare la potenza dei suoi principi e la "prudenza" che sembra invece consigliargli di nascondere le origini infinitesimaliste dei suoi risultati. Ecco come egli si esprime:

> [...] *tangente* invenire, essa rectam ducere, quæ duo curvæ puncta distintiam infinite parva habentia jungat, seu latu productum polygoni infinitanguli, quod nobis *curvæ* æquivalet. Distintia autem illa infinita parva semper per aliquam differentialem notam, ut *dy*, vel per relationem ad ipsam exprimi potest, hoc est per notam quandam tangentem.[22]

Queste poche parole ci permettono di comprendere la struttura generale dell'argomento di cui Leibniz si è servito per pervenire alle (3) che, rendendo esplicite le premesse nascoste, può a me pare riformularsi nei termini seguenti.

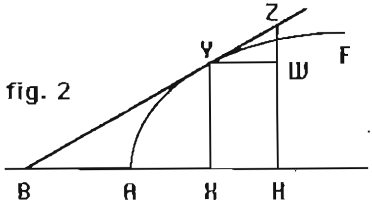
---

[20]Leibniz osserva che questa essenziale semplificazione rispetto ai metodi fino a allora conosciuti per la ricerca delle tangenti (come a esempio il metodo di Descartes [su cui cfr. Galuzzi (1980)]) è dovuta all'introduzione di una nuova entità determinata come una quarta proporzionale, la quale non è direttamente contenuta fra i dati del problema. Per una valutazione del rilievo strategico di questa mossa nel contesto della nascita del "calcolo infinitesimale" cfr. Giusti (1984b).

[21]Cfr. Leibniz (1684), p. 470.

[22]Cfr. *ivi*.

fig. 2



Data una curva qualsiasi AYF (fig. 2), si fissi sul suo asse un incremento arbitrario XH = YW = dx e si tracci il segmento HZ perpendicolare all'asse. WZ sarà così quarto proporzionale fra la sottotangente, l'ordinata e l'incremento fissato. La determinazione della tangente dipende quindi dalla possibilità di determinare il segmento WZ, assumendo come data la relazione fra AX = x e XY = y e senza far ovviamente ricorso all'inclinazione della tangente stessa. Se è infatti proprio questa inclinazione che assegna a un tale segmento una lunghezza determinata, essa dipende a sua volta dalla natura della curva. L'idea di Leibniz è quindi quella di "saltare un passaggio" invertendo l'ordine apparentemente più naturale delle successive determinazioni (dalla curva alla tangente e da questa alla quarta proporzionale).[23] Un modo per rendere questo possibile è quello di scegliere adeguatamente l'incremento parametrico XH = dx. L'adeguatezza non può tuttavia dipendere qui dalla semplice lunghezza di questo incremento, ma verte piuttosto sulla sua natura per così dire *qualitativa*: se esso è infatti infinitamente piccolo, il punto Z sarà a sua volta solo infinitamente discosto dalla curva e se questa è confusa con un poligono di infiniti lati potrà intendersi come appartenente a essa, in modo che il segmento WZ possa per parte sua intendersi come un incremento (infinitesimo) dell'ordinata. Data l'equazione $y = y(x)$, si avrà allora anche: $y+\mathrm{WZ} = y+dy = y(x+dx)$. La giustificazione delle regole (3) è, a partire da queste premesse, piuttosto semplice. Consideriamo solo due esempi. Se $y = vw$ si avrà anche: $y+dy = (v+dv)(w+dw)$ e quindi: $dy = vdw + wdv + dvdw$, il cui ultimo addendo potrà essere omesso in quanto infinitamente piccolo anche rispetto all'incremento infinitamente piccolo scelto come parametro. Se $y = x^n$ si avrà invece: $y+dy = (x+dx)^n$ e quindi: $dy = nx^{n-1}dx + \frac{n(n-1)}{2!}x^{n-2}dx^2 +\ldots + dx^n$, da cui si perviene al risultato indicato ancora per mezzo dell'omissione degli infinitesimi di ordine superiore relativamente a dx. Nel caso in cui la curva sia invece trascendente i medesimi principi non sembrano dar luogo (almeno direttamente[24]) a regole altrettanto generali e possono al più consigliare il ricorso a adeguate costruzioni geometriche in cui le tangenti cercate siano in qualche modo correlate a quantità note o determinabili. Relativamente a questo genere di curve il metodo leibniziano non sembra quindi ancora differire strutturalmente dal metodo di esaustione o da quello

[23] E' proprio questa inversione che conduce a spostare l'attenzione dalla sottotangente al differenziale [cfr. la precedente nota 20].

[24] Come vedremo ciò è reso possibile solo dall'introduzione di metodi di sviluppo in serie intera e, in particolare, dal metodo di soluzione per serie delle equazioni differenziali che esprimono analiticamente queste curve.

degli indivisibili. Esso contiene tuttavia la possibilità di una ulteriore generalizzazione, il cui compimento segnerà una parte essenziale della vicenda alla quale rivolgerò la mia attenzione nelle parti successive della presente dissertazione.

Non sarà certo il caso di insistere qui né sul carattere prettamente informale della precedente dimostrazione - la quale fa esplicitamente uso di proprietà del *concetto* di infinitesimo - né sui motivi che la rendono, anche sotto questo punto di vista, largamente insoddisfacente.[25] Le osservazioni che vorrei fare sono di genere diverso. In primo luogo mi pare infatti necessario sottolineare che l'espediente espositivo adottato da Leibniz - definire il differenziale dell'ordinata come una quarta proporzionale stabilita relativamente a un parametro arbitrario costituito dal differenziale principale - non permette in nessun modo di assegnare al proprio algoritmo una natura indipendentemente dalle presupposizioni infinitesimaliste che ne forniscono una giustificazione. Questo è infatti direttamente definito come un algoritmo risolutivo del problema della tangente, il quale può essere a sua volta connesso alle regole (3) solo se i differenziali dx e dy sono pensati come degli incrementi infinitamente piccoli delle coordinate della curva. Il calcolo differenziale si presenta quindi essenzialmente come un calcolo di differenze infinitamente piccole. In secondo luogo è anche interessante notare come un argomento informale sia qui utilizzato allo scopo di edificare una struttura di regole esplicite capaci di mettere luogo a un vero e proprio oggetto matematico. Date le regole (3), il passaggio da un'equazione algebrica qualsiasi al differenziale della curva corrispondente consiste infatti in una semplice reiterazione meccanica di procedimenti inferenziali del tutto prefissati, i quali possono facilmente dar luogo a una vasta classe di dimostrazioni puramente formali. L'argomento informale svolge quindi il ruolo di giustificazione di un atto di oggettivazione.[26]

II. 1. δ. *Il calcolo inverso dei differenziali: la "Geometria recondita" e il "Supplementum geometriæ"*

Un altro punto che può forse sorprendere nella lettura della *Nova methodus* è l'assenza di ogni riferimento al problema stesso del calcolo inverso dei differenziali. Già nel 1686 Leibniz[27] sembra tuttavia considerare questo come un ovvio corollario del suo metodo, per mezzo del quale egli sarebbe

---

[25]Non solo Leibniz non presenta alcun argomento (neppure informale) a favore dell'omissione degli infinitesimi di ordine superiore, ma non giustifica neppure l'implicita gerarchia infinitesimale che egli adotta.

[26]E' chiaro che l'oggetivazione riguarda qui il concetto di differenziale e non quello di infinitesimo. Essa è inoltre soltanto parziale; se le regole (3) insegnano infatti a passare del tutto formalmente da ogni equazione algebrica al differenziale della curva corrispondente e quindi alla sua tangente, esse non ci dicono ancora come un differenziale possa in altre occasioni venir formalmente trattato.

[27]Cfr. Leibniz (1686).

pervenuto a non pochi e interessanti risultati[28] e, in particolare, a un'estensione della geometria cartesiana all'ambito stesso delle curve trascendenti.[29] Ecco come egli stesso si esprime:

> [...] methodus investigandi Tetragonismos indefinitos aut eorum impossibilitates, apud me casus tantum specialis est, (et quidem facilior) problematis multo majoris, quod appello *Methodum Tangentium inversam*, in quo maxima pars totius Geometriæ trascendentis continetur, et quod si Algebraice semper possit solvit omnia reperta haberentur, et vero nihil adhuc de eo extare video satisfaciens; ideo ostendam quomodo non minus absolvi possit, quam Tetragonismus ipse indefinitus.[30]

L'idea che Leibniz sembra qui presentare è sinteticamente la seguente: vi è un grande numero di problemi geometrici - in particolare quelli di quadratura o altri riferiti a curve non algebricamente definite - i quali possono tradursi nella determinazione di equazioni involventi delle quantità differenziali; se da queste equazioni fosse in generale possibile pervenire o alla determinazione di un'espressione algebrica finita per le ordinate alle quali questi differenziali corrispondono o alla esplicita dimostrazione del carattere trascendente del problema, si avrebbe un metodo generale per risolvere "algebricamente" ogni problema geometrico per cui una tale soluzione è possibile o per mostrarne definitivamente la natura trascendente; anche nei casi in cui nessuno di questi due risultati appare (ancora) raggiungibile vi è tuttavia la possibilità di pervenire a un espressione delle suddette ordinate per mezzo di serie infinite i cui termini sono a loro volta delle espressioni algebriche.

Non è difficile riconoscere qui l'enunciazione di due programmi (che potremmo dire di integrazione finita e di integrazione per serie) il cui scopo profondo è quello di pervenire a una generalizzazione dell'applicazione dei metodi "analitici" alla soluzione dei problemi geometrici. Non mi soffermerò qui su quei passaggi - invero piuttosto oscuri - che contengono l'esposizione generale di quel metodo di "quadratura indefinita" che la precedente citazio-

---

[28]Non è naturalmente fra gli scopi di questo paragrafo quello di ricostruire, neppure sommariamente, l'evoluzione del calcolo differenziale fra il 1684 e i primi anni del XVIII secolo [a questo proposito cfr. fra gli altri Bos (1974) (nuovi studi saranno certamente promossi dalla pubblicazione in corso dei manoscritti matematici inediti di Leibniz nel quadro dell'edizione dei *Sämtliche Schriften und Briefe*, a cura dell'Accademia delle scienze di Berlino)]. Il mio obiettivo assai più limitato è quello di utilizzare il riferimento a alcuni testi "classici" per caratterizzare in termini del tutto generali un archetipo matematico al quale mi riferirò più volte nel corso dei prossimi capitoli.

[29]Come è noto Descartes aveva parlato di curve *meccaniche* piuttosto che di curve *trascendenti* [cfr. Descartes (1637)], riferendosi a curve non tanto determinate da equazioni trascendenti, quanto dall'esposizione del procedimento meccanico di costruzione. Mentre sembra abbastanza naturale associare alla nozione di curva trascendente l'idea di una *classe* di curve non algebriche, la nozione di curva meccanica sembra piuttosto connessa all'idea di un insieme di curve particolari individualmente definite [cfr. a questo proposito Giusti (1987)]. Il consapevole passaggio dal secondo punto di vista al primo (che Leibniz sembra in qualche modo anticipare) non è che una conseguenza dell'introduzione del "calcolo infinitesimale" (e, in particolare, del "calcolo infinitesimale inverso"). Per qualche argomento a favore di quest'ultima tesi, cfr. Panza (1989), pp. 115-19.

[30]Cfr. *ivi*, p. 295.

ne annuncia. Mi limiterò a riportare la conclusione a cui Leibniz trionfalmente si abbandona:

> Hac autem methodo ad Tetragonismos applicata, seu ad inventionem linearum quadratricium [...] patet non tantum, quomodo inveniatur, an quadratura indefinita sit Algebraice impossibilis, sed et quomodo impossibilitate hac deprehensa reperiri possit quadratrix transcendes, quod hactenus traditum non fuit, adeo ut videar non vane asseruisse, Geometriam hac methodo ultra terminos a Vieta et Cartesio positos in immensum promoveri. Cum hac ratione Analysis certa et generalis ad ea porrigatur problemata, quæ nullius sunt certi gradus, atque adeo Algebraicis æquationibus non comprehenduntur.[31]

Ma per quale ragione si dovrebbe credere che i problemi geometrici di cui è qui questione possano davvero ridursi alla determinazione di certe equazioni in cui compaiono delle quantità differenziali? A dispetto della centralità della questione, la memoria di Leibniz non contiene a questo proposito che due fuggevoli accenni di cui il secondo non è costituito che da un semplice esempio. Tratta l'equazione $pdx = ydy$ (in cui p é la sottonormale di una curva di equazione $y = y(x)$), egli scrive:

> [...] qua æquatione differentiali versa in summatricem, fit $s\ pdx = s\ ydy$. Sed ex iis quæ in methodo tangentium exposui, patet esse $d, \frac{1}{2}y^2 = ydy$; ergo contra $\frac{1}{2}y^2 = s\ ydy$ (ut enim potestates et radices in vulgaribus calculis, sic nobis summæ et differentiam seu s et d reciprocæ sunt.) Habemus ergo $s\ pdx = \frac{1}{2}y^2$.[32]

Se un'area è quindi intesa come la somma dei suoi elementi di larghezza infinitesima e la curva è tale che l'espressione ydx dell'elemento generico sia riconoscibile come un differenziale perfetto rispetto alle regole (3), la semplice inversione dell'algoritmo permetterà la soluzione del problema della sua quadratura. Ma che cosa giustifica questa reciprocità fra aree e tangenti? e come ci si deve comportare nel caso di espressioni algebriche che non appaiano a prima vista come dei differenziali perfetti? Mentre la seconda domanda prelude allo sviluppo stesso del "calcolo integrale", la prima sembra alludere a una questione assolutamente fondamentale, della quale il veloce accenno di Leibniz non contiene che l'abbozzo di una risposta.

Lo stesso sembra potersi dire per l'altro grande tema agitato da Leibniz nei suoi propositi programmatici: la possibilità di pervenire a una rappresentazione analitica - sia pure per mezzo di una serie - delle curve trascendenti. Egli si limita infatti alla presentazione di un esempio, che è peraltro lo stesso che già Newton aveva scelto per esemplificare nel *De analysi*[33] le proprie regole di quadratura. Data la cicloide AYF (fig. 3) definita relativamente alla

[31]Cfr. *ivi*, p. 296.

[32]Cfr. *ivi*, p. 297.

[33]Cfr. Whiteside (1967-81), vol. II, pp. 206-47, p. 238-9. Il *De analysi*, redatto da Newton fin dal 1669 non fu pubblicato che nel 1711 [cfr. Newton (1711)].

circonferenza[34] di raggio unitario AMND e di ordinata $XM = \sqrt{2AX-(AX)^2}$, si ponga $AX = x$ e si sfrutti la similitudine fra i triangoli ZWM e XOM per trarre l'identità: $MZ = \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$. Ma essendo MZ l'elemento infinitesimo dell'arco AM si avrà anche:[35] $XY = \sqrt{2x-x^2} + \int \frac{dx}{\sqrt{2x-x^2}}$, di cui Leibniz non presenta alcun sviluppo in serie.

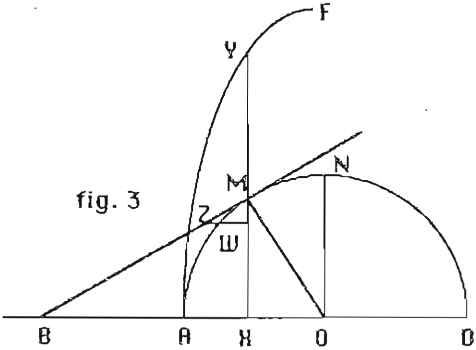


fig. 3

Sarà solo nel 1693 che Leibniz presenterà un metodo generale di integrazione per serie traendo per mezzo di esso gli sviluppi interi del logaritmo dell'esponenziale e del seno.[36] Anche in questo caso si tratta per la verità di un metodo già ampiamente utilizzato da Newton (che lo aveva esposto in termini generali nel *De Methodis*[37]), che Leibniz sembra tuttavia aver autonomamente riscoperto.[38] Considererò qui solo il primo esempio. Posto $y = \int \frac{adx}{a+x}$ si avrà immediatamente $dy = \frac{adx}{a+x}$ e quindi: $a\frac{dy}{dx} + x\frac{dy}{dx} - a = 0$. Ponendo $y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c.$ e sostituendo sarà allora facile trarre:

$$(4) \quad [aB - a] + [2aC + B]x + [3aD + 2C]x^2 + \&c. = 0$$

---

[34]Si ricordi che la cicloide è per definizione tale che il segmento MY è uguale all'arco di cerchio AM.

[35]Leibniz non giustifica in nessun modo l'applicazione dell'operazione di "somma" alla rettificazione di un arco.

[36]Cfr. Leibniz (1693).

[37]Cfr. Whiteside (1967-81), vol. III, pp. 32-353, pp. 94 e segg.. Anche il *De methodis*, redatto da Newton fra il 1670 e il 1671, fu pubblicato molto più tardi e in particolare nel 1736, in traduzione inglese [cfr. Newton (1736)].

[38]Leibniz inizia la sua memoria ricordando i metodi di sviluppo "per divisione" e "per estrazione" (leggi: per espansione del binomio) di Mercator e Newton, presentando il proprio come un metodo assai più generale capace di applicarsi *anche* alla soluzione delle equazioni differenziali. In realtà lo stesso esempio della cicloide mostra come anche i primi metodi possano applicarsi alla soluzione per serie di certe classi di equazioni differenziali, una volta che si sia assunta la linearità dell'integrale. E' inoltre evidente che gli stessi sviluppi di logaritmo, esponenziale e seno possono essere trovati per mezzo di un tale procedimento.

e quindi, secondo il metodo dei coefficienti indeterminati:

(5) $B = 1;\ C = -\frac{1}{2a};\ D = \frac{1}{3a};$ &c.

Sfruttando l'identità fra il logaritmo e l'area dell'iperbole,[39] si avrà così:[40]

(6) $\frac{y}{a} = \log(a+x) = \log a + \frac{x}{a} - \frac{x^2}{2a^2} + \frac{x^3}{3a^3} - \&c.$

di cui Leibniz non precisa in nessun modo le condizioni di convergenza.[41]

L'idea centrale di un tale procedimento è chiaramente l'introduzione di una serie indeterminata di forma nota, la cui manipolazione permette l'applicazione del metodo dei coefficienti indeterminati. Ritornerò altrove su questa strategia dimostrativa.

II. 1. ε. *Il calcolo differenziale: l'Analyse di de l'Hôpital*

Lasciando da una parte gli sviluppi e le ricerche più particolari che le acquisizioni di Leibniz hanno promosso fra i matematici continentali - argomento che non può certo venir affrontato neppure sommariamente nel contesto di una dissertazione dedicata a differenti soggetti - concluderò il mio rapido *aperçu* introduttivo dedicato al calcolo differenziale diretto e inverso con la presentazione delle due più autorevoli sistematizzazioni che esso ha conosciuto fra la fine del XVII secolo e l'inizio del XVIII: l'*Analyse des infiniment petits* del Marchese de l'Hôpital e le *Lectiones mathematicæ de methodo integralium* di Johann I Bernoulli.[42]

---

[39] Per la prima dimostrazione di questo risultato cfr. Sarasa (1649).

[40] "Dimenticando" la costante di integrazione Leibniz pone in realtà $y = Bx + Cx^2 + \&c.$ e deriva quindi la serie logaritmica a meno dell'addendo costante che è nullo solo nel caso in cui a sia posto uguale a 1.

[41] Per ottenere il medesimo risultato per mezzo dello sviluppo binomiale basterà sviluppare in serie il binomio $(a+x)^{-1}$ e integrare termine a termine secondo l'algoritmo inverso delle tangenti.

[42] Cfr. rispettivamente de l'Hôpital (1696) e Johann I Bernoulli (1742), vol. III, pp. 385-558. Le ricerche storiche hanno ormai definitivamente mostrato che anche il primo di questi testi è sostanzialmente dovuto a Johann I Bernoulli non contenendo che i resoconti delle lezioni impartite da questi al Marchese de l'Hôpital [cfr. Schafheitlin (1922)], il quale ne avrebbe per così dire acquistato i diritti [cfr. Fellmann-Fleckenstein (1970), p. 52]. Le *Lectiones de methodo integralium* - redatte da Bernoulli fra il 1691 e 1692 - non costituiscono d'altra parte che la continuazione di questo insegnamento. Benché non pubblicato che cinquant'anni più tardi questo testo ebbe una importante diffusione fra i matematici continentali dei primi decenni del secolo.

Il tentativo di de l'Hôpital è quello di ridurre i principi generali del calcolo differenziale a una semplicissima "struttura assiomatica" composta da due definizioni e due "domande o supposizioni":[43]

Def. I Una quantità è detta *variabile* quando essa aumenta o diminuisce continuamente [quando essa è tale che *il suo valore* aumenta o diminuisce continuamente], in caso contrario essa è detta *costante*.

Def. II La "porzione" infinitamente piccola per cui una quantità variabile aumenta o diminuisce continuamente è detta *differenza* di questa quantità.

Dom. I Due quantità che non differiscono fra loro che per una quantità infinitamente piccola possono venir "prese l'una per l'altra", ovvero: una quantità che è aumentata o diminuita di una quantità infinitamente piccola può essere considerata come "demeurant la même".

Dom. II Una linea curva può essere considerata come costituita dalla successione di un infinità di segmenti infinitamente piccoli, ovvero come un poligono a infiniti lati, ciascuno dei quali è infinitamente piccolo; l'angolo formato da ognuno di questi segmenti con quello successivo determina le curvatura della curva.

L'analisi delle definizioni e delle domande di de l'Hôpital ci mostra in primo luogo che esse si susseguono secondo un ordine logico che è differente dall'ordine della loro presentazione. Se infatti le seconde stabiliscono certe proprietà operazionali proprie di quantità o segmenti infinitamente piccole e di curve, le prime non forniscono nessuna caratterizzazione di queste entità e anzi è proprio la nozione di quantità infinitamente piccola che svolge in Def. II il ruolo di *definiens*. Così per sapere che cosa è una "differenza" di una certa quantità dobbiamo sapere che cosa significa dire che essa aumenta o diminuisce continuamente per una "quantità infinitamente piccola" e per questo non possiamo che rivolgerci che alle due successive domande. Rivolgiamo quindi per prima cosa a queste la nostra attenzione. La prima sembra presentare una rimarchevole proprietà operativa delle "quantità infinitamente piccole", e può essere intesa come una regola generale di inferenza formale. Se tale regola è tuttavia assunta come un criterio generale di sostituzione, essa impedisce non solo di comprendere come una quantità possa variare di una "quantità infinitamente piccola", ma anche di dar luogo a ogni forma di computazione algebrica. L'applicazione della regola deve così essere ristretta a situazioni selezionate e ciò impedisce di intendere la sua presentazione come la realizzazione di un processo di oggettivazione. Per ciò che riguarda la seconda domanda è evidente che essa non può in nessun modo venir intesa come l'esibizione di una proprietà dei segmenti infinitamente piccoli. Se si dicesse infatti che un segmento infinitamente piccolo è tale che se: un suo punto appartiene a una curva, allora ogni altro suo punto vi appartiene, si sarebbe nella totale impossibilità di dare senso all'idea di determinati angoli di inclinazione rispettiva dei segmenti della curva, mentre

[43]Cfr. de l'Hôpital (1696), pp. 1-3.

se si introducesse un criterio di selezione dei segmenti infinitamente piccoli per cui vale questa proprietà (come l'essere tangenti o secanti alla curva stessa) questo dovrebbe forzatamente far ricorso a una distinzione di principio fra curva e segmento contraddicendo così il contenuto stesso della domanda. Quest'ultima non può quindi essere intesa che come l'esibizione di una proprietà delle curve: una curva è un poligono di infiniti lati infinitamente piccoli. Ma perché questa affermazione sia sensata occorre sapere ancora una volta che cosa sia un segmento infinitamente piccolo.

Proprio questo è il punto del mio argomento. Ciò che mi interessa sottolineare non è infatti la (almeno apparente) contraddittorietà della struttura assiomatica di de l'Hôpital - a proposito della quale fiumi di inchiostro sono in tre secoli stati versati - ma il fatto che essa non è nelle condizioni di metter capo all'introduzione di veri e propri oggetti matematici e presenta quindi una natura prettamente concettuale. In luogo di assegnare determinati significati a certi simboli e di introdurre delle regole operative riferite a questi ultimi, de l'Hôpital sembra fornire i principi di un'argomentazione puramente informale essenzialmente fondata su proprietà implicite o esplicite di certi concetti. Se consideriamo le cose da questo punto di vista la stessa affermazione di contraddittorietà deve essere più attentamente valutata. Ciò che questi ci dice è infatti che nel più vasto dominio delle quantità, alcune debbono essere *pensate* come infinitamente piccole e devono quindi essere trattate secondo regole operative particolari la cui applicabilità dipende in modo essenziale dal contesto in cui si opera. La correttezza di una dimostrazione che si fondi sulle premesse stabilite da de l'Hôpital dipende quindi dalla capacità di selezionare i contesti particolari in cui i principi che egli stabilisce possano venir applicati.

Tutto ciò diventa a me pare ancora più chiaro se possiamo a considerare più dettagliatamente le definizioni stesse di cui de l'Hôpital si serve e che sembrano rispondere allo scopo di caratterizzare delle particolari quantità infinitamente piccole, dette "differenze", la cui considerazione permetterà la soluzione di numerosi problemi geometrici.

In primo luogo che cosa è una quantità? Se a questo termine sembra possibile, nel contesto del calcolo differenziale, associare una ampia classe di oggetti, occorre osservare che in quanto tale questa classe resta del tutto imprecisata.[44] E ancora: che cosa significa "aumentare o diminuire *continuamente*"? e che cosa è la "porzione infinitamente piccola per cui una quantità variabile aumenta o diminuisce continuamente"? Le risposte che Varignon ha cercato di fornire a queste due domande nel suo commentario dell'*Analyse* di de l'Hôpital mostrano bene quanto dietro queste formulazioni apparentemente semplici si celassero dei concetti ancora ben lontani dall'essere oggettivati. Ecco come egli si esprime:

> Toute quantité qui gardant la même expression, augmente ou diminue continuellement (*non per saltum*), est appellée *variable*; & celle qui, sous la même expression, garde la même valeur, est appellée *fixe* ou *constante*. [...] La *difference*

[44]Cfr. a questo proposito il prossimo capitolo II.2..

> ou *differentelle* d'une quantité, est l'accroissement ou la diminution instantanée de sa valeur.[45]

Il riferimento alle nozioni di "medesima espressione", "salto", "valore", "accrescimento o diminuzione istantanea" forniscono l'immagine vivente di una struttura assai complessa di concetti su cui tornerò nelle parti seguenti della mia dissertazione.

Ciò che è invece opportuno mostrare fin da ora è come le definizioni e le domande di de l'Hôpital possano tradursi in principi guida di un'argomentazione informale capace di metter capo a degli schemi generali di inferenza formale che corrispondono perfettamente a quelli già stabiliti da Leibniz nella *Nova methodus*.[46]

La definizione stessa di differenza giustifica per prima cosa la (3.i), mentre la (3.iii) è giustificata dalle semplice identità algebrica $(v+dv)$ + $(w+dw) - v - w = dv+dw$. Per quanto riguarda la (3.iv) occorre invece ricorrere alla Def. I, la quale (opportunamente interpretata) permette di ripetere la giustificazione del paragrafo II.1.γ.. Da qui è poi possibile trarre le restanti identità tramite semplici sostituzioni. Consideriamo due esempi. Ponendo $x = yz$ si avrà subito $dx = ydz + zdy$ e quindi: $dz = \frac{dx-zdy}{y}$, ciò che equivale ovviamente alla (3.v). D'altra parte assumendo che a quantità uguali corrispondono differenze uguali si potrà passare da $x^n = y^m$ a[47] $nx^{n-1}dx = my^{m-1}dy$ da cui basta trarre dy per ritrovare la (3.ix).

Così, se la struttura assiomatica di de l'Hôpital non è in quanto tale in grado di mettere capo a un nuovo universo di oggetti matematici, essa fornisce una giustificazione informale di un insieme di regole le quali contengono per parte loro la realizzazione di questo obiettivo. Il passaggio chiave in un simile percorso argomentativo è, come è chiaro, la determinazione della regola del prodotto: la Def. II viene per prima cosa trasposta in un'identità simbolica sulla quale è possibile operare secondo le leggi dell'algebra[48] indi-

---

[45]Cfr. Varignon (1725).

[46]Cfr. de l'Hôpital (1696), pp. 3-10.

[47]E' evidente come la (3.vii) derivi dalla (3.iii) per semplice reiterazione.

[48]E' chiaro che questa trasposizione fornisce implicitamente un'interpretazione parziale, ma perfettamente formalizzabile di entrambe le definizioni: per ogni y, x, z, &c., se la scrittura $y = y(x, z, \&c.)$ indica che y è una "quantità" espressa per mezzo di una composizione algebrica qualsiasi delle quantità variabili x, z, &c., allora y è una "quantità variabile" e la sua "differenza" dy è definita per mezzo dell'identità: $dy = y(x+dx, z+dz, \&c.) - y(x, z, \&c.)$. Per completare l'interpretazione di Def. I occorre dire che cosa si intende con l'affermare che x è una quantità variabile. Ciò è tuttavia operativamente del tutto inessenziale: ciò che importa è saper formulare ogni problema particolare indicando esplicitamente le variabili principali o, che dir si voglia, indipendenti (quelle la cui natura di variabile non è ricorsivamente determinata). Differente è invece il caso della Def. II; perché essa possa operativamente rapportarsi ai problemi geometrici a cui de l'Hôpital applica il calcolo differenziale è infatti indispensabile qualificare la differenza come una quantità infinitamente piccola. La precedente definizione ricorsiva non è quindi neppure operativamente sufficiente e richiede sia una caratterizzazione ulteriore delle differenze delle variabili principali che una giustificazione del fatto che la legge ricorsiva di formazione delle variabili sia conservativa relativamente a questa caratterizzazione delle differenze. La Def. II non

pendentemente dal carattere particolare degli incrementi considerati; una volta che questa identità è stata ridotta ai minimi termini si evidenzia il carattere infinitesimale dei suoi diversi addendi e ci si richiama intuitivamente alla Dom. I per giustificare l'omissione. Data la regola del prodotto e dedotta banalmente quella della somma, tutte le regole restanti sono poi algebricamente dimostrabili senza alcun ulteriore ricorso a definizioni e domande. Il ricorso a queste ultime è invece essenziale per giustificare (ancora informalmente) l'impiego del nuovo oggetto matematico - che in se stesso non è altro che il risultato di una mera trasformazione simbolica formalmente regolata - alla studio delle "linee curve".

Fra le numerose applicazioni geometriche presentate da de l'Hôpital non considererò qui, molto brevemente, che quella relativa alla ricerca delle tangenti, la quale permette di evidenziare assai bene il disegno strategico che questi persegue.

La seconda sezione de l'*Analyse - Usage du calcul des différences pour trouver les Tangentes de toutes sortes de lignes courbes* - si apre con la seguente definizione:

> Si l'on prolonge un des petits côtés M*m* du poligone qui compose une ligne courbe; ce petit côté ainsi prolongé sera appellé la *Tangente* de la courbe au point M ou *m*.[49]

Perfettamente conseguente alla Dom. II, la mossa di de l'Hôpital manifesta nel contempo tanto le ambiguità intrinseche che una tale presupposizione infinitesimalista porta inevitabilmente con sé, che la via che permette non solo di superarle, ma perfino di tradurle in un principio euristico di soluzione di una ampia classe di problemi geometrici. All'ovvia contraddizione fra l'affermato carattere poligonale di una curva e la possibilità di salvaguardare le stesse condizioni di esistenza di una retta che, senza tagliarla, abbia uno e un solo punto in comune con essa, egli sembra infatti contrapporre una sorta di interpretazione in due tempi che, applicando *localmente e successivamente* delle interpretazioni contraddittorie, permette di disegnare il percorso di un'argomentazione matematica capace di condurre a una corretta soluzione di tali problemi. Data una curva e un punto M su di essa, de l'Hôpital *prima* intende questa curva come un poligono di cui M è uno dei vertici e considera l'arco infinitamente piccolo M*m* come un vero e proprio segmento, traendo da qui e in modo del tutto indipendente dal carattere infinitesimale di quest'ultimo delle opportune conseguenze geometriche, *poi* ripristina la di-

---

fornisce tuttavia questa caratterizzazione che per mezzo della semplice affermazione del carattere infinitamente piccolo delle differenze, rimandando così alla Dom. I il compito di un eventuale completamento operativo. La limitazione delle applicazioni del calcolo differenziale alla soluzioni di problemi concernenti curve o rappresentate da espressioni algebriche finite o determinate per mezzo di esplicite leggi di costruzione permette d'altra parte di evitare il secondo problema dando intuitivamente per scontata la conservazione dell'infinita piccolezza delle differenze nel corso del passaggio da variabile a variabile. [ritornerò su questi argomenti nel prossimo capitolo II.3].

[49]Cfr. *ivi*, p. 11.

stinzione, confonde fra loro i punti M e m, compie le omissioni di circostanza e legge i propri risultati come soluzioni del problema classico delle tangenti. Una tale procedura è strutturalmente simile a quella che ci ha poco sopra permesso di stabilire la regola del prodotto. Così, come la prima, anche la seconda domanda di de l'Hôpital manifesta il suo potere matematico solo se gli ambiti della sua applicazione sono adeguatamente selezionati secondo una precisa strategia dimostrativa che procede applicando localmente identità fra loro contraddittorie.

I problemi che de l'Hôpital affronta, sulla scorta di questa impostazione generale, nella seconda sezione del suo trattato possono essere distinti in due gruppi. I problemi del primo gruppo (Prop. I e II con relativi esempi) chiedono di determinare la tangente di quelle curve di cui si conosca l'espressione algebrica finita della relazione fra le coordinate generiche. Quelli del secondo (Prop. III-XVI con relativi esempi) chiedono di determinare la tangente di curve espresse per mezzo di equazioni algebriche finite che determinano relazioni diverse da quelle che si istituiscono fra le coordinate generiche di queste curve o per mezzo di altre condizioni geometriche o meccaniche di costruzione. Per quanto dallo studio dei problemi del secondo gruppo non si tragga alcun metodo generalmente applicabile, questa massa di risultati indica assai bene la potenza dei metodi infinitesimalisti sopra esposti e spinge de l'Hôpital a affermare che la propria trattazione mostra come possano essere determinate le tangenti di ogni genere di curva, sia essa algebrica, "meccanica o trascendente".[50]

Mi limiterò qui alla presentazione di due semplici esempi. Data[51] (fig. 2) una curva AYZ di equazione $F(x, y) = 0$, de l'Hôpital giustifica la nota identità $BX = \frac{y dx}{dy}$ riconoscendo semplicemente in WZ la differenza dell'ordinata.[52] Più complessa è ovviamente la soluzione dei problemi del secondo gruppo. Sia[53] (fig. 4) AMF una curva la cui ordinata $QM = y$ è determinata per mezzo di un'equazione (algebrica finita) $F(x, y) = 0$ che ne esprime la relazione con l'arco $AP = x$ di una curva APG (riferita al medesimo asse) di cui si sappia tracciare la tangente. Se Qq è un incremento infinitamente piccolo, KP e NM sono le due tangenti e PO, MS e MR sono rispettivamente paralleli all'asse KAB e alla tangente KP, ponendo $KP = t$ e $KQ = s$ e identificando gli archi Pp e Mm con dei segmenti infinitamente piccoli che prolungano le tangenti si avrà anche: $t : s = Pp : MS$ e $Sm : MS = y : NQ$. Basta allora riconoscere nei segmenti Pp e Sm le differenze rispettive delle variabili x e y per trarre: $NQ = \frac{s\ dx\ y}{t\ dy}$. La conoscenza dell'equazione $F(x, y) = 0$ permette

---

[50]Cfr. *ivi*, *Preface*, pp. [10] - [11]. Cfr. la precedente nota (29).

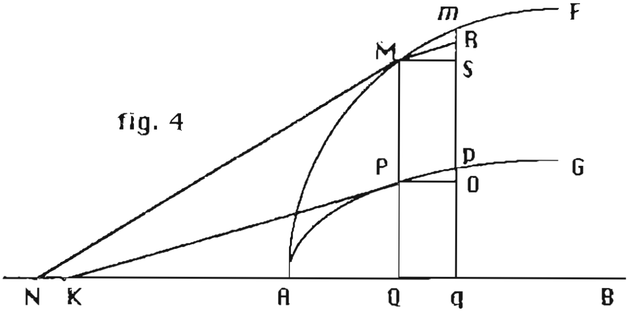
[51]Cfr. *ivi*, sect. II, prop. I, p.11. Il secondo problema del primo gruppo riguarda curve definite per mezzo di un'ascissa curvilinea.

[52]Questa identificazione - che in senso stretto non segue dalle definizioni - é d'altra parte già annunciata da de l'Hôpital nel breve commento che segue l'esposizione della Def. II [cfr. *ivi*, p. 2].

[53]Cfr. *ivi*, sect. II, prop. III, p. 17.

d'altra parte di esprimere dx in termini di dy e una semplice sostituzione è quindi sufficiente per giungere alla soluzione del problema.

fig. 4



II. 1. ζ. *Il calcolo inverso dei differenziali: le Lectiones mathematicæ de methodo integralium di Johann I Bernoulli*

Originariamente redatte "*in usum Ill. Marchionis Hospitalii*", le *Lectiones de methodo integralium* di Johann I Bernoulli si presentano come una grande raccolta di applicazioni geometriche e meccaniche del calcolo inverso delle differenze infinitamente piccole. Data l'espressione di una "quantità differenziale", si tratta da una parte di individuare i metodi algoritmici più opportuni per tornare da questa alla quantità di cui essa è la differenza infinitamente piccola e dall'altra di mostrare su una vasta quantità di esempi come questi metodi possano contribuire in modo essenziale alla soluzione di innumerevoli e classici problemi tanto geometrici che meccanici. Se la prima di tali questioni si presenta in quanto tale come completamente indipendente dal carattere infinitesimale delle quantità considerate, vertendo unicamente sulle relazioni operazionali istituite dalle regole di differenziazione intese come mere regole di trasformazione simbolica, la seconda invita a interpretare le regole algoritmiche come norme di individuazione (del valore) di determinate entità geometriche o meccaniche, le quali sono a loro volta caratterizzate per mezzo dai rapporti che si istituiscono fra esse e opportune classi di differenze infinitamente piccole. Ciò conduce inevitabilmente a una essenziale distinzione fra il piano della determinazione di alcuni canoni generali di inferenze formali e il piano dell'interpretazione intuitiva di questi canoni, la quale sembra dar luogo a un percorso argomentativo in cui il rapporto fra concetti infinitesimalisti e regole algoritmiche si presenta invertito rispetto a quello instaurato da de l'Hôpital. Mentre nell'*Analyse* è infatti la nozione stessa di quantità infinitamente piccola che giustifica la determinazione di un algoritmo, che risulta per ciò stesso interpretato, qui è solo l'analisi dei caratteri operazionali dell'algoritmo diretto che conduce alla determinazione delle regole di integrazione, le quali vengono solo *post factus* interpretate in termini infinitesimalisti.

Il termine "regole di integrazione" va per la verità preso qui in un senso piuttosto ristretto. Tutto ciò che Bernoulli fa nella sua prima lezione è infatti: definire l'integrale di un differenziale dato come la "quantità" di cui questo è il differenziale,[54] trarre dalla regola di differenziazione di potenze a esponenti qualsiasi la regola per l'integrazione di differenziali della forma $ax^{\alpha}dx$ (dove x indica una quantità variabile qualsiasi, anche non principale, e dx il suo differenziale) e mostrare sulla base di alcuni esempi come pervenire a una adeguata trasformazione di differenziali di forma diversa attraverso l'introduzione di una o più sostituzioni opportune.

La considerazione degli esempi rende evidente che l'integrale a cui si riferisce Bernoulli è caratterizzato dalla nullità della costante d'integrazione, la quale viene generalmente omessa. Ciò è d'altra parte del tutto conseguente alla preoccupazione essenzialmente applicativa, la quale conduce Bernoulli a dedicare già la seconda lezione al problema geometrico della quadratura di una curva, lasciando alla considerazione dei differenti esempi la presentazione più dettagliata di alcune procedure *standard* di trasformazione dei differenziali al fine da renderli integrabili in base alla regola presentata. E' proprio al caso della quadratura che limiterò d'altra parte la mia analisi.

L'applicazione del "calcolo integrale"[55] alla soluzione dei problemi di quadratura si fonda dal punto di vista di Bernoulli sulla considerazione di una superficie come la *somma* di infinite parti di area infinitamente piccola *e* dell'integrale come la *somma* dei propri differenziali:

> Inter varios usus, quos ex Calculo Integralium quærimus, primus fere ac præcipuus est, qui occurrit in quadrandis spatiis. Considerantur autem spatia ut divisa in infinitas partes, quarum unaquæque pro differentiali spatii haberi potest; ita ut si integrale hujus differentialis, id est, summa harum partium habeatur, exinde quoque innotescat quadratura quæsita.[56]

Assistiamo qui a due differenti atti interpretativi che esulano entrambi dalle possibilità inferenziali concesse dalle regole finora stabilite e fanno piuttosto riferimento a quella stessa struttura di concetti che aveva condotto de l'Hôpital alla determinazione dell'algoritmo differenziale. Certo, la seconda di queste interpretazioni può chiamare in sua giustificazione la seguente e del tutto ovvia identità algebrica relativa alla successione $\{s_1, s_2,..., s_n\}$:

$$(7) \qquad \sum_{i=0}^{i=n-1} \Delta s_i = s_n \qquad\qquad [\Delta s_i = |s_{i+1} - s_i|;\ s_0 = 0]$$

---

[54] Il termine "integrale" è qui chiaramente impiegato per riferirsi alla primitiva piuttosto che all'operazione di integrazione, per la quale Bernoulli non introduce nessun simbolo particolare. Ecco in ogni modo la definizione che egli presenta [cfr.(Bernoulli (1742), vol. III, p. 387]:

> Vidimus in præcedentibus quomodo quantitatum *Differentiales* inveniendæ sunt: nunc vice versa quomodo differentialium *Integrales*, id est, eæ quantitates quarum sunt differentiales, inveniantur, monstrabimus.

[55] Il termine è di Bernoulli.

[56] Cfr. *ivi*, p. 394.

Ma quale inferenza formale permette veramente di passare dalla (7) alla conclusione che l'integrale di un dato differenziale è uguale alla somma dei differenziali di tale integrale (anche ammesso che la nozione di differenziali di un integrale possa venir almeno intuitivamente compresa)? Il cosiddetto teorema di inversione[57] - che è generalmente considerato come il risultato fondamentale del "calcolo infinitesimale" - è qui stabilito per mezzo del ricorso a una semplice analogia intuitiva fra contesti finitari e infinitari.

Questa analogia - la quale permette semplicemente di interpretare l'integrale come una somma - non è tuttavia ancora sufficiente per giungere a stabilire un tale risultato. A questo scopo essa deve venir associata a una rappresentazione dell'area cercata come una somma di "quantità" espresse per mezzo di una combinazione algebrica indeterminata che possa a sua volta venir interpretata come un differenziale, il quale esprima in modo generico l'insieme dei differenziali che l'integrazione permette di sommare fra loro. La definizione prettamente algoritmica dell'integrale impone questo gioco di trasposizioni da quantità a forme che nel testo di Bernoulli si nasconde dietro l'uso dei termini "differenza" o "differenziale" per indicare volta a volta concetti diversi: la differenza di una quantità assegnata (e geometricamente determinata) e l'espressione algebrica di questa differenza. La ricostruzione dettagliata dell'argomentazione renderà questi commenti più chiari.

Presentata l'interpretazione dell'area come una somma di parti infinitesime, Bernoulli osserva che queste parti possono a loro volta venir determinate per mezzo di differenti tipi di partizioni, la cui opportunità dipenderà dalla specificità del problema considerato[58] e subito aggiunge:

> Quocunque demum modo (ut tandem ad quadraturas ipsas perveniamus) spatia divisa concipiantur; si exinde area totius haberi cupiatur, oportet ut unius partium indefinite parvarum quæratur valor, qui non nisi litteris determinatis & unica tantum specie indeterminaturum consistat; quod semper haberi potest per naturam & generationem curvæ; & hujus quantitatis, tanquam differentialis, inveniendum est integrale; quod designabit quadraturam spatii.[59]

Ciò appare a Bernoulli del tutto sufficiente per concludere che data una curva qualsiasi AC (fig. 5) di ascissa AB = x e ordinata BC = y, l'integrale del prodotto ydx = (BC)(Bb) esprime [il valore del]la superficie ABC. Per quanto egli non aggiunga alcuna giustificazione ulteriore, il suo argomento può essere facilmente ricostruito nei termini seguenti. Se la superficie in questione è divisa per mezzo di infinite parallele all'ordinata, poste ognuna a una distanza

---

[57]Si osservi che il "teorema di inversione" si presenta durante tutto il XVIII secolo sotto la forma di un risultato essenzialmente differente da quello che è oggi associato a questo nome, non corrispondendo all'affermazione di reciprocità di differenziazione e integrazione (la quale è al contrario assunta nella definizione stessa di integrale), ma alla risolubilità del problema delle aree per mezzo del ricorso all'algoritmo inverso rispetto a quello che permette di determinare le tangenti.

[58]Per quanto Bernoulli si riferisca a questo proposito solo alla "natura e alla generazione" dello spazio che deve essere quadrato [cfr. *ivi*, p. 394], è chiaro che l'opportunità di una certa partizione dipenderà anche dall'esito algoritmico cui essa conduce.

[59]Cfr. *ivi*, p. 395.

infinitamente piccola dalla precedente, essa risulta uguale alla somma degli spazi compresi fra queste parallele che - omettendo i triangoli mistilinei *pqr* (la cui area è espressa da un prodotto di differenziali e è quindi infinitamente piccola rispetto a quella dei rettangoli *mnqp)*[60] - possono venir intesi come rettangoli di base costante e altezza uguale alle successive ordinate. Il prodotto ydx esprime allora una parte generica dell'area richiesta e il suo integrale corrisponde quindi alla somma delle parti in cui questa è stata divisa, ovvero a questa stessa area.

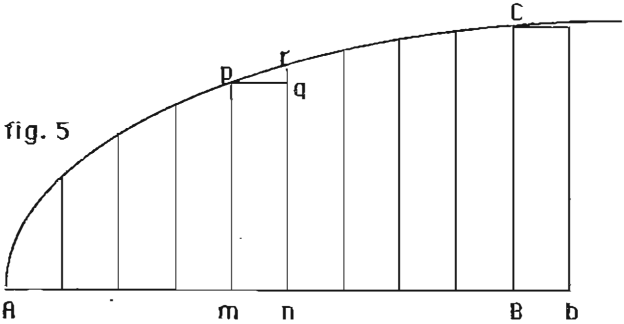


fig. 5

Bernoulli non fa alcun cenno alla necessità di introdurre delle costanti d'integrazione. L'interpretazione dell'integrale come una somma permette infatti l'identificazione dalla primitiva con un integrale definito tra i limiti 0 e x. Questo passaggio è tuttavia soltanto intuitivo e verte in modo essenziale su numerose associazioni concettuali, esso non concede inoltre nessuna ragione perspicua per identificare la somma dei differenziali con la porzione di curva compresa fra i punti A e B dell'ascissa piuttosto che con una qualsiasi altra porzione. Nonostante ciò, l'argomento conduce anche in questo caso a una conclusione generale che si traduce in una regola formale di quadratura.

L'interesse principale di Bernoulli non sembra tuttavia questo. Egli mantiene infatti nel corso delle sue lezioni un orientamento apertamente geometrico utilizzando il nuovo calcolo come uno strumento risolutivo di problemi geometricamente formulati e geometricamente interpretati. I due esempi seguenti - la quadratura del settore circolare e quella della concoide - mi paiono sotto questo punto di vista assolutamente sintomatici.

Dato un semicerchio[61] ADC (fig. 6) di raggio AE = a si prenda su di esso un punto D. Ponendo AB = x si avrà anche BD = $\sqrt{2ax-x^2}$ e l'area del settore ABD sarà data quindi dall'integrale del prodotto $dx\sqrt{2ax-x^2}$. Lo stesso risultato può tuttavia venir raggiunto per mezzo di una differente partizione

---

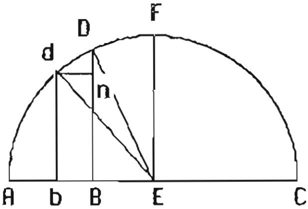
[60] L'omissione può naturalmente introdursi anche in un secondo tempo. Considerando il trapezio *mnrp* come l'elemento dell'area e applicando la Dom. II di de l'Hôpital si avrà infatti, sommando alla maniera di Bernoulli:

$$\text{sup (ABC)} = \int_{[0]}^{[x]} \left[ydx + \frac{dx\ dy}{2} \right] = \int_{[0]}^{[x]} ydx + \frac{dx}{2}\int_{[0]}^{[x]} \frac{dy}{dx}dx = \int_{[0]}^{[x]} ydx + \frac{1}{2}ydx = \int_{[0]}^{[x]} ydx$$

[61] Cfr. *ivi*, p. 396.

della stessa area. Calcolando l'arco dD come l'ipotenusa del triangolo dnD si avrà infatti $dD = \frac{adx}{\sqrt{2ax-x^2}}$ e l'area del settore circolare potrà essere calcolata come l'integrale del prodotto $\frac{a^2dx}{2\sqrt{2ax-x^2}}$ che esprime l'area del triangolo dED.[62]

fig. 6



Più complesso è il caso della concoide[63] ADK (fig. 7a) definita relativamente al punto C, alla retta BH e al parametro a = BA = GD = BC. Preso GC = x e considerato un segmento CHE il quale formi con CGD un angolo infinitamente piccolo si avrà, tracciando le perpendicolari GI e DF a CGD, HI = dx. L'infinita piccolezza dell'angolo HCG permette d'altra parte di considerare come retto anche l'angolo HIG e di scrivere le proporzioni HB : BC = HI : IG e CG: CD = GI : DF. Eguagliando CG e CH si avrà allora successivamente: IG = $\frac{adx}{\sqrt{x^2-a^2}}$ e DF = $\frac{dx\,(ax+a^2)}{x\sqrt{x^2-a^2}}$. L'area del trapezio FIGD sarà dunque espressa dal differenziale $\frac{(2ax^2x+a^3)dx}{2x\sqrt{x^2-a^2}} = \frac{a^2dx}{\sqrt{x^2-a^2}} + \frac{a^3dx}{2x\sqrt{x^2-a^2}}$, il cui integrale esprimerà a sua volta l'area ABGD della concoide data. Per trovare questo integrale Bernoulli agisce separatamente sui suoi due addendi. In primo luogo egli osserva[64] che costruita un'iperbole equilatera QM (fig.7b) di asintoto PN, le posizioni PR = x e PQ = a portano a esprimere l'area del trapezoide PQM come l'integrale di $\frac{1}{2}\frac{a^2dx}{\sqrt{x^2-a^2}}$. Il primo addendo esprime dunque un'area

[62]Bernoulli non fornisce un'integrazione esplicita di questi differenziali, limitandosi nel corso della sua seconda lezione a presentare diverse situazioni geometriche le quali conducono a esprimere un'area per mezzo dell'integrale di un differenziale in cui compaia al numeratore o al denominatore un fattore irrazionale della forma $\sqrt{Ax^n + x^2}$ (n = 0, 1, 2). Alla fine della stessa lezione egli fornisce poi una complessa trasformazione che conduce all'integrazione di differenziali di tal genere.

[63]Cfr. *ivi*, pp. 400-01 [per la ricostruzione della dimostrazione che segue mi sono largamente servito di preziosi suggerimenti di M. Galuzzi, che vorrei quindi ringraziare].

[64]Bernoulli si riferisce in realtà a un risultato già raggiunto nella seconda lezione [cfr. *ivi*, p. 396].

doppia di quella del "settore iperbolico" PQM.[65] Per quanto riguarda il secondo addendo, Bernoulli opera successivamente le due sostituzioni $x^2-a^2 = (x-m)^2$ e $z = \frac{a^3}{a^2+m^2}$ che trasformano l'integranda nel prodotto $z\,dm$.

Integrando per parti si ha allora:[66] $\int \frac{a^3 dx}{2x\sqrt{x^2-a^2}} = zm - \int m\,dz = zm$

$$\mp \int \frac{a^2 - az}{\sqrt{az-z^2}}\,dz = zm \mp \int \frac{a^2/z - az}{\sqrt{az-z^2}}\,dz \mp \frac{1}{2}\int \frac{a^2}{\sqrt{az-z^2}}\,dz = zm \mp a\sqrt{az-z^2} + C$$

$\mp \frac{1}{2}\int \frac{a^2}{\sqrt{az-z^2}}\,dz$. Il risultato precedente relativo all'area del settore circolare ci dice che l'ultimo integrale esprime un area quattro volte maggiore di quella del settore AED (fig. 6) di base AB = z di un cerchio AFC di raggio ED = $a/2$. La conclusione di Bernoulli è allora che "spatium Conchoidale æquale spatio hyperbolico, rectilineo, & circulari".[67] Una complessa procedura analitica conduce quindi a un risultato inteso come l'espressione di un'equivalenza geometrica fra figure costruite indipendentemente.

---

[65]Bernoulli lascia la dimostrazione sottintesa. Essa può comunque venir ricostruita come segue. Essendo, per le ipotesi fatte, RN=x e RM = $\sqrt{x^2-a^2}$, l'area del trapezoide QMNB sarà espressa dall'integrale definito $\int_a^x dx\left(x - \sqrt{x^2-a^2}\right) = \frac{1}{2}a^2 \log\left(\sqrt{x^2-a^2} + x\right) + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{1}{2}a^2 \log(a) - \frac{a^2}{2}$. L'area del trapezoide PQMN sarà così espressa dalla somma $\frac{1}{2}a^2 \log(\sqrt{x^2-a^2} + x) + \frac{x^2}{2} - \frac{x}{2}\sqrt{x^2-a^2} - \frac{1}{2}a^2 \log(a)$. Essendo d'altra parte $\int_a^x dx \frac{a^2}{\sqrt{x^2-a^2}} = a^2 \log\left(\sqrt{x^2-a^2} + x\right) - a^2 \log(a)$ è facile trarre l'identità: $\int_a^x dx \frac{a^2}{\sqrt{x^2-a^2}} = 2$ Area (PQMN) - $x^2 + x\sqrt{x^2-a^2} = 2$ Area (PQMN) - 2 Area (PNM).

[66]Impiego qui per semplicità l'usuale notazione integrale, scostandomi così dal testo di Bernoulli.

[67]Cfr. *ivi*, p. 401.

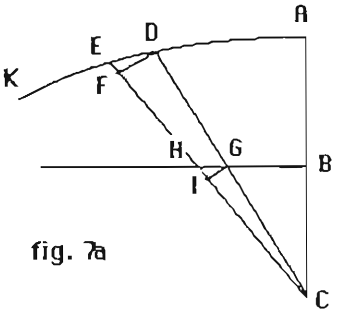
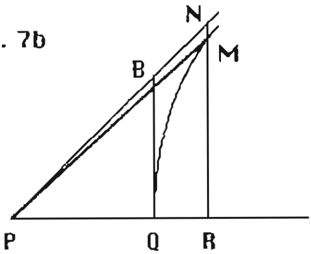


fig. 7a

fig. 7b



II. 1. η. <u>Calcolo</u>

L'esame dei testi precedenti, per quanto certamente sommario, permette io credo di trarre qualche provvisoria conclusione. Ciò che sembra infatti prendere corpo in essi è un insieme di regole di trasformazione simbolica, le quali agiscono su combinazioni algebriche determinate producendo nuove e differenti combinazioni algebriche, la cui ulteriore combinazione secondo canoni esplicitamente definiti è indicata a sua volta come soluzione di un insieme estensionalmente determinato di classici problemi matematici (di carattere essenzialmente geometrico). La natura delle argomentazioni concettuali che conducono alla giustificazione e all'interpretazioni di tali regole nonché alla loro associazione con i problemi suddetti permette di riferirsi ad esse come ai principi formali di un *calcolo infinitesimale*. Ciò nonostante tanto le regole che la mera affermazione della loro associazione (secondo schemi generali e esplicitamente determinati) alla soluzione dei problemi in questione possono venir isolate dall'apparato concettuale in cui sono solo accidentalmente immerse. Una tale operazione permette di trarre dai testi precedenti un insieme di schemi di inferenza formale di cui fanno parte tanto le regole di trasformazione simbolica che altre regole di natura diversa simili alla seguente:

> Data la curva di equazione algebrica $y = y(x)$ riferita a un sistema di coordinate ortogonali, la sottotangente alla curva nel punto di coordinate generiche (x,y) è espressa per mezzo della formula $\frac{ydy}{dx}$ in cui dx è un parametro arbitrario che compare come fattore nell'espressione in x del numeratore, il quale è a sua volta tratto secondo le regole (3) di trasformazione simbolica.

L'insieme di tali schemi di inferenza mette capo a un universo di oggetti matematici o, che dir si voglia, a una teoria formale (passibile di ulteriori estensioni), che per mere ragioni di genesi storica può continuare a venir indicata con il termine "calcolo infinitesimale" o più semplicemente "*calcolo*",[68] ma che resta in quanto tale del tutto indipendente dalle sue origini infinitesimaliste e particolari. Il problema della "fondazione del *calcolo*" o della sua "metafisica" sarà quindi quello di fornire differenti interpretazioni e giustificazioni per i principi fondamentali di una tale teoria formale, di dar loro un ordine conveniente e un'adeguata collocazione nel contesto di un'architettonica più generale della scienza matematica e di giustificare le sue applicazioni geometriche e meccaniche. Le differenti proposte daranno allora luogo a altrettante teorie informali, le quali conterranno il *calcolo* come una propria parte essenziale. Questo tratto comune permetterà di giustificare la tesi (relativizzata) dell'identità di tali teorie e autorizzerà a riferirsi a esse come a differenti versioni del calcolo infinitesimale.

Questa conclusione non contiene tuttavia che le condizioni di legittimità della tesi (indebolita) di Carnot. Per passare da esse alla effettiva e giustificata riformulazione di questa tesi occorre ritrovare nei testi matematici settecenteschi il materiale necessario per ricostruire concretamente le differenti versioni del *calcolo*. Ciò che finora si è solo individuato come *possibile* deve essere ora mostrato come *reale*.

Per quanto l'atto di individuazione si ridurrà inevitabilmente a un atto di ricostruzione, l'oggettiva vastità della produzione matematica settecentesca e la centralità che in essa ha assunto il problema dei fondamenti del *calcolo* (nei termini assai generali in cui esso è stato qui formulato) conduce necessariamente alla possibilità di ricostruire un amplissimo numero di teorie[69] informali le quali svolgono (o possono svolgere) la medesima funzione e la cui base documentaria risiede in differenti testi. Molte di queste teorie differiscono fra loro molto marginalmente (o almeno sembrano a me differire marginalmente fra loro) e possono quindi venir raggruppate in classi di somiglianza definite da affinità più forti di quella che deriva dall'essere una data teoria una versione del *calcolo*. Queste affinità sono naturalmente assai difficilmente determinabili in termini precisi e generali, ma possono in qualche modo venir evocate. Esse danno luogo a quelle che intenderò qui come differenti tradizioni fondazionali del *calcolo*. Se sarà proprio una di esse a costituire l'oggetto principale della mia dissertazione (e in particolare della sua terza parte), mi riferirò a altre solo marginalmente e al solo scopo di fornire un adeguato inquadramento storico della vicenda che cercherò di ricostruire. Per questo sceglierò dei testi che per differenti ragioni (chiarezza espositiva, profondità, diffusione, &c.) mi parranno particolarmente esemplari, senza entrare nei dettagli dell'evoluzione storica della tradizione in questione.[70] A questo scopo l'incongruo elenco di Carnot mi servirà ancora come una guida per l'esposizione.

---

[68]Nel seguito utilizzerò il secondo di questi termini (badando di scriverlo in corsivo) per riferirmi a quel sostrato o contenuto comune di cui ho parlato nel precedente paragrafo II.1.α..

[69]Vorrei precisare che il termine "teoria" è qui usato per riferirsi semplicemente a un dato insieme di enunciati [cfr. il precedente paragrafo I.2.κ.].

[70]Allo stesso modo mi sono comportato relativamente al calcolo differenziale e integrale che richiederebbe certo, in quanto tale, un'indagine ben più approfondita di quella

II. 1. θ. *La teoria delle flussioni: il De Methodis*

Anche se fu solo nel 1684 che il *calcolo* fece la sua apparizione ufficiale sulla scena matematica facendo l'oggetto di una pubblica memoria come la *Nova methodus*, la sua originale formulazione risale al ventennio precedente e trova la sua prima organica presentazione in un vero e proprio trattato redatto da Newton nel mese di ottobre del 1666.[71] Concepito come una sorta di sintesi di risultati ottenuti in quasi due anni di ricerca, questo costituì quattro anni più tardi la traccia di un nuovo trattato, il *De Methodis serierum et Fluxionum*[72] in cui il *calcolo* è presentato in tutta la ricchezze delle sue applicazioni sotto la forma di una teoria generale che insegna a determinare le *flussioni* di ogni sorta di quantità variabile e a tornare da queste alle quantità originali. Benché pubblicato per la prima volta (in traduzione inglese) solo nel 1736,[73] e posteriormente quindi a numerose riformulazioni di una "teoria delle flussioni" (fra cui le due versioni del *De Quadratura* rispettivamente apparse nel 1693 e nel 1704[74]), il *De Methodis* resta a mio avviso la presentazione più chiara e compiuta del *calcolo* nel contesto di una "metafisica" generale della velocità di variazione delle quantità variabili. Il punto di vista generale che Newton vi espone - e che corrisponde a una esplicita accettazione del contesto analitico come contesto di interpretazione e soluzione dei problemi matematici[75] - contrasta tuttavia con l'orientamento che egli difese in altre e numerose occasioni, il quale si rivela più attento all'esigenza di una riaffermazione e di una riattualizzazione del paradigma della geometrica classica.[76] Se questo orientamento - che traspare in filigrana nella stessa seconda versione del *De Quadratura* - ebbe un indiscutibile influsso sugli orientamenti della matematica britannica durante l'intero XVIII secolo,[77] esso fu senza dubbio largamente disatteso dai principali

---

svolta nei precedenti paragrafi, la quale dovrebbe peraltro rivolgersi anche a testi successivi in cui il medesimo punto di vista fondazionale si presenta sotto forme e prospettive differenti.

[71]Cfr. Whiteside (1967-81), vol. I, pp. 400-48 [per una precedente pubblicazione del *Trattato del 1666*, cfr. A. R. Hall and M. B. Hall (1962), pp. 15-64].

[72]Cfr. *ivi*, vol. III, pp. 32-353. Per un'altra organica presentazione del calcolo inverso redatta da Newton nel 1669 (e pubblicata solo nel 1711 [cfr. Newton (1711), pp. 1-21]) cfr il *De Analysi per Aequationes infinitas* [ora in Whiteside (1967-81), vol. II, pp. 206-47].

[73]Cfr. Newton (1736).

[74]Cfr. Rispettivamente Wallis (1693), pp. 390-96 e Newton (1704b).

[75]Che cosa questo significhi sarà io spero più chiaro al termine della mia dissertazione.

[76]Gli esempi più espliciti sono a questo proposito forniti - oltre che dai *Principia* [cfr. Newton (1687)] - dalla *Geometria curvilinea* [cfr. Whiteside (1967-81), vol. IV, pp. 420-505] (a proposito della quale cfr. Di Sieno-Galuzzi (1987)) e dalle note preparatorie della *Geometria* [cfr. Whiteside (1967-81), vol. VII, pp. 183-591].

[77]L'esempio del *Treatise* di Maclaurin [cfr. Maclaurin (1742)] è sotto questo punto di vista del tutto esplicito. Per una dettagliata ricerca storica sull'evoluzione e la diffusione del "calcolo della flussioni" in Gran Bretagna durante il XVIII secolo cfr. Guicciardini (1989) che deve senz'altro essere preferito all'ormai obsoleto (e impreciso) Cajori (1919).

matematici continentali sui quali fu piuttosto l'orientamento analitico di Newton a esercitare il proprio fascino. Ciò giustifica io spero la mia scelta del *De Methodis* come testo di riferimento per una sommaria ricostruzione della "teoria delle flussioni".[78]

Scritto nel corso dell'inverno 1670-71, il *De Methodis* costituisce l'esplicita realizzazione di un programma assai ambizioso, in cui la fondazione del *calcolo* (che in quanto tale aveva già trovato un esplicita formulazione nelle note degli anni 1664-66)[79] è soltanto un aspetto: si tratta nel contempo di "espandere" i metodi analitici, promuovendo gli strumenti adeguati per una trattazione generale delle equazioni, e di "far progredire la dottrina delle curve",[80] connettendola intimamente con questi metodi e riformulandone adeguatamente i problemi. Mentre al primo di questi obiettivi corrisponde il tentativo di riformulare in termini organici e unitari un vasto insieme di risultati ottenuti negli anni precedenti relativamente alla possibilità di esprimere in serie intera la soluzione di ogni equazione algebrica, il secondo è direttamente legato all'edificazione di una teoria generale delle quantità variabili, la quale si indirizzi essenzialmente verso la ricerca delle relazioni che si instaurano fra le variazioni di queste. E' così che la teoria delle flussioni - e, insieme con essa, il calcolo infinitesimale - trova la sua naturale collocazione in un progetto di massima generalizzazione del programma cartesiano.

La prima parte del *De Methodis* è dedicata alla presentazione di un metodo generale di soluzione per serie delle equazioni algebriche della forma[81] $F(x, y) = 0$ che Newton presenta come una generalizzazione dei procedimenti di computazione numerica.[82] Dopo aver illustrato per mezzo di due esempi gli usuali metodi di espansione in serie per divisione o estrazione di radice - che resteranno noti durante il XVIII secolo come "metodi di Mercator"[83] -

---

[78] Per un'indagine di dimensioni più ampie, i cui risultati verranno in più occasioni utilizzati nel corso della presente dissertazione, cfr. d'altra parte Panza (1989) di cui quest'ultima costituisce per molti versi una naturale continuazione.

[79] Cfr. Whiteside (1970).

[80] Cfr. Whiteside (1967-81), vol. III, p. 32.

[81] Cfr. *ivi*, pp. 32-70. Newton usa a questo proposito il termine di "æquationem affectæ". Si tratta qui d'altra parte di una nuova versione, adeguatamente modificata e ampliata, della prima parte del *De Analysi* [cfr. a questo proposito le note si Whiteside, le quali indicano esattamente corrispondenze e differenze fra i due testi].

[82] Ecco come egli stesso si esprime [cfr. *ivi*, pp. 32-4]:

> Cùm in numeris et speciebus operationes computandi persimiles sint, neque differre videantur nisi in characteribus quibus quantitates in istis definitè, in his indefinitè designantur: demiror quòd doctrinam de numeris decimalibus nuper inventam (si quadratura Hyperbolæ per N. Mercatorem [cfr. Mercator (1668); cfr. a questo proposito la corrispondente nota di Whiteside] demas) nemini in mentem venerit speciebus itidem accomodare præsertim cùm ad præclariora viam aperiat.

[83] Data un'espressione frazionaria o radicale, si tratta di svolgere concretamente le operazioni che in essa sono indicate, reiterandole successivamente e tenendo conto dei resti. Il seguente esempio (che corrisponde a quello scelto da Newton) chiarirà il proce-

egli mostra come approssimare la soluzione numerica di un'equazione in cui compare una sola variabile. Generalizzando l'esempio di Newton il procedimento è il seguente. Data l'equazione $F(y) = 0$ si cerchi un valore numerico a di y che approssimi la soluzione e si sostituisca nell'equazione originaria $a+p$ a y. Questa operazione darà una nuova equazione in p, $G(p) = 0$ dalla quale potranno essere provvisoriamente omessi, a causa della supposta piccolezza di p, i termini di grado superiore al primo. La radice b della nuova equazione così ottenuta fornirà un'approssimazione numerica del valore di p. Sostituendo allora $b+q$ a p in $G(p)$ si avrà un'ulteriore equazione $H(q) = 0$ sulla quale si potrà agire come in precedenza. Continuando indefinitamente in questo modo si trarrà un'approssimazione sempre più precisa della radice cercata.

Non mi soffermerò qui sui presupposti concettuali di questo procedimento (che resta in se stesso perfettamente formale), né sulla discussione delle sue generali condizioni di applicabilità e/o validità. Lo stesso Newton non si richiama infatti a esso che per fornire un termine analogico di comparazione rispetto al metodo di soluzione per serie di equazioni algebriche a due variabili. E' a questo che rivolgerò ora la mia attenzione. Riformulato in termini generali, esso può venir presentato nei termini che seguono.[84] Data l'equazione $F(x,y) = 0$ (già ridotta in forma intera "per methodos Analystis satis notas"[85]), si tratta di esprimere y per mezzo di una serie in x la quale dovrà essere determinata progressivamente, come nel caso precedente, attraverso la considerazione di successive equazioni tratte per mezzo di altrettante sostituzioni. La difficoltà che ora si pone è tuttavia quella di individuare volta a volta l'approssimazione opportuna, la quale permetterà la determinazione del corrispondente coefficiente della serie cercata. Per questo Newton distingue tre casi: nel primo la variabile indipendente x è supposta "piccola"; nel secondo essa è supposta "indefinitamente grande"; nel terzo infine essa è supposta "poco differente" da una costante data.[86] E' chiaro che banali sostituzioni[87] permettono di ridurre al primo tanto il secondo che il

---

dimento. Data la frazione $y = \frac{a^2}{b+x}$ si tratterà di dividere il numeratore per il primo addendo nel denominatore, ciò che darà il primo termine della serie, ovvero a^2/b; moltiplicando questo termine per il denominatore e sottraendo il risultato al numeratore si avrà poi un nuovo monomio, $-\frac{a^2x}{b}$ che dovrà essere a sua volta diviso per il primo addendo del denominatore della frazione originaria. Questa operazione produrrà il secondo termine della serie, ovvero $-\frac{a^2x}{b^2}$ si cui si agirà come in precedenza. La reiterazione indefinita di queste operazioni produrrà la serie cercata: $y = \frac{a^2}{b} - \frac{a^2x}{b^2} + \frac{a^2x^2}{b^3}$ - &c..

[84] Come è usuale nei testi newtoniani il metodo è infatti presentato attraverso la considerazioni di alcuni esempi opportuni.

[85] Cfr. *ivi*, p. 48.

[86] Cfr. rispettivamente *ivi*, pp. 48, 64 e 66.

[87] Per questo basterà porre rispettivamente $z = 1/x$, e $z = a-x$ (dove a è la costante data) e cercare l'espressione di y in serie intera di z.

terzo caso. Si assuma quindi che x vari su un opportuno intorno di zero;[88] il problema è quello di ridurre l'equazione di partenza a un'equazione più semplice, la cui radice costituisca una buona approssimazione della radice cercata. A questo scopo Newton costruisce il seguente diagramma (il quale diverrà noto come il "parallelogramma di Newton"):

...	...	...	...	...
x^3	x^3y	x^3y^2	x^3y^3	...
x^2	x^2y	x^2y^2	x^2y^3	...
x	xy	xy^2	xy^3	...
1	y	y^2	y^3	...

e propone di indicare in esso le case a cui corrispondono dei termini effettivamente presenti (astrazion fatta da un eventuale coefficiente costante) nell'equazione data. Fatto questo si tratterà di tracciare una retta che unisce l'angolo inferiore sinistro della casa occupata che sia la più bassa nella colonna occupata più a sinistra con l'angolo inferiore sinistro di un'altra casa occupata, scelta in modo che gli angoli inferiori sinistri di tutte le altre case occupate vengano a giacere al di sopra tale retta o (eventualmente) su di essa. I monomi collocati nelle case i cui angoli inferiori sinistri giacciono sulla retta costituiranno l'equazione ridotta cercata. Scelta una radice αx^n di questa equazione si porrà $y = \alpha x^n + p$ e si compiranno le corrispondenti sostituzioni in $F(x, y)$, in modo da trarre una nuova equazione $G(x, p) = 0$ sulla quale si agirà come in precedenza per determinare il primo termine della serie che esprime p, il quale corrisponderà a sua volta al secondo termine della serie cercata. Reiterando indefinitamente queste operazioni si perverrà a esprimere y per mezzo di una serie di cui saranno noti tanti termini quante reiterazioni sono state compiute. Nel caso dell'equazione $y^3 + a^2y + axy - 2a^3 - x^3 = 0$ si avrà a esempio il diagramma seguente

x^3				
	axy			
$-2a^3$	a^2y		y^3	

da cui è ovvio che l'equazione ridotta sarà $y^3 + a^2y - 2a^3 = 0$. Scelta la radice $y = a$ e sostituendo $a+p$ a y nell'equazione assegnata si trarrà una nuova equazione la cui ridotta sarà a sua volta: $a^2x + 4a^2p = 0$. La radice $p = -x/4$

---

[88]Newton non chiarisce in nessun modo le condizioni di determinazione di questo intorno.

fornirà allora il secondo termine della serie cercata. Reiterando il procedimento si avrà allora: $y = a - \frac{x}{4} + \frac{x^2}{64a} - \frac{131x^3}{512a^2} + \&c.$

Per quanto un simile procedimento possa in numerose occasioni condurre assai presto a calcoli piuttosto complicati, esso costituisce secondo Newton un metodo *generale* per esprimere in serie intera le radici di ogni equazione algebrica a due variabili. Anche senza considerare i problemi di convergenza[89] non è tuttavia difficile rendersi conto di almeno due difficoltà sulle quali Newton sembra invece sorvolare.[90] La prima di esse è connessa alla mancanza di un argomento generale tale da provare che, per ogni equazione data, la ridotta atta alla determinazione del primo termine della serie soluzione sia a sua volta un'equazione risolvibile attraverso procedimenti indipendenti. La seconda risiede invece nel fatto che (anche qualora la convergenza sia assicurata) il procedimento di Newton non fornisce in quanto tale che delle successive approssimazioni della radice cercata e non delle serie espresse per mezzo della determinazione della legge algebrica di formazione dei termini successivi, ciò che invece sembrerebbe necessario per intendere il metodo come un metodo di soluzione delle equazioni, piuttosto che come un semplice ausilio operativo per determinare i valori numerici approssimati delle radici, una volta che sia stato fissato il valore di x.

Proprio queste difficoltà sono d'altra parte lo specchio dei presupposti concettuali di Newton. Egli sembra infatti presupporre che, stabilito un intorno (finito) di variazione della variabile principale, *ogni* equazione sia risolubile in serie e non fa che presentare un ingegnoso procedimento atto a individuare (nella grande parte dei casi) la serie soluzione. Lo scopo di Newton non sembra in nessun modo quello di fornire delle dimostrazioni di esistenza, ma semplicemente quello di determinare i caratteri particolare della serie la cui esistenza è in quanto tale presupposta. Questo punto di vista - che commenterò più dettagliatamente nei prossimi capitoli - mi pare restare sostanzialmente inalterato in tutti i matematici settecenteschi e sembra costituire uno dei tratti essenziali della persistente influenza newtoniana sul loro modo di pensare. Detto questo, il problema diventa semmai quello di giustificare la "correttezza" del procedimento proposto, ovvero la sua proprietà di individuare correttamente lo sviluppo cercato. L'unico criterio che a questo proposito sembra applicabile é quello della convergenza numerica delle serie - per ogni x nell'intorno considerato - a un valore che costituisce uno zero della equazione. Così espresso un tale criterio è tuttavia irrimediabilmente *a posteriori* e può al più fornire delle conferme induttive. Se la prova vuole essere *a priori*, essa deve necessariamente far ricorso a strumenti (*test* di convergenza o altro) che Newton non sembra in nessun

[89]Cfr. a questo proposito il prossimo capitolo II.2..

[90]Per quanto riguarda la possibilità che le equazioni ridotte abbiano delle radici espresse per mezzo di potenze negative di x Newton si limita a brevi cenni piuttosto oscuri. Dalla considerazione dei suoi esempi sembra tuttavia chiaro come egli non faccia in questo caso che considerare nuove case del diagramma generale, classificando i monomi a potenza negativa di x al di sotto della riga dei monomi a potenza nulla della stessa variabile [cfr. in particolare *ivi*, p. 64].

modo immaginare. Egli sembra piuttosto limitarsi a considerazioni intuitive, fondate sulla grandezza relativa dei termini dell'equazione e, quindi, sulla loro rispettiva influenza sulla determinazione del valore delle radici o, forse, a analogie geometriche opportunamente nascoste.[91] Anche qui uno schema di inferenze formali è quindi giustificato dal ricorso a argomenti impliciti e di natura espressamente concettuale.

Indipendentemente da queste considerazioni il metodo di Newton fornisce uno strumento assai potente per passare, in una ampia classe di casi, dalla determinazione di una curva per mezzo di un'equazione alla determinazione di questa per mezzo di una serie, la quale ne esprime esplicitamente l'ordinata per mezzo di una composizione algebrica che, per quanto infinita, resta facilmente manipolabile termine a termine. Si tratta ora di mostrare come questa trasformazione si connetta alla formulazione di un metodo generale atto a risolvere in via analitica "aliquot Problematum specimina qualia præsertim natura curvarum".[92]

Questi problemi possono secondo Newton "essere ridotti" a due problemi fondamentali la cui formulazione fa direttamente intervenire la nozione di velocità:

1. Spatij longitudine continuò (sive ad omne tempus) data, celeritatem motûs ad tempus propositum invenire.
2. Celeritate motûs continuò datâ longitudinem descripti spatij ad tempus propositum invenire.[93]

Newton trasforma quindi dei problemi geometrici riferiti a delle entità spazialmente definite come le curve in problemi che vertono su una relazione che è difficile non intendere come funzionale fra la lunghezza di certi spazi e il tempo che occorre a percorrerli. Dietro questa trasposizione non vi è solo "l'astuta" introduzione di una metafora meccanica che porta a considerare le curve come progressivamente descritte in un certo tempo dalla composizione di movimenti adeguati; questo modo di vedere è d'altra parte in se stesso già esplicitamente presente in numerosi passaggi della *Géométrie* di Descartes.[94] Ciò che segna una novità ben più interessante è l'interpretazione stessa dei movimenti che descrivono la curva come delle relazioni fra certi spazi e certe porzioni di tempo. La "natura" della curva è interamente contenuta nella natura di queste relazioni e ogni problema che verta sulla prima può immediatamente riformularsi nei termini delle seconde. Se le cose stanno così la trasposizione di Newton non è dalla geometria alla meccanica, ma piuttosto dalla geometria all'analisi: alla teoria delle curve si sostituisce una teoria generale delle forme di una relazione. Tutto ciò è tuttavia più chiaro dalla continuazione della lettura del testo newtoniano che, nel corso di una pagina straordinariamente rilevante nella storia della matematica, indica come

[91]Cfr. a questo proposito la nota (29) di Whiteside: *ivi*, pp. 50-1 [cfr. il prossimo paragrafo III.2.a.γ.].
[92]Cfr; *ivi*, p. 70.
[93]Cfr. *ivi*.
[94]Cfr. Descartes (1637).

realizzare una trasposizione ulteriore che permetta di passare dai procedenti problemi a problemi ancora più generali in cui ciò che è in gioco non è appunto che la forma di una relazione qualsiasi (indipendentemente dalla natura particolare dei *relata*).

La chiave di questa ulteriore generalizzazione è la comprensione della caratteristica essenziale che fa del tempo un riferimento privilegiato e comune relativamente alla rappresentazione di un movimento. Questa consiste nell'indipendenza della sua variazione rispetto a *ogni* altra variabile considerata, ciò che conferisce a esso la possibilità di svolgere in ogni situazione particolare il ruolo di un parametro capace di conferire una misura al movimento, la quale non è, a sua volta, che la misura di uno spazio percorso in un tempo dato. Ciò significa che lo stesso ruolo può in un sistema isolato essere svolto da una variazione qualsiasi, la quale è convenzionalmente intesa come indipendente e parametrica. Per quanto Newton non arrivi a esplicitare questa conclusione, restando legato nella sua formulazione alla richiesta che la variabile in questione sia "æquabile" relativamente al tempo, è chiaro che sul piano operativo questa richiesta resta puramente retorica, trasformandosi nella determinazione convenzionale di un riferimento interno al sistema. La "filosofia" newtoniana del tempo assoluto resta così, in questo caso specifico, un semplice richiamo retorico, che operativamente si trasforma nella richiesta dell'esplicitazione, in ogni caso particolare, del parametro stabilito.

Intese le quantità variabili come delle *fluenti*, Newton associa a ognuna di esse una velocità istantanea o *flussione* definita relativamente a un parametro comune detto "tempo" e riformula i problemi precedenti sotto la forma seguente:

> Probl. 1. Relatione quantitatum fluentum inter se datâ, fluxionum relationem determinare.
> Probl. 2. Exposita æquatione fluxiones quantitatum involvente, invenire relationem quantitatum inter se.[95]

Si tratta allora: i) di fornire un'adeguata interpretazione del termine "velocità istantanea" e di chiarire quindi il concetto di flussione; ii) di fornire una soluzione algoritmica dei due precedenti problemi; iii) di giustificare questa soluzione indicandone la cogenza relativamente alla nozione stessa di flussione; iv) di mostrare come la soluzione di questi problemi contenga la soluzione di numerosi e classici problemi tanto geometrici che meccanici, fra cui quello delle tangenti e quello delle aree.

La successiva considerazione di questi ulteriori problemi[96] permetterà di chiarire alcune delle affermazioni precedenti e di presentare i punti chiave dell'edificio newtoniano.

Seguendo l'ordine di Newton incomincerò con il problema (ii), il quale si distingue come è ovvio in due questioni distinte, rispettivamente relative

[95] Cfr. Whiteside (1967-81), pp. 74 e 82.

[96] Spero che la mia ricostruzione permetta di riconoscere il caratteristico percorso argomentativo newtoniano che avanza trasformando problemi in problemi.

all'algoritmo diretto e a quello inverso. Per ciò che riguarda il primo punto, Newton presenta un procedimento meccanico di trasformazione delle equazioni algebriche, che prevede l'introduzione in esse di nuovi fattori i quali rappresentano le flussioni e conduce da una qualsiasi equazione data alla rispettiva "equazione flussionale". Se la prima equazione esprime la relazione fra le quantità variabile, la sua trasformata esprimerà allora la relazione fra le flussioni di queste quantità. Non è difficile rendersi conto, al di là delle (lievi) differenze espositive, che l'algoritmo di Newton è del tutto conforme a quello che Leibniz presenterà qualche anno più tardi nella *Nova Methodus*. La sola differenza è di carattere puramente notazionale. Indicando le variabili con x, y, z, &c. Newton sceglie per le rispettive flussioni le lettere m, n, r, &c.[97] e trasforma quindi, a esempio, equazioni intere della forma: $A + Bx + Cy + Dxy + Ex^2 + Fy^2 + ... + Py^p = 0$ in un altre equazione intere della forma: $B + C + Dxn + Dym + 2Exm + 2Fyn + ... + pPy^{p-1}n = 0$. Per quanto riguarda il problema inverso - che Newton presenta sotto la forma generale del passaggio da un'equazione della forma $F(x, y, \&c., m, n, \&c.) = 0$ alla corrispondente equazione fra le fluenti - la questione è ovviamente più complessa. Esso è infatti banalmente risolvibile per mezzo di una semplice inversione dell'algoritmo diretto solo nel caso in cui l'equazione flussionale sia di una forma particolare. Per avere un metodo di soluzione generale occorre far ricorso allo strumento analitico dello sviluppo in serie. Se dall'equazione di partenza è possibile trarre il valore di n/m in funzione della sola variabile x, basta ovviamente sviluppare questo valore in serie e applicare termine a termine l'algoritmo inverso. La cosa è più complicata se il rapporto m/n è dato da un'espressione algebrica in x e y. In questo caso Newton riduce questa espressione in forma intera (eventualmente in una serie intera), presuppone l'identità generica $y = A + Bx + Cx^2 + \&c.$, sostituisce tale valore nella trasformata dell'equazione di partenza e cerca i coefficienti per mezzo del metodo dei coefficienti indeterminati.[98] Se infine nell'equazione di partenza occorrono più di due fluenti basta presupporre una relazione fra queste, riducendo così il problema al caso precedente.

Questa sommaria presentazione dovrebbe rendere evidente il ruolo assegnato da Newton alla rappresentazione di una "quantità" per mezzo di una serie intera. Se questo strumento analitico permette una soluzione generale del problema inverso, è chiaro che questa soluzione resta adeguata solo nella

---

[97]Come è noto Newton modificherà questa convenzione fin dalla prima redazione del *De quadratura* (risalente al 1692 [cfr. Whiteside (1967-81), vol. VII, pp. 48-129]) indicando le flussioni per mezzo di lettere puntate (rispettivamente: $\dot{x}$, $\dot{y}$, $\dot{z}$, &c.). Se la nuova notazione esprime in modo esplicito la correlazione operazionale fra le fluenti e le flussioni, é chiaro che relativamente al primo ordine essa non introduce nessuna differenza sostanziale. Diverso è invece il caso per gli ordini successivi, in cui il numero dei punti sovrapposti alle variabili svolge la funzione di un indice. Non è quindi un caso che l'introduzione della nuova notazione (che riformula adeguatamente una convenzione già usata in alcuni manoscritti del maggio 1666 [cfr. Whiteside (1967-81), vol. I, pp. 272-94; la stessa convenzione sarà impiegata da Newton anche nel *Trattato del 1666*]) corrisponda proprio a una generalizzazione del problema inverso, che diventa nel 1692 quello della soluzione di un'equazione flussionale di un ordine qualsiasi.

[98]Cfr. il precedente paragrafo II.1.δ..

misura in cui ciò che si cerca è la relazione operazionale che si istituisce fra le fluenti in un dato intorno di un loro valore.[99] Il metodo di Newton non risolve quindi il problema che nel caso di una sua interpretazione - che è peraltro inadeguata a far fronte a innumerevoli esigenze applicative. La ricerca di metodi d'integrazione finita resta quindi una questione perfettamente aperta, che Newton affronta peraltro in alcuni casi particolari inerentemente alla presentazione del proprio metodo di quadratura.[100]

Per quanto riguarda la giustificazione dell'algoritmo (diretto) l'argomento di Newton è sinteticamente il seguente.[101] Se indichiamo con o un tempo infinitamente piccolo, i prodotti mo e no indicheranno rispettivamente degli incrementi spaziali infinitamente piccoli delle due variabili x e y. Data un'equazione $F(x, y) = 0$ si tratterrà allora di sostituire in essa $x + mo$ e $y + no$ a x e y, operare le semplificazioni opportune e omettere i termini infinitesimali di ordine superiore. L'equazione così determinata sarà manifestamente quella cui conduce l'algoritmo del *calcolo*.

Un tale argomento va ovviamente interpretato. Per questo non basta tuttavia limitarsi alla semplice lettura della pagina in cui esso è esposto, ma occorre cercare di inserire questa entro un contesto concettuale che è possibile ricostruire solo tramite un'indagine di respiro più ampio. E' per questa ragione che non potrò qui che limitarmi all'enunciazione di alcune tesi che ho cercato altrove[102] di giustificare nel modo il più possibile analitico. Il primo punto è questo: per quanto la giustificazione di Newton sia esplicitamente infinitesimalista, essa risponde a un problema che - a differenza di quello leibniziano - verte su quantità perfettamente finite e può quindi riformularsi per una sua parte consistente in termini del tutto finitari. Sia a questo proposito, τ un intervallo temporale finito e siano $\mathfrak{m}$ e $\mathfrak{n}$ le velocità medie di variazione delle variabili x e y nel corso di tale tempo. Se le variabili sono pensate come quantità in continua generazione, le rispettive velocità corrispondono ai valori rispettivi dei rapporti fra certi incrementi e il tempo in cui esse sono stati prodotti. Tuttavia se τ è semplicemente inteso come il valore di un incremento arbitrario di una variabile principale a cui entrambe le quantità x e y sono correlate, allora $\mathfrak{m}$ e $\mathfrak{n}$ non saranno che i valori dei rapporti fra gli incrementi Δx e Δy di x e y, corrispondenti all'incremento τ della variabile comune, e questo stesso incremento. Sia ora data la relazione $F(x, y) = 0$ fra le due fluenti. Indipendentemente dal carattere particolare delle relazioni fra queste ultime e la variabile principale si avrà allora: $F(x+\mathfrak{m}\tau, y+\mathfrak{n}\tau) = 0$. Consideriamo ora la nozione di velocità istantanea. Per quanto sia molto difficile fornire una determinazione meccanica non infini-

[99] La determinazione di tale relazione è in particolare necessaria per permettere quell'ampliamento dell'analisi alle curva trascendenti che costituisce uno dei risultati più importanti del *calcolo*.

[100] Questa collocazione del problema dell'integrazione finita contiene *in nuce* quella separazione fra risultati analitici "generali" e condizioni della loro applicazione su cui insisterò nel prossimo capitolo.

[101] Cfr. *ivi*, p. 80

[102] Cfr. Panza (1989).

tesimalista di questa nozione, è chiaro che essa e volta a volta esemplificata per mezzo di valori finiti di certi rapporti. La velocità istantanea potrà dunque pensarsi come *misurata* da una velocità media, ovvero scelto τ come un parametro arbitrario, da un incremento finito, il quale risulterà tuttavia differente dall'incremento *reale* subito dalla variabili in questione. Il punto sarà allora quello di determinare un tale incremento *virtuale* ovvero, nel nostro caso, la relazione fra gli incrementi virtuali delle due variabili x e y. Per fare questo esistono almeno tre metodi perfettamente compatibili in termini operazionali con il procedimento di Newton. Semplificata adeguatamente l'equazione $F(x+\mathbf{m}\tau, y+\mathbf{n}\tau) = 0$ si potrà infatti: i) intendere τ come una quantità infinitesimale, omettere e scrivere m e n in luogo di $\mathbf{m}$ e $\mathbf{n}$; ii) cercare il rapporto fra $\mathbf{m}$ e $\mathbf{n}$, individuarne il "limite" e eguagliarlo al rapporto cercato fra m e n; iii) assumere per definizione $m = (\mathbf{m})_{\tau=0}$ e $n = (\mathbf{n})_{\tau=0}$ e operare conseguentemente in termini puramente algebrici. Se la strada scelta da Newton nel *De Methodis* è chiaramente le prima, questo ragionamento mostra bene, a me pare, come l'apparato concettuale di Newton resti in quanto tale del tutto autonomo da un punto di vista infinitesimalista, il quale compare semplicemente come un'ausilio dimostrativo *locale*. Ciò è reso ancora più chiaro dal fatto che le alternative (ii) e (iii) sono a loro volte utilizzate in altre occasioni da Newton il quale nella versione del 1704 *De Quadratura* riformula interamente il suo argomento proprio tramite un ricorso alla nozione di "ultimo rapporto" o "limite".

Se è del tutto evidente che, comunque interpretato, l'argomento di Newton dipende in modo essenziale da un'intuizione originaria che verte sulla nozione di velocità istantanea che questi si guarda bene dal chiarire in termini espliciti, lasciando all'interprete il compito di una interpretazione, ciò che è chiaro è che questa nozione fornisce qui la possibilità di slegare il *calcolo* da una interpretazione particolare e di intenderlo come una teoria generale delle relazioni fra le quantità variabili di cui la teoria delle curve non è che una semplice applicazione. Essa permette inoltre di realizzare questa applicazione senza alcun ricorso alla equiparazione fra curva e poligono a cui sarà invece costretto de l'Hôpital più di vent'anni dopo. Al contrario il fondamento principale della "metafisica" newtoniana sembra proprio consistere in una distinzione di principio fra situazioni reali e virtuali, la quale renderà manifesta la possibilità di rappresentare la gerarchia delle flussioni per mezzo di una serie infinita che approssima la situazione reale prodottasi grazie alla considerazione di un incremento *finito*: il "teorema di Taylor" - il quale costituirà la pietra angolare dell'analisi superiore settecentesca - sembra così naturalmente preannunciato.[103]

Per quanto l'impianto metafisico sia qui essenzialmente differente da quello leibniziano, l'identità degli algoritmi è del tutto evidente. Può tuttavia stupire che la regola di Newton si traduca nelle regole del calcolo differenziale per mezzo della sostituzione delle flussioni con i differenziali, ovvero di una quantità finita che esprime un rapporto con una quantità infinitamente

---

[103] La questione verrà naturalmente affrontata più dettagliatamente nei capitoli seguenti.

piccola che esprime una differenza. Per comprendere questo basta tuttavia osservare che se le flussioni newtoniane sono senza dubbio dei rapporti, questi presentano al denominatore una quantità costante comune che si semplifica nel corso di ogni sostituzione. Così ponendo $m = dx/dt$ e $n = dy/dt$ si avrà anche $n/m = dy/dx$ e $n = \frac{dy}{dx}m$. In termini operativi le sostituzioni m $[=\dot{x}] = dx$ e n $[=\dot{y}] = dy$ sono quindi perfettamente corrette (qualora, ovviamente, intervengano insieme). Occorrerà semplicemente badare a intendere le relazioni fra i differenziali come relazioni fra quantità infinitamente piccole e quelle fra le flussioni come relazioni fra quantità finite.

Resta il quarto punto: l'applicazione del calcolo delle flussioni alla soluzione dei problemi relativi alle curve. Mi limiterò qui a qualche cenno generale riferito ancora una volta ai problemi delle tangenti e delle aree.[104] Per quanto Newton dedichi nel *De Methodis* una grande attenzione alla considerazione di molti esempi e di molti problemi derivati, egli è assai avaro di indicazioni precise a proposito delle ragioni che giustificano l'applicazione di un calcolo delle velocità istantanee alla determinazione di aree e tangenti. Per capire meglio l'argomento generale di Newton sembra quindi necessario tornare al *Trattato* del 1666 dove è esso è esposto con la massima chiarezza.[105]

Data una curva qualsiasi, la si consideri come descritta dal movimento del punto C di intersezione fra due rette entrambe in traslazione. Scomposto il movimento di questo punto lungo due direzioni parallele a tali rette, le componenti della sua velocità istantanea saranno rispettivamente indicate dalle flussioni m e n delle variabili x e y che occorrono nell'equazione che esprime la curva. Queste saranno a loro volte proporzionali a due segmenti che escono dal punto C. Il metodo del parallelogramma permette allora di determinare la direzione su cui il punto C si muoverebbe se la velocità di traslazione rimanesse costantemente uguale a quella considerata. Questa direzione sarà peraltro espressa dal rapporto fra n e m, il quale determinerà *così* la tangente nel punto. L'argomento di Newton si fonda in ultima analisi sull'equiparazione fra direzione della tangente e direzione della diagonale del parallelogramma delle velocità, la quale dovrebbe *a rigore* essere dimostrata in termini indipendenti. Esso corrisponde tuttavia al tentativo di una interpretazione non infinitesimalista del problema che, per quanto inadeguata, mette bene in mostra il punto di vista newtoniano.

Ancora più chiaro è il caso del problema inverso. Considerata una curva qualsiasi ACF (fig. 8) di coordinate AB = x e BC = y e di area ABC = z, si costruisca sull'asse delle ascisse un rettangolo ABDE di altezza BD = 1 e area (AB)(BD) = x. Essendo le aree del trapezoide BCA e del rettangolo BDEA descritte dalla traslazione della medesima retta, il rapporto fra la loro velocità di variazione dipenderà unicamente dal rapporto fra i segmenti BD e BC. Posta allora la proporzione $r : m = y : 1$, si trae: $r = ym$ e il valore dell'area

[104]Oltre a questi problemi Newton affronta nel *De Methodis* anche i problemi del raggio di curvatura e della rettificazione.

[105]Cfr. Whiteside (1967-81), vol. 1, pp. 427-32.

z corrisponderà quindi alla fluente di flussione ym. Per quanto ancora una volta incompleto (che cosa ci assicura infatti che la relazione fra le flussioni delle aree e i segmenti che le descrivono sia proprio quella richiesta?), l'argomento di Newton permette di associare la definizione algoritmica del calcolo inverso con il problema geometrico delle aree senza far ricorso a nessuna dubbia analogia. Esso mostra peraltro con straordinaria chiarezza come il punto delicato di questa relazione stia nella determinazione della flussione dell'area, intesa come mera quantità variabile. Anche in questo caso, se un argomento infinitesimalista appare in qualche modo supposto, il suo ruolo è strettamente locale. L'impostazione di Newton è inoltre strettamente operazionalista e non presuppone l'introduzione di nessuna entità reciproca rispetto alla flussione.

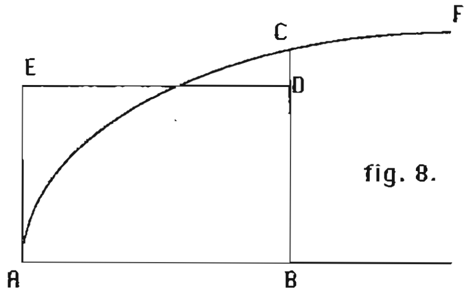


fig. 8.

II. 1. ι. *Esigenze di unificazione e collocazione del calcolo*

La teoria delle flussioni e il calcolo differenziale costituiscono le due originali versioni del *calcolo*. E' sotto queste due forme differenti e per certi versi contrapposte che esso si diffuse e si sviluppò durante tutta la prima metà del XVIII secolo.[106] Le numerose (e assai note) controversie relative alla legittimità delle presupposizioni infinitesimaliste[107] non impedirono di concentrare la più parte degli sforzi verso la moltiplicazione delle applicazioni analitiche, geometriche e meccaniche dell'algoritmo. Il problema della fondazione del *calcolo* trovò così la sua più naturale cassa di risonanza in una miriade di dispute o polemiche particolari, spesso del tutto separate dagli interessi effettivi della ricerca di punta e che solo assai raramente seppero esplicitamente congiungersi ad essa. Il *calcolo* andò così stabilizzandosi, più che come un insieme di principi generali, come un corpo di risultati e metodi risolutivi di differenti problemi, connessi fra loro dalla presenza di un algoritmo comune e dall'introduzione in differenti contesti di quantità infinitesimali manipolate per mezzo di adeguate applicazioni del principio di omissione o di altri principi correlati.

Ciò non significa tuttavia che la questione dei fondamenti del *calcolo* debba ritenersi come del tutto marginale nel contesto del dibattito matema-

[106]Cfr., fra gli altri, Bos (1980).
[107]Cfr. su questo punto Giorello (1985a) e Blay (1986).

tico dell'epoca, ma piuttosto che a essa debba venir assegnato un carattere diverso e certamente più complesso da quello che sembrano assegnargli i principali *pamphlet* che a essa più esplicitamente si richiamavano, i quali sembrano essenzialmente presentarla sotto la forma di una contesa incentrata sul generalissimo problema dello statuto e della concepibilità dell'infinito. La questione si pose piuttosto nei termini di un'esigenza di organizzazione e strutturazione di un insieme sempre più vasto di risultati, acquisizioni, soluzioni e formulazioni di problemi, la quale conduceva alla necessità tanto di una precisazione dei limiti e delle condizioni di validità a cui sottoporre gli esiti delle ricerche particolari che di una loro reinterpretazione entro un contesto teorico unitario e quindi sufficientemente generale. Le forme sotto le quali questa esigenza di unificazione andò via via presentandosi restano senza dubbio molteplici, così come diversi restano i livelli a cui essa attestò i propri obiettivi. Ai numerosi tentativi di riformulazione del calcolo differenziale e integrale o di quello delle flussioni, intesi come teorie separate, connesse al più con alcune delle loro più classiche applicazioni soprattutto geometriche,[108] si affiancarono non poche ricerche tese all'obiettivo di una riorganizzazione unitaria di quella grande massa di risultati particolari cui aveva condotto la generale applicazione del *calcolo* alla soluzione di problemi geometrici e meccanici,[109] così come propositi di una generalissima esposizione dell' "analisi", di cui il *calcolo* non fosse che un aspetto sia pure essenziale.[110]

Proprio il problema sotteso da quest'ultima direzione di ricerca, ovvero quello della collocazione del *calcolo* nel contesto di una rinnovata architettonica delle scienze matematiche, la quale prendesse atto non solo dello sviluppo straordinario delle tecniche analitiche, ma anche della preminenza che esse avevano assunto nelle ricerche dei matematici continentali e della possibilità che esse avevano concesso di una riformulazione generale di numerosi e classici problemi geometrici e meccanici, divenne a me pare, a partire dalla seconda metà del secolo, il punto di concentrazione delle riflessioni fondazionali, la pietra angolare intorno alla quale si riaccese l'interesse della comunità matematica verso la questione della "metafisica del *calcolo*". Le diverse risposte che furono date a questo problema possono a me pare venir ordinate in due gruppi distinti. Da una parte si propose infatti, sulla scorta delle indicazioni contenute in alcuni degli articoli matematici che d'Alembert compose per l'*Encyclopédie*,[111] di intendere il *calcolo* nel contesto di una teoria dei limiti resa in se stessa autonoma da ogni considerazione infinitesimalista, geometrica o meccanica e ricondotta quindi all'alveo dell'algebra delle quantità finite. Dall'altra si fece lentamente strada la convinzione che il *cal-*

---

[108]Cfr. fra gli altri: Cheyne (1703), Manfredi (1707), Taylor (1715), Fontenelle (1727), Robins (1735), Maclaurin (1742), Agnesi (1748), Simpson 1750.

[109]Relativamente alla teoria delle curve algebriche cfr. a esempio: De Gua (1740), Cramer (1750) e Dionis de Sejour et Godin (1755) [nei quali l'algoritmo differenziale è reinterpretato nel contesto di una teoria non infinitesimalista fondata sulla manipolazione di quantità finite ma indeterminate]; fra i principali trattati di meccanica cfr. invece: Varignon (1725), Euler (1736a), d'Alembert (1743) e (1744) e Clairaut (1743).

[110]Cfr. a esempio Reyneau (1708).

[111]Cfr. d'Alembert (Diff.), (Flux.), (Inf.) e (Lim.).

colo potesse venir inteso come un capitolo della teoria generale delle serie intere che l'*Introductio* di Euler[112] aveva considerato come una sua essenziale premessa. Se fu solo con Lagrange, e in particolare, con la sua memoria del 1772 "*sur une nouvelle espèce de calcul*",[113] che questa idea venne esplicitamente presentata, sotto la forma di un'ipotesi riduzionista che interpretava l'algoritmo diretto come un algoritmo di derivazione successiva dei coefficienti della serie intera associata a *ogni funzione* per mezzo di procedure puramente algebriche, essa possiede una storia assai più variegata che la connette attraverso numerose tappe successive alla stessa impostazione newtoniana e alla concezione dell'analisi che essa manifesta, la quale rende esplicite le stesse condizioni di possibilità dell'ipotesi lagrangiana. La ricostruzione delle tappe principali di questa storia che conduce dopo il 1772 all'edificazione della teoria funzioni analitiche di Lagrange costituisce l'oggetto principale della mia dissertazione. Il prossimo paragrafo conterrà invece una sommaria esposizione della principale alternativa all'ipotesi fondazionale lagrangiana, così come essa è presentata nel 1786 da S. l'Huilier nella sua memoria vincitrice del concorso dell'Accademia di Berlino sull'infinito matematico.[114]

II. 1. κ. *Il calcolo e la teoria dei limiti: la memoria di l'Huilier del 1786*

La formulazione che l'Accademia di Berlino (la cui sezione di matematica era allora diretta di Lagrange[115]) aveva scelto per il bando del proprio concorso poneva esplicitamente l'accento sul contrasto fra i metodi finitari degli antichi e quelli infinitesimalisti dei matematici coevi, che essa non esitava a dichiarare contraddittori:

> L'utilité qu'on retire des Mathématiques, l'estime qu'on a pour elle, et l'honorable dénomination de *Sciences exactes* par excellence qu'on leur donne à juste titre, sont dues à la clarté de leurs principes, à la rigueur de leurs démonstrations, et à la précision de leurs théoremes.
> Pour assurer à cette belle partie de nos connaissances la continuation de ces précieux avantages, on demande
> *Une théorie claire et précise de ce qu'on appelle* Infini *en Mathématique.*

---

[112]Cfr. Euler (1748).

[113]Cfr. Lagrange (1772)

[114]Cfr. l'Huilier (1786). Un breve sommario del contenuto della memoria di l'Huilier è in Youschkevitch (1971), pp. 156-58, il quale fornisce anche alcune notizie relative al concorso citato [cfr. *ivi*, pp. 155-6]. L'assegnazione del premio a l'Huilier fu resa pubblica nel volume del 1786 dei *Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences, Arts et Belles-Lettres [de Berlin]* (pubbl. 1788), p. 8. L'Huilier presentò nove anni più tardi una versione largamente ampliata e modificata della propria memoria, sotto la forma di un vero e proprio trattato di calcolo differenziale e integrale [cfr. l'Huilier (1795)]. Ho preferito tuttavia riferirmi alla più agile versione del 1786 a cui la successiva riscrittura non sembra aver aggiunto (sotto l'aspetto che ci interessa qui) alcun arricchimento essenziale.

[115]Lagrange fu direttore della sezione di matematica dell'Accademia di Berlino fra il 1766 e il 1787 [cfr. Taton (1988)].

> On sait que la haute Géométrie fait un usage continuel des *inifiniment grands* et des *infiniments petits*. Cependant les Géometres, et même les Analystes anciens, on évité soigneusement tout ce qui approche de l'infini; et le grands Analystes modernes avouent que les termes *grandeur infini* sont contradictoires.
> L'Académie souhaite donc qu'on explique comment on a déduit tant de théoremes vrais d'une supposition contradictoire, et qu'on indique un principe sûr, clair, en un mot vraiment mathématique, propre à être substitué à l'*Infini*, sans rendre trop difficile, ou trop longues les recherche qu'on expédie par ce moyen. On exige que cette matière soit traité avec toute la généralité, et avec toute la rigueur, la clarté et la simplicité possibles.[116]

Dietro la retorica del contrasto fra finito e infinito sembra celarsi in queste parole la questione stessa dell'unità della matematica, che la nascita del calcolo differenziale (e di quello delle flussioni) sembrava aver compromesso e che ancora non era stata riconquistata.[117] Benché un tale sottinteso non sembra essere sfuggito a l'Huilier, questi sembra accettare il gioco retorico dell'Accademia, insistendo sopratutto sulla necessità (e possibilità) di un ritorno ai principi della matematica antica:

> [...] les modernes, en entrant dans la carrière que les anciens nous ont ouverte, n'on pas toujours marché sur leurs traces; et en la prolongeant, ils n'on pas toujours suivi la direction que ces derniers lui avoient donnée. Il semble au contraire, en ouvrant les ouvrages d'un grand nombre de Mathématiciens modernes, que les Mathématiques se divisent en deux branche, distinctes l'une de l'autre; qui, à la vérité, se prêtent quelquefois un secours mutuel, et rentrent de temps en temps l'une dans l'autre; mais qui, en effet, reposent sur des principes entièrement opposés, et ont pour objet des êtres d'une nature entièrement différente. Les anciens n'on jamais considéré les quantités que sous le point de vue d'êtres susceptibles d'augmentation et de diminution; et par conséquent, non-susceptibles d'atteindre un dernier terme de grandeur ou de petitesse. Au contraire, un grand nombre de Mathématiciens modernes, croyant pouvoir contempler la grandeur dans l'un et l'autre de ces états extrémes, prennent pour principe l'existence même de ces états [...].
> Je me propose donc comme but principal, de montrer, avec la rigueur et la clarté requises par mes Juges: Que, la *méthode des anciens, connue sous le nom de Méthode d'Exhaustion, convenablement étendue, suffit pour établir d'une manière certaine les principes des nouveaux calculs;* sans que cependant cette réduction entraîne après elle des longueurs et des difficultés propres à rebuter dès le premier pas ceux qui veulent entrer dans la carrière des Mathématiques sublimes.[118]

---

[116]Cfr. *Nouveaux mémoires de l'Académie Royale des Sciences, Arts et Belles-Lettres [de Berlin]*, 1784 (pubbl. 1786), p. 12-3.

[117]A questo proposito è a mio parere sintomatico il giudizio finale dell'Accademia che, pur assegnando il premio alla memoria di l'Huilier, esprime un parere esplicitamente negativo su tutte le memorie inviate per partecipare al concorso, le quali non avrebbero saputo indicare "comment on a déduit tant de théorèmes vrais d'une supposition contradictoire", non avrebbero adeguatamente corrisposto alla richiesta di "chiarezza, semplicità e rigore" e (soprattutto) non avrebbero compreso che "le principe domandé devoit être, non pas borné au calcul infinitésimal, mais étendu à l'Algèbre et à la Géométrie traitée à la manière des Anciens" [cfr. *ivi*, 1786, p. 8].

[118]Cfr. l'Huilier (1786), pp. 5-6.

La strada che l'Huilier percorre per ritornare ai principi degli antichi passa per i suggerimenti di d'Alembert[119] e Cousin[120] e consiste essenzialmente nell'edificazione di una organica teoria dei limiti, entro la quale il *calcolo* possa venir opportunamente reinterpretato. Tale teorie è fondata sulle due seguenti definizioni:

Def. A: Soit une quantité variable, toujours plus petite ou toujours plus grande qu'une quantité constante proposée; mais qui puisse différer de cette dernière moins que d'aucune quantité proposée plus petite qu'elle: cette quantité constante est dite la *limite* en grandeur ou en petitesse de la quantité variable.

Def. B: Soit un rapport variable toujours plus petit qu'un rapport donné, mais qui puisse être rendu plus grand qu'aucun rapport assigné plus petit que ce dernier: le *rapport* donné est appelé la *limite en grandeur* du rapport variable. Item; soit un rapport variable toujours plus grand qu'un rapport donné; mais qui puisse être rendu plus petit qu'aucun rapport assigné plus grand que ce dernier: le *rapport* donné est appelé la *limite en petitesse* du rapport variable.[121]

Introducendo in modo esplicito l'implicito riferimento ai moduli, le due definizioni di l'Huilier possono riformularsi nei termini che seguono:[122]

$$\text{Def. A}^* : \operatorname{Lim} X = A =_{df} \begin{cases} X \text{ è costamente maggiore o minore di } A \ \& \\ \forall B,\ X \text{ può essere reso tale che: } |A-B| > |A-X| \end{cases}$$

Def. B* :

$$\text{a) } \operatorname{Lim}_{-} \frac{X}{Y} = \frac{A}{B} =_{df} \begin{cases} \dfrac{X}{Y} \text{ è costamente minore di } \dfrac{A}{B} \ \& \\ \forall\ \dfrac{C}{D}, \dfrac{X}{Y} \text{ può essere reso tale che: } \dfrac{C}{D} < \dfrac{X}{Y} < \dfrac{A}{B} \end{cases}$$

$$\text{b) } \operatorname{Lim}_{+} \frac{X}{Y} = \frac{A}{B} =_{df} \begin{cases} \dfrac{X}{Y} \text{ è costamente maggiore di } \dfrac{A}{B} \ \& \\ \forall\ \dfrac{C}{D}, \dfrac{X}{Y} \text{ può essere reso tale che: } \dfrac{A}{B} < \dfrac{X}{Y} < \dfrac{C}{D} \end{cases}$$

Se tali definizioni evitano ogni ricorso (tanto esplicito che implicito) a presupposizioni infinitesimaliste di sorta (attraverso l'impiego di un linguaggio che qualcuno potrebbe qualificare come "proto-weierstrassiano"[123]), alla luce della matematica successiva, esse non possono che apparire, oltre che ridondanti, anche essenzialmente imprecise. Ciò che è lasciato infatti del tutto implicito sono le modalità tramite le quali le variabili considerate possano essere rese tali da soddisfare le diseguaglianze indicate. Una tale imprecisione è strettamente connessa alla interpretazione del limite come "limite

[119] Cfr. la precedente nota (111).

[120] Cfr. Cousin (1777), la cui revisione darà luogo nel 1796 al ben più noto Cousin (1796).

[121] Cfr. l'Huilier (1786), p. 7.

[122] Nella riformulazione della prima Definizione A ho omesso la clausola superflua $|B| < |A|$.

[123] Si noti che un tale linguaggio era già stato usato da Robins fin dal 1735 [cfr. Robins (1735)]. Mi permetto di rimandare a questo proposito a Panza (1789), pp. 199-201.

di una variabile", anziché di una funzione di una o più variabili. L'argomento del limite sembra infatti pensato come l'espressione matematica di una sorta di "variazione naturale", la quale risulta implicitamente stabilita. Tutto ciò che serve a l'Huilier è d'altra parte che le proprie definizioni possano applicarsi al caso di un rapporto il cui valore si avvicina indefinitamente a un valore dato, qualora tanto il numeratore che il denominatore tendano a zero. Se questi ha compreso la necessità di formulare una teoria dei limiti, la quale possa essere intesa in quanto tale come indipendente dall'edificio del *calcolo*, e possa quindi servire a fornirne una fondazione, egli non sembra ancora essersi liberato da una interpretazione intesa che mantiene il concetto di limite saldamente ancorato a quello di rapporto fra differenze evanescenti e non si scosta quindi sostanzialmente dall'intuizione newtoniana del primo o ultimo rapporto. E' proprio tale intuizione che rende ragione della limitazione implicita nelle definizioni a variazioni monotòne, la quale sarà peraltro essenziale in molte delle dimostrazioni successive.

La ristrettezza del riferimento intuitivo che regge le definizioni precedenti non impedisce tuttavia a l'Huilier di introdurre, fin dal secondo dei propri teoremi, la nozione di "variabile suscettibile di limite", la quale sembra corrispondere all'idea di una funzione che resta finita (e diversa da zero) qualora le proprie variabili tendano al loro "limite naturale" o compiano comunque la propria "variazione naturale". Se la distinzione fra "variabili suscettibili di limite" e "variabili non suscettibili di limite" può sembrare tale da preconizzare la distinzione fra funzioni (puntualmente) differenziabili e funzioni non (puntualmente) differenziabili, l'Huilier non pare nelle condizioni di spingere così in profondità la propria reinterpretazione del calcolo differenziale. Sarà solo con Cauchy che la nozione di limite saprà dare luogo a quest'ultima distinzione, la quale costituirà uno dei pilastri portanti dell'intero edificio della nuova analisi.

Ciò detto, veniamo ai teoremi di ordine generale che l'Huilier trae dalle proprie definizioni, i quali forniscono una vera e propria "teoria dei limiti". Essi possono venir riformulati nei termini seguenti.[124]

Teor. I: Se Lim $X = A$, allora Lim $A/X = 1$ e viceversa.

Teor. II: Se X e Y sono due "quantità variabili suscettibili di limite", tali che il loro rapporto è costantemente uguale a C e $\mathrm{Lim}_{\pm} X = A$ & $\mathrm{Lim}_{\pm} Y = B$, allora $A/B = C$.[125]

Teor. III: Se X e Y sono due "quantità variabili suscettibili di limite" tali che i rapporti X/a e Y/b (a e b costanti) siano costantemente uguali fra loro e $\mathrm{Lim}_{\pm} X = A$ & $\mathrm{Lim}_{\pm} Y = B$, allora $A/a = B/b$.

Teor. IV: Se X/Y e Z/W sono due "rapporti variabili suscettibili di limite" costantemente uguali fra loro e Lim $X/Y = A$ & Lim $Z/W = B$, allora $A=B$.

---

[124]Cfr. l'Huilier (1786), pp. 10-27.

[125]L'indice "±" indica che i teoremi debbono essere globalmente intesi sia come riferiti a "limiti in piccolezza" che come riferiti a "limiti in grandezza".

Teor. V (teorema del prodotto dei limiti): Se Lim $X_1/Y_1 = A_1$, Lim $X_2/Y_2 = A_2$,..., Lim $X_v/Y_v = A_v$, allora Lim $(X_1/Y_1)\cdot(X_2/Y_2)\cdot\ldots\cdot(X_v/Y_v) = (A_1)\cdot(A_2)\cdot\ldots\cdot(A_v)$.[126]

Teor. VI: Se A_0, A_1,...A_v e $\alpha_1>\alpha_2>\ldots>\alpha_v$ sono delle quantità date, x è una "quantità variabile non suscettibile di limite in piccolezza"[127] e $X = A_0 + A_1x^{\alpha_1} + \ldots + A_vx^{\alpha_v}$, allora $\mathrm{Lim}_{\pm}$ $X/A_0 = 1$.[128]

Teor. VII: Se A è costante, X è una "quantità variabile suscettibile di limite" e Lim X = B, allora Lim X/A = B/A.

Teor. VIII (teorema del quoziente dei limiti): Se X e Y sono due "quantità variabili suscettibili di limite" e Lim X = A & Lim Y = B, allora Lim X/Y = A/B.

Teor. IX: Se x una quantità variabile, e Δx la sua "variazione" o "cambiamento", allora il limite del rapporto dei "cambiamenti simultanei" di $a^{n-1}x$ e x^n (dove a e una quantità costante e n un numero dato) è uguale al rapporto a^{n-1}/nx^{n-1}.

Teor. X: Se $X = A_1x^{\alpha_1} + A_2x^{\alpha_2}$ + &c. e $Y = A_1\alpha_1x^{\alpha_1-1} + A_2\alpha_1x^{\alpha_1-2}$, allora il limite del rapporto dei "cambiamenti simultanei" di Bx e X è uguale al rapporto B/X.

Mentre le dimostrazioni dei Teoremi I-V e VII seguono direttamente dalle definizioni e consistono in una riduzione all'assurdo delle ipotesi contrarie, le dimostrazione dei teoremi restanti sfruttano i teoremi precedenti. Particolarmente delicata è la dimostrazione del Teorema IX per cui l'Huilier è costretto a ricorrere al teorema binomiale generalizzato a un qualsiasi esponente (reale), dichiarandosi "sicuro" di poter dimostrare quest'ultimo teorema senza ricorrere all'impiego del *calcolo*.[129]

Dati i precedenti teoremi, l'Huilier scrive:

> Il es connu que toute fonction algèbrique de x, entière ou fractionelle, rationelle ou irrationelle, peut être reduite en série, dont les termes sont des puissances de x affectées de coëfficiens constants. Partant nous avons assigné la limite du rapport des changements simultanés d'une quantité quelconque x et d'une fonction algèbrique quelconque de cette quantité.[130]

---

[126]Lo stesso teorema è presentato da l'Huilier in forma generale, in riferimento a limiti di variabili qualsiasi ("suscettibili di limiti") in una "addizione" alla propria memoria [cfr. *ivi*, p. 204].

[127]l'Huilier specifica: "ou qui peut être rendue plus petite qu'aucune quantité assignée" [cfr. *ivi*, p. 21]. x é quindi tale che il suo "limite naturale" è uguale a zero e può così intendersi come la variabile principale.

[128]Un tale teorema mi pare esemplificare perfettamente ciò che ho inteso come "limite naturale" di una certa quantità variabile. Il tendere di x a zero definisce infatti una "variazione naturale" della variabile principale.

[129]Una "dimostrazione elementare" del teorema binomiale generalizzato è d'altra parte l'oggetto del primo capitolo di l'Huilier (1795).

[130]Cfr. *ivi*, p. 27.

Posto infatti nel Teorema IX $a = 1$, si avrà, senza difficoltà, Lim $\Delta x/\Delta(x^n) = 1/nx^{n-1}$ e quindi: Lim $\Delta(x^n)/\Delta x = nx^{n-1}$. Impiegando i restanti teoremi (e assumendo implicitamente il teorema della somma dei limiti) non sarà poi difficile trarre le ulteriori identità: Lim $\Delta(XY)/\Delta x = Y\left(\text{Lim } \frac{\Delta X}{\Delta x}\right) + X\left(\text{Lim } \frac{\Delta Y}{\Delta x}\right)$ e Lim $\Delta(X/Y)/\Delta x =$, dove X e Y sono delle funzioni di x espresse in forma intera.

E' a questo punto che l'Huilier introduce la seguente "definizione":

> J'appellerai *rapport differentiel* de deux quantités variables le rapport qui est la limite de leurs changements simultanés; ou le rapport dont ces changements approchent d'autant plus qu'ils sont plus petits. Et j'appelerai *calcul différentiel*, le calcul qui s'occupe de la recherche du rapport differentiel des quantités variables. De même que la connaissance de la relation de deux quantités variables sert à déterminer leur rapport différentiel, réciproquement, de la connaissance du rapport différentiel de deux quantités variables on détermine la relation même de ces quantités. J'appellerai *rapport intégral* de deux quantités variables, le rapport qui regne entre ces quantités, en tant qu'il est déduit de leur rapport differentiel. Et j'appellerai *calcul intégral*, le calcul qui s'occupe du rapport intégral des quantités variables.[131]

L'Huilier impiega così il termine "calcolo differenziale" e quelli da esso derivati per riferirsi a un calcolo algoritmicamente equivalente a quello leibniziano, ma essenzialmente diverso da esso sul piano dell'interpretazione degli algoritmi. Se una tale scelta terminologica è in se stessa irrilevante (e può al più provocare qualche confusione locale), essa non permette certamente di concludere senza ulteriori dimostrazioni a favore della possibilità di sostituire l'intero edificio del calcolo leibniziano con una nuova teoria matematica fondata sulla ricerca del limite del rapporto fra i "cambiamenti simultanei" di una funzione e della sua variabile principale. Per questo occorre ancora indicare come sia possibile impiegare i precedenti teoremi tanto per costruire tale nuova teoria sul piano puramente formale, quanto per giustificare le sue applicazioni geometriche e meccaniche. Proprio questo è d'altra parte il contenuto essenziale della memoria di l'Huilier,[132] di cui non ho qui considerato che il primo capitolo. La considerazione dei capitoli restanti - fra i quali uno solo è dedicato alla trattazione di una funzione trascendente, nella fattispecie la funzione logaritmica (di cui l'Huilier dimostra lo sviluppo attraverso una procedura esplicitamente geometrica) - ci condurrebbe d'altra parte troppo lontani dallo scopo del presente paragrafo che non era altro che di indicare in termini sommari i principi generali di una possibile reinterpretazione del *calcolo*.

---

[131] Cfr. *ivi*, p. 32.

[132] l'Huilier non tratta in verità che di problemi geometrici, lasciando del tutto implicite le possibili applicazioni meccaniche della propria teoria.

II. 1. λ. *Il metodo degli incrementi evanescenti: le Institutiones calculi differentialis*

Se facciamo astrazione dalla teoria delle funzioni analitiche di Lagrange, che verrà ampiamente discussa nel corso dei prossimi capitoli, restano ancora da considerare, per completare l'elenco di Carnot, "il calcolo delle quantità evanescenti" e la "teoria delle equazioni imperfette". In entrambi i casi si tratta tuttavia di ipotesi che restano in quanto tali sostanzialmente marginali rispetto all'organizzazione del *calcolo* e che non fanno che confermare l'impostazione leibniziana, cercando nuovi argomenti per giustificare il passaggio dalla nozione di differenza infinitamente piccola all'algoritmo diretto, i quali si basano in ultima istanza proprio su una differente determinazione di questa nozione. Una rapida esposizione di questi argomenti dovrebbe confermare questo giudizio e permetterne un'articolazione più precisa anche relativamente all'ipotesi storiografica avanzata nel precedente paragrafo II.1.ι..

Pubblicate sette anni dopo l'*Introductio*, le *Institutiones calculi differentialis*[133] costituiscono l'ovvia continuazione di quel grandioso progetto di esposizione dell' "analisi dell'infinito" che Euler completerà quindici anni più tardi con la pubblicazione dei tre volumi dell'*Institutionum calculi integralis*.[134] Se alla citazione di questa monumentale triade, i cui elementi si richiamano esplicitamente l'un l'altro, aggiungiamo quella dei trattati di meccanica ("*sive motus analytice exposita*") e di "algebra", rispettivamente pubblicati dallo stesso autore nel 1736 e nel 1770-72,[135] abbiamo un'immagine chiara della concezione euleriana dell'architettonica della scienza matematica, in cui l'assenza di un capitolo esplicitamente dedicato alla geometria non è per nulla accidentale. Letta sotto quest'angolo di visuale l'intera opera di Euler può intendersi come un tentativo di riduzione della matematica all'elaborazione, allo sviluppo e all'opportuna applicazione delle tecniche analitiche.[136] All' "analisi ordinaria" - o teoria generale delle manipolazioni algebriche e della soluzione delle equazioni con metodi finitari - fa fronte un' "analisi dell'infinito" essenzialmente costituita dal calcolo differenziale e integrale. Fra queste prende tuttavia corpo un dominio intermedio, la cui graduale edificazione è il risultato dello sviluppo delle tecniche di manipolazione delle serie e che Euler per primo organizza e codifica nell'*Introductio* in

---

[133] Cfr. Euler (1755).

[134] Cfr. Euler (1768-70).

[135] Cfr. rispettivamente Euler (1736a) e (1770).

[136] A chi volesse contraddire questo giudizio per mezzo della citazione del *Methodus inveniendi* [cfr. Euler (1744)], in cui il calcolo delle variazioni è esplicitamente concepito in termini geometrici, secondo un'interpretazione del *calcolo* che ricorda, per la sua impostazione generale, quella dell'*Analyse* di de l'Hôpital, non sarà difficile ricordare l'entusiasmo con cui Euler accolse la riformulazione lagrangiana della propria teoria [cfr. Lagrange (1760-61)] in termini perfettamente analitici [cfr. su questo punto Fraser (1985)].

quanto teoria generale delle "funzioni" e delle loro espansioni in serie intere tratte senza l'ausilio del calcolo differenziale. Irriducibile all'analisi ordinaria a causa dell'essenzialità del riferimento a contesti infinitari, questo dominio intermedio (che Lacroix indicherà più tardi, impiegando una singolare crasi, con l'appellativo di "*analisi algebrica*"[137]) si distingue dal *calcolo* per l'assenza di ogni ricorso a algoritmi non algebrici. E' la semplice estensione delle regole dell'algebra ordinaria anche al caso di polinomi infiniti che dà luogo a un amplissimo insieme di risultati su cui è possibile erigere lo stesso edificio del *calcolo* e a fronte dei quali la stessa teoria delle curve sembra largamente ricostruibile senza alcun ausilio di tecniche differenziali o integrali.[138]

In quanto parte di un tale programma di vera e propria riorganizzazione unitaria del sapere matematico - il quale si colloca non casualmente all'indomani di una lunga stagione di profonde trasformazioni, le quali avevano prodotto più di una lacerazione nell'organico tessuto della geometria classica - le *Institutiones calculi differentialis* si presentano come un manuale di impostazione profondamente nuova nel quale il *calcolo* diretto viene presentato come una teoria di certe trasformazioni funzionali e applicato alla soluzione di problemi originati nel campo stesso dell'analisi.[139] Questa essenziale novità nell'interpretazione e nella collocazione del *calcolo* - a cui si accompagna la possibilità di far amplissimo uso, nel corso dell'esposizione dei principi e della derivazione delle loro conseguenze, dei risultati ottenuti nell'*Introductio* relativamente allo sviluppo delle funzioni in serie intera - non verte tuttavia in nessun modo sul ricorso al "metodo degli incrementi evanescenti", che anzi sembra ridurne la portata riproponendo il *calcolo* in quanto tale in termini sostanzialmente leibniziani. Proprio questo contrasto fra la novità degli orizzonti aperti dall'*Introductio* e la persistenza in essi di un punto di vista locale sostanzialmente immodificato, tranne che per qualche isolata dichiarazione di principio, è a mio avviso uno dei caratteri salienti dell'espo-

---

[137]Cfr. Lacroix (1797). Il termine "analisi algebrica" fu poi largamente diffuso nei primi decenni del XIX secolo per indicare una branca della conoscenza matematica, la quale corrispondeva a una partizione dell'insegnamento, cfr., fra gli altri, Garnier (1803) e Cauchy (1821).

[138]Cfr. a questo proposito il secondo volume dell'*Introductio*: Euler (1748), vol. II.

[139]Ecco come lo stesso Euler presenta il piano del volume alla fine della sua prefazione [cfr. Euler (1755), pp XIX-XX]:

> Constitui igitur in hoc libro universum Calculum differentialem ex veris principiis derivare, atque ita copiose pertractare, ut nihil prætermitterem eorum, quæ quidem adhuc eo pertinentia sunt inventa. In duas opus divisi partes, in quarum priori iactis calculi differentialis fundamentis mathodum exposui omnis generis functiones differentiandi, neque tantum differentialia primi ordinis, sed etiam superiorum ordinum inveniendi; sive functiones unicam variabilem sive duas pluresque involvant. In altera autem parte amplissimum huius calculi usum in ipsa Analysi finitorum ac doctrina serierum exposui; ubi etiam imprimis Theoriam maximorum ac minimorum dilucide explicavi. De usu autem huius calculi in Geometria linearum curvarum nihil adhuc affero, quod eo minus desiderabitur, cum in aliis operibus hæc pars ita copiose sit pertractata, ut adeo prima calculi differentialis principia quasi ex Geometria sint petita, ad hancque scientiarum, cum vix satis esset evoluta, summa cura applicata. Hic autem omnia ita intra Analyseos puræ limites continuentur, ut ne ulla quidem figura opus fuerit, ad omnia huius calculi præcepta explicanda.

sizione euleriana del calcolo differenziale. Così se i due manuali di Euler segnano un tornante veramente decisivo, tutte le grandi novità che essi contengono, relativamente alla fondazione del *calcolo*, sono ampiamente preannunciate nel primo di essi e sono nel secondo reinterpretate in termini che è difficile non intendere come riduttivi. Se certamente Euler presenta il *calcolo* diretto come un algoritmo che agisce su delle *funzioni* di una o più variabili costituite dalla composizione algebrica di un insieme ben determinato di funzioni elementari[140] ($y = ax^{\alpha}$; $y = \log_a x$; $y = a^x$; $y = \sin x$; $y = cos\ x$), le quali divengono l'oggetto essenziale dell'indagine, pensa questo algoritmo come uno strumento per passare da funzioni date al loro rapporto differenziale e quindi a nuove funzioni (le quali continuano a esprimere delle quantità finite) e utilizza nel corso delle sue dimostrazioni gli sviluppi in serie intera di queste funzioni, ottenuti senza alcun ricorso a differenziazioni, quadrature o intuizioni geometriche, è solo l'applicazione ripetuta del principio di omissione (per quanto giustificato in termini nuovi, come semplice omissione di zeri) che conduce alle regole di differenziazione e è solo la determinazione separata dei differenziali (definiti come differenze infinitamente piccole) che permette di trarre, in un secondo tempo, i rapporti differenziali, intesi alla maniera di Leibniz, come dei veri e propri rapporti fra quantità date separatamente l'una dall'altra.

Per quanto la definizione di funzione che si trova all'inizio della prefazione delle *Institutiones* sia in quanto tale diversa da quella utilizzata nell'*Introductio*, presentando una funzione di una variabile x come una quantità che dipende da x,[141] piuttosto che come una quantità espressa per mezzo di una scrittura analitica in cui questa variabile compare accompagnata da un certo insieme di costanti,[142] essa sembra corrispondere, più che a un radicale cambio di orientamento, all'esigenza di tener conto di certe situazioni particolari nelle quali la stessa soluzione di alcuni problemi analitici conduce a considerare delle quantità, il cui valore dipende da una variabile, ma che non sembrano direttamente esprimibili per mezzo di una semplice combinazione finita delle funzioni elementari.[143] Queste situazioni

[140] Per una precisazione di questo giudizio cfr. più sotto.

[141] Cfr. *ivi*, p. VI:

> Quæ autem quantitates hoc modo ab aliis pendent, ut his mutatis etiam ipsæ mutationes subeant, eæ harum functiones appellari solent; quæ denominatio latissime patet, atque omnes modos, quibus una quantitas per alias determinari potest, in se complectitur. Si igitur x denotet quantitatem variabilem, omnes quantitates, quæ utcunque ab x pendent, seu per eam determinantur, eius fonctiones vocantur; cuiusmodi sunt quadratum eius xx, aliæve potentiæ quæcunque, nec non quantitates ex his utcunque compositæ; quin etiam trascendentes, et in genere quæcunque ita ab x pendent, ut aucta vel diminuita x ipsæ mutationes recipiant.

[142] Cfr. Euler (1748), p. 4. Per la differenza fra le due definizioni nel contesto della storia del concetto di funzione nel XVIII secolo cfr. Yousckeevitch (1976). Per parte mia tornerò d'altra parte sulla questione nel prossimo capitolo II.2..

[143] L'esempio più esplicito è a questo proposito costituito da quelle che Euler chiama "functiones inexplicabiles", che sono costituite da quantità il cui valore dipende dall'indice che caratterizza i termini successivi di una successione (il quale, invece di essere considerato come un numero intero, è preso come un numero reale qualsiasi) e che occorrono ovviamente nei problemi di interpolazione [cfr. *ivi*, parte II, capp. XVI-XVII].

messe a parte, il *calcolo* può perfettamente venir presentato come un algoritmo di trasformazione delle funzioni studiate nell'*Introductio*. A questo scopo si consideri una qualsiasi funzione della variabile x e si assegni a questa variabile un incremento qualsiasi ω. La stessa funzione subirà allora una variazione che può, in generale, venir determinata e indicata per mezzo di un corrispondente incremento. Individuato e ridotto ai minimi termini il rapporto fra l'incremento della funzione e quello della variabile e posto in esso $\omega = 0$ si trae in generale un nuovo rapporto che Euler caratterizza come "il rapporto fra gli incrementi evanescenti" della funzione stessa. Il calcolo differenziale può allora essere definito come il "methodus determinandi rationem incrementorum evanescentium, quæ functiones quæcunque accipiunt, dum quantitati variabili, cuius sunt functiones, incrementum evanescens tribuitur".[144]

Una tale caratterizzazione sembra compatibile con almeno due percorsi argomentativi. Se da una parte si può infatti cercare di legittimare l'impiego di una "strategia dei due tempi" in cui *prima* l'incremento ω della variabile principale sia considerato come un incremento effettivo e sia quindi inteso come differente da zero e *poi* sia invece annullato (per mezzo di un passaggio al limite) o semplicemente trascurato (in quanto infinitamente piccolo), gli stessi risultati possono d'altra parte venire raggiunti accettando l'idea che non si abbia a che fare fin dal primo momento che con *incrementi nulli*, i quali possono venire opportunamente indicati per mezzo di una notazione adeguata. Proprio questa è l'alternativa scelta da Euler che cerca in tal modo di ripristinare un quadro argomentativo unitario fondato su un principio di libertà della notazione.[145]

Ma una tale libertà è a ben guardare soltanto apparente: se essa concede il privilegio di indicare uno zero per mezzo di un segno qualunque e di trattare quindi secondo le usuali leggi dell'algebra le somme e i prodotti in cui esso occorre, essa impedisce nel contempo di tornare alle vecchie abitudini e di indicare lo zero *in tutte le circostanze* per mezzo del medesimo segno inteso come universale e di trattarlo conseguentemente secondo le note leggi di cancellazione. Se la proposta di Euler si limitasse quindi a qualificare come (assolutamente) nullo lo stesso incremento inizialmente assegnato alla variabile principale, essa ricondurrebbe dopo un breve quanto inutile *detour* alla stessa ambiguità di cui voleva invece liberarsi, accompagnando ad essa quell'inevitabile senso di disagio che la stessa idea di un incremento nullo inevitabilmente produce. Perché la differenza rispetto alla metafisica leibniziana sia dunque effettiva appare necessario individuare dei criteri oggettivi di demarcazione fra contesti in cui lo zero possa - e anzi debba - venir trattato nel modo usuale e contesti in cui esso debba invece nascondersi dietro l'apparente neutralità di una notazione letterale. La libertà di notazione si

[144]Cfr. *ivi*, p. VIII.

[145]La seguente citazione è sotto questo punto di vista significativa [cfr. *ivi*, p. XI]:

> Quo autem facilius hæ rationes colligi, atque in calculo repræsentare possint, hæc ipsa incrementa evanescentia, etiamsi sint nulla, tamen certis signis denotari solent; quibus adhibitis nihil obstat, quo minus iis certa nomina imponantur.

trasforma così in una condizione di possibilità dell'imposizione di un vincolo, il quale deve trovare altrove la sua giustificazione matematica.

Proprio questa è la questione affrontata da Euler nel terzo capitolo delle *Institutiones*, nel quale egli intende fornirsi gli adeguati strumenti concettuali per realizzare il passaggio dal calcolo delle differenze finite - presentato nei primi due capitoli - al calcolo differenziale. L'argomento che è qui presentato verte sulla distinzione fra due differenti modi - il primo "aritmetico", il secondo "geometrico"[146] - di intendere la relazione di eguaglianza. Date due quantità si può infatti affermare che fra esse vige una relazione di eguaglianza sia nel caso in cui la loro differenza si riveli nulla che in quello in cui il loro rapporto si riveli unitario. E' facile rendersi conto che qualora si passi a comparare fra loro due prodotti, i quali presentino entrambi un fattore nullo, le due precedenti interpretazioni conducono a conclusioni fra loro contrapposte. La stessa identità $n \cdot 0 = m \cdot 0$ implica infatti la proporzione $n : m = 0 : 0$, la quale mostra secondo Euler che "duæ cyphræ quamcunque inter se rationem geometricam teneant, etiamsi rem arithmetice spectando earum ratio semper sit æqualitatis".[147] Dati due zeri, i quali risultano da una certa manipolazione dei dati di un problema, si può quindi avanzare la richiesta di determinare il rapporto che vige fra essi. Proprio in questo consiste d'altra parte il calcolo differenziale correttamente inteso. Se pensiamo infatti una "quantità infinitamente piccola" come "minore di ogni quantità assegnabile",[148] dobbiamo concludere che solo lo zero può svolgere questo ruolo e non possiamo quindi intendere il calcolo leibniziano che come una ricerca di determinati rapporti fra zeri. Ecco come lo stesso Euler si esprime:

> Si [...] prouti in analysi infinitorum modus signandi est receptus, denotet dx quantitatem infinite parvam, erit utique tam $dx = 0$ quam $adx = 0$ denotante a quantitatem quamcunque finitam. Hoc tamen non obstante erit ratio geometrica $adx : dx$ finita, nempe ut $a : 1$, et hanc ob rem hæc duo infinite parva dx et adx, etiamsi utrumque sit $= 0$, inter se confundi non possunt, si quidem eorum ratio investigentur. Simili modo, si diversa occurrunt infinite parva dx et dy, etiamsi utrumque sit $= 0$, tamen eorum ratio non constat. Atque in investigatione rationis inter duo quæque huismodi infinite parva omnis vis calculi differentialis versatur.[149]

In questo contesto non è d'altra parte difficile riformulare adeguatamente il principio di omissione. Se $m-n = r > 0$ le due identità $adx^n \pm bdx^m$ $[= 0 + 0] = adx^n$ $[= 0]$ e $\frac{adx^n \pm bdx^m}{adx^n} = 1 + \frac{a}{b}dx^r$ $[= 1 + 0] = 1$ saranno infatti entrambe verificate. L'omissione di un infinitamente piccolo di ordine superiore relativamente a un infinitamente piccolo di ordine inferiore (o eventualmente a una quantità finita) non comporta quindi alcuna conseguenza sconveniente nella ricerca dei rapporti fra infinitamente piccoli.

---

146 Cfr. *ivi*, p. 78.

147 Cfr. *ivi*, p. 79.

148 Cfr. *ivi*, p. 77.

149 Cfr. *ivi*, p. 79.

Benché Euler continui il suo terzo capitolo passando alla considerazione delle "quantità infinite" (intese come reciproci degli infinitamente piccoli) e presentando alcune conseguenze dei propri principi, ciò che è stato detto fin qui è perfettamente sufficiente per comprendere il contenuto essenziale dei capitoli IV, V e VI della prima parte, i quali contengono l'esposizione del *calcolo* (diretto) e la determinazione del suo algoritmo relativamente alle funzioni - algebriche e trascendenti - di una variabile. Data una funzione y di x e posto[150] $\Delta y = |y(x+\omega) - y(x)|$ $(\omega \neq 0)$ si avrà anche, per un risultato già stabilito relativamente alle differenze finite, $\Delta y = P\omega + Q\omega^2 + R\omega^3 + \&c.$, dove i coefficienti P, Q, R, &c. indicano delle nuove funzioni della stessa variabile x.[151] Passando alle differenze infinitamente piccole (e sostituendo quindi ω con dx e Δy con dy) si avrà allora, secondo il principio di omissione, $dy = Pdx$ e quindi: $dy/dx = P$: il rapporto fra il differenziale di una funzione qualunque e quello della sua variabile è una quantità finita espressa in generale nei termini di una nuova funzione della stessa variabile, che si tratta quindi di determinare. Allo stesso modo, essendo $\Delta^2 y = H\omega^2 + K\omega^3 + \&c.$, si avrà anche $d^2y = Hdx^2$ e $d^2y/dx^2 = H$. Essendo d'altra parte P una funzione di x si potrà porre a sua volta $dP = Wdx$ e quindi, moltiplicando per un fattore costante n,[152] $d(nP) = Wndx$; assumendo dx come costante si potrà tuttavia porre $n = dx$ e trarre quindi $d(Pdx) = ddy = Wdx^2$ da cui e ovvio: $H = W = dP/dx$. Anche il rapporto fra il differenziale secondo di una funzione e il quadrato del differenziale della sua variabile è quindi una quantità finita espressa nei termini di una nuova funzione della stessa variabile, la quale è a sua volta uguale al rapporto fra il differenziale primo del rapporto differenziale della funzione di partenza e il differenziale della sua variabile. Continuando in questo modo è allora facile determinare quali sono i rapporti fra zeri che costituiscono gli oggetti del calcolo differenziale. Si tratta ora, sulla base di queste presupposizioni, di giustificare l'algoritmo di questo.

Per quanto seguendo l'impostazione di Euler sia del tutto ovvio trarre le identità: $H = 2Q$, $K = 6R$, &c. e concludere da qui che i rapporti cercati sono, per ogni funzione, proporzionali ai coefficienti successivi della serie che ne esprime la differenza finita del primo ordine (la quale risulta quindi interpretata come la serie di Taylor della funzione[153]), la dimostrazione che questi propone mostra con tutta evidenza la persistenza del retaggio leibnizia-

---

[150]La notazione non è di Euler che scrive piuttosto: $\Delta y = y^{I} - y$ dove y^{I} indica il "valorem quem functio y induit, si in ea loco x substituatur $x+\omega$" [cfr. *ivi*, p. 4].

[151]Cfr. *ivi*, pp. 10-24. Euler non presenta alcuna dimostrazione esplicita di tale risultato generale limitandosi a determinare le serie intere che esprimono le differenze finite di tutte le funzioni elementari, ricorrendo per questo agli sviluppi già stabiliti nell'*Introductio*. Egli sembra quindi considerare del tutto ovvio che una qualsiasi composizione algebrica di queste funzioni possa dar luogo a una composizione algebrica delle serie corrispondenti e *quindi*, a sua volta, a una nuova serie intera.

[152]Per giustificare l'identità $ndP = d(nP)$ Euler rimanda alla corrispondente identità relativa alle differenze finite.

[153]Proprio questa sarà, d'altra parte, la *definizione* proposta da Lagrange nella memoria del 1772, la quale resta quindi essenzialmente diversa da quella della *Théorie* [cfr. a questo proposito i prossimi capitoli III.4. e III.6.].

no.[154] Considerata la funzione $y = x^n$ (n intero positivo) questi pone infatti $y+dy = (x+dx)^n$ e, dopo aver sviluppato secondo la regola del binomio, omette gli infinitesimi di ordine superiore per trarre l'identità infinitesimalista $dy = nx^{n-1}dx$, da cui la determinazione del rapporto differenziale segue per semplice divisione. La generalità della regola del binomio permette poi di sostituire a n un esponente qualsiasi e di trarre quindi l'algoritmo differenziale per la funzione algebrica elementare $y = x^\alpha$ (α razionale). Allo stesso modo, posto $y = \log x$ si avrà $dy = \log(x+dx) - \log x = \log\left(1 + \frac{dx}{x}\right)$ e quindi, sviluppando in serie secondo i risultati dell'*Introductio*:

$$(8)\qquad \mathrm{dy} = \mathrm{d}(\log \mathrm{x}) = \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}} - \frac{\mathrm{dx}^2}{2\mathrm{x}^2} + \frac{\mathrm{dx}^3}{3\mathrm{x}^3} - \&\mathrm{c.} = \frac{\mathrm{dx}}{\mathrm{x}}$$

Posto invece $y = a^z$ ($z = z(x)$), si avrà $dy = a^z\,(a^{dz} - 1)$ e quindi:

$$(9)\qquad \mathrm{dy} = \mathrm{d}(\mathrm{a}^{\mathrm{z}}) = \mathrm{a}^{\mathrm{z}}\left[\mathrm{dz}\log \mathrm{a} + \frac{\mathrm{dz}^2\log^2\mathrm{a}}{2!} + \frac{\mathrm{dz}^3\log^3\mathrm{a}}{3!} + \&\mathrm{c.}\right] = \mathrm{a}^{\mathrm{z}}\mathrm{dz}\log \mathrm{a}$$

Non sarà poi difficile, dimostrate le regole della somma, del prodotto e del rapporto,[155] trovare i differenziali di funzioni sorte dalla composizione algebrica delle precedenti e, in particolare, delle funzioni circolari definite per in termini di esponenziali immaginari.

Se i risultati e la stessa nuova impostazione dell'*Introductio* permettono a Euler di presentare il calcolo differenziale in una veste sostanzialmente rinnova rispetto ai trattati della prima metà del secolo, l'impressione che deriva dalla lettura delle *Institutiones* è quella di una grande potenzialità rinchiusa nei limiti angusti di una tradizione matematica che, ormai superata in termini globali, continua localmente a far sentire tutto il suo peso richiedendo anzi l'ausilio di un artificio che, per quanto ingegnoso, mostra con evidenza tutta la sua debolezza euristica. Se è infatti chiaro come tutti i risultati algoritmici del *calcolo* possano essere giustificati nei termini della nozione euleriana di "incremento evanescente (o nullo)", è anche facile rendersi conto del carattere inevitabilmente *a posteriori* di questa giustificazione, la quale peraltro presenta difficoltà almeno altrettanto grandi quanto quelle in cui cade la stessa argomentazione leibniziana. Non sarà così certamente un caso che mentre i semi gettati nell'*Introductio* germoglieranno lentamente nella

---

[154] Euler sfrutterà piuttosto l'esprimibilità della differenza finita per mezzo della serie di Taylor per determinare questa differenza tramite il ricorso al calcolo differenziale, scegliendo così la direzione opposta rispetto a quella di Lagrange [cfr. *ivi*, parte II, cap. III].

[155] Anche in questo caso le dimostrazioni di Euler sono del tutto classiche relativamente alla tradizione leibniziana.

seconda metà del secolo, gli incrementi evanescenti spariranno presto dalla scena matematica per divenire al più l'oggetto di qualche considerazione storica.[156]

II. 1. μ. *La teoria delle equazioni imperfette e le Réflexions di Carnot*

Pubblicate rispettivamente nel 1797 e nel 1813 le due edizioni delle *Réflexions* di Carnot[157] non sono che il risultato di due successivi rifacimenti di una memoria che questi aveva inviato nel 1785 all'Accademia di Berlino per partecipare, senza particolare fortuna, al già citato concorso sull'infinito matematico.[158] Per quanto l'analisi delle differenze - anche sostanziali - che questi testi presentano mantenga un qualche motivo di interesse storiografico,[159] non mi riferirò qui che al terzo di essi in cui la teoria generale delle equazioni imperfette è presentata in termini più espliciti e chiari e è resa del tutto autonoma da quell'inessenziale richiamo alla nozione di limite, che contraddistingue invece le due precedenti esposizioni.

L' "analisi infinitesimale",[160] così come Carnot la presenta, non è altro che un metodo, più o meno codificato per mezzo di un certo numero di precetti generali, per risolvere certe classi di problemi geometrici o meccanici attraverso l'introduzione, accanto ai dati del problema, di un insieme adeguato di quantità ausiliari e indeterminate, le quali vengono successivamente eliminate e non compaiono quindi nella soluzione finale. Se questo metodo può certamente venir "ridotto in algoritmo",[161] esso resta in quanto tale del tutto autonomo da questa riduzione, che non sembra contenerne che una versione particolare.[162] Il percorso espositivo scelto da Carnot, il quale prende le mosse dalla considerazione di un semplice esempio, è quindi del tutto conseguente al contenuto stesso della teoria e è dunque difficilmente invertibile.

---

[156] Questo giudizio non deve naturalmente comportare alcun genere di "condanna" verso il testo euleriano nel suo complesso, il cui contenuto matematico trascende ampiamente la semplice esposizione dell'ipotesi "metafisica" di cui si è detto.

[157] Cfr. il precedente paragrafo I.1.α..

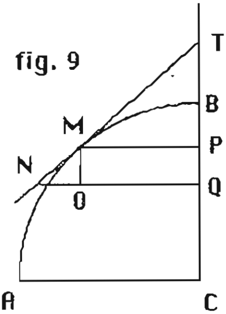
[158] Cfr. la precedente nota (114) e il precedente paragrafo II.1.κ.. La memoria di Carnot è stata recentemente pubblicata, in reimpressione fotografica, da A. P. Youschkevitch in Gillispie-Youschkevitch (1971), pp. 169-267 [per un'edizione a stampa, cfr. Gillispie-Youschkevitch (1979)].

[159] Mi sia concesso di rimandare a questo proposito a Guerraggio-Panza (1985).

[160] Cfr. la precedente nota 5.

[161] Cfr. Carnot (1813), p. 1.

[162] La differenza radicale fra questo punto di vista e quello di Euler (il quale resterà ampiamente maggioritario fra i matematici della seconda metà del Settecento) é del tutto manifesta e può essere in ultima analisi ricondotta alla contrapposizione fra un "paradigma geometrico" e un "paradigma analitico": da una parte i metodi analitici come eventuale strumento della geometria (la quale resta l'ambito naturale in cui formulare e risolvere i problemi matematici); dall'altra la geometria come occasionale campo d'applicazione delle teorie analitiche. Lette in questo senso le *Réflexions* di Carnot sono un documento senza dubbio interessante di una *querelle* che, per quanto assai sopita sul continente nella seconda metà del XVIII secolo, non può dirsi definitivamente esaurita e che anzi sembra riprendere vigore proprio nei primi anni dell'ottocento.



Dato un quarto di cerchio AMB (fig. 9) di centro C e raggio AC = a, si cerchi la sottotangente TP relativa al punto M di coordinate ortogonali BP = x e MP = y. Preso un punto N sul prolungamento della tangente MT, avremo, per le note leggi di similitudine, $TP = y\,\frac{MO}{NO}$. Se il punto N è d'altra parte considerato come appartenente alla circonferenza è assai facile trarre, confrontando fra loro le due equazioni fra le coordinate dei punti M e N, l'identità $\frac{MO}{NO} = \frac{2y + NO}{2a-2x-MO}$ e, sostituendo, $TP = \frac{y(2y+NO)}{2a-2x-MO}$, da cui il risultato corretto è tratto per omissione delle due quantità ausiliari NO e MO. L'analisi di un tale procedimento mostra, secondo Carnot, l'inessenzialità della presupposizione dell'infinita piccolezza dei segmenti NO e MO, i quali possono in se stessi ritenersi come perfettamente finiti. Ciò che conduce al risultato finale è piuttosto la compensazione di due errori successivi:[163] l'assegnazione del punto N alla curva e l'omissione di questi segmenti. Perché questa compensazione possa avvenire, senza produrre conseguenze ulteriori, è tuttavia necessario che i due errori siano introdotti per mezzo della considerazione di certe quantità ausiliari, che non solo non siano determinabili secondo i dati del problema, ma siano anche tali che la loro variazione sia del tutto ininfluente relativamente ai rapporti fra le quantità cercate. Queste quantità potranno allora essere rese arbitrariamente piccole, in modo che le stesse equazioni intermedie in cui esse intervengono, benché rigorosamente inesatte, non comporteranno che errori tali da poter essere resi in ogni momento "tanto piccoli quanto si vorrà".

Se l'esempio precedente mostra tuttavia un caso in cui la compensazione ha *di fatto* luogo, nulla ci assicura in linea di principio, che lo stesso procedimento possa condurre in tutti i casi al risultato desiderato e possa quindi venir elevato al rango di prova. Dal riconoscimento *a posteriori* della corret-

[163]Questa idea era, come è noto, già stata avanzata da Berkeley [cfr. Berkeley (1734)] che aveva visto in questa compensazione tanto la chiave del successo operazionale del *calcolo* che il segno distintivo della sua occasionalità e della sua incoerenza [sulle critiche di Berkeley al *calcolo*, cfr. fra altri Grattan-Guinness (1969), Giorello (1985) e Blay (1986)].

tezza di un risultato, occorre quindi passare alla giustificazione *a priori* della generale validità del metodo:

> [...] il s'agit maintenant d[...] ' expliquer [la compensazione], de rechercher le signe auquel on reconnait que la compensation a lieu dans les calculs semblables au précédent, et les moyens de la produire dans chaque cas particulier.[164]

Proprio questo è lo scopo delle teoria delle equazioni imperfette.

Formulato un problema matematico, è possibile distinguere le quantità che si rapportano a esso in tre differenti classi: i) la classe delle quantità *costanti* o *determinate*, il cui valore è supposto fisso e è stabilito in base alla natura stessa del problema; ii) la classe delle quantità "*inizialmente variabili*", le quali benché supposte indeterminate nella formulazione del problema ricevano una determinazione nel corso stesso della sua soluzione; iii) la classe delle quantità "*sempre variabili*", le quali restano comunque indeterminate fino al definitivo completamento del "calcolo". E' a quest'ultima classe che appartengono quelle quantità usualmente dette infinitamente piccole, le quali non devono in nessun modo venir pensate come delle quantità molto piccole o "attualmente nulle o perfino minori di questa o quella grandezza determinata".[165] Al contrario, si dirà infinitamente piccola ogni quantità "qui est considerée comme continuellement décroissante, tellement qu'elle puisse être rendue aussi petite qu'on le veut, sans qu'on soit obligé pour cela, de faire varier celles dont on cherche la relation".[166] Le quantità infinitamente piccole non sono quindi altro che delle quantità "auxquelles les conditions de la question proposée et les hypothèses sur lesquelles le calcul est établi, permettent de demeurer variables, jusqu'à ce que le calcul soit entièrement achevé, en décroissant continuellement."[167] Due quantità saranno poi dette "infinitamente poco differenti" fra loro qualora la loro differenza sia una quantità infinitamente piccola, mentre una di esse sarà detta "infinitamente piccola rispetto all'altra" qualora sia il loro quoziente a essere una quantità infinitamente piccola.

Poste queste premesse, la teoria delle equazioni imperfette può essere formulata nei termini seguenti:[168]

---

[164]Cfr. Carnot (1813), p. 14.

[165]Cfr. *ivi*, p. 22.

[166]Cfr. *ivi*, p. 19.

[167]Cfr. *ivi*, p. 22. Non sarà difficile rendersi conto che la condizione di continua decrescenza (e perfino quella di continua variabilità) non sono qui che un rivestimento retorico delle condizioni di perenne indeterminatezza e di totale indipendenza rispetto ai dati del problema e alle relazioni che si istituiscono fra essi, le quali presuppongono a loro volta (in senso moderno) la continuità delle funzioni considerate.

[168]Carnot presenta in realtà due differenti formulazioni dei principi generali del suo metodo, la prima delle quali si vale di cinque "corollari" di un "principio generale" ("due quantità non arbitrarie non possono differire fra loro che per una quantità non arbitraria"), i quali stabiliscono le condizioni (necessarie) per l'applicazione del principio di omissione, indipendentemente dalla riduzione in equazioni del problema assegnato [cfr. *ivi*, pp. 30-34].

Def. Diciamo "*equazione imperfetta*" toute équation dont l'exactitude rigoureuse n'est pas démontrée, mais dont on sait cependant que l'erreur, s'il en existe une, peut être supposée aussi petite qu'on le veut", in modo che per rendere una tale equazione "rigorosamente esatta" sarà sufficiente sostituire alcune delle quantità che intervengono in essa con altre quantità che differiscono infinitamente poco da queste.[169]

Teor. Per essere certi che un'equazione sia "rigorosamente esatta" è sufficiente assicurarsi che:

i) essa sia dedotta o da equazioni "rigorosamente esatte" o da "equazioni imperfette", secondo trasformazioni che conservino il carattere delle equazioni di partenza o che conducano al più da equazioni esatte a equazioni imperfette.[170]

ii) essa non contiene che quantità della prima e della seconda classe.[171]

Cor.[172] L' "analisi infinitesimale" può essere ricondotta ai tre seguenti precetti:[173]

i) esprimere le condizioni del problema per mezzo di equazioni o esatte o imperfette (o per mezzo di proposizioni equivalenti in linguaggio ordinario);

ii) trasformare queste equazioni (o proposizioni) "de diverses manières", senza far loro perdere il carattere di equazioni (o proposizioni) esatte o imperfette;

iii) dirigere queste trasformazioni al fine di eliminare (il riferimento a) ogni quantità della terza classe.[174]

Non sarà certamente necessario sottolineare il carattere informale della teoria di Carnot, la quale mette capo in ultima istanza, piuttosto che a schemi di inferenza universali, a consigli euristici piuttosto generici, di cui non è in nessun modo garantita l'applicabilità generale.[175]

In un simile quadro i differenziali non costituiscono che "una classe particolare" fra le quantità infinitamente piccole messe in opera nel corso dell'applicazione del metodo che questa teoria prescrive:

> Une fois les principes généraux de la nouvelle doctrine bien établis, on a pu remarquer dans les nombreuses applications dont elle est susceptible, que parmi les quantités infiniment petites qu'elle met en œuvre, il en est d'une classe

[169]Cfr. *ivi*, pp. 42-3.

[170]Cfr. *ivi*, p. 44.

[171]Cfr. *ivi*, p. 44.

[172]Non considero qui che il secondo dei due corollari presentati da Carnot; a fronte di esso, il primo mi sembra infatti del tutto pleonastico.

[173]Nel suo linguaggio tutt'altro che preciso Carnot sostiene che "l'analyse infinitésimale se réduit à trois points" [cfr. *ivi*, p. 46]

[174]Cfr. *ivi*.

[175]Anche da questo punto di vista sembra pesare la generale concezione della matematica, che per Carnot sembra non dover trattare che di grandezze geometriche o meccaniche che possono al più venir indicate per mezzo di certi simboli analitici [cfr. la precedente nota 162].

> particulière, qui s'offrent beaucoup plus fréquemment que toutes les autres: ce sont celles qu'on a nommées *différentielles*.
> On entend par le mot *différentielle*, la difference de deux valeurs successives d'une même variable, lorsque l'on considère le système auquel elle appartient, dont l'un est regardé comme fixe, et les autres comme se rapprochant continuellement et simultanéament du premier, jusqu'à en differer aussi peu qu'on le veut.[176]

L'algoritmo del *calcolo* diretto non è quindi costituito che da un insieme di regole atte a passare dalle condizioni del problema a un certo insieme di equazioni imperfette caratterizzate dalla presenza in esse, sotto la veste di quantità ausiliari, dei differenziali di certe quantità variabili. Proprio in quanto quantità ausiliari questi ultimi devono tuttavia venir eliminati nel corso stesso della soluzione. Qualora ciò possa avvenire per l'impiego delle usuali leggi algebriche di cancellazione (coadiuvate ovviamente dal principio di omissione, il quale non fa che condurre da equazioni imperfette a equazioni imperfette[177]), si potrà affermare che il problema è risolvibile per mezzo di una semplice applicazione del "calcolo differenziale". In altri casi è tuttavia necessario ricorrere a "certaines transformations dont l'objet est toujours d'éliminer ces auxiliares appelés *infinitésimales*"; é in questo caso che interviene allora il "calcolo integrale".[178]

Non mi tratterò oltre sul testo di Carnot, in cui la giustificazione dell'algoritmo diretto e la presentazione di alcuni metodi usuali di integrazione segue i canoni usuali fissati dalla generale accettazione del principio di omissione e dall'impiego - quando ciò è necessario - dei più noti sviluppi in serie. Se la presentazione precedente dovrebbe in un certo qual senso giustificare le incongruenze della ricostruzioni storica che egli presenta nel terzo capitolo del suo *pamphlet*[179] - mostrando come esse discendano da una concezione generale del *calcolo* come semplice strumento algoritmico proprio a un certo insieme di applicazioni del metodo generale delle equazioni imperfette (il quale non è esso stesso che un certo insieme di precetti euristici per risolvere particolari problemi geometrici e meccanici) - essa dovrebbe anche esemplificare un modo particolare di intendere la scienza matematica, che se costituisce, sotto molti aspetti, un residuo di una impostazione superata, mani-

---

[176]Cfr. *ivi*, p. 60.

[177]E' del tutto evidente che nel contesto della teoria della equazioni imperfette risulta particolarmente difficile esprimere le condizioni di applicazione di questo principio, relativamente alle esigenze correlate alla natura del problema presentato e, in particolare, al suo ordine.

[178]Cfr. *ivi*, pp. 63-64 e, ancora più chiaramente, p. 98:

> Il ne faut pas perdre de vue que les quantités infinitésimales sont jamais que des quantités auxiliaires, introduites seulement dans le calcul pour faciliter la comparaison des quantités désignées, c'est-à-dire, des quantités dont on veut avoir la relation; et que le but ultérieur qu'on se propose est toujours de les éliminer.
> Lorsque cette élimination n'a besoin pour être exécutée, que des transformations ordinaires de l'Algèbre; les opérations se rapportent à ce qu'on nomme *calcul differentiel*. Mais lorsqu'on ne peut obtenir cette élimination que par l'opération inverse de celle qu'on fait pour différentier des quantités proposées, cette opération devient l'objet de ce qu'on nomme *calcul intégral*.

[179]Cfr. il precedente paragrafo II.1.α..

festa, sotto altri, una reazione non certamente isolata (anche se indubitabilmente ingenua e inevitabilmente ristretta a contesti del tutto elementari) a quel punto di vista "analitico" alla cui ricostruzione la mia ricerca vorrebbe portare un contributo.

II. 1. v. *Quattro tradizioni matematiche*

La varietà d'orientamenti che le precedenti ricostruzioni dovrebbero aver presentato - anche se soltanto in forma paradigmatica - si traduce sul piano dell'interpretazione storica e filosofica in un'esigenza d'ordine, che può essere soddisfatta solo attraverso l'elaborazione dello schema generale di una classificazione. Distinguerò qui fra quattro differenti modalità d'approccio al problema matematico della fondazione del *calcolo*, i quali mettono capo a differenti famiglie di teorie informali che caratterizzerò per mezzo del richiamo alla categoria generale di tradizione.

Parlerò di *tradizione flussionista* a proposito dell'interpretazione del *calcolo* nel contesto di una teoria generale delle relazioni fra le modalità di generazione di certe classi di quantità funzionalmente correlate l'una all'altra. Tra le caratteristiche principali di questo approccio vi è a me pare la distinzione fra l'algoritmo del *calcolo*, inteso come algoritmo delle velocità istantanee di generazione delle quantità, e le ipotesi operazionali utilizzate per giustificarlo. Questa distinzione non solo permette il ricorso a differenti tecniche dimostrative (omissione, ricerca del limite, riduzione all'assurdo), ma sembra anche concedere la possibilità di scegliere diverse modalità di rappresentazione delle quantità e delle loro relazioni, le quali corrispondono di fatto a concezioni diverse della scienza matematica. A fronte del del *De Analysi*, in cui le quantità sono rappresentate per mezzo di variabili analiticamente correlate tramite di equazioni sia ordinarie che flussionali, troviamo testi ispirati a un punto di vista radicalmente diverso, in cui le quantità sono piuttosto concepite come entità geometriche connesse per mezzo della determinazione di certe relazioni costitutive delle figure corrispondenti. L'esempio più evidente di questo secondo punto di vista è certamente costituito dal primo libro del *Treatise of fluxions*[180] significativamente pubblicato nel 1742 da C. Maclaurin a difesa dell'ortodossia newtoniana.[181] Nell'ambito della stessa tradizione ritroviamo così il *calcolo* diversamente collocato o come strumento essenziale di una generalizzazione del programma analitico cartesiano - o meglio di una sua riformulazione al di là dei vincoli e delle restrizioni imposti dallo stesso Descartes a quella che in lui sembra restare una teoria analitica delle curve - o come componente di una rivitalizzazione dello stesso paradigma della geometria classica.

Parlerò al contrario di *tradizione infinitesimalista* per riferirmi a quelle teorie che presentano il *calcolo* nel contesto di una teoria generale delle differenze infinitamente piccole fra i successivi valori delle quantità variabili

[180]Cfr. Maclaurin (1742), a proposito del quale mi sia permesso di rimandare al cap. 4 di Panza (1989).

[181]Cfr. Guicciardini (1984).

(con continuità). Una tale interpretazione connette inevitabilmente l'algoritmo con una giustificazione infinitesimalista fondata sul principio di omissione e su altri principi correlati, anche se impedisce di esprimere in termini generali le condizioni e le stesse modalità di applicabilità di questo principio. Benché in quanto tale perfettamente compatibile con un orientamento espressamente analitico, questo punto di vista trova la sua originale formulazione entro un ambito espressamente geometrico che interpreta la nozione di differenziale nei termini di una differenza infinitamente piccola fra due coordinate di una curva o fra due valori corrispondenti dell'arco, della tangente o di altre entità correlate. Proprio questa impostazione (che si conferma in tutti i principali trattati di calcolo differenziale della prima metà del secolo) sembra essere d'altra parte all'origine della centralità negli sforzi matematici di Leibniz e di tutti i matematici leibniziani del problema dell'integrazione finita di classi particolarmente significative di equazioni differenziali, la quale contrasta - almeno sul piano dell'enfasi a cui essa è accompagnata - con l'impiego generalizzato degli sviluppi in serie che caratterizza invece i testi dei matematici flussionisti. Questo non è d'altra parte che un aspetto di una diversa concezione dei rapporti fra il *calcolo* e l'algebra cosiddetta ordinaria. Mentre gli sforzi dei newtoniani sembrano costantemente orientati a colmare la separazione fra questi differenti domini (volta a volta variamente intesi nei loro rapporti con la geometria), la retorica leibniziana è piuttosto segnata dall'insistenza sui motivi metafisici della distinzione fra la manipolazione delle quantità finite e la scienza matematica dell'infinito.

Proprio l'esplicita opposizione a questa tendenza alla separazione dei domini matematici fondata sulla contrapposizione fra il finito e l'infinito mi sembra segnare, a partire dalla metà del secolo, l'emergere di due nuovi punti di vista, i quali si richiamano entrambi a due idee già perfettamente presenti nell'opera matematica di Newton nell'intento di disegnare i contorni di una riunificazione fra i principi del *calcolo* e le stesse leggi dell'algebra ordinaria.

Parlando di *tradizione indefinitesimalista* mi riferirò a quelle teorie nelle quali il *calcolo* è presentato come un'applicazione particolare di una più generale teoria dei limiti resa del tutto autonoma da ogni raffigurazione geometrica di un processo di generazione o avvicinamento a un punto fisso e codificata piuttosto per mezzo di un insieme di risultati riferiti a certe combinazioni algebriche in cui compare una variabile, la quale è supposta avvicinarsi indefinitamente a un certo valore. Se sarà proprio riferendosi a un simile punto di vista che Cauchy presenterà fra il 1821 e il 1823 la sua nota riformulazione del *calcolo*,[182] è certo che fra i due approcci restano profonde e numerose differenze che impediscono di prolungare oltre i primi anni del nuovo secolo l'estensione temporale di una tale tradizione. L'idea è qui semplicemente quella di considerare una situazione puntuale come il risultato di un'evoluzione, le cui leggi possono essere formulate in termini

---

[182] Cfr. Cauchy (1821) e (1823). Sui rapporti fra questa riformulazione e le acquisizioni matematici della seconda metà del XVIII secolo cfr. Grabiner (1981).

finiti, in modo da rendere possibile la determinazione della situazione puntuale per mezzo di un insieme adeguato di sostituzioni.

Da ultimo parlerò di *tradizione riduzionista* per riferirmi a un insieme più variegato di teorie in cui il *calcolo* è presentato nel contesto si una trattazione algebrica delle serie intere e assume la forma di un insieme di regole algoritmiche di trasformazione funzionale. Benché questa collocazione non impedisca in se stessa il ricorso a presupposizioni infinitesimaliste o indefinitesimaliste e sia in particolare compatibile con l'idea del differenziale come differenza infinitamente piccola o come limite di una differenza finita, ciò che distingue anche in questi casi il punto di vista riduzionista è l'attenzione a non separare il *calcolo* dal corpo stesso dell' "analisi algebrica", concependolo piuttosto come la teoria di un operatore formale il quale agisce sull'insieme delle funzioni formalmente definite. Se le *Institutiones* di Euler segnano, sul piano della mera giustificazione del *calcolo*, il punto di transizione fra la tradizione infinitesimalista e un simile approccio, quest'ultimo è reso possibile solo dal raggiungimento di quell'insieme di risultati analitici che lo stesso Euler raccoglie nell'*Introductio* e soprattutto da quella nuova impostazione matematica che trova qui la sua esplicita e definitiva consacrazione. Sarà tuttavia solo verso la fine del secolo e in particolare con la pubblicazione, nel 1797, della *Théorie des fonctions analytiques*, che Lagrange libererà il nuovo punto di vista da ogni necessità di ricorrere localmente a presupposizioni infinitesimaliste o alla stessa concettualizzazione del limite, formulando in termini del tutto espliciti l'ideale di una riduzione di tutta la scienza matematica all'algebra delle quantità finite. Egli sembra in tal modo ricondurre entro un programma organico e di amplissimo respiro matematico un orientamento largamente diffuso che aveva trovato la sua espressione in numerose memorie e *pamphlet* - dalla sua stessa teorizzazione del 1772 di "une nouvelle espèce de calcul" alle ricerche di Laplace sull'analogia di Leibniz e sulle funzioni generatrici,[183] dal manoscritto di Arbogast sui "nuovi principi del calcolo differenziale e integrale"[184] alla nota di Lorgna su "une nouvelle espèce de calcul, fini et infnitésimal"[185] - e che mostrerà ancora successivamente le sue notevoli potenzialità - dal "calcolo delle derivazioni" di Arbogast e dei fratelli François,[186] alla teoria degli operatori di Brisson e Servois[187], fino alla nuova algebra astratta della scuola analitica di Cambridge.[188]

Il tentativo della mia dissertazione sarà proprio quello di ricostruire - attraverso la considerazione di alcuni episodi chiave della storia della matematica settecentesca - le origini e l'affermarsi di quest'ultimo punto di vista.

183Cfr. il prossimo cap. III.4..

184Cfr. Arbogast (1789).

185Cfr. Lorgna (1786-7).

186Cfr. Arbogast (1800), F. Français (1812) e J. F. Français (1813) e (1815).

187Cfr Brisson (1808) e Servois (1814a) e (1814b).

188Cfr. a questo propositi Koppelman (1969) e (1971)..

II. 2.
LA FORMA DELLA QUANTITÀ

II. 2. α. *Geometria, formalismo, rigore*

La storiografia della matematica ha ormai da lungo tempo accettato l'idea che la "storia dell'analisi superiore"[1] possa essere suddivisa in tre grandi periodi, ai quali è abitualmente preposta una millenaria stagione di premesse e anticipazioni che conduce, attraverso numerose tappe successive (difficilmente demarcabili in modo preciso), dalla geometria greca fino alle scoperte quasi contemporanee di Newton e Leibniz. Una tale periodizzazione non differisce in modo sostanziale da quella esplicitamente proposta da C. Boyer[2] fin dal 1939: al periodo della scoperta del *calcolo* fa seguito un periodo intermedio che va dai primi anni del XVIII secolo fino al secondo decennio del XIX e che precede l'avvento dell' "analisi moderna". Per quanto il terzo periodo presenti un andamento certamente meno uniforme dei precedenti è opinione diffusa degli studiosi che con Cauchy e Bolzano si apra un'era nuova contrassegnata più da naturali (e a volte geniali) sviluppi di un punto di vista che da radicali cambi di orientamento.

Anche se più volte criticata, dai fautori di una storiografia meno "linearista" e più attenta alle controversie concettuali che segnano l'evoluzione di una scienza,[3] questa periodizzazione sembra egregiamente resistere alle ricerche più dettagliate, le quali evitino la facile tentazione di promuovere il semplice impiego della terminologia infinitesimalista al rango di spartiacque concettuale. Del tutto diversa sembra invece la sorte incontrata dalle ragioni che gli interpreti hanno per lungo tempo addotto a favore di una tale generalissima distinzione, nonché dal tracciato che essi hanno volta a volte localmente assegnato alle grandi linee di confine così stabilite. E' su questi due punti che le ricerche più recenti sembrano infatti contraddire non pochi dei giudizi generalmente accettati in letteratura fra gli anni '30 e '60 di questo secolo. Non mi soffermerò qui che su due questioni fra loro intimamente collegate, le quali assumono nella prospettiva della mia ricerca un rilievo del tutto particolare: la questione del "formalismo" e quella del "rigore". Le seguenti citazioni costituiscono dei buoni esempi di quella enfatica sicurezza

[1]Uso qui il termine "storia dell'analisi superiore" per riferirmi all'oggetto (spesso oscuro) di numerose ricerche storiografiche realizzate. Spero che la mia ricerca possa venir interpretata come un contributo alla più precisa caratterizzazione storica di questa nozione [cfr. comunque il prossimo paragrafo II.2.δ.].

[2]Cfr. Boyer (1939).

[3]Cfr. fra gli altri Lakatos (1976), app. I e II e (1978), vol. II, cap. 3 e Robinson (1966), cap. X e (1967).

con cui molti autori hanno inteso caratterizzare il periodo di mezzo (o almeno una sua parte considerevole) come una stagione di "indecisione", "incertezza", "imprecisione", cieca fiducia nel potere dimostrativo di un "formalismo" arbitrariamente generalizzato e applicato di conseguenza in modo inopportuno e incontrollato. Comincerò con lo stesso Boyer:

> The founders of the calculus[4] had clearly stated the rules of operation which were to be observed, and the astonishing success of these when applied to mathematical and scientific problems by Euler, Lagrange, Laplace, and a host of others led men to overlook somewhat the highly unsatisfactory state of the logic and philosophy of the subject.[5]

> The almost automatic development of the calculus during the eighteenth century was largely the result of [...] formalistic view, to which the notation of Leibniz was so remarkably well adapted. However, the greater success achieved by the differential calculus, the less constrained Euler felt to justify his procedures.[6]

Ecco invece come si esprimono Bell e Loria:

> [...] formalism [...] means manipulations of formulas involving infinite processes without sufficient attention to convergence and mathematical existence.[7]

> Gauss is the modern originator of rigorous mathematics; Cauchy is the first modern rigorist to gather any considerable following [...].[8]

> Il magnifico edificio [l' "analisi [superiore] settecentesca"] poggiava su basi di discutibile solidità; ond'era urgente provvedere al loro rafforzamento e impedire che si continuasse a procedere in una via così pericolosa.[9]

E da ultimo M. Kline:

> The eighteenth century work on series was largely formal, and [...] the question of convergence and divergence was certainly not taken too seriously.[10]

Anche chi non abbia letto i testi da cui queste citazioni sono tratte, così come molti altri che ne condividono - su questo punto - l'impostazione, non avrà difficoltà a immaginare la triade "quasi hegeliana" che in questo quadro è richiamata per giustificare la periodizzazione di cui si è detto: a un primo periodo *geometrico* fa seguito un'età *formalista* la quale prepara la propria "negazione" fornendo le basi per l'avvento finale del *rigore*. La produzione settecentesca differisce da quella leibniziana e newtoniana grazie alla sua esplicita impostazione analitica, la quale si trasforma, nelle mani dei matematici del periodo, in un'attitudine formalista caratterizzata dalla in-

---

[4]Il riferimento è ovviamente al *calcolo* [cfr. il precedente paragrafo II.1.η.].

[5]Cfr. Boyer (1939), p. 224.

[6]Cfr. *ivi*, p. 243.

[7]Cfr. Bell (1940), p. 262.

[8]Cfr. *ivi*, p. 284.

[9]Cfr. Loria (1929-33), p. 829.

[10]Cfr. Kline (1972), p. 460.

condizionata applicazione di certe procedure algoritmiche e dall'uso non solo estremamente liberale, ma anche del tutto ingiustificato di somme e prodotti infiniti indipendentemente da ogni valutazione della loro convergenza. La critica di questa attitudine e la conseguente determinazione delle restrizioni all'applicabilità generale di certe procedure e delle condizioni di validità di certe identità segna il passaggio all'età del rigore. Stabilito questo quadro, occorre poi collocare in esso i nomi dei protagonisti. Su questo punto le opinioni sono per la verità meno univoche. Newton, Leibniz, de l'Hôpital e Johann I Bernoulli vanno senz'altro assegnati al primo periodo, Euler è il campione indiscusso del secondo, mentre Cauchy e Bolzano sono le inamovibili sentinelle del terzo. Ma che dire di Daniel Bernoulli e Clairaut: primo o secondo periodo? e di d'Alembert, Laplace e Lagrange: secondo periodo o anticipazioni del terzo? per non parlare di Maclaurin, il quale resta in questo quadro del tutto inclassificabile. Non mi dilungherò certo a considerare nei dettagli le differenti risposte date a questi difficili quesiti. Dirò solo che esse sembrano in generale dipendere dal rilievo che i differenti autori hanno voluto dare alle diverse concettualizzazioni dell'infinitamente piccolo o dell'infinito o alle contrapposte giustificazioni dell'algoritmo del *calcolo* e dalle relazioni che essi hanno intravisto fra tali questioni e quell'atteggiamento generale che è invece caratterizzato per mezzo della triade precedente.

Se questa disomogeneità fra giudizi, che dovrebbero in quanto tali discendere del tutto naturalmente dalla determinazione dei criteri di distinzione, è già di per se stessa un indice dell'imprecisione o almeno dell'insufficienza di tali criteri, vi sono a me pare molte altre ragioni per rigettare lo schema interpretativo che essi delineano. Mi limiterò qui a esporne due di carattere assai generale. La prima è una ragione *de jure*: i termini dell'opposizione fra attitudine geometrica, formalismo e rigore sono - al di là della facile retorica di facciata - del tutto imprecisati e, io sospetto, imprecisabili.[11] La seconda è una ragione *de facto*: la lettura di numerosi testi di Euler, Clairaut, d'Alembert, Laplace, Lagrange (per non citare che i maggiori) fornisce l'evidenza di una attenzione non sensatamente discutibile a problemi di approssimazione numerica e convergenza, la quale contrasta in modo patente con giudizi affrettati quale quello di Kline.

---

[11] Che cosa è, d'altra parte, il "rigore" se non è la corrispondenza di una dimostrazione alle regoli formali che sono stabilite in anticipo, ovvero il suo carattere strettamente sintattico? [cfr. i precedenti paragrafi 1.2.δ. e 1.2.λ.]. Al contrario, il termine "rigore" sembra esprimere, in un tale contesto, una valutazione di ordine "etico" (o forse "estetico"), la quale nasconde le ragioni su cui si fonda, nonché i caratteri precisi della distinzione relativamente alla quale essa sembra prendere partito [su questo punto cfr. anche la prossima nota (95)]. Il problema della caratterizzazione intensionale della svolta realizzata da Cauchy e dei suoi rapporti con i successivi sviluppi matematici è d'altra parte tuttora più che mai aperto e sembra a me presentarsi proprio sotto la forma di un'esigenza di esplicitazione di quell'indubitabile "sentimento di modernità" provocato dalla lettura delle memorie e dei manuali che questi ha dedicato a problemi di "matematica pura". Se alcuni passi in questa direzione sono stati certamente compiuti [cfr. fra gli altri Grabiner (1981) e Smithies (1986)], molti altri restano ancora da compiere [questo mi pare d'altra parte lo scopo delle attuali ricerche di T. Guitard, di cui cfr. per ora Guitard (1985)].

II. 2. β. *Nuove caratterizzazioni dell' analisi superiore settecentesca*

Proprio su quest'ultimo punto ha più recentemente insistito, fra gli altri,[12] J. Dieudonné il quale ha cercato di caratterizzare in termini essenzialmente differenti dai precedenti l' "analisi [superiore] del XVIII secolo":

> Contrairement à une opinion très répandue, il ne faudrait pas croire que les analystes du dix-huitième siècle soient indifférents aux questions d'approximation numérique et de convergence; il s'intéressent presque tous au Calcul numérique [...] et leurs mémoires contiennent de nombreux exemples où ils n'hésitant pas à pousser l'évaluation des nombres qu'ils définissent à plus de 20 décimales. [...]
> Les accusations de "manque de rigueur" qu'ont dû subir les analystes du dix-huitième siècle de la part de leurs successeurs proviennent surtout, en fait, de la difficulté qu'ils ont éprouvée à définir de façon précise les notions de base du Calcul infinitésimal dont ils avaient souvent une bonne conception intuitive, et à faire la distinction, parfois subtile, entre notions d'apparence voisines; au dix-neuvième siècle, on s'est trop hâté de les condamner en ne considérant que leur langage fautif, sans examiner de plus près le contexte. Tout gravite en réalité autour de la notion de *fonction*. Un des grands succès du dix-septième siècle a été de découvrir que les fonctions "élémentaires" [...] peuvent s'exprimer par des séries entières convergentes au moins localement, et qu'aussi bien les opérations algébriques usuelles que celles du Calcul infinitésimal, appliquées à des fonctions de ce type (c'est-à-dire à ce que nous appelons aujourd'hui les fonctions analytiques) donnent conne résultat des fonctions de même type. Au début du dix-huitième siècle, ces fonctions sont les seules qui soient considérés par les mathématiciens [...]. C'est seulement vers le milieu du siècle [...] qu'Euler deviendra conscient de la nécessité d'introduire d'autres fonctions, qu'il appelera [...] "librement tracées"[....]; leur étude mathématique ne commencera pas avant le dix-neuvième siècle.
> Tout le monde admet sans hésitation à cette époque qu'une fonction indéfiniment dérivable est "continue" au sens d'Euler, et qu'elle est entièrement déterminée par sa série de Taylor en un point [...]. C'est ce principe qui paraît guider Euler dans sa conception des séries numériques, qui reste d'ailleurs hésitante et imprécise. [...]
> Beaucoup de calculs d'Euler [...] reviennent en fait à des calculs dans ce que nous appelons maintenant l'algèbre des *séries formelles*: une telle série est identifiée à la suite (a_n) de ses coefficients, qui n'est plus soumise à aucune condition; l'addition et la multiplication se font suivant les règles du calcul des séries entières. Mais il faut bien reconnaître que les explications que donne Euler sur les divers sens du mot "somme" pour une série sont fort confuses [...].
> Le calcul différentiel est traité dans le même esprit "formel" [...]. Pas plus que Leibniz, Euler ne définit ce qu'il entend par une différentielle dx ou une différentielle supérieure $d^n x$, se contentant d'invoquer la définition des "différences finies" [...] dont les différentielles seraient des cas limites. En fait, il calcule comme on le fait actuellement en Géométrie algébrique sur un corps quelconque.[13]

Se da una parte Dieudonné sembra qui implicitamente sostituire alla genericità della critica di "mancanza di rigore" uno sforzo analitico teso alla determinazione dei principi essenziali che hanno per più di un secolo guidato

[12] Una precisa presa di posizione in tal senso può in verità già essere ritrovata in Grattan-Guinness (1970), pp. 68 e segg.
[13] Cfr. Dieudonné (1978), pp. 21-4.

le ricerche dei maggiori matematici continentali, egli non esita a interpretare questi principi alla luce di nozioni matematiche successive, distribuendo giudizi di inidoneità e fermando così il proprio tentativo di comprensione alle soglie di quell'universo concettuale che regge e giustifica una produzione scientifica, la quale viene invece arbitrariamente dissezionata allo scopo di ritrovare in essa quei "risultati" dei quali si possa affermare che essi concorrono, accumulandosi a altri, a formare il patrimonio delle odierne conoscenze matematiche.[14]

La lunga citazione precedente annuncia così, in negativo, l'obiettivo di una ricerca. Anche qualora si siano infatti rigettate le gracili motivazioni su cui si è a lungo retta la distinzione di un periodo autonomo che separa l'era della scoperta del *calcolo* dalla stagione dell' "analisi moderna", non si è per questo eliminata la possibilità stessa di giustificare altrimenti questa distinzione. Se il fenomeno può a prima vista apparire curioso, esso è in verità assai frequente e mi sembra anzi caratterizzare uno stadio del processo conoscitivo: un originario sentimento di unità di un certo gruppo di fenomeni, almeno approssimativamente determinati in termini estensionali, si manifesta contemporaneamente in un'ampia comunità di interpreti, conducendo questi a separare tali fenomeni da altri, senza che sia ugualmente chiara la ragione che regge la distinzione stessa, la caratterizzazione intensionale della classe, in una parola la determinazione del concetto (o della struttura di concetti) che accomuna questi fenomeni fra loro. Si tratta allora di caratterizzare un periodo storico il quale si presenta in se stesso come unitario, precisandone se è il caso i confini e stabilendo per così dire *a posteriori* le ragioni di una classificazione già compiuta. Il suggerimento implicito di Dieudonné (e di altri) è quello di perseguire questo scopo attraverso la determinazione di un insieme di principi generali che sembrano venir condivisi da un'intera comunità matematica nel corso di successivi decenni. E' il perseguimento di questo programma che conduce d'altra parte a mettere in discussione gli stessi giudizi di inidoneità formulati da Dieudonné e apre la prospettiva di una differente valutazione di molti risultati relativamente al contesto concettuale che ha dato a essi origine.

Proprio questo sembra essere l'obiettivo di un recente articolo di C. Fraser:

> The picture that [...] emerges of the development of the calculus[15] on the Continent would divide advanced research in the subject into three broad periods: a

[14]Questa impostazione storiografica, la quale resta ancora oggi largamente diffusa fra molti studiosi e soprattutto fra molti matematici di professione, è d'altra parte tipica della stessa eredità bourbakista [cfr. Bourbaki (1960)]. Per quanto non intenda certamente negare il notevole interesse intrinseco delle ricerche che si sono ispirate e si ispirano a un tale punto di vista - le quali possono senza dubbio fornire tanto essenziali suggerimenti euristici che utili riferimenti didattici - credo sia giusto sottolineare la differenza radicale che separa questo orientamento da quello a cui il mio lavoro vorrebbe invece informarsi. Spero che le considerazioni epistemologiche contenute nei capitoli I.2. e I.3. siano, almeno sotto questo aspetto, esaurienti.

[15]Cfr la precedente nota (4).

> geometric stage, in which geometric problems and conceptions predominate; an analytical or "algebraic" stage that begins in the 1740s in the writings of Leonhard Euler and reaches its final expression in work of Joseph Louis Lagrange at the end of the century; and the period of classical analysis that begins in the early 19th century in the writings of Augustin Louis Cauchy.
> The first part of this paper presents some examples to illustrate in specific and selected detail the calculus of Euler and Lagrange. My intent is to identify as clearly as possible those elements that are *common* in their approach to analysis. My contention is that these elements constitute evidence of a shared conception significatly different from the modern one, with its origins in Cauchy's early 19th-century work.
> The second part elaborates this thesis by presenting a characterization of Euler and Lagrange's calculus and an account of how it differs from Cauchy's arithmetical theory.[16]

Benché Fraser prenda qui notevoli precauzioni,[17] la stessa formulazione del suo programma e, più ancora, la sua successiva realizzazione contengono l'esplicita affermazione di una tesi che nel precedente brano di Dieudonné (come nella maggior parte della recente letteratura) resta soltanto implicita: è possibile determinare un periodo nella "storia dell'analisi superiore" in cui la produzione dei maggiori matematici continentali presenta un nucleo comune per così dire intrinseco, il quale riguarda non solo l'impostazione generale delle ricerche o l'organizzazione del materiale, ma che è costituito, appunto, da un insieme di principi i quali presiedono alla determinazione e alla selezione dei problemi, giustificano le inferenze dimostrative e forniscono il quadro interpretativo dei risultati.[18]

La caratterizzazione proposta da Fraser può, a me pare, essere sintetizzata nei seguenti assunti:[19]

F.i) L'oggetto dell'analisi superiore settecentesca è lo studio generale delle espressioni finite costruite dalla composizione di variabili e costanti per

---

[16] Cfr. Fraser (1989), pp. 317-18.

[17] La distinzione geometrico/analitico attenua infatti la portata del giudizio di omogeneità riferito al secondo periodo (che è peraltro fatto iniziare assai tardi), permettendo a Fraser di specificare in nota che "the division of stages is not absolutely rigid" e che "one can discern at different times and at different levels of research a varing mixture of geometric, algebraic and arithmetic elements" [cfr. *ivi*].

[18] La mia ricostruzione è forse qui un poco forzata: i "maggiori matematici" a cui Fraser si riferisce non sono infatti che Euler e Lagrange - e marginalmente d'Alembert - (i quali sono tuttavia identificati con una vera e propria "tradizione" [cfr. *ivi*, p. 318]) e non vi è nel suo articolo alcuna particolare enfatizzazione della differenza fra una caratterizzazione fondata su una generale impostazione matematica e un'altra fondata invece sulla comune accettazione di certi principi. Credo tuttavia che fra i tanti meriti dell'articolo di Fraser uno non secondario sia proprio quello di permettere al lettore una lettura di tal genere. Scopo del presenta capitolo è d'altra parte quello di difendere una versione ancora più radicale di questa tesi, la quale potrà così venir valutata in sé stessa.

[19] Molte delle tesi seguenti sono già presenti in Fraser (1987) in cui si riferiscono più particolarmente alla teoria delle funzioni analitiche di Lagrange. Discuterò più dettagliatamente le interpretazioni di Fraser di una tale teoria nel prossimo capitolo III.6..

mezzo di una reiterazione finita delle elementari operazioni algebriche e trascendenti. Queste espressioni sono dette *funzioni*.[20]

F.ii) Nello studio generale delle funzioni non vi è posto per alcuna considerazione dei valori particolari che le variabili che le compongono possono volta a volta assumere. Questo riguarda piuttosto le relazioni che si istituiscono fra differenti funzioni in base alle operazioni e agli algoritmi che sono a queste applicate, senza alcuna attenzione ai domini ai quali tali funzioni possono essere riferite.[21] La considerazione di questi è piuttosto propria delle differenti applicazioni dell'analisi.[22]

F.iii) Un "teorema" è quindi considerato come "dimostrato", qualora esso è "verificato su numerosi esempi", "the assumption being that the reasoning in question could be adapted to any other example one chose to consider".[23]

F.iv) Una funzione costituita da una singola espressione analitica è detta *continua*. Una funzione *discontinua* è invece costituita da un insieme di espressioni "defined piecewise over more than one interval of real number". La continuità è quindi nell'analisi superiore settecentesca un attributo della forma algebrica. Benché la polemica sulle corde vibranti abbia, fin dalla metà del secolo, attirato l'attenzione dei matematici anche su "funzioni" cosiddette "arbitrarie", le quali non potevano venir ridotte a espressioni analitiche, la discussione connessa resta "curiosamente" isolata e la "nozione generale di funzione" elaborata da Euler "was never incorporated into the analytical theory presented in his mid-century textbooks".[24]

F.v) In un tale contesto il rapporto fra le teorie analitiche e l'indagine delle curve geometriche è quello che vige fra degli strumenti generali e una delle loro applicazioni particolari; le curve restano oggetti matematici separati. La relazione fra queste teorie e la geometria o l'aritmetica è una relazione di corrispondenza piuttosto che di rappresentazione.[25]

F.vi) Da (i) segue che le *serie* non sono in quanto tali considerabili come delle funzioni. Esse non sono mai introdotte arbitrariamente, ma solo allo scopo di "rendere certe funzioni «intelligibili»" e non devono essere intese che come sviluppi di certe espressioni, determinati per mezzo di un numero finito di passi tramite l'utilizzo degli ordinari processi algebrici e degli algoritmi del *calcolo* diretto o inverso.[26]

F.vii) Il "contenuto sostanziale" dello stesso calcolo delle variazioni è considerato - dopo la scoperta lagrangiana del δ-algoritmo, il quale fu immediata-

---

[20]Cfr. Fraser (1989), pp. 325 e 328.

[21]Cfr. *ivi*, pp. 321 e 328-29. Fraser insiste particolarmente sulla differenza fra questo punto di vista e quelli caratteristici tanto del primo che del terzo periodo per cui le funzioni (nella loro diversa accezione) sono naturalmente interpretate su un continuo dato per così dire *a priori* rispetto a esse [cfr. *ivi*, p. 328].

[22]Per l'esplicitazione di questo giudizio cfr. Fraser (1987), p. 49.

[23]Cfr. Fraser (1989), p 328.

[24]Cfr. *ivi*, pp. 325-26 e 328.

[25]Cfr. *ivi*, p; 328.

[26]Cfr *ivi*, pp. 321-22.

mente adottato da Euler - come inerente "al suo aspetto [puramente] formale".[27]

F.viii) Nell'analisi superiore settecentesca non viene introdotta alcuna restrizione sui valori assumibili da una variabile (intesa come "quantità universale"), i quali possono generalmente essere tanto reali che complessi. Le regole algoritmiche sono intese come perfettamente applicabili alla manipolazione di espressioni contenenti degli immaginari, i quali non danno luogo a nessuna teoria separata. Se a ciò si aggiunge che la rappresentazione geometrica dei numeri complessi non fu mai compiutamente sviluppata, si comprende come "complex analysis remained by and large undeveloped during the period".[28]

II. 2. γ. *Propositi*

Messo a parte qualche lieve disaccordo locale (che verte essenzialmente su questioni di formulazione[29]), ritengo non solo che gli otto precedenti assunti siano tutti sostanzialmente corretti, ma sono anche dell'avviso che, presi nel loro insieme, essi individuino quegli aspetti dell' "analisi superiore settecentesca" i quali concorrono a renderla essenzialmente differente dall'analisi moderna. Nella grande maggioranza dei casi le affermazioni di Fraser sono tuttavia il semplice risultato di una constatazione di fatto; esse registrano dei punti di vista, piuttosto che giustificarli nel contesto di un programma unitario e connetterli gli uni agli altri deducendoli a partire da un nucleo comune stabilito *a priori* e indipendentemente motivato in base a ragioni per così dire più profonde, che ne forniscano una esplicazione. Se il confine fra descrizione e spiegazione non può certamente venir stabilito in termini assoluti, è mia convinzione che una ricerca ulteriore possa riannodare dei fili che restano qui ancora sospesi nel vuoto, delineando un orizzonte concettuale fortemente unitario, nel quale i precedenti assunti si presentino piuttosto come delle naturali conseguenze di principi o presupposti più generali che, lungi dall'emergere dal nulla, non sono a loro volta che i punti di arrivo di un percorso intellettuale largamente ricostruibile (almeno congetturalmente).

Proprio questo è lo scopo del presente capitolo, nel quale presenterò dunque una struttura di principi che cercherò di collegare fra loro lungo un percorso intellettuale che ne fornisca in qualche senso una spiegazione. Per fare questo mi servirò di alcuni riferimenti testuali che verranno tuttavia sempre utilizzati in termini strumentali relativamente all'articolazione delle tesi successive. Non avanzerò quindi per ora alcun argomento a sostegno

---

[27]Cfr. *ivi*, p. 324.

[28]Cfr. *ivi*, p. 327.

[29]Accettando la formulazione di Fraser (F.iv) è a esempio contraddittorio con (F.i), mentre (F.iii) sembra confondere fra un'ingiustificata fiducia induttiva e una pratica dimostrativa per esemplificazione arbitraria (simile a quella generalmente applicata in deduzione naturale), la quale non richiede in sé stessa alcuna ingiustificata generalizzazione.

della correttezza storica delle mie affermazioni, ovvero della corrispondenza fra i principi astratti che presenterò successivamente e l'effettiva pratica matematica dell'epoca. A questo scopo spero siano largamente sufficienti le dettagliate analisi testuali che saranno contenute nella terza parte della mia dissertazione. Nel corso di questo lavoro gli assunti di Fraser mi serviranno come prezioso punto di riferimento, così come costanti saranno le connessioni fra le mie conclusioni e molte delle tesi difese da J. Dhombres nel corso di suoi numerosi e recenti lavori dedicati a differenti aspetti della matematica settecentesca.[30]

II. 2. δ. *Un programma di reinterpretazione della scienza matematica*

Comincerò con una questione solo apparentemente terminologica. Nel presentare le tesi precedenti ho genericamente utilizzato i termini "storia dell'analisi superiore" e "analisi superiore settecentesca" per riferirmi rispettivamente a una frazione della storia della matematica e al prodotto cui essa ha dato luogo nel corso del XVIII secolo (o comunque di una sua parte considerevole). Ho cercato in questo modo di accordare un uso abituale fra storici e matematici con un'esigenza di precisione, la quale impone di distinguere fra il *calcolo*, lo studio delle "funzioni" e delle serie (con relative applicazioni alla teoria delle equazioni algebriche di grado qualunque), da una parte, e l'algebra cosiddetta elementare con le sue differenti applicazioni alla geometria, dall'altra. Questa scelta - che mi ha condotto a tradurre con "analisi superiore settecentesca" i termini "18th century analysis" e "calculus" (riferito al XVIII secolo) che Fraser usa nel suo articolo come sinonimi - può naturalmente venir criticata sotto molti rispetti. Essa mi è parsa tuttavia meno criticabile di altre e credo che possa in fondo venir mondata da molti dei suoi pericoli, una volta che si sia chiarito che essa non vuole in nessun modo presupporre la distinzione fra "analitico" e "geometrico" e assegnare d'ufficio il *calcolo*, in tutte le sue versioni, al primo dei due ambiti.

Ciò che in generale suggerisce un uso del termine "analisi" (spesso perfino senza alcun attributo), per riferirsi a qualcosa che contiene comunque il *calcolo* in tutte le sue versioni, è un'arbitraria applicazione delle odierne categorie matematiche (e delle distinzioni disciplinari cui esse si riferiscono) al dominio stesso delle ricerche storiografiche, come se le distinzioni attuali rispecchiassero distinzioni sempre esistite e accettate. Questo uso è tuttavia tanto diffuso che il liberarsi da esso rischia di produrre più fraintendimenti di quanti possa contribuire a eliminarne.[31] Se questo è in generale un buon

[30]Cfr. in particolare Dhombres (1986), (1987a), (1987b) e (1988). Il debito intellettuale che ho negli ultimi anni contratto nel corso di frequenti discussioni con J. Dhombres è tale che mi è veramente difficile discernere fra idee che ho autonomamente elaborato nel corso delle mie ricerche e idee essenzialmente dovute a un simile stimolante confronto. E' anche per questo che preferisco limitarmi a un'unica citazione collettiva piuttosto che a riferimenti più marginali che sarebbe per me veramente troppo difficile ricostruire, limitandomi a rimandi circostanziati solo nei casi in cui il riferimento assumerà a mio parere una particolare rilevanza argomentativa.

[31]Per un altro caso simile cfr. la nota (68) del precedente capitolo I.2..

argomento per perpetrare certi usi linguistici, non è in nessun modo una ragione per autorizzarli indipendentemente da ogni precisazione. E' proprio sotto la forma di un chiarimento terminologico che introdurrò quindi il mio primo punto. Esso servirà da solo a indicare il modo piuttosto particolare in cui io credo debba venire reinterpretata la periodizzazione a cui mi sono più sopra riferito.

Detto in breve, si tratta di questo: a differenza dell'analisi moderna, l'analisi settecentesca non è un dominio di ricerca matematica separato, al quale possano affiancarsi domini diversi e dei quali possano, con un poco di fatica, venir fissati i confini. Essa è piuttosto l'esito agognato (e solo in parte realizzato) di un programma di ricerca complessivo che tende a riformulare e a reinterpretare l'intera matematica, intesa come scienza generale delle quantità e delle loro relazioni. Se in questo universo si potrà poi distinguere fra analisi elementare e analisi superiore, la distinzione non farà che separare la semplice esposizione delle leggi algebriche e delle loro più elementari proprietà, dal vero proprio edificio della scienza matematica, di cui queste non sono che le fondamenta ultime.

Se il vero e proprio atto di nascita di questo programma è con tutta evidenza costituito solo dall'*Introductio in analysin infinitorum*, pubblicata da Euler nel 1748, le sue radici sono senza dubbio più antiche e risalgono, io credo, alla lettura newtoniana della geometria di Descartes. Negli anni 1664-71 Newton non solo scopre e formula adeguatamente il *calcolo*, generalizza la formula del binomio e individua un insieme di procedimenti *standard* per sviluppare in serie un'espressione algebrica qualsiasi, la soluzione d'un equazione (ordinaria o flussionale) e l'ordinata di alcune curve "meccaniche", ma egli unifica questi risultati, costituendo un nuovo dominio di ricerca matematica, il quale si presenta in quanto tale come perfettamente autonomo rispetto alla formulazione di ogni problema geometrico o meccanico.[32] L' "analisi", che Viète intendeva semplicemente come la prima parte di un metodo di soluzione dei problemi geometrici,[33] consistente nel tradurre tali problemi in equazione e nel determinare in termini algebrici le relazioni fra le quantità incognite e le quantità note, e che Descartes aveva così potentemente sviluppato, attraverso l'introduzione della nozione di relazione (algebrica) fra due variabili come strumento rappresentativo generale di una curva ("geometrica") qualsiasi,[34] viene esplicitamente distinta dallo stadio successivo del metodo, il quale prevedeva una reinterpretazione geometrica dei risultati e una conseguente ricostruzione della soluzione in termini di segmenti, superfici o volumi.

[32]Ho cercato di giustificare questa tesi interpretativa in Panza (1989), a cui rimando per le necessarie argomentazioni.
[33]Cfr. in particolare Viète (1591) e (1631) [ripubblicati in Viète (1646)], ma anche Ghetaldi (1630). Per un'indagine storica sul metodo di Viète (e Ghetaldi), cfr. Brigaglia-Nastasi (1986) e Freguglia (1988).
[34]Per le possibili interpretazioni dei rapporti fra Newton e Descartes cfr. ancora Panza (1989), pp. 110-23.

La storia di questo processo di distinzione è senza dubbio complessa e non è certo mia intenzione ricostruirla neppure sommariamente. Se a me pare che in essa svolga un ruolo centrale l'elaborazione matematica del giovane Newton e l'approccio metodologico che la contraddistingue, ciò che è qui importante non è tanto questo, quanto il fatto che alla fine del secolo la distinzione è ormai chiaramente raggiunta. Ciò non significa ovviamente che la "geometria classica" abbia cessato di far sentire il suo peso e neppure che l'esigenza di una reinterpretazione geometrica dei risultati di certi procedimenti analitici[35] sia del tutto abbandonata e neanche che le operazioni e gli algoritmi analitici non siano in nessun caso direttamente interpretati relativamente a entità geometriche. Per restare a Newton basta considerare i *Principia*, la *Geometria curvilinea* e il *De Quadratura* (nella versione del 1704)[36] per avere tre esempi lampanti della persistenza di simili punti di vista. Se da Newton si passa poi a de l'Hôpital o a Johann I Bernoulli[37] sarà del tutto chiara la predominanza di una concezione del *calcolo* come *strumento* per la soluzione di problemi geometrici (e meccanici, qualora questi ultimi siano geometricamente interpretati), piuttosto che come teoria autonoma e generale capace di varie e differenziate applicazioni particolari. E' proprio questa situazione che caratterizza a mio parere il primo periodo, che è generalmente stato qualificato come "geometrico".[38] Il punto che mi preme sottolineare è che alla fine del secolo è ormai assodato che una questione matematica possa legittimamente essere posta e risolta in termini che non si richiamano che a delle relazioni operazionali fra certe variabili. Così, ci si può domandare qual è l'area della curva (d'equazione) $y = x^2$ e rispondere che essa è data dall'integrale $\int_{[0]}^{[x]} x^2 dx = \frac{1}{3}x^3$. Alla ricerca matematica si può quindi chiedere di determinare, per così dire in astratto, le relazioni operazionali che intercorrono fra certe combinazioni di variabili e costanti e altre combinazioni che possono venir interpretate rispetto alle prime come

[35]L'attributo "analitico" non fa in questo contesto che qualificare quei procedimenti matematici i quali dovrebbero idealmente costituire la prima parte di un generalizzato metodo dell'analisi-sintesi. Il fatto che questi procedimenti siano generalmente connessi alla soluzione di equazioni o all'applicazione di certi algoritmi su determinate stringhe simboliche condurrà a trasformare il senso di questo termine, che perderà il suo originario connotato direzionale, riferito al percorso argomentativo (il quale resta ben chiaro nell'accezione di Viète), per assumere un connotato del tutto differente, riferito piuttosto ai caratteri particolari delle inferenze o al linguaggio in cui esse vengono espresse. Proprio questo processo - che trasforma progressivamente, in certi contesti, l'intensione di un termine in base ai caratteri particolari dell'estensione che esso denota, la quale sembra sempre di più possedere dei tratti specifici che non si richiamano all'intensione originaria, ma si evidenziano non di meno come salienti - è io credo all'origine di almeno uno dei differenti sensi che il termine "analisi" assumerà a partire dalla fine del XVII secolo.

[36]Cfr. le note (75) e (77) del precedente capitolo II.1..

[37]Cfr. i precedenti paragrafi II.2.ε. e II.2.ζ..

[38]Naturalmente il problema della caratterizzazione del primo periodo è esso stesso almeno tanto complesso quanto quello della caratterizzazione del secondo. Una tale questione resta comunque esclusa dai limiti della mia dissertazione.

espressioni di una quantità correlata alla quantità espressa per mezzo delle combinazioni date. Non vi è così nessuna necessità di sortire da una concezione classica della matematica, come scienza delle relazioni fra quantità geometricamente intese - o almeno rappresentate - per porre in quanto problema matematico genuino e conchiuso in se stesso il problema, a esempio, dell'integrazione finita di certe classi di *espressioni* algebriche, ovvero della determinazione della combinazione simbolica finita che è connessa secondo l'algoritmo differenziale a una combinazione simbolica di forma data.

Ma, ci si può domandare, che cosa c'é di nuovo in un simile approccio? Una tale situazione non è, in fondo, del tutto simile a quella in cui ci si trova qualora ci si ponga il problema matematico classico di esprimere la radice di un'equazione algebrica di grado dato per mezzo di una formula, nella quale compaiano i differenti coefficienti di tale equazione? La mia risposta è duplice. In primo luogo è abbastanza ovvio osservare che tale formulazione del problema "classico" della soluzione di un'equazione algebrica di grado dato è in se stessa tutt'altro che "classica". Prima del XVII secolo il problema si poneva piuttosto sotto la forma della domanda di un *metodo* generale per risolvere in *termini numerici* ogni *particolare* equazione di grado determinato. Ma, in secondo luogo, se anche così non fosse, risulterebbero comunque fra le due situazioni almeno due differenze tutt'altro che marginali di cui una inerente alla natura stessa del problema e l'altra al contesto generale in cui esso si pone. La prima differenza è questa: con l'introduzione del *calcolo* si è per la prima volta di fronte a un algoritmo operante su combinazioni simboliche, il quale permette di determinare l'espressione di certe quantità che, in quanto tali, sono connesse a quantità date in termini originariamente indipendenti dalla relazione operazionale in questione. Così, l'integrale di una certa espressione algebrica esprime l'*area* della curva la cui ordinata è rappresentata per mezzo di tale espressione e fra una curva e la sua area esiste una relazione originaria che è del tutto diversa dalla relazione operazionale indicata dall'integrazione. La radice di un'equazione non è invece, in se stessa, null'altro che un valore (o, se vogliamo, una combinazione simbolica) che soddisfa la relazione operazionale espressa dall'equazione stessa. La seconda differenza è ancora più evidente: la scoperta del *calcolo* e dei diversi metodi newtoniani di sviluppo assegna all'universo dei problemi genuinamente algoritmici un'estensione nemmeno comparabile a quella precedente; questi ultimi invadono improvvisamente le raccolte accademiche, i *pamphlet*, i trattati, la corrispondenza privata e si presentano sempre di più come problemi di una rilevanza essenziale in numerosissimi domini di ricerca.

Se la mia ricostruzione è corretta, se ne dovrà concludere che le scoperte del *calcolo* e dei metodi newtoniani di sviluppo non si riducono semplicemente a degli atti di estensione della conoscenza matematica, alla conquista di nuove acquisizioni collocabili a fianco delle acquisizioni precedenti. Il rilievo straordinario di queste scoperte non è tanto nell'ampiezza della porzione di conoscenza che esse permettono di accumulare, quanto piuttosto nell'effetto di trasformazione complessiva dell'orizzonte matematico, della sua stessa strutturazione interna. E' questo dato macroscopico che costituisce, io credo, l'oggetto essenziale della riflessione epistemologica di Euler, la quale può forse essere compresa *a posteriori* come un tentativo di rispondere a una domanda tanto naturale, quanto capitale per gli sviluppi successivi della ricerca. Si trattava di sapere se una tale trasformazione non mettesse anche in causa la concezione generalmente accettata della geometria come terreno privilegiato per una rappresentazione generale della nozione astratta di quantità. L'estensione e l'autonomia raggiunte di fatto dall'analisi, intesa come disciplina, non suggeriva forse la possibilità di percorrere un'altra strada e di tentare nuove strategie? Se alla constatazione contenuta nella prima parte di questa domanda aggiungiamo l'insistenza con cui Leibniz e Locke, i più reputati filosofi della generazione precedente, avevano, anche se su opposti versanti, sottolineato la possibilità - e anzi l'opportunità - di rappresentare il mondo come un sistema di relazioni, piuttosto che come un essere di certe sostanze, abbiamo un quadro in cui la risposta di Euler appare come tutt'altro che immotivata e priva di prospettive credibili. Tale risposta assume la forma di un programma: reinterpretare la nozione generale di quantità nel quadro di una teoria delle relazioni operazionali fra espressioni simboliche, intese come rappresentazioni perfettamente generali e astratte di una quantità relativamente a altre e capaci quindi di fornire una rappresentazione delle stesse relazioni particolari intercorrenti fra quantità di natura specifica. Proprio questo è il programma dell'analisi settecentesca,[39] la sfida che fra Euler e Lagrange, nel breve volgere di poco più di mezzo secolo, impegna due successive generazioni di matematici,[40] fino a

---

[39]Si osservi che, sei anni prima della pubblicazione dell'*Introductio*, Colin Maclaurin aveva tentato, nel suo *Treatise*, una risposta opposta a una domanda per molti versi simile, cercando di riformulare tanto il *calcolo* che una teoria generale degli sviluppi in serie nel quadro della geometria classica e del suo strumento dimostrativo essenziale, costituito dal metodo della *reductio ad absurdum*, allo scopo evidente di riguadagnare così l'ordine e l'unità perduti. E' significativo che, a fianco del Newton del *De quadratura*, Maclaurin scelga come nume tutelare di questa operazione proprio Locke, la cui autorità filosofica è richiamata, fra l'altro, a sostegno di una concezione relazionista della conoscenza e, di conseguenza, della matematica stessa [cfr. in particolare, Maclaurin (1742), pp. 51-2].

[40]Una delle formulazioni più chiare del nuovo punto di vista è forse offerta da d'Alembert nel *Discours preliminaire*. Dopo aver presentato la classica distinzione baconiana delle "matematiche pure" (le quali - a differenza delle "matematiche miste" considerano la grandezza "in astratto") in "aritmetica" e "geometria" egli aggiunge [cfr. d'Alembert (Dis.), pp. V-VI]:

> [...] il est bien difficile qu'en réfléchissant sur ces règles [le regole dell' "aritmetica"], nous n'apercevions certaines principes ou propriétés générales des rapports, par le moyen desquelles nous pouvons, en exprimant ces rapports d'une manière universelle, découvrir les différentes combinaisons qu'on en peut faire. Les résultats de ces combinaisons, réduits sous une forme générale, ne seront en effet que des calculs arithmétiques indiqués, et représentés par l'expression la plus simple et la plus courte que puisse souffrir leur état de généralité. La science ou l'art de désigner ainsi les rapports est ce qu'on nomme Algèbre. Ainsi quoiqu'il n'y ait pas proprement de calcul possible que par les nombres, ni de grandeur mesurable que l'étendue (car sans l'espace nous ne pourrions mesurer exactement le temps) nous parvenons, en généralisant toujours nos idées, à cette partie principale des mathématiques, et de toutes les sciences naturelles, qu'on appelle Science des grandeurs en

approdare a uno scacco la cui straordinaria lezione non è, a ben guardare, che la stessa matematica moderna.

Lo scopo dei paragrafi seguenti sarà proprio quello di proporre una ricostruzione del "nucleo" più interno di un tale programma. Prima di dedicarsi a questo è tuttavia necessario introdurre qualche ulteriore chiarimento.

In primo luogo è bene sottolineare che la precedente sintetica formulazione del programma dell'analisi settecentesca non deve essere interpretata in termini troppo generali e del tutto estranei allo "spirito" dell'epoca. Se il progetto è certamente quello di ripensare la matematica come una teoria delle relazioni operazionali fra certe combinazioni simboliche e delle conseguenti applicazioni ai differenti casi particolari, questo non significa che Euler prospetti l'idea di una teoria generale delle relazioni, il cui obiettivo sia quello di studiare in termini astratti la nozione stessa di relazione operazionale. Le relazioni operazionali di cui si tratta sono piuttosto già date e corrispondono essenzialmente all'applicazione delle leggi elementari dell'algebra (estese al caso di polinomi di grado infinito), dei metodi newtoniani di sviluppo e degli algoritmi del *calcolo*. Allo stesso modo, parlando di combinazioni simboliche non si vogliono intendere che le espressioni finite costituite per reiterazione a partire da un insieme determinato di simboli e secondo delle leggi esplicite di buona formazione. Entrambi questa "restrizioni" non devono d'altra parte essere intese come limitazioni arbitrarie; al contrario, esse rispondono a una concezione "genetica" della matematica, come edificio costruito per successive estensioni (e applicazioni) a partire dalle leggi dell'algebra elementare. Questa concezione, del tutto compatibile con la stessa filosofia dell'illuminismo, e perfettamente rispondente all'ampiezza

---

> général; elle est le fondement de toutes les découvertes qu'on peut faire sur la quantité, c'est-à-dire sur tout ce qui est susceptible d'augmentation ou de diminution.
> Cette science est le terme le plus éloigné où la contemplation des proprietés de la matière puisse nous conduire, et nous ne pourrions aller plus loin sans sortir tout à fait de l'univers matériel.

L'uso del termine "algebra" non deve ingannare il lettore. Ecco, infatti, come lo stesso d'Alembert si esprime nella prima parte della voce *Analyse* [cfr. d'Alembert (Anal.), p. 400b]:

> L'*Analyse*, pour résoudre les problèmes employe le secours de l'Algebre, ou calcul des grandeurs en général: aussi ces deux mots, *Analyse*, *Algebre*, sont souvent regardés comme synonymes.
> L'*Analyse* est l'instrument ou le moyen général par lequel on a fait depuis près de deux siecles dans les Mathématiques de si belles découvertes. Elle fournit les exemples les plus parfaits de la maniere dont on doit employer l'art du raisonnement, donne à l'esprit une merveilleuse promptitude pour découvrir des choses inconnues, au moyen d'un petit nombre de données; & en employant des signes abregés & faciles pour exprimer les idées, elle présente à l'entendement des choses, qui autrement sembleroient être hors de la sphere. Par ce moyen les démonstrations géométriques peuvent être singulierement abregées: une longue suite d'arguments, où l'esprit ne pourroit sans le dernier effort d'attention découvrir la liaison des idées, est convertie en des signes sensibles, & les diverses operations qui y font requises son effectuées par la combinaison de ces signes.

Il confronto fra queste due citazioni mostra assai bene, a me pare, il trapasso dalla nozione dell'analisi come primo stadio di un "metodo" risolutivo di problemi geometrici all'idea di una branca autonoma della ricerca matematica, la quale si converte a sua volta nel paradigma di una "scienza generale della quantità".

delle conoscenze e dei problemi propria della matematica di primo Settecento, è essenzialmente costitutiva del programma euleriano, il quale non può in nessun modo intendersi al di fuori di essa. E' tuttavia chiaro che l'adeguatezza di un simile punto di vista non si misura soltanto rispetto alle conoscenze matematiche già date, le quali devono venire reinterpretate a partire da esso, ma dipende anche da certi caratteri oggettivi delle relazioni considerate. Che cosa ci assicura infatti che la classe delle combinazioni simboliche finite costruite secondo certe restrizioni definite *a priori* sia chiusa rispetto all'esito di tutte le operazioni applicabili sui suoi membri? Per esserne senz'altro certi occorrerebbe accettare l'idea che tutti i simboli operazionali partecipino alla formazione di tali combinazioni simboliche; data la nozione euleriana di quantità, questo punto di vista non è tuttavia compatibile con l'esigenza di intendere queste combinazioni come genuine e generali rappresentazioni di certe quantità (relativamente a altre).[41] Il problema resta allora insoluto e sarà anzi, fra le altre cose, proprio la scoperta del carattere aperto della classe delle "funzioni" intese nel senso di (F.i) rispetto all'operazione di integrazione che porrà il programma euleriano di fronte ai suoi limiti intrinseci.[42]

Il secondo punto è il seguente: la concezione genetica della matematica permette di formulare e di sviluppare ampiamente il programma precedente in termini essenzialmente indipendenti dal richiamo all'algoritmo del *calcolo* e a ogni sua giustificazione "metafisica". Proprio questo è d'altra parte il piano dell'*Introductio*, che sembra - fra le altre cose - designare i confini di quella porzione dell'analisi superiore che può essere sviluppata indipendentemente dal *calcolo* e che abbiamo più sopra indicato come "analisi algebrica".[43] Il problema della fondazione del *calcolo* sarà quindi quello di interpretarne e giustificarne l'algoritmo all'interno di un edificio matematico già ampiamente strutturato e compatibilmente ai principi essenziali cui esso risponde. Questo non sarà, in realtà, che un esito molto tardo del programma dell'analisi settecentesca e non verrà compiutamente raggiunto che alla fine del secolo con la pubblicazione della *Théorie des fonctions analytiques* di Lagrange. Euler, per parte sua, si limiterà a un ingegnoso espediente,[44] il quale gli permetterà di introdurre l'algoritmo leibniziano senza ricorrere a nozioni estranee al suo punto di vista, come quella di infinitesima differenza fra le ordinate di una curva, di limite di un rapporto o di velocità di un movimento. La parte principale del suo sforzo sarà piuttosto orientata allo studio delle relazioni operazionali comportate dall'introduzione di tale algoritmo e delle sue innumerevoli possibilità di impiego nella soluzione dei problemi formulabili nei termini dell'analisi algebrica (sviluppi in serie, soluzione delle equazioni algebriche, &c.). Ancor meno soddisfacente dal punto di vista del programma originario è ovviamente la proposta di d'Alembert, la quale, richiamandosi alla nozione di limite, concepisce il rapporto differenziale direttamente come un valore, fuoriuscendo quindi da un orizzonte puramente operazionale. Ciò nonostante la stessa teoria dei limiti può venir

[41]Cfr. il prossimo paragrafo II.2.ε..
[42]Cfr. il precedente assunto (F.iv).
[43]Cfr. il precedente paragrafo II.1.λ..
[44]Cfr. il precedente paragrafo II.1.λ..

pensata, oltre che in termini aritmetici o geometrici, come una teoria generale delle trasformazioni formali prodotte dalla presupposizione dell'annullamento (ovvero dell'eliminazione) di certe quantità espresse per mezzo di una variabile costitutiva di una forma algebrica. Mi pare che proprio questa sia l'interpretazione di l'Huilier e di altri matematici settecenteschi[45] che cercarono di mettere in pratica i generici suggerimenti di d'Alembert senza contraddire troppo apertamente i presupposti metodologici euleriani, per cui la considerazione di valori particolari delle variabili in gioco in certe relazioni non poteva che riguardare l'ambito strettamente applicativo. Sia come sia, la contrapposizione fra l'orientamento epistemologico del programma euleriano e la considerazione fondazionale della nozione di limite resta evidente e non potrà certo venire nascosta per mezzo di un ulteriore approfondimento di queste considerazioni. Essa evidenzia come un tale programma non possa venire inteso come un quadro concettuale rigido e esaustivo, capace di contenere al suo interno *tutta* la produzione matematica della seconda metà del XVIII secolo. L'obiettivo di una caratterizzazione su base cronologica non mi sembra tuttavia questo, quanto quello di mettere in luce gli aspetti più rilevanti di un punto di vista che possa considerarsi come un prodotto *tipico* di una certa epoca, capace di rendere conto delle principali manifestazioni intellettuali di essa. E' in questo senso che io credo debba essere pensato il programma che cercherò di ricostruire: non come un rigido e inviolabile codice di comportamento estendibile a tutti i membri di una comunità scientifica, ma come un indirizzo generale che orienta la maggior parte delle ricerche, che incontra difficoltà di applicazione e che può dunque venire localmente infranto senza dover per questo essere abbandonato.

Detto questo potrò precisare meglio l'obiettivo della mia ricerca, la quale non intende in nessun modo seguire nel corso della sua complessa evoluzione l'intero programma euleriano, fino alle sue conseguenze più lontane e significative. La ricostruzione del suo "nucleo" non è infatti funzionale che alla risposta a un quesito filosofico e storiografico molto più particolare. Ciò di cui si tratta non sono infatti che le origini concettuali della teoria lagrangiana delle funzioni analitiche, che io intendo come un tentativo di integrazione del *calcolo* entro un tale programma. La terza parte della mia dissertazione non presenterà quindi che un percorso diretto verso un simile obiettivo, costruendosi essenzialmente intorno al passaggio dall'esposizione euleriana dell'analisi algebrica alla formulazione lagrangiana del *calcolo*.

II. 2. ε. *Forma e quantità*

L'idea principale sulla quale sembra vertere l'intero programma dell'analisi settecentesca può essere formulata come segue: per ogni insieme fi-

[45]Cfr. il precedente paragrafo II.1.κ..

nito di quantità (omogenee[46]) la rappresentazione più generale e esaustiva di queste quantità e delle relazioni intercorrenti fra esse è fornita dalla determinazione di un sistema finito di equazioni finite, in cui queste quantità siano individualmente rappresentate per mezzo di simboli letterali distinti connessi l'uno all'altra secondo le operazioni dell'algebra e le quattro operazioni trascendenti elementari (esponenziale, logaritmo, seno e arcoseno). Se queste equazioni potranno assumere nei differenti casi l'una o l'altra delle due forme distinte $F(x, ..., z) = y$ e $F(x, y, ..., z) = 0$, solo la prima di queste forme permette propriamente una rappresentazione esplicita[47] di una quantità, relativamente a altre, mentre la seconda non fa che esprimere le condizioni operazionali che questa rappresentazione deve soddisfare. Il passaggio da un sistema di equazioni del secondo tipo a un sistema di equazioni del primo equivale così alla determinazione di una rappresentazione astratta per ogni quantità dell'insieme, relativamente a altre quantità dello stesso insieme. Lo studio quantitativo di ogni fenomeno particolare prevede il possesso di una teoria generale di questo genere di equazioni, la quale può essere sviluppata del tutto indipendentemente dal riferimento a una classe privilegiata di quantità. Il primo membro di ogni equazione può infatti essere pensato in se stesso come una una *forma*, contrassegnata dalle modalità di composizione dei simboli atomici che vi occorrono, i quali possono appartenere a due classi distinte e rappresentare rispettivamente o delle "quantità astratte" o delle operazioni riferite a tali quantità. Per quanto, in quanto tale, non necessaria, la sola distinzione di ordine generale che appare utile prospettare relativamente alle quantità è quella fra "quantità costanti" e "quantità variabili", la quale può peraltro banalmente espremersi per mezzo della separazione dei simboli atomici per quantità astratte in due insiemi distinti fra loro. Ogni composizione di simboli atomici può essere a sua volta pensata come l'espressione di una quantità determinata relativamente alle quantità rappresentate dai simboli atomici che la compongono. Se fra questi simboli ve ne sono alcuni che appartengono all'insieme dei simboli designati come rappresentazioni di quantità variabili (i quali non possono venir eliminati secondo le leggi algebriche di cancellazione), allora la(e) quantità in questione sarà(nno) essa(e) stessa(e) variabile(i) e potrà(nno) essere rappresenta(e) per mezzo di un simbolo atomico appropriato correlato alla composizione data per mezzo di un'equazione supplementare.

---

[46]L'omogeneità deve essere qui intesa come condizione di rappresentabilità matematica delle relazioni intercorrenti fra quantità particolari, piuttosto che come condizione di possibilità per il sussistere di una proporzione, come era invece il caso della matematica precartesiana. Essa riguarda quindi l'applicabilità a certi casi particolari di certe procedure operative, piuttosto che la teoria di queste procedure, la quale tratta come vedremo con "quantità astratte".

[47]Il termine "rappresentazione" verrà d'ora in poi utilizzato per riferirsi esclusivamente a rappresentazioni atomiche e/o esplicite, dirette o indirette, le quali verranno dette più semplicemente: "rappresentazioni dirette" e "rappresentazioni indirette". Le rappresentazioni implicite verranno invece espressamente indicate per mezzo del termine "rappresentazione implicita". Per ulteriori chiarimenti, cfr. il prossimo paragrafo II.2.θ e in particolare le note (63) e (67).

Se da questo punto di vista l'accento è messo sulle relazioni operazionali intercorrenti fra le forme analitiche, queste non sono oggetto di ricerca che grazie alla possibilità rappresentativa che esse concedono. L'edificazione di una teoria generale di tali relazioni non è quindi che il presupposto di un insieme di applicazioni particolari, in cui il carattere specifico del problema affrontato permette di scegliere l'adeguata rappresentazione di forma generale e di interpretare convenientemente i termini che occorrono in essa. Lo scopo finale della ricerca resta dunque quello di una scienza matematica della natura (o eventualmente di certi fenomeni sociali), capace di determinare tanto le leggi generali che sono supposte regolare ogni fenomeno specifico, che i valori particolari dei parametri quantitativi che lo caratterizzano. Se i più recenti sviluppi della ricerca e gli stessi orientamenti filosofici dell'epoca avevano gradualmente condotto a abbandonare l'impostazione baconiana e a intendere la matematica più come scienza delle relazioni fra le quantità che come scienza della quantità in quanto tali, il trapasso non era stato che il risultato di acquisizioni particolari, le quali avevano mostrato la possibilità di nuovi procedimenti risolutivi per problemi in gran parte di origine classica. Esso non era stato dunque accompagnato da una riflessione filosofica generale capace di riformulare su basi interamente nuove un vecchio edificio concettuale. La "scienza delle relazioni" è così qui - come ho già detto - la scienza di *certe relazioni*. Non solo: essa è la scienza di certe relazioni le quali sono intese intercorrere fra delle quantità che continuano a venir concepite in termini antichi, come entità numerabili o misurabili (ovvero estese). Tutto ciò che il programma euleriano sembra dunque affermare è che le quantità così intese possano venir rappresentate le une relativamente alle altre per mezzo di certe forme simboliche, le cui relazioni operazionali esprimono in termini generali i rapporti intercorrenti fra tali quantità (e permettono quindi una determinazione successiva di esse).

Ciò spiega non solo la compresenza costante nei testi settecenteschi di una doppia interpretazione degli stessi oggetti matematici, in quanto pure forme analitiche o rappresentazione simboliche di quantità,[48] ma giustifica la stessa limitazione delle combinazioni simboliche che, secondo il punto di vista in questione, possono essere intese come rappresentazioni di quantità correlate fra loro. Dalla fine del XVII secolo era infatti ormai chiaro che, fissata un'opportuna unità di misura, la condizione di geometrica misurabilità potesse ridursi a quella di numerabilità, qualora questa fosse riferita non solo ai numeri interi, ma anche a quelli frazionari o irrazionali. Addizione, sottrazione, moltiplicazione, divisione, esponenziale e logaritmo erano quindi direttamente concepibili come operazioni su quantità - definite l'una successivamente all'altra a partire dalla semplice concettualizzazione originaria del mettere e del togliere (o, se si vuole, del contare) - il cui risultato poteva essere direttamente inteso come una nuova quantità. Se certamente questo non era anche il caso delle operazioni trigonometriche, la natura di tali operazioni è manifestamente tale che una loro inclusione fra le operazioni elementari favoriva il progetto di una riformulazione analitica dei risultati rag-

[48]Cfr. *sotto*.

giunti senza comportare *de facto* alcuna difficoltà o discrasia di carattere operativo: così come nel caso del logaritmo e dell'esponenziale, il seno e l'arco seno possono infatti intendersi come operazioni la cui applicazione a numeri determinati produce numeri a loro volta perfettamente determinati. L'idea che una composizioni finita di queste otto operazioni - che potremmo dire "semplici" - conducesse direttamente da quantità a quantità doveva dunque sembrare alla metà del XVIII secolo come assolutamente naturale - oltre che compatibile con quell'ideale della conoscenza come edificio gradualmente costruito a partire da "elementi" semplici e originari, che era ormai stato ampiamente accettato, (almeno come paradigma generale, passibile di diverse interpretazioni particolari[49]). Del tutto diverso è invece il caso di operazioni come la differenziazione o l'integrazione,[50] le quali non possono applicarsi a quantità (nel senso precedente) che a condizione che queste ultime siano simbolicamente rappresentate, nei termini di altre quantità, tramite una forma composita: a differenza delle operazioni semplici - le quali possono riferirsi direttamente a variabili e costanti in quanto rappresentazioni analitiche di numeri determinati o indeterminati - differenziazione e integrazione si riferiscono esclusivamente a forme rappresentative delle relazioni intercorrenti fra quantità date, trasformando queste forme in altre forme di ugual genere. Il passaggio da quantità indeterminate a quantità determinate richiede quindi la trasposizione di tali operazioni in operazioni semplici. Se l'indicazione di certe operazioni semplici che dovranno essere compiute su certe quantità date o indeterminate permette così di rappresentare direttamente una nuova quantità relativamente a queste stesse quantità, l'indicazione di una differenziazione o di una integrazione che dovrà essere compiuta su una forma data non fa che rappresentare indirettamente una quantità. Se nel primo caso il passaggio dal formale al numerico richiede una semplice sostituzione, nel secondo esso richiede un passaggio ulteriore, il quale non contiene d'altra parte che la riduzione del secondo caso al primo.

Le strutture simboliche caratterizzate dalla composizione di simboli letterali per quantità variabili e costanti e di simboli operazionali riferiti alle operazioni semplici (che - insistendo sul loro ruolo generativo di rappresentazioni, piuttosto che sui loro caratteri strutturali - indicherò d'ora in poi come "operazioni *elementari*") godono così di uno statuto concettuale distin-

[49]Si pensi a esempio alla distinzione fra la nozione di costruzione per composizione successiva, tanto cara a esempio a Condillac, e quella di costruzione per astrazione che Euler difenderà nelle *Lettres à une princesse d' Allemagne* [cfr. Euler (1768-72), lettera C, vol. II, pp. 90-95].

[50]La conclusione a cui mi condurranno le considerazioni che seguono varrà *a fortiori* nel caso in cui si intenda considerare l'interpretazione operazionista in esse implicita come estranea all'orizzonte concettuale dei matematici settecenteschi o almeno di alcuni di essi [cfr. a questo proposito il prossimo paragrafo II.2.ι.]. Le stesse considerazioni - che qui riferisco a differenziazione e integrazione - varranno peraltro anche per operazioni strutturalmente analoghe, come il passaggio a funzioni incrementate, differenze finite o integrale finiti, così come per la δ-differenziazione lagrangiana. Le operazioni di sviluppo di una funzione in serie, prodotto infinito o frazione continua dovranno invece essere escluse in quanto ben difficilmente interpretabili come operazioni su quantità [cfr. a questo proposito il prossimo paragrafo II.2.κ.].

tivo che conduce a considerarle come oggetti matematici di tipo particolare. Dirò d'ora in poi queste strutture simboliche "*forme analitiche semplici*".[51] Per evitare ogni possibile fraintendimento ricorrerò a una definizione ricorsiva:

Def. Se α e β sono dei simboli atomici che rappresentano delle quantità variabili o costanti o delle forme analitiche semplici, allora le seguenti combinazioni simboliche: $\alpha+\beta$, $\alpha-\beta$, $\alpha\beta$, α/β, α^β, $\log_\alpha\beta$, $\sin\alpha$, $\arcsin\alpha$ sono delle forme analitiche semplici.
Se il simbolo A è esplicitamente introdotto per mezzo di una legge di sostituzione come abbreviazione simbolica di una forma analitica semplice, allora A è una forma analitica semplice.
Null'altro è una forma analitica semplice.

Il programma euleriano non consiste allora che in un programma di reinterpretazione dell'intera scienza matematica come una scienza generale delle forme analitiche semplici e delle sue applicazioni particolari.

II. 2. ζ. *Equivalenze fra forme analitiche semplici e/o quantità*

L'edificazione di una tale scienza consiste nella determinazione dei rapporti che le differenti forme analitiche semplici possono intrattenere fra loro o con altre forme analitiche. L'individuazione generale di questi rapporti permette di stabilire delle leggi universali di sostituzione la cui successiva applicazione conduce alla soluzione di ogni problema particolare al quale possa venire assegnata un'opportuna rappresentazione analitica. Per quanto nei testi settecenteschi questi rapporti siano genericamente indicati per mezzo del ricorso al segno di eguaglianza, la lettura non superficiale di questi testi mostra come questo segno assuma in differenti casi significati diversi. Un tale segno connette infatti fra loro, a seconda del contesto in cui esso è utilizzato e del carattere specifico dei *relata*, i membri di differenti classi di equivalenza.

In primo luogo un tale segno può essere utilizzato per associare una quantità rappresentata da un simbolo atomico qualsiasi a una forma analitica semplice che esprime questa quantità relativamente a altre [es.: $y = x^2$]. Si tratta qui di un'*equivalenza per posizione*.

Differenti forme analitiche semplici possono in secondo luogo venir associate in una classe di equivalenza caratterizzata dal fatto che tutti i suoi membri rappresentano la medesima quantità. Questa proprietà di certi insiemi di forme analitiche semplici può dipendere d'altra parte da circostanze

[51] L'introduzione di una simile denominazione non risponde che allo scopo di semplificare la mia esposizione per mezzo dell'esplicitazione di una demarcazione che nei testi settecenteschi resta ovunque implicita.

essenzialmente diverse, le quali danno luogo a classi di equivalenza di genere differente:

i) *Equivalenza identica fra forme analitiche semplici che rappresentano la stessa quantità* [es.: $x(x+1) = x^2 + x$] Data una forma analitica semplice la quale rappresenta una (o più) quantità, si dirà che questa stessa quantità sarà rappresentata anche da ogni altra forma analitica semplice che possa essere tratta a partire della forma originaria secondo le leggi di trasformazione simbolica concesse dall'algebra delle operazioni elementari che occorrono in essa o in ogni forma successivamente derivata. E' del tutto ovvio che tramite un simile procedimento non si potrà passare che da rappresentazioni di una quantità relativamente a un certo insieme di quantità espresse da certi simboli a rappresentazioni della stessa quantità relativamente allo stesso insieme di quantità espresse dagli stessi simboli.

ii) *Equivalenza a se stessa salvo sostituzione di una forma analitica semplice* [es.: $x^2 = (v-t)^2$ se $x = v-t$]. Data una forma analitica semplice che rappresenta una quantità, si dirà che questa stessa quantità sarà rappresentata anche da ogni altra forma analitica semplice che possa essere tratta a partire della forma originaria secondo sostituzioni concesse da equivalenze per posizione. E' chiaro che in tal caso due forme diverse esprimono la medesima quantità relativamente allo stesso insieme di quantità espresse in forma diversa.

iii) *Equivalenza a se stessa salvo doppia sostituzione di una forma analitica semplice* [es.: $x^2 = 2t-v$ se $y = x^2$ e $y = 2t-v$]. Una tale equivalenza sussiste fra due forme analitiche semplici associate per mezzo di due equivalenze per posizione alla stessa quantità, rappresentata da un simbolo atomico o da una terza forma analitica semplice. E' chiaro che una tale equivalenza può connettere tanto due diverse rappresentazioni della stessa quantità relativamente a quantità differenti fra loro, che due diverse rappresentazioni della stessa quantità relativamente al medesimo insieme di quantità o a insiemi non disgiunti di quantità.

Le equivalenze (ii) e (iii) mettono luogo a relazioni analitiche sulle quali è sempre possibile operare secondo le leggi algebriche relative alle operazioni elementari. Ciò potrà condurre a nuove equivalenze che connetteranno nuove forme analitiche semplici o fra loro o direttamente a simboli atomici e che potranno essere intese come conseguenze delle posizioni originarie. Fra queste alcune avranno una forma del tutto analoga alle equivalenze (ii) e (iii) da cui derivano e dovranno essere intese come espressioni di relazioni sussistenti fra le quantità espresse dai simboli atomici (o da certe composizioni di essi). Altre assumeranno una forma simile alle equivalenze per posizione e conterranno quindi delle rappresentazioni dirette di certe quantità relativamente a altre quantità.

Inversamente, differenti quantità potranno venire associate in una classe di equivalenza caratterizzata dal fatto che tutti i suoi membri sono espressi per mezzo della stessa forme analitica o di forme analitiche equivalenti fra loro. Le equivalenze (i)-(iii) potranno allora venir lette in senso inverso secondo lo schema seguente:

iv) *Equivalenza fra quantità espresse da forme analitiche semplici identiche* [es.: $t=v$ se $t = x(x+1)$ e $v = x^2+x$] Date due quantità espresse per mezzo di differenti forme analitiche semplici, si dirà che queste quantità sono fra loro *uguali* se tali forme analitiche sono derivabili l'una dall'altra per mezzo di trasformazioni simboliche concesse dall'algebra delle operazioni elementari. E' ovvio che una tale eguaglianza non potrà sussistere che fra quantità espresse originariamente relativamente al medesimo insieme di quantità.

v) *Equivalenza fra quantità espresse dalla stessa forma analitica semplice salvo sostituzione* [es.: $x = y$ se $x = (v-t)^3$ e $y = r^2z$ e $r^2z = (v-t)^3$]. Data un'equivalenza qualsiasi fra due forme analitiche semplici e due equivalenze per posizione si dirà che due quantità occorrenti in queste equivalenze sono fra loro uguali se la prima equivalenza conduce per mezzo della sostituzione concessa da una delle due equivalenze per posizione all'altra equivalenza per posizione.

vi) *Equivalenza fra quantità espresse da forme analitiche semplici equivalenti (ma non identiche)* [es. $x = y$ se $z^2 = 2t-v$, $x = z^2$ e $y = 2t-v$]. Date due quantità espresse per mezzo di due differenti forme analitiche semplici si dirà che queste quantità sono fra loro uguali se tali forme analitiche sono equivalenti fra loro (pur non essendo identiche).

Per quanto le equivalenze (iv)-(vi) sussistono fra quantità, piuttosto che fra forme analitiche, esse possono intendersi come leggi di sostituzione simbolica le quali possono condurre a trasformazioni formali e quindi a nuove equivalenze fra forme analitiche. E' proprio in tal modo che un tal tipo di equivalenze è generalmente utilizzato nel XVIII secolo nel corso dei procedimenti dimostrativi riferiti a quantità astratte.

I tre differenti gruppi a cui appartengono le equivalenze precedenti si distinguono fra loro per lo statuto stesso delle relazioni a cui queste fanno riferimento. Come ogni genuina relazione di equivalenza queste relazioni connettono fra loro entità globalmente differenti, la cui associazione esprime la sussistenza di una comune caratteristica locale. Il segno di eguaglianza esprime così un'identità locale fra entità la cui differenza globale è espressa dalla differenza delle rappresentazioni simboliche.

Presentando le idee di Grassmann, M. Otte ha recentemente descritto questa situazione nei termini seguenti.

> [...] let us consider the idea of an equation $a = b$. It holds, and thereby it differs from the equation $a = a$. Besides the identical which is indicated by the equal sign, something different as well is suggested by the use of the different symbols a and b. [...]
> According to where one place the identity and the difference, one can see such an aquation in two ways. One can conceive a and b as different objects and then say that the equation designates an equal aspect or an identical property of the different objects a and b. However, one can also conceive a and b as different

> properties of the same object, and then the equation designates the fact that different aspects of the same object are being treated; *a* and *b* are intensionally different but extensionally identical.[52]

Questa distinzione richiede tuttavia troppo per poter venire applicata a equivalenze riferite a un universo così povero quale quello popolato soltanto da quantità generiche e da rappresentazioni analitiche di queste proprietà. Essa richiede infatti che gli oggetti siano caratterizzabili separatamente, indipendentemente dalle proprietà su cui verte l'attenzione. Nel primo caso si dovrà infatti poter dire di due oggetti che essi sono diversi pur essendo considerati relativamente alla stessa proprietà e si dovrà quindi postulare la capacità di distinguere fra questi oggetti in base a *altre* proprietà. Nel secondo si dovrà invece poter dire di un oggetto che esso è lo stesso oggetto pur essendo considerato relativamente a differenti proprietà e si dovrà quindi postulare la capacità di tener fermo il riferimento pur modificando l'intensione.

Ora, sia che si considerino le forme analitiche come oggetti e il loro essere rappresentazioni di certe quantità come proprietà o le quantità come oggetti e il loro essere rappresentate da certe forme analitiche come proprietà, il carattere di quantità generiche delle quantità considerate impedisce ogni comparazione fra queste che non dipenda da un atto di postulazione. Questo atto può essere di due tipi. Esso può in primo luogo consistere nell'arbitraria presupposizione di un certo insieme di quantità distinte indicate per mezzo di simboli atomici x, y, &c.. Questa semplice assunzione non sarà tuttavia mai sufficiente a determinare proprietà comuni di queste quantità, né a permettere di intenderle come referenti di certe rappresentazioni. Per questo occorrerà un atto diverso che associ uno di questi simboli a una rappresentazione, nel nostro caso una forma analitica. Così la semplice relazione fra un oggetto e una sua proprietà è nell'universo in questione frutto di una postulazione di equivalenza, la quale connette una quantità a una forma. Il segno di equivalenza ha qui dunque un significato del tutto estraneo alla tipologia presentata da Otte. Ai due precedenti modi di intendere una equazione se ne dovrà dunque aggiungere un terzo, del tutto indispensabile in universi in cui la relazione fra oggetti e proprietà non sia stabilita *a priori*.

L'introduzione di equivalenze di questo genere connessa all'assunzione della distinzione delle quantità rappresentate dai simboli atomici x, y, &c. permette di dare senso a altri generi di equivalenze, le quali vertano sul rapporto così stabilito fra forme e quantità. Fra i due termini dell'antinomia si manifesta tuttavia un'asimmetria essenziale. Mentre di una quantità non si potrà infatti dire null'altro se non che essa è connessa a certe forme e è distinta da certe quantità, di una forma si potrà dire che essa è connessa a certe quantità, è distinta da altre forme e è associata a alcune di esse secondo leggi di trasformazione simbolica concesse *a priori*. Così mentre quantità distinte non possono venir associate se non in base alla forma che le rappresenta, forme distinte possono venir associate sia in base alle quantità che rappresentano che alla loro intrinseca natura simbolica. Se l'universo

[52] Cfr. Otte (1989), p. 21.

delle forme è limitato alle forme analitiche semplici questa associazione si riduce alla determinazione di un'equazione identica del tipo di quelle considerate in (i) e (iv), la quale è qui intesa del tutto indipendentemente da ogni riferimento a quantità. La determinazione di questo genere di relazioni è assegnata all'algebra elementare, la quale è intesa come un presupposto della teoria generale delle quantità.

Il passaggio dall'algebra elementare all' "analisi" è proprio segnato dall'introduzione della considerazione della quantità. In un tale contesto un'identità del tipo $a=b$ può essere considerata in modi differenti a seconda se i suoi argomenti sono intesi come forme (che rappresentano quantità) o come quantità (rappresentate da certe forme). Nel primo caso abbiamo le equazioni del secondo gruppo, nel secondo quelle del terzo.

Date due forme distinte, esse possono venir associate in quanto rappresentazioni della medesima quantità; ciò conduce a equivalenze del tipo (iii). Questo genere di equivalenze sono le sole in cui due forme distinte possono venir associate in base a proprietà delle quantità che rappresentano. Indipendentemente dalle forme che le rappresentano le quantità astratte non possono infatti essere che identiche a se stesse o completamente distinte fra loro. Tuttavia certe forme distinte possono venir associate fra loro per altra via e esprimere quindi la comune proprietà di poter essere una rappresentazione della medesima quantità. Se il verso dell'implicazione è qui invertito, la distinzione continua, come nel caso delle equivalenze del tipo (iii), a riguardare forme, mentre l'identità è l'espressione di una possibilità di trasformazione, la quale si trasferisce in una possibilità di rappresentazione della medesima quantità. Ora forme analitiche semplici diverse possono venir associate fra loro in tre modi distinti. In primo luogo esse possono corrispondersi secondo le leggi algebriche di trasformazione; ciò dà ovviamente luogo a equivalenze del tipo (i). In secondo luogo esse possono trasformarsi l'una nell'altra applicando sostituzioni concesse da equivalenze per posizione; ciò conduce a equivalenze del tipo (ii). In terzo luogo l'associazione può dipendere da una successiva applicazione di questi procedimenti di trasformazione; ciò conduce a equivalenze derivate dalle posizioni originarie, che possono a loro volta considerarsi come espressioni della possibilità di rappresentazione della medesima quantità.

La situazione è essenzialmente diversa per le equazioni del terzo gruppo, le quali esprimono un'equivalenza fra quantità assunte come distinte. Tale equivalenza non può che derivare da una corrispondenza indipendentemente rintracciata fra le forme che rappresentano queste quantità. La possibilità di associare forme fra loro distinte permette in questo caso di associare quantità distinte le quali sono a loro volta rappresentate da forme distinte. L'implicazione è qui sempre dalla corrispondenza delle forme all'equivalenza fra le quantità. Le genesi rispettive delle equivalenze dei tipi (iv)-(vi) potranno così essere descritte senza particolare difficoltà. La questione più rilevante riguarda piuttosto il carattere specifico che la relazione di equivalenza può assumere qualora essa si riferisca a quantità generiche assunte come distinte. Per quanto il criterio impiegato per stabilire questa equivalenza non possa essere altro che la trasformabilità dell'identità $a=b$ in un'equazione identica fra forme analitiche, la traduzione di questo criterio in una definizione della particolare relazione di equivalenza che è qui supposta conduce a una riduzione della quantità astratta a una forma analitica elementare costituita da un semplice simbolo atomico. Questa è ovviamente una conseguenza del fatto che le quantità non sono manipolabili che per mezzo delle rappresentazioni (atomiche o non atomiche) che le esprimono. Tuttavia perché la relazione di equivalenza possa essere intesa come una relazione fra quantità genuine, occorre associare a essa un significato diverso, il quale non può che essere il seguente: due quantità distinte sono fra loro equivalenti (o meglio: *uguali*) quando esse possono venire rappresentate in ogni contesto per mezzo della stessa forma analitica. Se è del tutto evidente che relativamente all'universo delle forme analitiche semplici questa definizione corrisponde perfettamente al criterio (e quindi ne giustifica l'uso), questo non è il caso generale. Il passaggio a forme analitiche generiche richiede quindi l'individuazione di un nuovo criterio di eguaglianza fra quantità assunte come distinte.

Per quanto la limitazione a forme analitiche semplici renda operativamente del tutto ininfluente tale distinzione, permettendo incondizionati passaggi fra le equivalenze di ognuno dei tipi considerati, questa mantiene a mio avviso più di un motivo di interesse. In primo luogo essa rende esplicito lo scopo di una teoria generale delle trasformazioni simboliche: si tratta di passare da un certo insieme di informazioni riferite alla relazione supposta fra certe quantità e certe forme analitiche a nuove informazioni relative alle quantità stesse o comunque utilizzabili nel corso di eventuali applicazioni, allo scopo di determinare le relazioni effettive fra le quantità studiate e eventualmente, il loro valore rispetto a un'unità. Questo passaggio di informazioni risulta tuttavia insufficiente alla soluzione di numerosi problemi, qualora esso non si avvalga che degli strumenti a cui si riferisce la precedente distinzione. L'introduzione di nuove operazioni che permettano il passaggio a forme analitiche differenti si rivela quindi immediatamente necessaria allo scopo di accrescere la capacità di tradurre informazioni. Si tratterà allora di capire come essa modifichi il quadro precedente, il quale dovrà quindi essere semplicemente adeguato. Prima di passare alla considerazione di questo genere di operazioni è però necessario introdurre e discutere la nozione di *funzione*.

II. 2. η. *Funzioni: forme o quantità?*

Le numerose definizioni del termine "*funzione*" che ritroviamo nei testi matematici settecenteschi possono a mio parere distinguersi in tre gruppi distinti. Al primo gruppo appartengono le definizioni che, come quella data da Johann I Bernoulli fin dal 1718, qualificano una funzione come una "quantità composta":

> On appelle [...] Fonction d'une grandeur variable, une quantité composée de quelque manière que ce soit de cette grandeur variable et de constantes.[53]

Al secondo gruppo appartengono invece le definizioni che qualificano una funzione come un'espressione analitica. A questo gruppo appartengono le definizioni date rispettivamente da Euler nell'*Introductio* e da Lagrange nella *Théorie*:

> Functio quantitas variabilis est expressio analytica quomodocunque composita ex illa quantitate variabili, et numeris seu quantitatibus constantibus.[54]

> On appelle *fonction* d'une ou plusieurs quantités, toute expression de calcul dans laquelle ces quantités entrent d'une maniére quelconque mêlées ou non avec d'autres quantités qu'on regarde comme ayant des valeurs données et invariables, tandis que les quantités de la fonction peuvent recevoir toutes les valeurs possibles.[55]

Al terzo gruppo appartengono infine le definizioni che qualificano una funzione come una "quantità dipendente da altre quantità". Il prototipo di queste definizioni è quella data da Euler nelle *Institutiones*:

> Quæ autem quantitates hoc modo ab aliis pendent, ut his mutatis etiam ipsæ mutationes subeant, eæ harum functiones appellari solent; quæ denominatio latissime patet, atque omnes modos, quibus una quantitas per alias determinari potest, in se complectitur.[56]

Altrettanto chiara è tuttavia la definizione di Lacroix:

> Toute quantité dont la valeur dépend d'une ou plusieurs autres quantités, est dite fonction de ces dernières, soit qu'on sache ou qu'on ignore par quelles opérations il faut passer pour remonter de celles-ci à la première.[57]

I commentatori hanno in generale contrapposto fra loro le definizioni del secondo e del terzo gruppo, mentre hanno equiparato quelle del primo e del secondo.[58] La chiave che ha condotto a questa interpretazione è d'altra parte facilmente individuabile e risulta chiaramente da numerosi commenti storiografici: a una nozione strettamente analitica che intende una funzione come un oggetto formale si contrappone fin dalla metà del XVIII secolo una nozione diversa, la quale insistendo sulla dipendenza fra due quantità sposta l'attenzione dall'espressione analitica alla relazione che connette fra di loro due oggetti distinti, anticipando così la nozione moderna di funzione.

Questa lettura è tuttavia viziata da una concezione moderna secondo la quale un oggetto matematico può essere definito attraverso la determinazione di un insieme di proprietà che lo contraddistinguono e ne fissano il comportamento in tutti i contesti operativi. Una funzione può così essere definita

---

[53]Cfr. Johann I Bernoulli (1718), p. 241.

[54]Cfr. Euler (1748), p. 4.

[55]Cfr. Lagrange (1797), p. 1 e (1813), p. 1.

[56]Cfr. Euler (1755), p. VI. Cfr. la nota (142) del precedente capitolo II.1..

[57]Cfr. Lacroix (1797), vol. 1, p. 1 e (1810-19), *ididem*.

[58]Cfr. a esempio Youschkevietch (1976) e Monna (1972).

come una sorta di scatola nera, un semplice agente causale: *ciò che associa* secondo certe modalità certi oggetti a altri oggetti, senza che sia per nulla richiesta l'esplicitazione della natura di questo agente, senza che sia chiesto ciò che esso *è*. Se vi sono molte circostanze in cui la scatola può essere facilmente aperta e altre in cui essa si presenta di per se stessa come trasparente (è il caso delle odierne "funzioni elementari"), la generalità della ricerca matematica impone di considerare questi come casi particolari in cui le proprietà dell'oggetto ne svelano immediatamente la natura o addirittura si presentano con essa. Se è proprio nel corso del XVIII secolo che - a partire soprattutto dal noto dibattito sulle forze vive - questa concezione epistemologica comincia a assumere legittimità, la lettura dei testi matematici dell'epoca mostra con tutta evidenza che essa non si è ancora stabilmente installata nell'orizzonte concettuale dei loro autori.

Tutto ciò da cui l'attenzione di un matematico settecentesco può dunque essere attirata è la *sussistenza* di una relazione fra due quantità assunte come distinte[59]. Ma come può manifestarsi una relazione, in termini non puramente qualitativi, se non attraverso la determinazione delle proprietà formali della coppia di termini che essa associa fra loro? Se la "nozione moderna" è rigettata, come è possibile parlare - come io stesso ho fatto più sopra - di una scienza di (alcune) relazioni? D'altra parte se una quantità non è intesa come un'entità singolare e determinata in termini specifici (come potrebbe essere il caso, a esempio, dell'ordinata della cicloide o dell'angolo di tangenza determinato da una parabola), ma è piuttosto intesa in termini generici, in quanto "quantità astratta", come può far oggetto di una teoria matematica, una volta che venga negata la possibilità di trattarla semplicemente come termine di una relazione astrattamente definita?

E' la negazione di una risposta possibile a questo genere di domande che pone come inevitabile l'alternativa precedente: abbandonato un punto di vista strettamente geometrico, o la matematica è la scienza delle forme analitiche o essa è la scienza delle leggi di dipendenza modernamente intese. Così la funzione, oggetto indiscutibile dell'analisi euleriana o è una forma analitica o è una legge di dipendenza sia pure non ancora perfettamente concettualizzata[60].

---

[59]Si osservi d'altronde che le definizioni del terzo gruppo non rinviano in quanto tali a una *tavola di corrispondenza* fra due collezioni di valori, ma piuttosto a una quantità che dipende da un'altra quantità (o meglio: una quantità il cui valore dipende dal valore di un'altra quantità). Se l'oggetto funzione non è qui inteso esplicitamente come un'espressione analitica, esso non è nemmeno necessariamente concepito come una tavola di corrispondenze fra insiemi (come è il caso della definizione moderna). La funzione è piuttosto intesa come la *quantità* che riceve certe assegnazioni di valori, la quale non può essere in ultima istanza rappresentata che per mezzo di una forma.

[60]La contrapposizione fra le nozioni di contrapposizione e dipendenza nella determinazione del concetto di funzione è stata ad esempio sottolineata da J. Cavaillès [cfr. Cavaillès (1937), p. 24]:

> [...] ici - egli scrive, riferendosi alle definizioni del secondo tipo - c'est la composition qui définit la fonction, non la dépendance posée entre termes donnés extra-analytiquement. D'où la limitation aux expressions analytiques connues.

In realtà un'alternativa esiste e è proprio questa, a mio avviso, che qualifica l'analisi euleriana e rende contemporaneamente ragione di tutte le definizioni, le quali non si distinguono a ben guardare che per un trasferimento dell'enfasi. Una relazione fra due quantità può infatti semplicemente manifestarsi attraverso una rappresentazione di una di queste quantità nei termini dell'altra. Una quantità può quindi essere studiata in astratto in quanto rappresentata da una forma analitica che esprime la relazione che essa mantiene con altre quantità rappresentate per mezzo di simboli atomici occorrenti in questa forma. Ciò nonostante la forma analitica non è una rappresentazione della relazione in quanto tale, ma piuttosto della quantità che si intende studiare. La relazione è esibita in concreto, mostrando la quantità correlata alla quantità data nei termini di una forma che esprime il procedimento operazionale che occorre seguire per passare dalla seconda alla prima. Ora, il termine "funzione" non indica nei testi settecenteschi che una quantità in quanto oggetto di studio del matematico. A seconda se l'enfasi è messa sull'oggetto dell'indagine o sulla forma della sua rappresentazione astratta, una funzione è quindi definibile o come una quantità o come una forma che rappresenta questa quantità. Così come non esiste in questo quadro contrapposizione di principio fra scienza delle quantità astratte (non isolate, né intese nella loro determinazione specifica) e scienza delle relazioni che esse intrattengono fra di loro, non esiste contrapposizione fra una definizione che insiste sulla natura intrinseca dell'entità di cui si intende parlare e un'altra che insiste piuttosto sulla forma in cui questa entità si presenta al discorso. La ragione è che, una volta che si sia scelto di liberare la nozione di quantità dai caratteri specifici delle sue occorrenze particolari, senza edificare un nuovo sistema di rappresentazione, ma cercando di sfruttare a questo scopo gli strumenti stessi dell'analisi post-newtoniana eventualmente localmente reinterpretati,[61] non vi è nessun modo di trattare di essa come oggetto non concettuale, il quale non la riduca operativamente a una forma analitica.

Così una funzione deve essere intesa, a seconda dei contesti particolari, o come una forma analitica che rappresenta una quantità o come una quantità rappresentata per mezzo di una forma analitica. Questa discrasia non è tuttavia l'espressione di un contrasto di orientamenti, ma lo è piuttosto dell'ambiguità nella quale il programma di Euler-Lagrange sembra affondare intrinsecamente le sue radici, in quanto tentativo di fornire una trattazione matematica della quantità come entità astratta per mezzo degli strumenti tecnici e concettuali dell'analisi post-newtoniana.

---

[61]Non si tratta qui soltanto di accettare la vecchia concezione della quantità come "ciò che è numerabile o misurabile", o "ciò che è suscettibile di aumento o diminuzione" [cfr. la precedente nota (40)], ma anche e soprattutto di continuare a pensare a una scienza della quantità come la determinazione di strumenti teorici adeguati a numerare o a misurare delle quantità, come l'edificazione degli schemi generali di un calcolo.

II. 2. θ. *Funzioni e forme analitiche semplici*

Ma di che genere di forme analitiche si tratta? Le considerazioni contenute nel precedente paragrafo II.2.ε. sembrano suggerire immediatamente la risposta: intesa come forma analitica, una funzione sembra doversi intendere come una forma analitica semplice. Questa risposta è corretta e è ampiamente giustificata tanto da ragioni concettuali, connesse all'immediata traducibilità numerica di una forma analitica semplice, quanto da indagini testuali. Questa è d'altra parte l'opinione avanzata da Fraser in (F.i). La correttezza di questa risposta non si accompagna tuttavia alla sua esaustività.

Per rendersi conto di questo è sufficiente considerare l'identità seguente $\frac{d}{dx}\left(x^n\right) = nx^{n-1}$. Mentre il secondo membro di questa identità è una forma analitica semplice, il primo membro non lo è. Ma se fra i due membri vige un'identità non abbiamo forse ragione di affermare che se il secondo membro rappresenta una quantità, questo deve essere il caso anche del primo membro? Per quale motivo dobbiamo quindi escludere che una forma analitica certamente non semplice come $\frac{d}{dx}\left(x^n\right)$ possa rappresentare una quantità e essere, quindi, una funzione?

Per rispondere a questa domanda è necessario introdurre una distinzione che ho finora evitato, la quale ci induce a usare, almeno per un momento, un linguaggio un poco più preciso per parlare del rapporto fra una forma analitica e una quantità. Esistono infatti differenti modi in cui una forma analitica può rappresentare una quantità.

Il primo corrisponde semplicemente a una convenzione che permette di riferirsi a una quantità distinta da altre per mezzo di un simbolo atomico, a esempio x, che ne costituisce, per così dire, il nome. Trattandosi qui di quantità astratte una quantità non può naturalmente essere identificata indipendentemente dall'assegnazione a essa di un nome. L'atto battesimale non potrà quindi tradursi in una usuale definizione: "chiamo x la quantità individuata *così e così*". Tutto ciò che si potrà dire è, a esempio, che i simboli atomici x, y, z nominano tre quantità distinte, le quali non sono indipendentemente individuate che per la proprietà relazionale di essere fra loro distinte. Questo tipo di rappresentazione può essere detto "*atomico*". E' del tutto ovvio che nessuna teoria matematica possa essere edificata a partire da un insieme per quanto grande di rappresentazioni atomiche isolate. Per questo è necessario connettere tali rappresentazioni a rappresentazioni di altro tipo che esprimano certe ulteriori proprietà delle quantità sotto esame. Se vogliamo limitarci a quantità astratte non abbiamo, dal punto di vista euleriano, nessun'altra possibilità che quella di connettere queste rappresentazioni a forme analitiche strutturate, le quali possono venir classificate in base ai loro caratteri particolari e connesse fra loro. La determinazione di classificazioni e connessioni è ovviamente, dal punto di vista euleriano, lo scopo essenziale di quella parte della matematica che precede e informa ogni applicazione, la quale è volta a volta determinata dall'aggiunta di determinazioni specifiche per le quantità rappresentate per mezzo di forme analitiche di una certa classe. La rappresentazione per mezzo di un simbolo atomico non ha quindi altra funzione che quella di distinguere una quantità da altre, permettendo il riferimento. Così se un simbolo atomico è una forma analitica (non semplice) che rappresenta una quantità, il ruolo di questa rappresentazione non è che quello di richiamare o partecipare a una forma di genere essenzialmente differente. La rappresentazione è qui, per così dire, preventiva. Così se il simbolo x può certamente richiamare a una funzione, ciò non può avvenire se non nel caso in cui esso sia in qualche modo associato a una forma strutturata o per mezzo di un'equivalenza per posizione che lo associa a una forma analitica semplice, o per mezzo del suo occorrere in una forma analitica che è termine di un'identità fra forme analitiche o per mezzo di un'equivalenza che lo associa a forme analitiche strutturate ma non semplici. Diremo quindi che in questi casi un termine atomico *nomina* una quantità e *indica* una forma strutturata, eventualmente incognita. A seconda se intendiamo una funzione come una quantità o come una forma avremo quindi che un termine atomico nomina o indica una funzione. In senso stretto esso non può quindi venire inteso come una funzione. Funzioni saranno piuttosto o la quantità che esso nomina o la forma che esso indica.

La rappresentazione avviene secondo modalità del tutto differenti qualora una quantità - a cui ci si può ora riferire per mezzo del suo nome, diciamo y - è associata a una forma analitica strutturata, la quale rappresenta questa quantità relativamente a altre quantità, diciamo x, z, &c.. In questo tipo di rappresentazione, che potremmo qualificare come *esplicita* non si tratta più di nominare una quantità, ma di esprimerne in termini astratti e espliciti certe particolari proprietà relazionali, la cui conoscenza permetta il passaggio dalla determinazione delle quantità x, z, &c. alla determinazione della quantità y. Proprio questa possibilità di passare da determinazione a determinazione giustifica l'edificazione di una teoria generale delle quantità così rappresentate e è quindi una condizione essenziale che la scelta della rappresentazione deve soddisfare. Una quantità - intesa come ciò che è numerabile o misurabile - può venir determinata in due differenti modi; nel primo caso essa può venire identificata con un numero riferito a un'opportuna unità, nel secondo caso essa può venire identificata con un'entità geometrica opportunamente connessa a altre entità geometriche tramite relazioni espresse per mezzo di una figura. Consideriamo il primo tipo di determinazione. E' facile capire come il passaggio da determinazione a determinazione possa qui avvenire secondo due procedimenti fra loro essenzialmente distinti.[62] Nel primo caso esso non richiede che l'esecuzione delle operazioni indicate per mezzo della forma analitica relativamente ai numeri che esprimono le quantità determinate; il risultato di queste operazioni conterrà la determinazione richiesta. Nel secondo caso è al contrario necessaria una preventiva trasformazione della forma analitica in una forma analitica di genere differente, la quale permetta la successiva applicazione del primo procedi-

[62] Cfr. il precedente paragrafo II.2.ε..

mento. Nel primo caso si tratterà allora di una rappresentazione che potremmo dire *diretta*, nel secondo la rappresentazione potrà invece essere detta *indiretta*.[63] Fra le forme analitiche considerate da Euler e Lagrange, solo le forme analitiche semplici e gli sviluppi infiniti (serie, prodotti infiniti o frazioni continue) permettono una rappresentazione diretta delle quantità (in riferimento a una determinazione numerica di queste). Tuttavia mentre le forme analitiche semplici forniscono *in generale* questo genere di rappresentazione, questo non è il caso degli sviluppi infiniti, i quali non possono farlo che sotto certe condizioni. Se la situazione è certamente più complessa in riferimento a determinazioni geometriche delle quantità,[64] è chiaro che questa situazione introduce - soprattutto una volta che sia stato generalmente abbandonato l'ideale costruttivo tipico della geometria classica[65] - un motivo essenziale per favorire rappresentazioni per mezzo di forme analitiche semplici. Una forma analitica strutturata, ma non semplice, è così pensata, nel corso del XVIII secolo più che come una rappresentazione immediata di una quantità, come una trasformata di una forma analitica semplice o come un simbolo strutturato atto a permettere il riferimento a una forma analitica semplice (o eventualmente a una classe di forme analitiche semplici) attraverso l'esibizione esplicita di certe proprietà operative che la contraddistinguono. Se essa rappresenta una o più quantità, essa non lo fa quindi, nella maggioranza dei casi,[66] che per l'intermediario di una o più forme analitiche semplici a cui essa rinvia secondo modalità differenti nei vari casi. A seconda se intendiamo una funzione come una quantità o come una forma analitica (semplice) diremo quindi che, in questi casi, una forma analitica strutturata, ma non semplice, *rappresenta indirettamente* o *rinvia a* una funzione.

Certe classi di quantità possono d'altra parte venire implicitamente rappresentate, tramite la posizione di un'equazione, in cui compare un simbolo atomico che rappresenta genericamente un termine di questa classe, in quanto distinto da altre quantità astratte rappresentate per mezzo di altri

[63]La distinzione fra "rappresentazione diretta" e "rappresentazione indiretta" non ha ovviamente senso che relativamente a *rappresentazioni esplicite*. I termini "rappresentazione diretta" e "rappresentazione indiretta" dovranno quindi intendersi d'ora innanzi come sinonimi dei termini più precisi "rappresentazione esplicita diretta" e "rappresentazione esplicita indiretta".

[64]In questo caso il passaggio da determinazione a determinazione avviene attraverso il riconoscimento di una forma analitica strutturata in quanto rappresentazione di un'entità geometrica che è così associata alle entità date. Qui nulla esclude, in linea di principio, che questo riconoscimento possa avvenire direttamente anche nel caso di rappresentazioni costituite da forme analitiche non semplici.

[65]Se è chiaro che un simile punto di vista (il quale considera, a esempio, risolto un problema di quadratura solo qualora sia stato esibito il poligono di area uguale all'area della figura da quadrare) non sia in se stesso per nulla incompatibile né con l'uso di procedimenti analitici [cfr. il precedente paragrafo II.2.δ.], né con lo stesso programma euleriano (il quale non esclude la possibilità di applicazioni particolari che rispondano a questo ideale), è anche del tutto evidente che l'idea di rappresentare una quantità astratta per mezzo di una forma analitica si è storicamente accompagnata al suo definitivo abbandono e alla progressiva edificazione di una geometria analitica.

[66]Le eccezioni riguardano qui gli sviluppi infiniti in presenza di certe condizioni che specificherò più avanti.

simboli atomici che compaiono in questa stessa equazione, la quale esprime così le condizioni operazionali alle quali deve sottostare una rappresentazione esplicita di una qualsiasi quantità appartenente alla classe, che risulta così intensionalmente individuata. Tale equazione non mette tuttavia luogo in senso stretto a alcuna rappresentazione: essa non è certamente né una rappresentazione individuale di ogni quantità appartenente alla classe, né una rappresentazione comune di tutte le quantità di tale classe, né è una rappresentazione della classe in quanto tale più di quanto la determinazione del concetto di oggetto rosso possa essere una rappresentazione della classe di tutti gli oggetti rossi. Essa non fa che *esprimere* (piuttosto che rappresentare) le condizioni a cui una eventuale rappresentazione delle quantità della classe dovrebbe sottostare. Se - per adeguarci a un uso corrente - vogliamo parlare quindi di "rappresentazione implicita" o di una classe di quantità o delle quantità appartenenti a tale classe, non possiamo farlo che sottolineando il carattere improprio di una "rappresentazione implicita",[67] la quale non fa che rinviare quindi a un insieme di funzioni, che possono venir trattate come incognite.

Se queste precisazioni non vogliono in nessun modo censurare, nel corso di una ricostruzione storica, l'impiego di un linguaggio più immediato che si permetta, a esempio, di riferirsi a $\frac{d}{dx}\left(x^n\right)$ o a y come a una funzione di x, né intendono sottintendere che questo uso sia del tutto estraneo ai matematici settecenteschi, esse chiariscono, io credo, il senso di questo riferimento, rendendolo compatibile tanto con la restrizione indicata in (F.i), che con quelle definizioni che qualificano una funzione come una forma.

II. 2. ι. *Rappresentazioni indirette della quantità*

Fra le rappresentazioni indiretta di una quantità, la sola largamente diffusa nel corso del XVIII secolo è la rappresentazione di tale quantità per mezzo di una forma analitica che esprime in termini espliciti un legame con una diversa forma analitica, la quale rappresenta a sua volta (direttamente o indirettamente) una quantità.[68] Tranne che in casi particolari, i quali resta-

---

[67]Questo giustifica il mio uso del termine "rappresentazione" (il quale intende riferirsi al concetto proprio di rappresentazione "come ciò che è per qualcosa") [cfr. le precedenti note (47) e (63)]. Le "rappresentazioni implicite" verranno trattate più dettagliatamente del prossimo paragrafo II.2.λ..

[68]Un altro modo per rappresentare indirettamente una quantità può essere a esempio quello di rappresentarla tramite un simbolo opportunamente definito, il quale rinvii all'esito di un procedimento di interpolazione riferito a una collezione ordinata di forme analitiche, la cui natura sia tale da impedire la rappresentazione diretta di un termine intermedio per mezzo di un'opportuna sostituzione. Un esempio piuttosto significativo mi sembra costituito da quelle "funzioni" che Euler qualifica come "inesplicabili" [cfr. Euler (1755), parte II, cap. XVI]:

> Functiones inexplicabiles hic voco, [egli scrive], quæ neque expressionibus determinatis, neque per æquationum radices explicari possunt; ita ut non solum non sint algebricæ, sed etiam plerumque incertum sit, ad quod genus trascendentium pertineant. [*ivi*, p. 769].

rono complessivamente isolati, almeno fino al secondo decennio del XVIII secolo, questo genere di rappresentazione indiretta è generalmente utilizzato dai matematici settecenteschi per riferirsi a funzioni incrementate, differenze finite, differenziali, rapporti differenziali o derivate, variazioni, integrali (eventualmente finiti) e, assai raramente, limiti. Per quanto in tutti questi casi una simile rappresentazione possa anche essere perfettamente interpretata come l'indicazione di un'operazione non elementare che deve essere compiuta su una certa forma analitica (eventualmente indeterminata), è perfettamente evidente dalla lettura dei testi dell'epoca che un simile orientamento cominciò a diffondersi solo nell'ultimo quarto di secolo,[69] costituendo fra l'altro lo stesso fondamento epistemologico della teoria delle funzioni analitiche di Lagrange.

Se si adotta il primo punto di vista siamo qui di fronte a una quantità rappresentata per mezzo di una forma opportuna che la connette a altre quantità rappresentate da altre forme. Un simbolo come *dy* sarà allora riferi-

---

Nonostante la generalità della sua definizione (negativa), Euler non si riferisce in realtà che a funzioni che possono venir indicate in generale per mezzo di una somma finita $S_x = \sum_{k=1}^{x} A_k$ [nella notazione di Euler: $\overset{x}{S} = \overset{1}{A} + \overset{2}{B} + \overset{3}{C} + \ldots + \overset{x}{X}$] in cui l'indice x è un numero positivo qualsiasi. Per quanto l'uso del termine funzione sembri qui riferirsi a una quantità (dipendente da x [secondo la definizione di funzione data da Euler all'inizio del suo trattato: cfr il precedente paragrafo II.2.η.]), è evidente che la stessa possibilità di operare su questa quantità dipende da una trasformazione che conduca a rappresentarla per mezzo di un'opportuna forma analitica. Ecco come Euler perviene a un tale risultato. Indicando rispettivamente con $S_{x,n}$ e con $T_{x,n}$ le somme $S_x + \sum_{k=x+1}^{n} A_k$ e $S_{x+\omega} + \sum_{k=x+\omega+1}^{n} A_k$ si avrà: $T_{x,\infty} = S_{x,\infty+\omega}$, ma essendo anche: $S_{x,\infty+\omega} = S_{x,\infty} + \omega[S_{x,\infty+1} - S_{x,\infty}] = \omega[S_{x,\infty+1}] + (1-\omega)S_{x,\infty}$ e $S_{x,\infty+1} = S_{x,\infty} + A_{\infty+1}$, si potrà concludere: $T_{x,\infty} = S_{x,\infty} + \omega A_{\infty+1}$, ovvero: $S_{x+\omega} - S_x = \omega A_{\infty+1} + \sum_{k=x+1}^{n} A_k - \sum_{k=x+\omega+1}^{n} A_k$, che per $\omega = dx$ esprime il differenziale $d(S_x)$ mentre per $x=0$ si trasforma, dopo opportuni cambi di variabile, nell'identità: $S_x = x A_{\infty+1} + \sum_{k=1}^{\infty} A_k - \sum_{k=1}^{\infty} A_{x+k}$, che esprime la trasformazione cercata. Posto a esempio $A_k = 1/k$, si avrà:

$$S_x = \sum_{k=1}^{x} 1/k = 0 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k(x+k)} =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x}{k}\left[\frac{1}{k} - \frac{x}{k^2} + \frac{x^2}{k^3} - \&c.\right] = x\left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}\right] - x^2\left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^3}\right] + x^3\left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^4}\right] - \&c.$$

[69]Cfr. il prossimo capitolo III.4.. L'ostacolo all'adozione di un tale punto di vista è ovviamente costituito dalla ristrettezza della nozione di operazione che deve a questo scopo venir liberata dall'esclusivo riferimento a quantità, per riferirsi piuttosto a rappresentazioni di quantità.

to a una quantità individuata per mezzo della relazione che essa intrattiene con la quantità y. Benché questa relazione sia tale da condurre alla determinazione di un procedimento operazionale che permette il passaggio da una forma strutturata che rappresenti direttamente la quantità y a una forma strutturata che rappresenti direttamente la quantità dy, la relazione indicata dal simbolo dy è essenzialmente una relazione fra quantità e solo successivamente una relazione fra forme: sono i caratteri specifici della relazione fra quantità che giustificano il procedimento operativo e ne forniscono un significato. Se si adotta al contrario il secondo punto di vista, siamo invece di fronte a una forma (a esempio $\frac{d}{dx}(x^n)$) che rinvia a un'altra forma (nx^{n-1}), la quale è a sua volta operativamente connessa a una terza forma (x^n). La relazione indicata dal simbolo dy è così una relazione essenzialmente operazionale. Questo simbolo continuerà a rappresentare (indirettamente) una quantità correlata a un'altra quantità, ma esso sarà immediatamente riferito a una forma (la forma analitica semplice tratta a partire dalla forma che rappresenta y per mezzo dell'applicazione di certe operazioni) e saranno i caratteri specifici della relazione operazionale a giustificare certe applicazioni della corrispondente teoria analitica. L'identità $z = dy$ dovrà quindi intendersi, a seconda dei punti di vista, come un'equivalenza per posizione - che correla una quantità a una forma - o come la semplice enunciazione di una convenzione che assegna alla quantità y un nuovo nome. Identità come $\frac{d}{dx}(x^n) = nx^{n-1}$ o $\frac{d^2}{dx^2}(x^n) = \frac{d}{dx}(nx^{n-1})$ non saranno, al contrario, che delle equivalenze identiche riferite a regole operazionali non algebriche ma altrettanto perfettamente determinate.

Le considerazioni precedenti non si applicano tuttavia, in modo non problematico, che a funzioni incrementate, differenze finite, differenziali, rapporti differenziali o derivate e variazioni. I matematici settecenteschi disponevano infatti dell'assicurazione che nessuna successione di trasformazioni formali che coinvolgesse questo genere di rappresentazioni potesse condurre a situazioni in cui a una rappresentazione indiretta di una quantità non corrispondesse (per semplici equivalenze identiche) una rappresentazione diretta della stessa quantità. Per ciò che riguarda i limiti, è sufficiente osservare che nel corso del XVIII essi non comparvero mai, se non allo scopo di esprimere le condizioni di convergenza di uno sviluppo - cosa che, come vedremo, non riguardava che alcuni aspetti applicativi della teoria generale delle forme analitiche - o di fornire una base adeguata per la giustificazione dell'algoritmo differenziale. Ben più problematico, relativamente alla precisa caratterizzazione dei concetti chiave dell'analisi euleriana - è invece il caso della rappresentazione integrale. Non solo i matematici del periodo non disponevano infatti di nessuna assicurazione che la classe delle forme analitiche semplici fosse chiusa rispetto all'integrazione dei suoi membri,[70] ma essi sapevano perfettamente come un integrale ellittico[71] non potesse essere espresso all'interno di questa classe, pur esprimendo nei differenti casi entità geometriche e meccaniche perfettamente determinate e certamente interpretabili come quantità (a esempio, l'arco di un'ellisse o quello di un'iperbole). Questa circostanza, senza dubbio problematica in relazione a una formulazione astratta del programma euleriano e all'esigenza di una precisa determinazione dei concetti fondamentali di cui essa non può che avvalersi, si rivela tuttavia assai meno preoccupante una volta che l'interesse del matematico sia attratto dalla questione locale che essa pone e, in particolare, dalla difficoltà di fornire gli strumenti adeguati tanto per una determinazione di questi integrali, che per una loro opportuna manipolazione analitica. Lo sviluppo in serie intera della funzione integranda poteva in particolare fornire a questo scopo un ausilio essenziale, trasformando la forma integrale in una forma analitica che, per quanto non semplice, poteva in generale venire trattata tramite un'estensione delle leggi algebriche e facilmente confrontata con altre. In questo modo la stessa determinazione della quantità connessa alla forma integrale poteva avvenire per approssimazioni successive e arrestarsi dunque, in ogni circostanza particolare, al grado di precisione desiderato.

II. 2. κ. *Sviluppi in serie intere*

Gli integrali ellittici non sono che un esempio dei tanti problemi matematici che fin dalla seconda metà del XVII secolo condussero a un utilizzo sempre più diffuso delle serie intere. Fu Newton che, più di ogni altro, insistette sul ruolo essenziale delle procedure di sviluppo connettendo ad esse la sua stessa formulazione del *calcolo*. Per rendersi conto di come questa procedura possa intervenire nella soluzione del problema precedente è sufficiente considerare il classico esempio della rettificazione dell'arco di ellisse che Wallis[72] aveva ricondotto fin dal 1655 a un calcolo analogo a quello dell'integrale

$$(1) \qquad s = \int_0^x ds = \int_0^x dx\sqrt{dx^2 + dy^2} = \int_0^x dx\sqrt{\frac{a^2 - cx^2}{a^2 - x^2}}$$

[70]Mi riferisco qui all'operazione che consiste nel calcolo dell'integrale di una data funzione esplicita. Per i problemi connessi alla rappresentazione per mezzo di equazioni differenziali, cfr. *sotto*.

[71]La forma generale di un integrale ellittico, la quale venne per la prima volta individuata da Lagrange nel 1784 [cfr. Lagrange (1784-85)], è $\int R(x, \sqrt{P(x)})dx$ dove R è una funzione razionale e P è un polinomio di grado 3 o 4. Sull'evoluzione della teoria degli integrali ellittici cfr. Houzel (1978).

[72]Cfr. Wallis (1656) (benché il trattato di sia datato 1656, la sua stampa fu completata nel corso dell'anno precedente [cfr. Scriba (1976), p. 148a]).

in cui s è l'arco cercato, x e y sono le coordinate di un punto generico dell'ellisse che costituisce una estremità dell'arco - l'altra essendo posta nel punto di coordinate ortogonali (0, b) rispetto a un origine collocata nell'intersezione dei due assi - c è una costante uguale a $1 - \frac{b^2}{a^2}$ e a e b sono i due semiassi. Sviluppando numeratore e denominatore della funzione integranda secondo la regola del binomio avremo:

$$(2) \qquad s = \int_0^x dx \left[a - \frac{1}{2}a^{-1}cx^2 - \frac{1}{8}a^{-3}c^2x^4 - \&c. \right] \left[a^{-1} + \frac{1}{2}a^{-3}x^2 + \frac{3}{8}a^{-5}x^4 + \&c. \right]$$

da cui, moltiplicando termine a termine e distribuendo l'integrale, si trae:

$$(3) \qquad s = \int_0^x dx \left[1 + \frac{1}{2}(1-c)\frac{x^2}{a^2} + \frac{1}{4}\left(-\frac{1}{2}c^2 - c + \frac{3}{2} \right)\frac{x^4}{a^4} + \&c. \right] = \\ = x + \frac{1-c}{6a^2}x^3 + \frac{-c^2-2c+3}{40a^4}x^5 + \&c.$$

Se la intendiamo indipendentemente da ogni interpretazione geometrica delle quantità cui essa si riferisce, una simile identità connette un simbolo atomico a una forma analitica strutturata che esprime certe operazioni riferite alle quantità a, $b = \pm a\sqrt{1-c}$ e x. Ora, per quanto sia banalmente verificabile che queste quantità siano esattamente quelle che intervengono nella forma analitica originariamente associata a s, la quale connette questo simbolo a una forma analitica semplice, possiamo da questa sola osservazione - e indipendentemente da ogni interpretazione geometrica dei simboli analitici - trarre la conclusione che la forma integrale rappresenta (sia pure indirettamente) una quantità? Una tale domanda pone, a ben guardare, due problemi che possono essere fra loro distinti: la serie in questione può essere considerata come rappresentazione di una quantità? se questo è il caso, possiamo concludere da qui che anche la forma analitica originariamente associata a s rappresenta (indirettamente) una quantità? La questione può naturalmente essere posta in termini del tutto generali: data una forma analitica strutturata (finita), la quale non è convertibile per mezzo di trasformazioni identiche in una forma analitica semplice, e una procedura che associa questa forma analitica a una serie intera costruita a partire da essa, sotto quali condizioni possiamo affermare: i) che la serie rappresenta una quantità; ii) che la stessa forma analitica rappresenta una quantità?

Posto di fronte a simili questioni un matematico moderno incomincerebbe con il separare la serie dalla forma analitica da cui essa è tratta.

Considerata la seconda, egli si domanderebbe innanzitutto se essa è tale da esprimere una funzione definibile su un certo intervallo I di $\mathbf{R}^n$. Da un'eventuale risposta positiva egli ne concluderebbe comunque che questa rappresenta un *numero reale* se e solo se le variabili che intervengono in essa assumono dei valori appartenenti a I. Passando alla considerazione della serie, egli si domanderebbe poi se esistono delle condizioni numeriche relative alle variabili che occorrono in essa, sotto le quali questa possa essere dichiarata convergente a una funzione a valore reale. Data un'ulteriore risposta positiva ne concluderebbe comunque che la serie rappresenta un *numero reale* se e solo se tali variabili assumono dei valori compatibili con le condizioni numeriche fissate. A questo punto egli si porrebbe il problema di sapere se i due numeri reali così identificati corrispondono fra loro qualora le variabili comuni assumano gli stessi valori. Per rispondere a questa domanda non sarebbe certamente necessario valutare separatamente il valore della funzione espressa dalla forma analitica (finita). Il matematico in questione potrebbe infatti scegliere due strade. In primo luogo egli potrebbe domandarsi se il procedimento di costruzione termine a termine della serie possa essere ricondotto a una successione di sostituzioni *salva identitate* garantite dalla postulazione di certe condizioni numeriche,[73] determinabili *a priori* rispetto a ogni passaggio. Assicurato di questa possibilità, egli sarebbe nelle condizioni di affermare che, *se tutte queste condizioni sono contemporaneamente rispettate*, allora la serie converge alla funzione espressa dalla forma analitica finita a partire dalla quale essa è stata costruita: il valore assunto dalla seconda per ogni assegnazione alle variabili di un valore compreso fra i limiti stabiliti, corrisponde al valore limite della prima. Solo dopo questi successivi controlli egli intenderebbe la relazione fra serie e funzione come una relazione di identità, sia pure sottoposta a certe condizioni restrittive che egli ha ormai determinato. In secondo luogo il nostro matematico potrebbe domandarsi se i termini successivi della serie corrispondono ai termini successivi del polinomio di Taylor associato alla funzione espressa dalla forma analitica finita in un punto $(p_1, p_2, \ldots, p_n)$ appartenente a I. Nel caso di una risposta positiva egli si rivolgerebbe ancora alla funzione e, in forza dei noti teoremi generali relativi alla serie di Taylor, cercherebbe le condizioni che ne garantiscono l'analiticità puntuale.[74] Trovate queste condizioni egli potrebbe allora trasporle in condizioni di convergenza della serie alla funzione.[75]

---

[73]Per ciò che riguarda l'esempio particolare del precedente integrale ellittico, occorrerà semplicemente osservare che le sostituzioni dei due sviluppi binomiali alle radici della forma finita richiedono rispettivamente le condizioni $|cx^2| < a^2$ e $x^2 < a^2$, che, per $|b| \leq |a|$, si riducono alla condizione comune $|x| < |a|$, mentre la distribuzione dell'integrazione che conduce al terzo membro della (3) richiede l'uniforme convergenza della serie che costituisce l'integranda del secondo membro, la quale è comunque garantita dalla stessa condizione.

[74]E' chiaro che l'applicazione di questa procedura al precedente caso particolare non è in nessun modo ostacolata dal carattere integrale della funzione, il quale viene ovviamente meno dopo la prima differenziazione.

[75]La corrispondenza fra i risultati ottenuti tramite questi diversi procedimenti è garantita *a priori* dal teorema di unicità dello sviluppo per le funzioni analitiche.

Totalmente diverso il ragionamento di un matematico della seconda metà del XVIII secolo. Laddove il matematico moderno vede due forme analitiche separabili, fra le quali è possibile stabilire una relazione di identità solo *dopo* aver verificato la sussistenza di certe condizioni (determinabili del tutto indipendentemente dall'analisi della procedura che porta dalla forma analitica finita alla serie), alcune delle quali si traducono in restrizioni numeriche che esprimono *a priori* i limiti di validità di questa relazione, egli vede una successione di identità incondizionate, che attraverso varie sostituzioni si trasformano l'una nell'altra fino a pervenire a un risultato finale espresso per mezzo di una nuova identità altrettanto incondizionata che associa indissolubilmente fra loro le due forme analitiche. L'obiettivo principale che egli pone alla sua ricerca è d'altra parte proprio la costruzione di una rete di connessione fra forme analitiche, la quale fornisca un insieme di regole di sostituzione opportune, la cui applicazione permetta il passaggio da una forma assegnata a un'altra forma del tipo volta a volta richiesto. La possibilità di disporre di regole precedenti di sostituzione permette d'altra parte l'estensione di questa stessa rete, aumentando le possibilità delle sue applicazioni e/o rendendo queste sempre più facili e immediate. Ma come può essere letta, da questo punto di vista, un'identità fra una forma analitica finita e una serie intera? e quali sono i contesti in cui essa fornisce regole di sostituzioni opportune tanto allo scopo di un'applicazione immediata che a quello di un'estensione della rete già disponibile? Rispondere a queste domande - che indicherò rispettivamente come "domanda (iii)" e "domanda (iv)" - renderà più facile rispondere, dal punto di vista del programma euleriano, alle stesse domande (i) e (ii) alle quali ritornerò quindi più avanti.

Il precedente esempio è a questo riguardo assolutamente emblematico. O crediamo infatti, contro innumerevoli testimonianze testuali, che i matematici della seconda metà del Settecento non sapessero - salvo eventuali e rare eccezioni - che le procedure di sviluppo in serie intera che essi utilizzavano costantemente (in questo caso la sostituzione degli sviluppi binomiali alle forme radicali finite e la successiva manipolazione termine a termine[76]) comportavano sostituzioni le quali non potevano salvaguardare l'identità nu-

---

[76]Uno statuto particolare deve essere riservato, nella considerazione dell'esempio, alla distribuzione dell'integrale sui termini della serie. Fu infatti soltanto a partire dalla metà del XIX secolo che ci si accorse che essa era sottoposta non tanto alla condizione di convergenza di quest'ultima, quanto a quelle di convergenza uniforme. La mancata distinzione fra questi due tipi di convergenza (semplice e uniforme) condusse, come è noto, lo stesso Cauchy a enunciare numerosi risultati scorretti, fra cui quello celebre relativo alla convergenza a una funzione continua di una serie convergente di funzioni continue. La storiografia ha variamente interpretato questa vicenda [cfr. fra l'altro: Lakatos (1976), app. I e (1978), vol. II, cap. 3, Grattan-Guinness (1975), Giusti (1984a) e Laugwitz (1987)] su cui non è ovviamente questa la sede per ritornare. E' tuttavia significativo notare che una volta che si sia scelta la strada di imporre una specificazione *a priori* delle condizioni di sostituibilità *salva identitate*, la mancata osservanza di una distinzione come questa può condurre a concludere con certezza e senza nessuna ulteriore necessità di un controllo caso per caso a favore della sussistenza di certe identità numeriche che in realtà non sussistono. Il problema è comunque scarsamente rilevante relativamente agli sviluppi in serie intera (ai quali vorrei limitare per ora le mie considerazioni).

merica che sotto alcune restrizioni relative ai valori delle variabili (o ai loro reciproci rapporti), o dobbiamo cercare una strategia interpretativa che permetta di leggere, nel corso di queste procedure, il segno di eguaglianza come il simbolo di una relazione differente dall'identità numerica per tutte le assegnazioni di valori particolari alle variabili occorrenti nei *relata*. Ora, se - preso indipendentemente da ogni particolare interpretazione geometrica delle quantità involte[77] - il passaggio da (1) a (3) costituisce, un'esemplificazione di un procedimento matematico ampiamente diffuso a partire dalla seconda metà del XVII secolo, il quale, tranne che in rare circostanze, non si arresta a precisare in alcun modo i limiti di validità delle proprie inferenze, è solo a partire da un'età piuttosto avanzata che una tale pratica matematica trova la sua giustificazione teorica in una consapevole interpretazione del segno di eguaglianza riferito a sviluppi infiniti come il simbolo di un'associazione formale connessa a regole costruttive dello sviluppo. Purtroppo il primo esplicito documento di questa consapevolezza che sia fino a oggi noto agli storici è una memoria di Euler del 1760.[78] Non è tuttavia difficile ritrovare implicitamente all'opera lo stesso punto di vista non solo fin dai primi lavori euleriani e senza dubbio nell'*Introductio*, ma anche in testi ancora precedenti, fra cui il più significativo è forse costituito dalla memoria del 1715 di Varignon sull'*impiego* degli sviluppi binomiali e di Mercator.[79] Il programma euleriano appare così, sotto questo aspetto, come il naturale prolungamento di una pratica diffusa, alla quale sembra anzi concedere una esplicita legittimazione teorica.

Il simbolo di eguaglianza sembra qui correlare in generale due forme analitiche, di cui almeno una costituita da una serie intera, le quali sono associate fra loro per mezzo di una regola di costruzione che permette di passare dalla prima alla seconda. Le principali fra queste regole possono a me pare ricondursi alle seguenti:

R. I. La seconda forma è costruibile termine a termine a partire dalla prima per mezzo dell'applicazione reiterata delle procedure di divisione o estrazione di radice dette di Mercator.[80]

R. II. La seconda forma è costruibile termine a termine a partire dalla prima secondo l'applicazione della regola del binomio.

R. III. La seconda forma è costruibile termine a termine a partire dalla prima secondo l'applicazione del cosiddetto "teorema" di Taylor.

R. IV. La seconda forma è costruibile termine a termine a partire dalla prima attraverso un'applicazione del metodo dei coefficienti indeterminati su un'opportuna trasformazione algebrica (realizzata operando termine a ter-

---

[77] E' chiaro che se assumiamo *a priori* che x è l'ascissa di un'ellisse rispetto a un'origine collocata nell'intersezione degli assi indicati rispettivamente da $r_1 = 2a$ e $r_2 = 2b$ e s è un arco di tale ellisse preso fra il punto di coordinate $(0,b)$ e il punto di ascissa x e di ordinata positiva, la condizione $|x| < |a|$ risulta verificata per costruzione.

[78] Cfr. Euler (1754-55). Tornerò su questa memoria nell'appendice II.2-A..

[79] Cfr. Varignon (1715). Anche su questa memoria tornerò più avanti, tanto nell'appendice II.2-A. che nel capitolo III.1..

[80] Cfr. *sotto*.

mine) di un'identità generica che associa la prima forma a una serie intera a coefficienti arbitrari, i quali sono così determinati.[81]

R. V. La seconda forma è costruibile termine a termine a partire dalla prima attraverso la distribuzione e la successiva esecuzione termine a termine delle operazioni lineari che nella prima forma sono riferite a una serie.

R. VI. La seconda forma è costruibile termine a termine a partire dalla prima attraverso una successiva applicazione delle regole precedenti sui suoi diversi termini (in particolare addendi o fattori).

R. VII. La seconda forma è costruibile termine a termine a partire dalla prima attraverso successive applicazioni delle regole precedenti coadiuvate dall'esecuzione termine a termine delle eventuali operazioni fra serie diverse indicate dalle forme intermedie.

Queste sette regole si riducono come è chiaro a quattro procedimenti di sviluppo - indicati rispettivamente nelle regole R.I. - R.IV. - e a due principi generali i quali permettono rispettivamente l'applicazione reiterata di questi procedimenti e l'esecuzione di ogni operazione analitica su di una serie nel caso in cui questa possa venir compiuta termine a termine.[82] Per un ulteriore chiarimento sarà quindi sufficiente considerare separatamente i quattro metodi in questione.

Il primo di questi metodi consiste nell'applicazione di una fra due procedure *standard* che permettono di associare rispettivamente a una frazione della forma $\frac{A+B+\&c.}{a+b+\&c.}$ o a un radicale quadrato della forma $\sqrt{A+B+\&c.}$ una serie ordinata secondo le potenze intere negative di a (nel caso della frazione) o secondo quelle frazionarie di A (nel caso del radicale), che è determinata termine a termine in analogia ai procedimenti aritmetici di divisione e estrazione di radice, che sono così estesi a entità di natura algebrica. Un esempio è certamente più esplicativo di ogni ricostruzione astratta: data la frazione $\frac{A}{a+b}$ si tratta di dividere A per a, traendo il termine A/a che costituisce il primo addendo della serie, di moltiplicare questo termine per $a+b$ sottraendo il risultato a A, ottenendo così un nuovo dividendo, $-Ab/a$, il quale viene a sua volta diviso per a per ottenere il secondo termine della serie, che sarà così uguale a $-Ab/a^2$. Reiterando il procedimento si avrà così uno sviluppo della frazione data ordinato secondo le potenze negative di a, il quale potrà, nel caso specifico, intendersi anche come una serie intera di b.

[81]Cfr. *sotto*.

[82]In termini generali ciò significa che il risultato di questa operazione possa essere a sua volta espresso per mezzo di una serie del tipo $A + B[F_1(x, y, \&c.)] + C[F_2(x, y, \&c.)] + \&c.$ costruibile in modo che per ogni funzione $F_0=1$, F_1, F_2, &c. delle variabili presenti nella serie di partenza sia successivamente costruibile il coefficiente totale (indicato qui rispettivamente dai simboli A, B, C, &c.). Il caso più semplice, e senza dubbio più diffuso, è ovviamente quello in cui le funzioni $F_0=1$, F_1, F_2, &c. siano rispettivamente costituite dalle successive potenze intere di una variabile. Il passaggio dal secondo membro di (2) al secondo membro di (3) esemplifica tale caso.

Per quanto non vi è nessuna ragione di principio che limiti l'applicazione di un tale procedimento a frazioni ridotte alla forma considerata in questo esempio[83], è proprio a esse che questo viene generalmente applicato dai matematici del XVII e XVIII secolo. La stessa cosa vale anche per la seconda procedura, la quale è generalmente applicata a forma radicali del tipo $\sqrt{A+B}$. Limitatane la diretta applicazione a simili forme binomie, il primo metodo si trasforma in un procedimento effettivo di costruzione, in due casi particolari della stessa serie binomiale e si riduce quindi al secondo, perdendo di fatto il carattere di un operare concreto sulla forma analitica assegnata per assumere quello di una semplice regola di sostituzione simbolica riferita a una serie *già data* in forma generica. Proprio questo è d'altra parte il carattere essenziale del secondo metodo, in cui la costruzione della serie si riduce a un adattamento al caso particolare sotto esame di uno sviluppo già noto identificato per mezzo di un risultato generale che viene usualmente considerato come stabilito. Per quanto nel corso del XVIII secolo si succedettero numerose "dimostrazioni" della formula del binomio,[84] questa non venne mai posta in dubbio, nemmeno in riferimento a esponenti irrazionali (e venne anzi spesso applicata anche a esponenti immaginari) e continuò a servire da strumento indiscusso per generare sviluppi di altro tipo (il caso dello sviluppo dell'integrale ellittico (1) è anche da questo punto di vista un esempio significativo). Queste stesse "dimostrazioni" ebbero tuttavia, almeno fino a Abel e Cauchy, uno statuto totalmente differente da quello che oggi saremmo portati a assegnare a una prova del teorema binomiale. Piuttosto che rivolgersi alla ricerca delle condizioni che garantiscono l'identità numerica fra la funzione $y = (a+b)^\alpha$ e la serie $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}a^{\alpha-n}b^n$ esse tesero a ricondurre la costruzione termine a termine di questa serie a uno dei metodi cui si riferiscono le regole R.III e R.IV o a determinare i coefficienti di una generica serie intera $\sum_{n=0}^{\infty} A_n a^{\alpha-n} b^n$ arbitrariamente associata alla potenza $(a+b)^\alpha$, mediante la determinazioni di certe condizioni funzionali cui essi de-

---

[83]Data una frazione del tipo $\dfrac{\sum_{k=0}^{n} A_k x^k}{\sum_{k=0}^{m} B_k x^k}$ basterà dividere tra loro i primi due termini del numeratore e del denominatore e moltiplicare il quoziente per il denominatore, sottraendo il risultato al numeratore. Prendendo la differenza ottenuta come un nuovo numeratore si avrà allora una nuova frazione su cui si potrà reiterare il procedimento. A seconda se il numeratore e il denominatore sono ordinati secondo le potenze crescenti o decrescenti di x si avrà uno sviluppo in serie intera di x o x^{-1}.

[84]A proposito delle differenti "dimostrazioni" del "teorema del binomio", da Newton, fino a Abel e Cauchy cfr. fra gli altri Pensivy (1986), (1987) e (1987-88).

vono sottostare[85] o infine a ricondurre il caso a esponente frazionario al caso a esponente intero positivo, mediante un'interpretazione di una serie $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha}{n}b^n$ (assunta come un dato separato) come una funzione (finita) di α e b dotata di particolari proprietà determinate in base al confronto dei coefficienti di b^n di questo sviluppo e di quello correlato $\sum_{n=0}^{\infty}\binom{\alpha+\beta}{n}b^n$.[86]

Così come il secondo, anche il terzo metodo si riduce in ultima istanza a una semplice procedura di adattamento, alle condizioni particolari dettate dalla forma considerata, di uno sviluppo già dato in forma generica relativamente a una forma arbitraria $F(x, y,..., z)$, mediante il cosiddetto "teorema di Taylor",[87] che già Newton aveva "dimostrato" fin dal 1692 secondo un procedimento che può essere ricostruito come segue.[88] Data una forma analitica $F(x)$ la si associ a uno sviluppo generico in serie di potenze intere della differenza[89] $(x-a)$ per mezzo dell'identità:

---

[85]Mi riferisco qui in particolare alla "dimostrazione" Di Æpinus-Euler [cfr. Æpinus (1760-61) e Euler (1787)], su cui cfr. Dhombres-Pensivy (1988) e Dhombres (1987b). Questa dimostrazione può essere ricondotta alla soluzione del sistema di equazioni funzionali tratto dall'osservazione che, essendo $(a+b)^{\alpha+\beta} = (a+b)^{\alpha}(a+b)^{\beta}$, la posizione $(a+b)^{\alpha} = \sum_{k=0}^{\infty} A_{\alpha,k}\, a^{\alpha-k} b^{k}$ implica l'identità $A_{\alpha+\beta,k} = \sum_{h=0}^{k} A_{\alpha,h} A_{b,k-h}$. Il problema è qui naturalmente quello di trovare una soluzione di un tale sistema di equazioni funzionali, la quale sia espressa da una forma analitica che resti costante rispetto alle variazioni dell'esponente. Ora, se nulla impedisce *a priori* di pensare che alla potenza binomiale possano essere associati differenti sviluppi contrassegnati da coefficienti espressi per mezzo di differenti funzioni dell'esponente, tutto ciò che richiede la dimostrazione è che passando dall'esponente α agli esponenti β e $\alpha+\beta$ ci si possa continuare a riferire al medesimo sviluppo. Posto questo, l'unicità dello sviluppo sembra a me, più che una condizione presupposta dalla dimostrazione, un suo esito eventuale, il quale deriverebbe da una dimostrazione di unicità della soluzione del sistema di equazioni funzionali [per alcune considerazioni generali sulla questione dell'unicità dello sviluppo di una forma data, cfr. in ogni caso *sotto*].

[86]Il riferimento è qui alla "dimostrazione" di Euler del 1774 [cfr. Euler (1774)], su cui cfr. ancora Dhombres (1987b). Ponendo $\sum_{k=0}^{\infty}\binom{\alpha}{k}b^k = F(\alpha, b)$ Euler osserva, analizzando il coefficiente generico di questa serie, che $F(\alpha+\beta, b) = \{F(\alpha, b)\}\cdot\{F(\beta, b)\}$, cosicché, essendo per n intero, $F(n, b) = (1+b^n$, segue che $(1+b^n = F(m\frac{n}{m}, b) = [F(\frac{n}{m}, b)]^m$ e, quindi, passando alla radice m -esima, $(1+b)^{n/m} = F(\frac{n}{m}, b)$.

[87]Nel Settecento il termine "teorema di Taylor" è generalmente utilizzato per riferirsi all'associazione fra una funzione qualsiasi e la sua serie di Taylor, considerata indipendentemente dal suo resto.

[88]Cfr. Whiteside (1967-81), vol. VII, pp. 96-8.

[89]Newton richiede in verità che questa differenza sia assunta "sufficientemente piccola". Tornerò su questo punto nella prossima appendice II.2-B. e nel prossimo paragrafo III.2.*a*.δ..

(4) $F(x) = A + B(x - a) + C(x - a)^2 + \&c.$

Ponendo $x=a$ si trae allora immediatamente $A = F(x)|_{x=a}$. Differenziando reiterativamente rispetto a x si avrà, d'altra parte,

$$\frac{d}{dx}F(x) = B + 2C(x-a) + 3D(x-a)^2 + \&c.$$

(5) $$\frac{d^2}{dx^2}F(x) = 2C + 3!\, D(x-a) + \&c.$$

&c.

da cui è facile trarre, ponendo ancora $x=a$ in ognuna delle identità, $B = \frac{d}{dx}F(x)|_{x=a}$, $C = \frac{1}{2}\frac{d^2}{dx^2}F(x)|_{x=a}$, &c. e, quindi, secondo la notazione usuale:

(6) $$F(x) = F(a) + \frac{dF(a)}{dx}(x-a) + \frac{d^2F(a)}{dx^2}\frac{(x-a)^2}{2!} + \frac{d^3F(a)}{dx^3}\frac{(x-a)^3}{3!} + \&c$$

che fornisce la forma *standard* dello sviluppo per ogni forma analitica $F(x)$. Se un simile procedimento di sviluppo si applica generalmente a ogni forma analitica strutturata, esso richiede il possesso preventivo del *calcolo* e non è quindi utilizzabile in analisi algebrica. E' tuttavia chiaro che, ponendo $F(x) = (1+x)^\alpha$ e $a = 0$, si ha, per ogni esponente α: $F(a) = 1$ e $\frac{d^k F(a)}{dx^k} = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-k+1) = \binom{\alpha}{k}k!$, da cui è ovvio concludere che lo sviluppo binomiale, benché possa venir "dimostrato" per altra via, non è che un caso particolare dello sviluppo di Taylor: data una forma analitica qualsiasi, a cui essi siano contemporaneamente applicabili, i tre primi metodi di sviluppo conducono quindi inevitabilmente alla costruzione della medesima serie.

Il procedimento che conduce a (6) è d'altra parte in se stesso interessante. Associata una serie generica a una forma analitica qualsiasi per mezzo del segno di eguaglianza, il cui significato resta *a priori* indefinito, si tratta di operare sui due membri dell'identità che esprime questa relazione in modo da ridurre il secondo a una forma finita e indipendente dalla variabile che compare nel primo membro. A questo proposito si assume che il segno di eguaglianza abbia comunque, nella prima identità, un significato compatibile con la seguente inferenza:

(7) $$[A = \sum B_k] \Rightarrow \Psi(A) = \Psi(\sum B_k)$$

dove il simbolo Ψ' indica un operazione analitica qualsiasi (in questo caso la differenziazione) eseguita sul suo argomento, e che esso permetta la reciproca sostituibilità dei *relata* una volta che il secondo membro sia stato ridotto a una forma finita. Sostituendo nell'identità generica presupposta si ha così la forma cercata dello sviluppo.

A differenza dei primi tre metodi, il quarto, lungi dal ridursi a un banale adattamento di uno sviluppo già dato, corrisponde a una procedura di costruzione concreta della serie caso per caso. Data una forma analitica strutturata $F(x)$, si tratta di presupporre la sua associazione a uno sviluppo generico, ponendo l'identità

$$(8)\ F(x) = A + Bx + Cx^2 + Dx^3 + \&c.$$

e di cercare una opportuna manipolazione analitica di quest'ultima - la quale differirà ovviamente da caso a caso - atta a trasformarla in un identità del tipo

$$(9)\ \Gamma_1(A) + \{\Gamma_2(A, B)\}x + \{\Gamma_3(A, B, C)\}x^2 + \&c. = 0$$

dove i simboli $\Gamma_1(A)$, $\Gamma_2(A, B)$, &c. rappresentano rispettivamente delle forme analitiche semplici, la cui successiva equiparazione a zero, resa possibile da una semplice applicazione del metodo dei coefficienti indeterminati,[90] permetta di determinare l'uno dopo l'altro i coefficienti A, B, C, &c. in funzione delle costanti di F.[91] L'estensione delle possibilità di applicazione di un tale metodo - che potremmo qualificare come *metodo di sviluppo per determinazione dei coefficienti* - dipende ovviamente dalle restrizioni poste alle manipolazioni analitiche atte a condurre da (8) a (9). Se restringiamo il campo di queste manipolazioni a pure trasformazioni algebriche, sia pure operanti termine a termine su serie intere, esso risulta inevitabilmente ristretto a forme analitiche piuttosto particolari. Tuttavia se ci permettiamo manipolazioni di altro genere e includiamo fra queste anche opportune sostituzioni di forme finite con sviluppi già determinati, il metodo assume un'estensione senza dubbio maggiore. Ponendo, a esempio, $F(x) = \log(1+x)$, avremo, sostituendo in (8) e passando ai differenziali:[92]

---

[90] Cfr. il precedente paragrafo II.2.β..

[91] In numerosi casi il primo coefficiente A risulta in questo modo indeterminato e è quindi sostituibile da una quantità arbitraria indipendente da x. E' chiaro d'altra parte che il carattere indeterminato del sistema formato dalle equazioni che azzerano i coefficienti $\Gamma_1(A)$, $\Gamma_2(A, B)$, &c. esprime la non sviluppabilità puntuale in $x=0$ e corrisponde, relativamente allo sviluppo di Taylor, alla non differenziabilità nello stesso punto della forma $F(x)$. Per ovviare a questa difficoltà è sufficiente, in entrambi i casi, realizzare una traslazione.

[92] Nel prossimo paragrafo III.3.c.γ. mostrerò come lo sviluppo in serie intera del logaritmo possa essere ottenuto *via* il metodo di sviluppo per determinazione dei coefficienti anche senza ricorrere a strumenti di natura differenziale, ma presupponendo lo sviluppo binomiale per un qualsiasi esponente reale.

$$(10) \qquad \frac{1}{1+x} = B + 2Cx + 3Dx^2 + \&c.$$

ovvero:

$$(11) \qquad 1 = (1+x)(B + 2Cx + 3Dx^2 + \&c.) = B + [B + 2C]x + [2C + 3D]x^2 + \&c.$$

da cui è facile trarre: B = 1, C = -1/2, D = 1/3, &c. e quindi, A essendo ovviamente nullo: $\log\,(1+x) = \sum_{k=0}^{\infty} -(-)^k \frac{1}{k} x^2$ e quindi $\log(a+x) = \log a + \log(1+\frac{x}{a}) = \log a + \sum_{k=1}^{\infty} -(-)^k \frac{x^k}{ka}$. Ponendo poi in (8) $F(x) = (1+x)^{\alpha}$ e passando ai logaritmi si avrà:

$$(12) \qquad \alpha \log(1+x) = \alpha\left[x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \&c.\right] = \log[A + Bx + Cx^2 + \&c.] =$$

$$= \log\,[(A + (Bx + Cx^2 + \&c.)] = \log A + \frac{1}{A}[Bx+Cx^2+\&c.] + \frac{1}{2A}\{[Bx+Cx^2+\&c.]^2 + \&c.$$

da cui: logA = 0, ovvero A=1, e B=α. Sostituendo nella serie generica e reiterando il procedimento secondo gli sviluppi di $\log[(A+Bx)+(Cx^2+\&c.)]$, $\log[(A+Bx+Cx^2)+(Dx^3+\&c.)]$, &c. è allora facile costruire lo stesso sviluppo binomiale.[93]

Se la corrispondenza fra i risultati ottenuti per mezzo dell'applicazione dei primi tre metodi è un'ovvia conseguenza della riducibilità del primo al secondo e del secondo al terzo, la questione è certamente più complessa per il quarto metodo. Per quanto lo stesso sviluppo binomiale possa essere dimostrato tramite un tale metodo, il carattere specifico delle manipolazioni necessarie per applicare quest'ultimo nei vari casi rende impossibile utilizzarlo per dare una dimostrazione generale del "teorema" di Taylor, mentre l'impossibilità di determinare una forma generica degli sviluppi cui esso conduce impedisce un confronto *a priori* degli esiti cui esso perviene con gli sviluppi comportati dai metodi restanti. Nulla sembra inoltre assicurare che,

---

[93]Per quanto riguarda la determinazione di C avremo, a esempio:

$$\alpha \log(1+x) = \alpha\left[x - \frac{x^2}{2} + \&c.\right] = \log[(1+\alpha x) + Cx^2 + \&c.] = \log(1+\alpha x) + \frac{1}{1+\alpha x}(Cx^2 + \&c.) + \&c.$$

ovvero:

$$(1+\alpha x)\alpha\left[x - \frac{x^2}{2} + \&c.\right] = (1+\alpha x)\left[\alpha x + \frac{\alpha^2 x^2}{2} + \&c.\right] + [Cx^2 + \&c.] + \&c.$$

da cui, annullando il coefficiente di x^2 è facile trarre: $C = \frac{\alpha^2}{2} - \frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}$.

procedendo in un medesimo caso tramite manipolazioni analitiche differenti, si debba obbligatoriamente pervenire allo stesso sviluppo, né che per ogni forma analitica cui questo metodo sia applicabile, esso conduca, per opportune manipolazioni analitiche, al medesimo risultato cui conducono i metodi restanti. Sembra tuttavia che i matematici settecenteschi non abbiamo mai dubitato - in assenza di discordanze riconosciute relativamente a qualche caso particolare - dell'unicità degli sviluppi in serie intera di una data variabile associati a una forma analitica secondo le regole R.I.-R.VII.. Accettata questa presupposizione essi potevano intendere il segno di eguaglianza relativamente a serie intere come espressione di una relazione che, data una qualsiasi forma analitica strutturata, sussistesse con una sola serie intera della variabile selezionata. Inteso un tale segno come simbolo di una relazione formale stabilita per mezzo di certe regole costruttive che, applicate al primo termine di tale relazione, conducono al secondo, questo sembra d'altra parte il modo più naturale di intendere l'unicità dello sviluppo, la quale si presenta quindi come una garanzia di genere totalmente differente da quella che assicura, per ogni funzione, l'esistenza di una sola collezione infinita di valori sostituibili in un ordine dato ai coefficienti successivi di una generica serie intera, allo scopo di ottenere una serie convergente (entro un certo intervallo) alla funzione data. Benché secondo la prima interpretazione (che potremmo dire *debole*) l'unicità degli sviluppi non sia una condizione sufficiente a garantire *in tutti i contesti* l'applicabilità del metodo dei coefficienti indeterminati a delle identità infinitarie in cui compaiano gli sviluppi di una forma analitica assegnata,[94] è facile selezionare certi contesti in cui questa condizione è invece perfettamente sufficiente a giustificare questa pratica. Questo è in particolare il caso dell'applicazione di un tale metodo alla determinazione dei coefficienti di uno sviluppo generico a partire dalla sua associazione a una forma data, la quale è a sua volta associata a una serie intera secondo una delle regole R.I.-R.VII.. Così, se per mezzo del quarto metodo possiamo associare a esempio alla forma $F(x+\varepsilon)$ lo sviluppo determinato $K_0 + K_1((x+\varepsilon)-x) + K_2((x+\varepsilon)-x)^2 + \&c. = K_0 + K_1\varepsilon + K_2\varepsilon^2 + \&c.$ avremo l'assicurazione che lo sviluppo indeterminato $F(x) + \frac{dF(x)}{x}\varepsilon + \frac{d^2F''(x)}{2dx}\varepsilon^2 + \&c.$ associato a quella stessa forma per mezzo del terzo metodo non possa soddisfare la relazione di identità che nel caso in cui si abbia: $F(x) = K_0$, $\frac{dF(x)}{x} = K_1$, $\frac{d^2F''(x)}{2dx} = 2K_2$, &c..

Questo risultato è tuttavia assai poco significativo qualora ci si limiti a pensare l'associazione di una forma analitica strutturata a una serie intera unicamente nei termini precedenti e non può che servire a fornire un metodo alternativo rispetto a quello usuale per computare i rapporti differenziali successivi di una funzione data. Il metodo dei coefficienti indeterminati non sembra d'altra parte adeguato a trarre conclusione di carattere differente, a

[94] E' in particolare chiaro come questa condizione non sia sufficiente a permettere l'applicabilità di questo metodo alla determinazione di una quantità isolata formalmente associata al coefficiente k -esimo di uno sviluppo.

meno che la sua applicazione non venga intesa come parte integrante del quarto metodo. In tal caso essa non può più tuttavia venir giustificata in base alla condizione di unicità intesa come in precedenza e non riposa che su una convenzione operativa (che si assume come atta a condurre ai medesimi risultati a cui, nelle medesime circostanze, condurrebbero altre convenzioni operative). Così se la precedente interpretazione della relazione `essere sviluppo in serie intera di...´ (simboleggiata dal segno di eguaglianza utilizzato relativamente a serie intere) conduce a giustificare una pratica matematica corrente fra i matematici settecenteschi, essa rischia anche di svuotarla di ogni reale interesse matematico, trasformandola in un semplice gioco di associazioni incapace di condurre a un effettivo aumento dell'informazione. Per evitare questa conclusione esistono due strade: o rinunciare a questa interpretazione della relazione di sviluppo in serie intera[95] o cercare una proprietà specifica di questa relazione (intesa nel modo precedente), la quale permetta di intendere l'atto di connettere forme analitiche che soddisfanno tale relazione come un associare entità caratterizzate *anche* da un'altra proprietà relativa. Il successo di questa seconda alternativa dipende tanto dalla effettiva sussistenza di una siffatta proprietà (almeno nella generalità dei casi[96]), che dalla possibilità di indicare adeguate evidenze testuali che

[95]Imboccata questa strada ci si troverebbe di fronte a un ulteriore alternativa: o affermare che questa relazione non può che essere intesa come una relazione numerica e trarre da qui l'ovvia conseguenza che le regole operative applicate dai matematici settecenteschi non erano adeguate al significato che essi assegnavano ai simboli utilizzati, o cercare un'ulteriore interpretazione per una tale relazione. [Questa seconda strada non mi pare sia stata fino a oggi mai seriamente perseguita; per quanto la mia scelta ricostruttiva sia un'altra, non intendo negare *a priori* la possibilità di perseguirla con successo.] Questa osservazione mi permette di aggiungere qui una considerazione di carattere generale. Una volta che ci si sia accordati di usare il termine "rigore" per riferirsi a inferenze legittimate da regole esplicite [cfr. la precedente nota (11)] diviene totalmente insensato distinguere fra la pratica di Euler e quella moderna in base alla mancanza di "rigore" della prima. L'idea che nella maggioranza dei casi questa valutazione nasconde è piuttosto la seguente: a differenza di quelle euleriane, le attuali pratiche matematiche costituiscono una *corretta* formalizzazione dei concetti a cui esse corrispondono; nel caso delle serie intere esse permettono, a esempio, di connettere fra loro mediante *identità* solo espressioni formali che indicano la *stessa* collezione di numeri, mentre le pratiche euleriane permettono di connettere fra loro mediante identità anche espressioni formali che indicano collezioni di numeri diverse o non indicano nessuna collezione di numeri. Questa valutazione si fonda tuttavia sul presupposto di condivisione di una struttura di concetti. Qualora questo presupposto sia - almeno per ipotesi di ricerca - posto in discussione, si apre il problema di ricostruire una differente struttura di concetti, di cui le pratiche euleriane possano venire intese come una formalizzazione. Purtroppo questa ricostruzione non può tuttavia che fondarsi essenzialmente sull'analisi di quelle pratiche e non può quindi che prendere le mosse dall'accettazione di un "principio di carità", il quale affermi che la migliore ricostruzione è quella che più sembra adattarsi alle pratiche che dovrebbero formalizzarla.

[96]Sarà certo più facile spiegare con l'ipotesi dell'inidoneità un piccolo insieme di eccezioni che potrebbero venir costruite *a posteriori* che l'insieme delle manifeste assurdità che discendono da una interpretazione modernizzata della relazione serie-funzione propria della matematica settecentesca.

mostrino come l'impiego che i matematici settecenteschi facevano delle relazioni di sviluppo fosse, almeno a partire da un certo periodo, compatibile con una loro lettura di questa relazione come una relazione formale dotata di questa proprietà.[97] A me pare che entrambe queste condizioni possano venir soddisfatte abbastanza facilmente.

La mia tesi è che i matematici settecenteschi[98] assegnassero alla relazione di sviluppo formalmente definita secondo le regole R.I-R.V. la proprietà di connettere forme analitiche strutturate capaci di rappresentare, entro intervalli centrati sullo zero di raggio positivo (non infinitamente piccolo), la stessa quantità astratta. La natura di tali intervalli li autorizzava a concludere, sulla base di questa premessa generale, che per quanti fossero gli sviluppi successivamente sostituiti a altrettante forme analitiche strutturate nel corso di una procedura di sviluppo di una forma assegnata, essi condividessero un sottointervallo comune ai rispettivi intervalli di rappresentatività. La stessa proprietà riferita alla relazione di sviluppo ristretta alle regole R.I-R.V. poteva così essere estesa a una relazione di sviluppo formalmente definita in base alle totalità delle regole R.I-R.VII.. Per quanto, secondo tale convinzione, le regole formali di associazione garantissero *a priori* la sussistenza di questa proprietà, esse non permettevano di determinare in termini generali i limiti di questi intervalli, i quali dovevano essere piuttosto fissati caso per caso, attraverso un'analisi della serie. Tali intervalli erano d'altra parte identificati con gli intervalli di convergenza dello sviluppo; questa analisi corrispondeva così alla ricerca delle condizioni numeriche di convergenza di una serie assegnata.

Un tale punto di vista risulta allora semplicemente invertito rispetto a quello odierno. Le condizioni di convergenza invece di essere intese come condizioni di sussistenza di certe relazioni (direttamente interpretate come identità numeriche), sono concepite come condizioni di applicabilità di certe relazioni formali - che vigono in generale indipendentemente da ogni restrizione sui valori delle variabili - alla determinazione numerica di certe quantità particolari. Il problema posto dalla ricerca di queste condizioni è così escluso da una trattazione analitica generale e è invece rimandato all'esposizione delle applicazioni dei risultati cui questa trattazione conduce: la convergenza lungi dall'essere, come dall'odierno punto di vista, una condizione postulata *a priori* rispetto all'enunciazione di certi teoremi, è una proprietà identificata *a posteriori* in certi sviluppi, la quale non fa che permettere

[97] Cfr. a questo proposito, oltre alle analisi testuali contenute nella prossima parte III, anche l'appendice II.2-A, posta alla fine del presente capitolo. Mi rendo conto che una simile lettura è tuttavia molto più facilmente assegnabile a matematici come Euler, d'Alembert, Laplace, Lagrange, piuttosto che ai matematici precedenti, particolarmente di orientamento leibniziano. Sono così convinto che, anche ammesso che la mia tesi permetta di capire l'impiego delle serie intere nella seconda metà del secolo e di ricostruire l'interpretazione che i matematici delle generazioni di Euler e Lagrange diedero di molti risultati raggiunti dai propri predecessori, essa lascia aperto il problema di comprendere un'impiego, senza dubbio meno consapevole, proprio, tranne qualche eccezione, dell'epoca precedente.

[98] Cfr. la precedente nota (95).

certe applicazioni. Questa simmetria quasi perfetta fra i due punti di vista non è tuttavia, come è facile capire, una garanzia delle legittimità matematica dell'approccio settecentesco, che risulta adeguato solo in presenza di almeno due condizioni.

La prima di queste condizioni è ovviamente la sussistenza effettiva, per ogni serie intera che costituisca lo sviluppo di una data forma analitica secondo le regole R.I.-R.VII., di un intervallo reale di convergenza $(-\rho, \rho)$ di raggio non nullo. La seconda è la coincidenza, per ogni serie costruita termine a termine a partire da una forma analitica data secondo queste stesse regole, fra le condizioni di convergenza e le condizioni di convergenza alla funzione corrispondente a questa forma. Mentre il rispetto della prima condizione dipende unicamente dall'estensione della classe delle forme analitiche a cui essa viene riferita, il rispetto della seconda dipende anche dal modo in cui intendiamo la relazione di corrispondenza fra una serie analitica e una funzione. Ora, benché nessun matematico settecentesco disponesse di una dimostrazione capace di trasporre queste condizioni in un teorema di ordine generale, sembra che nessuno di essi dubitasse della loro effettiva sussistenza. Il motivo principale di questa certezza pressoché assoluta non era tanto la mancanza di controesempi conosciuti, quanto la fiducia nell'estendibilità a contesti infinitari delle usuali leggi matematiche definite relativamente a contesti finiti. Benché in nessun caso particolare la costruzione degli sviluppi si richiamasse a operazioni diverse dalla semplice applicazione delle regole R.I-R.VII, queste erano tali da non contenere null'altro che delle semplici estensioni di procedimenti perfettamente legittimi in contesti finiti, connessi a risultati già dati in forma generica. Riducendo il primo metodo al secondo si trattava quindi di affermare: i) che gli sviluppi del binomio e di Taylor sono tali da preservare la rappresentatività su intervalli di raggio non nullo, ovvero sono, su tali intervalli e per ogni caso particolare convergenti alle funzioni corrispondenti alle forme date; ii) che sostituendo in una forma finita delle forme finite componenti con i rispettivi sviluppi e operando membro a membro su questi ultimi, secondo le usuali leggi analitiche, non si perviene che a sviluppi ugualmente rappresentativi della quantità rappresentata dalla forma di partenza; iii) che se queste ultime manipolazioni connesse all'impiego del metodo dei coefficienti indeterminati (che poteva ben intendersi come un'estensione di una banale legge dell'algebra) permettevano di determinare i coefficienti di una serie intera arbitrariamente associata a una forma data, allora questo sviluppo preservava anch'esso la rappresentatività. Assunti (ii) e (iii), si trattava allora di ridurre la costruzione termine a termine dello sviluppo binomiale e di quello di Taylor a procedimenti caratterizzati da estensioni delle leggi analitiche finite. Se è proprio a questo che sembrano mirare le numerose dimostrazioni settecentesche del "teorema del binomio",[99] la questione è senza dubbio più complessa per il "teorema" di Taylor. Il procedimento newtoniano conduce infatti da (4) a (6) solo a condizione di reiterare indefinitamente (e non solo allo scopo di determinare il termine noto) la sostituzione di a a x e non è quindi indipendente da ogni

[99]Cfr. le precedenti note (84), (85) e (86).

assegnazione di un *valore* alla variabile. E, ci si potrebbe chiedere, che cosa induce a pensare *a priori* che un simile procedimento possa condurre a una conclusione generale riferita alla forma data, la quale non è ovviamente tale che grazie all'indeterminatezza della variabile x? Ora, se lo stesso Newton aveva interpretato - peraltro senza alcuna esplicita giustificazione - il proprio risultato (il quale restò tuttavia confinato in un manoscritto non pubblicato[100]) come l'espressione di un'identità riferita a un intervallo finito di variazione della variabile, esso mantenne almeno fino agli anni settanta del XVIII secolo uno statuto piuttosto ambiguo[101] e fu spesso connesso, soprattutto fra i matematici continentali, a interpretazioni esplicitamente infinitesimaliste e presentato piuttosto che sotto la forma (8) sotto la forma seguente:

$$(13) \qquad y(x+dx) = y(x) + \frac{dy(x)}{dx}dx + \frac{d^2y(x)}{dx^2}dx^2 + \&c.$$

in cui sembra più facile vedere l'espressione della differenza infinitamente piccola di una funzione qualsiasi relativamente ai differenziali di tutti gli ordini, che la forma generica di uno sviluppo. Il primo matematico continentale che in modo abbastanza esplicito cercò di fornire una dimostrazione del "teorema" di Taylor, la quale ne garantisse l'interpretabilità come una formula generale di sviluppo - tornando in questo all'originale interpretazione newtoniana - fu proprio Euler, che nel 1736 lo trasse a partire dalla nota identità fra forme finite:

$$(14) \qquad y(x+n\Delta x) = y(x) + n\Delta y(x) + \frac{n(n-1)}{2!}\Delta^2 y(x) + \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}\Delta^3 y(x) + \ldots + \\ + n\Delta^{n-1} y(x) + \Delta^n y(x)$$

ponendo n infinito e sostituendo la differenza finita Δx con il differenziale dy.[102] Se una tale dimostrazione esplicita l'intenzione di giustificare la sostituzione in (13) dell'incremento infinitamente piccolo dx con un incremento finito $n\Delta x = \varepsilon$, essa richiede ancora molto di più di una semplice estensione infinitaria delle procedure operative usualmente riferite a forme analitiche finite. Alla corrispondenza facilmente verificabile su tutti i casi particolari fra gli sviluppi tratti tramite l'ausilio del secondo e del quarto metodo e quelli costruibili per mezzo di un riferimento opportuno al "teorema" di Taylor non faceva così riscontro, ancora alla fine degli anni quaranta del XVIII secolo, un analogo statuto concettuale dei due procedimenti: il primo perfettamente atto a garantire, almeno intuitivamente, la rappresentatività

[100]Cfr. la precedente nota (88). Fu proprio Brook Taylor che riformulò lo stesso teorema nel suo *Methodus incrementorum* del 1715 [cfr. Taylor (1715)]. Cfr. a questo proposito il prossimo capitolo III.2..

[101]Ritornerò su questo punto in numerose occasioni nella prossima parte III.

[102]Cfr. Euler (1736). Tornerò su questa dimostrazione di Euler nel prossimo paragrafo III.2.*b*. β.

su intervalli finiti della serie sviluppo, il secondo ancora tale da non poter fornire ai matematici questa stessa certezza *a priori*. Fu forse proprio per questo che anche dopo la dimostrazione di Euler il "teorema" di Taylor continuò a essere presentato, almeno fino agli anni settanta, soprattutto come uno strumento atto alla rappresentazione analitica della differenza (finita o infinitamente piccola) di una funzione, piuttosto che come una formula universale di sviluppo.[103]

Questa "rinuncia"[104] non condusse d'altra parte a nessuna perdita di generalità. Se infatti la formula di Taylor si riferisce direttamente e per sua intrinseca natura a una funzione qualsiasi, fornendone immediatamente lo sviluppo in forma generica, caratterizzando così il terzo metodo come il solo applicabile direttamente a ogni forma assegnata, basta un poco di riflessione per rendersi conto che la congiunzione del secondo e del quarto metodo, resa possibile dalle regole R.VI. e R.VII., permette di costruire lo sviluppo di ogni forma analitica semplice, dal quale si può eventualmente passare, secondo la regola R.V., allo sviluppo delle forme analitiche considerate nel paragrafo precedente. A questo scopo è infatti sufficiente fornire per mezzo del quarto metodo gli sviluppi generici delle forme trascendenti elementari (i quali potranno poi essere opportunamente composti fra loro e con lo sviluppo binomiale in modo da costruire lo sviluppo cercato). Questa possibilità dipende tuttavia dell'impiego di manipolazioni differenziali sui membri dell'identità generica (8).[105] Se questa condizione non è certamente tale da condurre, come nel caso del terzo metodo, a una perdita di fiducia nel carattere conservativo della rappresentatività proprio delle costruzioni realizzate per mezzo di questo metodo, essa introduce una dipendenza di una teoria generale delle forme analitiche semplici dall'algoritmo del *calcolo*. Per evitare un simile vincolo, il quale doveva sembrare a Euler contrastante a delle esigenze essenzialmente architettoniche,[106] era necessario mettere a punto dei

[103]Sulle relazioni fra le diverse formulazioni del "teorema" di Taylor, cfr. la prossima appendice II.2-B..

[104]Si potrebbe forse sostenere una tesi ancora più radicale la quale affermasse che, almeno fino all'ultimo quarto di secolo, i matematici continentali, non avessero consapevolmente riscoperto la possibilità di intendere il "teorema" di Taylor come un metodo formale di sviluppo. Non disponendo tuttavia di buoni argomenti a sostegno di questa tesi o contro di essa, mi limito a scegliere l'interpretazione che mi pare più prudente.

[105]Accettata la possibilità di un passaggio ai differenziali, la costruzioni degli sviluppi dell'esponenziale e del seno per mezzo del quarto metodo è operativamente tanto semplice, quanto la costruzione della serie logaritmica [cfr. *sopra*]. Per quanto riguarda l'esponenziale basta infatti differenziare la (8) per la posizione $F(x) = e^x$ per trarre: $e^x = B + 2Cx + 3Dx^2 = A + Bx + Cx^2 +$ &c. da cui è ovvio trarre: B=A, C=B/2, D=C/3, &c.. La posizione $x = 0$ conduce poi facilmente all'identità A=1, da cui la costruzione dello sviluppo è immediata. Ponendo invece $F(x) = \sin x$ si ha, dopo due differenziazioni successive, $-\sin x = 2C + 3{\cdot}2Dx + 3{\cdot}4Ex^2 +$ &c. $= -A - Bx - Cx^2 -$ &c., ovvero: C=-A/2, D= -B/3·2, E=-C/3·4, &c., e, ponendo ancora x=0 nella (8) e nella sua trasformata per mezzo di una sola differenziazione, A=0 e B=1. Anche in questo caso la costruzione dello sviluppo è quindi immediata.

[106]Credo sia nell'esigenza di una organica e ordinata presentazione dell'edificio dell'analisi, più che nella convinzione che le allora usuali giustificazioni del *calcolo* contenessero inaccettabili ambiguità, che si debba cercare la principale motivazione per giustificare il progetto euleriano di estendere l'analisi algebrica fino al suo limite mas-

nuovi procedimenti costruttivi per gli sviluppi delle forme trascendenti elementari. Fu proprio questo uno degli esiti principali dell'*Introductio,* in cui la costruzione di questi sviluppi è per la prima volta ricondotta alla costruzione di opportuni sviluppi binomiali.[107]

Se questo risultato accrebbe la fiducia nella possibilità di intendere formalmente la relazione di sviluppo - la quale poteva ormai considerarsi come definita in termini del tutto generali da un insieme più ristretto di regole che la riconducevano a un piccolo insieme di sviluppi elementari componibili fra loro termine a termine, senza per questo rischiare di incorrere in una perdita di rappresentatività - esso non condusse a un abbandono di interesse verso il "teorema" di Taylor, il quale riceveva al contrario, anche come formula di sviluppo, una sorta di giustificazione indiretta: i risultati a cui esso inevitabilmente conduceva potevano infatti dimostrarsi per altra via come perfettamente legittimi. Se a ciò aggiungiamo che nel 1754 d'Alembert aveva mostrato come costruire termine a termine il secondo membro della (13), tramite una semplice reiterazione di un'integrazione per parti e anche nel caso in cui l'incremento dx fosse sostituito con un incremento ε finito e arbitrario,[108] comprendiamo come a partire dai primi anni settanta si ricominciò a guardare, sulla base di una nuova consapevolezza, al "teorema" di Taylor come base di un metodo generale di sviluppo[109] fondato sull'algoritmo differenziale, il quale, alla pari dei metodi restanti, sembrava ora godere di una fiducia incondizionata relativamente alla sua proprietà di preservare la rappresentatività su intervalli volta a volta opportunamente determinati.

Per quanto tutte queste considerazioni non si riferiscano che a ragioni di ordine concettuale piuttosto che a evidenze oggettive, tradotte in una dimostrazione formale, esse spiegano, io credo, la fiducia incondizionata dei matematici delle generazioni di Euler e Lagrange nel verificarsi delle due condizioni indicate in precedenza. D'altra parte, se limitiamo l'orizzonte delle forme analitiche alle quali applicare le regole di sviluppo a forme analitiche semplici o al più a forme analitiche strutturate che esprimono una composizione finita di operazioni analitiche non elementari riferite a forme analitiche semplici, e se interpretiamo una forma analitica come una funzione solo in quanto rappresentazione di una quantità (e escludiamo quindi la possibilità di riferire dei controesempi a valori particolari delle variabili, i quali rendono infinito il valore della quantità associata alla forma analitica considera-

---

simo, fornendo gli strumenti adeguati per limitare il più possibile il ricorso ai metodi differenziali. A riprova di questo sta, a mio avviso, la assoluta naturalezza con cui Euler fa ricorso in alcuni punti dell'*Introductio* a considerazioni infinitesimaliste non differenziali. D'altra parte se egli pensava certamente che le giustificazioni leibniziane abbisognassero di una revisione, credo si possa dire che ciò fosse connesso più che al loro carattere infinitesimalista, alla loro inidoneità alla sua rinnovata concezione dell'analisi.

[107] Cfr. a questo proposito la prossima sezione III4.*c*..

[108] Cfr. d'Alembert (1754-56), parte I, p. 50 [cfr. il prossimo paragrafo III.4.*c*.β.].

[109] Cfr. a questo proposito il prossimo capitolo III.4..

ta[110]), siamo in una condizione in cui la produzione di controesempi al verificarsi di tali condizioni risulta estremamente difficile e anzi probabilmente impossibile. Se a ciò aggiungiamo la semplice osservazione che su ogni forma finita F(x) è sempre possibile operare una trasformazione algebrica che trasforma questa forma in una forma identicamente equivalente G(x-a), la quale può essere sviluppata secondo le potenze intere della nuova variabile $z = (x\text{-}a)$ ci rendiamo conto non solo dell'intuitiva legittimità del punto di vista che ho cercato di descrivere, ma anche della sua compatibilità con ogni esigenza applicativa particolare.

Così, la risposta alla domanda (iii) ci ha implicitamente fornito una risposta anche per le domande (iv), (i) e (ii). Non resta allora che riordinare il materiale fino a qui raccolto e concludere con qualche ulteriore considerazione. A questo scopo comincerò con il riassumere la prima risposta: l'identità stabilita dall'associazione per mezzo del segno di eguaglianza di una qualsiasi forma analitica strutturata (diversa da una serie intera) con una serie intera esprime la possibilità di passare dalla prima forma alla seconda per mezzo dell'applicazione di un insieme stabilito di regole costruttive, le quali possono venir ricondotte o alle regole R.I.-R.VII. o alla sostituzione delle forme elementari presenti nella forma data con il loro sviluppo assegnato *a priori* e alla successiva composizione degli sviluppi per mezzo di un operare termine a termine. Il segno di eguaglianza esprime qui la relazione di `essere sviluppo di ...', la quale non può essere intesa come una relazione di equivalenza, non essendo né riflessiva né simmetrica. Qualora il segno di eguaglianza associ fra loro due serie intere, esso esprime o l'equivalenza identica dei coefficienti del medesimo ordine o (nel caso in cui questi coefficienti siano costituiti da simboli atomici) la loro comune proprietà di rappresentare la stessa quantità (o, direttamente, il medesimo numero). In questo caso avremo allora una relazione di equivalenza fra due sviluppi.[111]

Qualora essa sia riferita a una forma analitica strutturata, la relazione di sviluppo in serie intera vige quindi essenzialmente fra due diverse forme analitiche, indipendentemente da ogni loro potere rappresentativo.[112] Quando si afferma che essa associa una funzione alla serie intera che ne rappresenta lo sviluppo ci si riferisce quindi alla funzione in quanto forma analitica. Per ogni sviluppo in serie intera è tuttavia assunta la sussistenza di un intervallo di convergenza di raggio non nullo e centrato sullo zero, entro il quale esso rappresenta la stessa quantità rappresentata dalla forma a cui esso è associato. Limitatamente a questo intervallo la relazione di sviluppo

[110]Cfr. a questo proposito il prossimo capitolo III.6., *sez. b.* e l'appendice II.2-B., dove discuterò il caso della funzione $y = \exp(-1/x^2)$ usualmente citato come controesempio alla sussistenza della seconda condizione.

[111]Si osservi che questa eventualità deriva nella generalità dei casi dall'associazione di uno sviluppo generico a una forma analitica assegnata e non esprime altro che una condizione di determinazione dei coefficienti generici.

[112]Come vedremo nel prossimo paragrafo II.2.v., la situazione è diversa qualora il segno di eguaglianza correli una serie a un simbolo atomico non esplicitamente associato a una forma analitica strutturata finita per mezzo di un'equivalenza per posizione e di cui non si conoscano che certe relazioni operazionali che lo legano a altri simboli atomici.

contiene quindi un'informazione relativa alla quantità rappresentata dalle due forme analitiche. Questa informazione può essere utilizzata in differenti modi.

Essa può innanzitutto condurre alla determinazione numerica, relativamente all'intervallo stabilito, della quantità rappresentata dalla forma analitica finita. Questo è a esempio il caso dello sviluppo in serie intera dell'integrale ellittico (1). La quantità s è qui infatti originariamente rappresentata da una forma strutturata finita non semplice, alla quale non corrisponde identicamente alcuna forma analitica semplice. La sua determinazione numerica è tuttavia possibile per approssimazione, fino a un grado di precisione arbitrario, attraverso l'addizione successiva dei valori numerici rappresentati, per la determinazione assegnata alle variabili principali, dai termini successivi di un opportuno sviluppo in serie intera. L'opportunità della serie sviluppo dipende ovviamente dalle determinazioni numeriche delle variabili. Si tratta, così, di scegliere fra gli sviluppi costruibili a partire dalla forma data o da una forma identicamente equivalente, quello le cui condizioni di convergenza risultino compatibili con la determinazione numerica delle variabili. La determinazione delle condizioni di convergenza non è tuttavia immediata, ma dipende o dalla determinazione del termine generico della serie sviluppo o dalla determinazione delle condizioni di convergenza delle serie operando sulle quali si perviene a questo sviluppo e richiede quindi, in entrambi i casi, un'analisi del procedimento costruttivo che ha condotto a esso.

Consideriamo a esempio lo sviluppo (3). Posta la (2) sotto la forma seguente:

$$(15) \qquad s = \int_0^x dx \left[\sum_{k=0}^{\infty} \binom{1/2}{k} a^{1-2k} (-c)^k x^{2k} \right] \left[\sum_{k=0}^{\infty} \binom{-1/2}{k} a^{-1-2k} (-x^2)^k \right]$$

è facile trarre:

$$(16) \qquad s = \int_0^x \sum_{k=0}^{\infty} x^{2k} a^{-2k} \left[\sum_{h=0}^{k} \binom{1/2}{k-h} \binom{-1/2}{h} (-c)^{k-h} (-1)^h \right] dx$$

e quindi, commutando $\int$ con Σ e calcolando gli integrali:

$$(17) \qquad s = \sum_{k=0}^{\infty} \left\{ \frac{1}{2k+1} a^{-2k} x^{2k+1} \left[\sum_{h=0}^{k} \binom{1/2}{k-h} \binom{-1/2}{h} (-c)^{k-h} (-1)^h \right] \right\}$$

Calcolando d'altra parte il rapporto fra il k-esimo termine (che indicherò con A_k) e il (k-1)-esimo (che indicherò con A_{k-1}) avremo:[113]

$$\frac{A_k}{A_{k-1}} = \frac{2k-1}{2k+1} a^{-2} x^{2} \frac{\sum_{h=0}^{k} \binom{1/2}{k-h}\binom{-1/2}{h}(-c)^{k-h}(-1)^{h}}{\sum_{h=0}^{k-1} \binom{1/2}{k-h-1}\binom{-1/2}{h}(-c)^{k-h-1}(-1)^{h}} \tag{18}$$

e non è difficile rendersi conto che per k che tende all'infinito e $0<c\leq 1$ questo rapporto tende a x^2/a^2. La serie è quindi convergente ogni volta che il valore assoluto di x è strettamente inferiore al valore assoluto di a e può in questi casi venir utilizzata per determinare numericamente s. Per pervenire d'altra parte agli sviluppi adeguati ai casi $|x| > |a|$ e $|x| = |a|$ basterà trasformare identicamente i binomi (a^2-cx^2) e (a^2-x^2) rispettivamente nei binomi $-(cx^2-a^2)$ e $-(x^2-a^2)$ e $[(2a^2-cx^2) - a^2]$ e $[(2a^2-x^2) - a^2]$ e operare come in precedenza.

Una volta che sia stata accertata la convergenza di uno sviluppo sotto certe condizioni, questo può essere inteso, sotto queste condizioni, come una rappresentazione diretta di una quantità, la quale può tuttavia venir determinata per mezzo di un'approssimazione arbitrariamente precisa.[114]

Questa possibilità suggerisce un impiego delle serie intere allo scopo di fornire un'approssimazione razionale di un qualsiasi numero irrazionale a. A questo scopo è sufficiente trovare una funzione $F(x)$ per cui si possa individuare un numero b appartenente all'intervallo di convergenza del suo sviluppo in serie intera $\sum A_n x^n$ tale che si abbia contemporaneamente $F(x)|_{x=a} = b$ e $A_n b^n \in \mathbb{Q}$ per ogni n. Le successive somme parziali dello sviluppo in serie intera di questa funzione per $x=b$ forniranno allora le richieste approssimazioni. Secondo un procedimento del tutto analogo sarà poi facile pervenire a sommare una serie numerica $\sum A_n$ tale che l'associata serie intera $\sum A_n x^n$ sia lo sviluppo di una funzione nota $F(x)$, il quale converga su in intervallo comprendente il valore $x=1$ della variabile.

Per quanto questo breve elenco non esaurisca ovviamente la classe delle applicazioni degli sviluppi in serie intera di una forma analitica data, le considerazioni precedenti dovrebbero essere sufficienti, oltre che per rispondere alle domande (i)-(iv), anche per chiarire in termini generali il punto di vista dal quale, da Euler a Lagrange, i matematici settecenteschi trattarono

---

[113] Applico qui il criterio di convergenza di d'Alembert su cui cfr. la prossima appendice II.2-A..

[114] Si noti che qualora si chieda un'approssimazione razionale, la situazione non è qui essenzialmente diversa da quella in cui ci si trova qualora si chieda l'approssimazione razionale di un numero irrazionale qualsiasi (a esempio del valore irrazionale assunto da una funzione data per una certa assegnazione di valori alle variabili).

questi sviluppi.[115] Considerazioni analoghe sarebbero poi possibili anche riguardo agli sviluppi in serie di altri tipi, o a quelli in prodotti infiniti o in frazioni continue, i quali vennero, anche se in misura largamente minore, costantemente utilizzati nel corso di tutto il XVIII secolo, insieme agli sviluppi in serie intera, in vari e differenti contesti.

II. 2. λ. *Rappresentazioni implicite*

Fra questi ve ne fu almeno uno, in cui l'impiego degli sviluppi infiniti dovette apparire ai matematici settecenteschi come un ausilio assolutamente indispensabile non solo per pervenire alla determinazione di certe grandezze, ma anche allo scopo di completare convenientemente l'edificazione stessa di una teoria generale delle funzioni. Mi riferisco ovviamente all'ampio contesto delimitato dal riferimento al generalissimo problema del passaggio da una qualsiasi rappresentazione implicita (o impropria) di una classe di quantità a una rappresentazione esplicita delle quantità appartenenti a tale classe. Se non ho finora parlato di "rappresentazioni di una quantità" che per riferirmi o a rappresentazioni atomiche o a rappresentazioni esplicite,[116] le quali condividono la proprietà di essere delle rappresentazioni *proprie* di una quantità, è chiaro come i matematici post-newtoniani conoscessero (e avevano affrontato con differente successo) innumerevoli situazioni matematiche - senza dubbio la stragrande maggioranza di quelle cui metteva capo la soluzione di un problema geometrico o meccanico - in cui le quantità in gioco non si presentavano che per mezzo di rappresentazioni atomiche connesse fra loro tramite certe relazioni operazionali dipendenti dai caratteri particolari delle quantità concrete rappresentate e/o dalle leggi generali della meccanica. Una teoria generale delle quantità non poteva così limitarsi alla considerazione di rappresentazioni esplicite, ma doveva al contrario rispondere allo scopo primario di fornire gli strumenti matematici generali per affrontare con successo situazioni di tal genere. E' tuttavia chiaro che se ciò che si chiede a questi strumenti è la loro adeguatezza rispetto allo scopo ultimo di fornire, a partire da una qualsiasi situazione di questo tipo, una determinazione di tutte le quantità coinvolte nel problema affrontato, la quale segua nel modo più semplice dalla determinazione di un certo numero di esse, allora la via più naturale che possa essere seguita è quella di cercare delle procedure atte a tradurre le informazioni implicite concesse in opportune informazioni esplicite. Si tratterà allora: i) di classificare questo genere di situazioni relativamente alla loro intrinseca natura matematica e agli strumenti adeguati per affrontarle; ii) di cercare in tutti i casi possibili delle procedure atte a tradurre le informazioni concesse in rappresentazioni esplicite delle quantità coinvolte, le une relativamente alle altre; iii) di cercare, in tutti i casi in cui un tale tentativo non sia ancora stato coronato da successo o sia stata dimostrata l'impossibilità di pervenire a questo risultato, delle procedure

---

[115]Cfr. tuttavia, per ulteriori chiarimenti, le prossime appendici II.2-A. e II.2-B..
[116]Cfr. le precedenti note (47), (63) e (67).

atte a fornire informazioni di altro tipo su queste stesse quantità, le quali possano volta a volta venire utilizzate sia nelle applicazioni particolari che negli eventuali tentativi successivi di giungere al risultato di cui al punto (ii).

Se ci riferiamo a un tale quadro concettuale è abbastanza facile capire come l'analisi euleriana abbia potuto mantenere quella centralità del concetto classico di *equazione*[117] tipica della tradizione di Viète, Descartes e Newton, pur presentandosi esplicitamente come una teoria generale delle *funzioni*, manifestamente intese o come delle forme analitiche semplici[118] o come delle quantità rappresentate (esplicitamente e direttamente) da queste forme. Per quanto nella tradizione matematica post-newtoniana si possano individuare differenti modalità di rappresentazione implicita di una classe di quantità, è infatti assai raro incorrere, fuori da contesti molto particolari,[119] in situazioni nelle quali la rappresentazione implicita non sia assicurata dal ricorso a una o più *equazioni*. Ora, benché il termine "equazione" sia spesso usato in modo assai generico, per indicare una qualsiasi scrittura della forma $a=b$, ovvero ogni associazione grafica di due strutture simboliche realizzata per mezzo dell'interposizione fra esse del segno di eguaglianza (che per motivi di semplicità espositiva dirò d'ora in poi "equiparazione"), non è difficile distinguere fra le "equazioni" così intese, alcune che godono di uno statuto del tutto particolare che le differenzia in modo assolutamente essenziale da tutte le "equazioni" che ho fino a qui considerato in qualche dettaglio.[120] Quete equazioni - che chiamerò d'ora in poi "equazioni classiche" - si caratterizzano infatti grazie alla loro comune proprietà di indicare un'equivalenza la quale sussiste *solo* per alcune *incognite* sostituzioni di certi simboli atomici per quantità che occorrono in essa. Per essere ancora più preciso dirò che la sussistenza di questa equivalenza corrisponde alla proprietà di queste sostituzioni di trasformare l'equazione data o in un'equivalenza identica fra forme analitiche o in una mera identità numerica. E' perfettamente chiaro che una simile proprietà di alcune scritture simboliche non possa dipendere in modo esclusivo dai caratteri intrinseci della scrittura che gode di essa, ma riposi al contrario su un'interpretazione di questa scrittura come indicatrice dell'equivalenza suddetta,[121] la quale interpretazione è generalmente stabilita in base al contesto in cui la scrittura compare. Così una scrittura come $y = \log(x)$ può essere a esempio interpretata sia come l'espressione di un'equivalenza per posizione, la quale sussiste per ogni sostituzione e/o determinazione di x, che come un'equazione classica la quale indica l'equivalenza identica originata dalla sostituzione (che all'atto della posizione della scrittura può qualificarsi come incognita) $x = e^y$. Così la proprietà di un'equazione generica di essere un'equazione classica dipende dalla sua connessione a un concetto[122] (la quale stabilisce le regole operative con cui è possibile operare a partire da essa). Designerò questo concetto come "il concetto classico di equazione".[123]

---

[117]Cfr. *sotto.*

[118]Spero sia risultato finora chiaro che il termine "forma analitica" debba riferirsi esclusivamente a composizioni simboliche in cui non intervengano che simboli per quantità e per operazioni riferite a quantità. Un'equazione non può quindi che essere,

La caratteristica peculiare di un'equazione classica è così quella di prospettare, con il suo stesso porsi, il problema della determinazione delle sostituzioni incognite che la verificano, ovvero delle sue *radici*. Qualora tale equazione non sia costituita che dalla equiparazione di due forme analitiche semplici contenenti un solo comune simbolo atomico per quantità (o eventualmente dall'equiparazione di una forma analitica semplice a un simbolo numerico o allo stesso simbolo atomico per quantità che compare in essa[124]), le radici non possono che consistere in un valore numerico che sostituito a tale simbolo atomico produce un'identità numerica. Non appena si ponga tuttavia il problema di individuare delle procedure di ordine generale che permettano l'identificazione delle radici numeriche per tutte le equazioni di questo tipo appartenenti a una opportuna sottoclasse (a esempio per le equazioni algebriche di secondo grado) diventa abbastanza naturale rappresentare queste equazioni in *forma* generica, sostituendo i simboli numerici volta a volta determinati con simboli letterali opportuni.[125] Ciò permette in molti

---

al più, una relazione fra due diverse forme analitiche, le quali, nel linguaggio di Euler e Lagrange, costituiscono (o rappresentano) *due differenti funzioni*.

[119]Penso a esempio alle rappresentazioni implicite di una quantità costituite dalla posizione di due diseguaglianze del tipo $x \leq a$ e $x \geq a$ tipiche delle dimostrazioni per esaustione (tanto geometriche che analitiche).

[120]Per evitare inutili ambiguità ho, nel presente capitolo, utilizzato finora il termine "equazione" nel senso generico che ho appena precisato solo in contesti in cui il ricorso a un termine differente avrebbe contrastato troppo apertamente con la pratica corrente fra gli storici e i matematici (di oggi e di ieri), preferendo in altri casi il termine "identità". Naturalmente mi sono al contrario servito liberamente del termine "equazione" per riferirmi in senso stretto alle "equazioni classiche" [cfr. *sotto*].

[121]Si noti che mentre l'equazione è qui intesa come una *scrittura*, un'equivalenza è una *relazione*. L'interpretazione in questione consiste quindi nell'intendere la scrittura-equazione come indicatrice della suddetta relazione di equivalenza.

[122]Se pensiamo un'equazione direttamente come una scrittura, è chiaro che questo concetto (benché possa venire indicato come un concetto di equazione) non sussume sotto di sé equazioni, quanto interpretazioni di equazioni.

[123]Mi pare infatti che nella tradizione matematica "classica", almeno fino a Descartes, il termine "equazione" sia generalmente usato conseguentemente a un tale concetto (posto che l'equivalenza identica sia sostituita con l'identità numerica). Più che una scelta consapevole questo uso corrisponde tuttavia alla indisponibilità di concetti diversi, i quali potessero fornire altre interpretazioni per una scrittura della forma $a=b$ in cui i simboli a e b non indicassero due quantità concrete (a esempio due segmenti) equiparate in base a una loro comune proprietà (a esempio la lunghezza). Una delle principali novità dell'analisi post-cartesiana (la quale è senza dubbio presente in Newton) [non so se questa novità possa o meno venir assegnata a Descartes] potrebbe allora essere costituita dall'introduzione di queste alternative.

[124]Per ragioni di semplicità identifico fra loro - quali elementi di una classe di equivalenza identica - (relativa a equazioni piuttosto che a forme) tutte le equazioni indicate da stringhe simboliche che sono trasformabili l'una nell'altra per mezzo di una semplice trasposizione di alcuni addendi da uno dei suoi membri all'altro o dell'esecuzione di alcune operazioni elementari.

[125]In realtà questa è a me pare la conseguenza di una delle principali conquiste concettuali del XVII secolo, la quale consiste nel riconoscimento della possibilità di individuare delle *forme* comuni non solo di figure, ma anche di equazioni, indicabili per mezzo del ricorso a rappresentazioni generiche di quantità e tali da permettere quell'agire universale in concreto che Kant individua come un tratto peculiare del procedere matematico.

casi di sostituire la descrizione del procedimento risolutivo con l'esibizione della *forma* generica delle radici. Questo è in particolare il caso, delle equazioni algebriche di primo, secondo, terzo e quarto grado o di tipi particolari di equazioni algebriche di grado superiore. Cosi reinterpretati, questi metodi di soluzione permettono quindi di pensare queste particolari classi di equazioni, piuttosto che come rappresentazioni generiche di genuine equazioni numeriche, come equazioni di tipo essenzialmente diverso, in cui le sostituzioni incognite da determinare assumono la natura di forme analitiche costantemente uguali a se stesse relativamente alla variazione del valore numerico dei coefficienti introdotti. Così, benché la posizione di un'equazione algebrica prospetti il problema della determinazione di una collezione di valori che esprima l'insieme delle radici, si manifesta in molti casi la possibilità di rappresentare in termini generali questa collezione per mezzo di un insieme di forme analitiche che rappresenti la quantità incognita[126] relativamente alle quantità che costituiscono i coefficienti dell'equazione. Un'equazione algebrica di secondo grado $ax^2+bx+c = 0$ non fa quindi che esprimere da questo punto di vista le condizioni di una rappresentazione della quantità x per mezzo di una forma analitica, condizioni che sono come è noto rispettate dalle forme $\frac{-b+\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$ e $\frac{-b-\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Ora, che un'equazione algebrica esprimesse una dipendenza fra la quantità scelta come incognita e le quantità scelte come coefficienti era, in pieno XVIII secolo, certamente noto da molto tempo e era proprio a partire da questa consapevolezza che Descartes aveva costruito fin dal 1637 l'edificio della sua nuova teoria delle curve geometriche, secondo un'impostazione che manteneva ancora, a più di un secolo di distanza e anche dopo la scoperta del *calcolo,* tutta la propria modernità.[127] Ciò che appare nuovo nell'impostazione euleriana dell'*Introductio* è piuttosto l'interpretazione funzionale di questa dipendenza, ovvero l'interpretazione della quantità incognita come una *funzione* incognita dei coefficienti. Ciò non significa semplicemente per Euler che il valore delle radici dipende dai valori dei coefficienti, ma piuttosto che le radici esprimono una quantità astratta che può venire rappresentata relativamente alle quantità astratte che costituiscono i coefficienti per mezzo di una forma analitica incognita, la quale può o meno risultare determinabile per mezzo degli strumenti matematici conosciuti.

Qui la questione si fa tuttavia difficile. Consideriamo infatti l'esempio di un'equazione algebrica di secondo grado. Essa comporta come è ben noto due diverse radici, le quali sono rappresentabili per mezzo di due diverse forme analitiche. Si dovrebbe quindi dire che questa equazione rappresenta implicitamente *due quantità* rappresentate per mezzo di *due forme analitiche*, ovvero *due funzioni.* Così il simbolo atomico x che compare in questa

[126]Cfr. *sotto.*

[127]Per i principali sviluppi della teoria cartesiana delle curve algebriche nel corso del XVIII secolo, dopo l'*Enumeratio* di Newton [cfr. Newton (1704b), ma anche Whiteside (1967-81), vol. VII, pp. 588-655)], cfr. oltre al secondo volume dell'*Introductio*: De Gua de Malves (1740), Cramer (1750) e Sejour-Godin (1755).

equazione dovrebbe venir inteso come un simbolo generico che esprime una o l'altra di queste quantità. Questo non è tuttavia il punto di vista di Euler e basta leggere le prime pagine dell'*Introductio* per rendersene conto.[128] Dopo aver definito il termine "funzione" come abbiamo visto nel precedente paragrafo II.2.η., aver esemplificato tale definizione per mezzo di esempi come: $a+3z$; $az-4z^2$; $az+b\sqrt{a^2-z^2}$ - che vengono qualificate come "funzioni di z" o "della quantità z" - e aver distinto fra funzioni algebriche e trascendenti, egli introduce una distinzione ulteriore fra "funzioni *uniformi*" e "funzioni *multiformi*". Le prime sarebbero caratterizzate dalla proprietà di "ottenere un solo valore determinato" per ogni valore della variabile, mentre le seconde sarebbero invece tali da ottenerne più di uno. Per quanto fra gli esempi di funzioni multiformi, Euler citi le funzioni irrazionali e l'arco seno (che è qualificata come una "funzione infinitiforme"), è chiaro che il prototipo delle funzioni multiformi sia costituito dalla radice di un'equazione (algebrica):

> Erit ergo Z Functio multiformis ipsius z, quæ, pro quovis valore ipsius z, tot exhibet valores quot numerus n contineat unitates; si Z definiatur par hanc æquationem $Z^n - PZ^{n-1} + QZ^{n-2} + RZ^{n-3} + SZ^{n-4}$ - &c. = O [dove P, Q, R, S, &c. sono funzioni uniformi di z].[129]

Così le differenti radici di un'equazione non sono che diversi valori di *una sola funzione*, di *una sola quantità*. Ma che cosa significa che *una* quantità possa assumere contemporaneamente *due* diversi valori? Se pensiamo la nozione astratta di quantità come una generalizzazione dei concetti delle quantità particolari, come possiamo ammettere questa singolare eventualità? La situazione è ancora più paradossale se accettiamo di identificare una funzione con una forma: per quanto questa interpretazione possa (forse) salvare il caso delle funzioni radicali o dell'arco seno, come potremmo accettare l'idea che *la stessa forma* possa rappresentare l'insieme delle radici di un'equazione di grado n-esimo e possa essere, in questo caso, qualificata come *multiforme*?

Una breve riflessione ci permette tuttavia di capire come una simile situazione, all'apparenza tanto paradossale, non sia che l'esito naturale di un programma che concepisce il progetto di una riunificazione della scienza matematica per mezzo di una teoria generale delle quantità, intesa come una teoria delle forme analitiche non interpretate (rappresentanti quantità astratte) e delle loro reciproche relazioni operazionali, la quale possa applicarsi, come uno strumento universale, alla soluzione di ogni problema particolare riferito a quantità specifiche. La rappresentazione simbolica delle quantità per mezzo di un semplice alfabeto di lettere convenzionalmente assegnato impedisce infatti, per la sua stessa natura intrinseca, di distinguere fra l'uno e i tanti. Ora, fino a che le quantità sono introdotte l'una a partire dalla altre per mezzo di una catena di rappresentazioni esplicite che esprimono certi insiemi di relazioni operazionali, la stessa convenzione di partenza può reggere

[128] Per un analisi più dettagliata cfr. il prossimo capitolo III.3..
[129] Cfr. Euler (1748), p. 9.

(una volta che si siano introdotti opportuni accorgimenti, come quello di indicare esplicitamente il segno di ogni radicale[130]) la mappa delle distinzioni. La distinzione assunta convenzionalmente e indicata per mezzo del ricorso a simboli differenti si trasmette di rappresentazione in rappresentazione, conducendo al più (come abbiamo visto) all'edificazione di opportune classi di equivalenza. La situazione è invece sostanzialmente diversa quando ci si pone il problema di esprimere il fatto che una quantità non ancora individuata gode della proprietà di essere l'argomento di una operazione che fornisce un risultato assegnato (e indicato per mezzo di un'altra quantità), a esempio la proprietà di possedere un quadrato uguale a y. Qui non è possibile cavarsela rappresentando direttamente le quantità $x = -\sqrt{y}$ e $z = \sqrt{y}$ che godono di questa proprietà; ciò che si chiede è infatti di esprimere il possesso di quella proprietà *e null'altro*, di non dire di una quantità nient'altro se non che essa ha a come quadrato, di esprimere una proprietà riferita a quantità (più che a una quantità). In una situazione come questa, la quale condivide nella sua natura l'essenza stessa di innumerevoli problemi matematici, il linguaggio analitico sembra essere in difetto. Esso non ha che un simbolo, un nome, per indicare una quantità, non può dire niente di essa senza utilizzare quel nome. O ci si rassegna quindi a usare in certe circostanze questo nome come il nome di un genere,[131] non come il simbolo di una quantità certo astratta e (ancora) incognita ma pur sempre individuale, ma come un simbolo generico per quantità, o si e nell'impossibilità di rispondere a una tale richiesta. Certo anche quando si sia accettata la prima eventualità si è ancora nella difficoltà conseguente all'uso del medesimo simbolo con due significati fra loro completamente distinti in diversi contesti e è proprio ciò che conduce alla necessità di introdurre un'interpretazione per riconoscere un'equazione classica. Questa interpretazione non ci dice altro se non che nella scrittura $ax^2+bx+c = 0$ il simbolo x non è la rappresentazione (atomica) di *una* quantità, ma il simbolo generico delle quantità. Una tale scrittura può allora essere letta come l'espressione di una proprietà pos-

[130] O anche di intendere una funzione primitiva $y = \int f'(x)dx = f(x) + C$ come una funzione $F_C(x)$ di x e C.

[131] Si noti che la situazione è qui sostanzialmente differente da quella in cui ci si trova indicando, a esempio, un coefficiente di una generica serie intera (o anche di un'equazione) tramite un simbolo generico A. In tal caso il simbolo generico partecipa infatti a una scrittura che rappresenta una classe di forme, costituendo la forma tipica di quella classe e può quindi intendersi come il simbolo di una quantità non ancora determinata (poco importa se la determinazione di questa quantità non sia poi una determinazione numerica, ma una determinazione funzionale). Qui invece il simbolo x è un modo per riferirsi in generale alle quantità nel loro complesso, al genere quantità e non a una qualsiasi entità appartenente a quel genere. Per ritrovarsi in questa situazione occorre operare sulla forma generica intendendola come parte di un'equazione (classica) che rappresenta indirettamente certe classi di quantità (ciò che avviene a esempio nel quarto metodo di sviluppo in serie intera [cfr. il precedente paragrafo II.2.κ.]) alle quali ci si richiama provvisoriamente per mezzo dei simboli A, B, &c. che assumono allora lo stesso statuto del simbolo x in un'equazione classica [cfr. *sotto*]. La situazione è tuttavia resa qui meno problematica dal fatto che il metodo dei coefficienti indeterminati prevede in generale una determinazione dei coefficienti, ciò che riduce ognuna delle classi implicitamente rappresentate dall'equazione a un mero singoletto.

seduta da alcune quantità individuali (in questo caso due) e quindi come la rappresentazione implicita di *una classe di quantità*.[132]

Una volta che sia stato chiarito questo punto diventa più facile capire il linguaggio di Euler e ricostruire la sottostante struttura concettuale. Fornita infatti un'equazione algebrica $F(x)=0$ il passaggio dalla sua interpretazione come espressione di una proprietà condivisa dagli elementi di una classe di quantità alla sua interpretazione come rappresentazione implicita di questa classe corrisponde a un ulteriore slittamento nel significato attributo al simbolo x che diviene il rappresentante generico di ognuna delle quantità della classe caratterizzata dalla proprietà espressa dall'equazione. Fino a che si intenda quindi operare sulle quantità appartenenti a questa classe *solo* in quanto appartenenti a questa classe, sarà possibile operare direttamente su questo simbolo in quanto occorrente nell'equazione assegnata. In questa pratica il simbolo riceve un'individualità operativa e può essere trattato come un qualsiasi simbolo per quantità. Esso non perde tuttavia la sua caratteristica essenziale di essere al più il rappresentante generico di una classe di quantità e ciò fa si che, ogni volta che si arresti a un certo stadio il processo delle trasformazioni analitiche e si introducano determinazioni delle quantità considerate, la pluralità torna inevitabilmente a manifestarsi. Ora, se le determinazioni introdotte sono vere e proprie determinazioni numeriche, ciò si traduce nella necessità di assegnare al simbolo in questione una collezione di determinazioni numeriche differenti. Al contrario se la richiesta di determinazione non consiste che in una richiesta di esplicitazione delle relazioni intercorrenti fra ogni quantità della classe implicitamente rappresentata e le restanti quantità involte nell'equazione, essa si traduce nell'assegnazione a questo simbolo di una collezione di forme. Basta allora intendere i simboli che indicano i coefficienti di un'equazione algebrica come rappresentazioni di numeri qualsiasi, per intendere queste differenti forme come dei valori sia pure numericamente indeterminati. L'interpretazione di x *come* il simbolo di *una* funzione incognita dei coefficienti[133] è quindi operativamente accettabile fino a quando non intervenga la necessità di un passaggio a rappresentazioni esplicite. Tutto sta quindi nella capacità di distinguere i conte-

[132]Cfr. il precedente paragrafo 2.II.θ.: una rappresentazione implicita non è in senso stretto una rappresentazione di alcunché (non è una rappresentazione propria), essa non fa che indicare una classe di quantità per mezzo dell'espressione della proprietà che caratterizza questa classe.

[133]Si noti che da un simile punto di vista non esiste alcuna differenza di principio fra equazioni come $ax^2 + bx + c = 0$, e equazioni come $x^2 + xy - y^2 = 0$. In entrambi i casi la radice è costituita da una forma analitica che contiene simboli per quantità non determinate e che possono venir intese come funzioni di queste quantità [sulla distinzione fra quantità variabili e costanti cfr. *sotto*]. Si noti peraltro che l'interpretazione di Euler esprime implicitamente la fiducia nella possibilità di principio di fornire una rappresentazione delle radici di ogni equazione algebrica per mezzo di una forma analitica semplice, ovvero, in linguaggio moderno, nella possibilità di esprimere le radici di ogni equazione come funzioni elementari dei coefficienti. D'altra parte a metà settecento la convinzione della possibilità di trovare espressioni algebriche per le radici di un'equazione di grado qualsiasi era ancora lungi dall'essere tramontata.

sti in cui si opera.[134]

Le difficoltà fino a qui considerate non sono tuttavia la sola conseguenza dell'impostazione euleriana. Se infatti l'obiettivo principale è quello di giungere a una riunificazione della scienza matematica come una teoria delle funzioni, e interpretare quindi in questo quadro la stessa teoria delle equazioni algebriche, non è possibile evitare di fare delle funzioni un oggetto matematico generalmente riferito alla totalità del campo complesso. D'altra parte se si accetta l'idea che ogni equivalenza per posizione $y = F(x)$ possa essere intesa come un'equazione classica, ovvero come la rappresentazione implicita di una classe di quantità o, che dir si voglia, funzioni - ovvero si afferma che ogni rappresentazione di una quantità nei termini di altre quantità esprima la sussistenza di una relazione che può in linea di principio venir letta in entrambi i sensi - si deve anche accettare che il carattere complesso del codominio di una funzione generica si trasferisca al dominio. Una funzione euleriana deve quindi essere intesa come una quantità variabile su **C**, la quale può essere a sua volta argomento di una nuova funzione anch'essa variabile su **C**. Detto in termini moderni, ogni funzione euleriana è, in generale, un'applicazione (o una famiglia di applicazioni) da **C** in **C**.[135] Questa generalità in linea di principio assolutamente necessaria per rispondere agli obiettivi strategici del programma euleriano non sembra tuttavia corrispondere durante tutto il XVIII secolo a una consapevole concettualizzazione delle essenziali distinzioni fra un'analisi reale e un'analisi complessa. Se d'altra parte pensiamo a una teoria generale delle funzioni come a una teoria delle trasformazioni formali e delle relazioni che queste stabiliscono fra forma e forma, le quali dovranno volta a volta essere interpretate in contesti particolari come relazioni fra quantità, le sole preoccupazioni che questa generalità possa provocare riguardano l'estendibilità degli algoritmi operazionali a *forme* generiche del tipo $a+b\sqrt{-1}$ e la possibilità di intendere qualsiasi funzione come ristretta al campo reale per un'opportuna limitazione del dominio, generalmente assai facilmente determinabile. Ora, se pensiamo che durante tutto il XVIII secolo le principali applicazioni del *calcolo* riguardarono, oltre che la teoria generale delle trasformazioni funzionali, la soluzione di problemi geometrici e meccanici e che la stessa impostazione metodologica di Euler prescriveva una minimizzazione degli interventi di questo in ambiti strutturalmente indipendenti, comprendiamo come a una tale generalità di principio potesse far riscontro una pratica matematica in cui l'implicita limitazione a funzioni con dominio e codominio ristretti al campo reale permettesse di non affrontare con soverchia preoccupazione e suffi-

---

[134]Si noti che qualora si intenda applicare la teoria delle equazioni algebriche (di grado superiore al primo) allo studio delle curve algebriche non solo non sarà per nulla necessario passare a rappresentazioni esplicite delle quantità appartenenti alla classe implicitamente rappresentata da un'equazione, ma si potrà continuare a pensare *la* radice come un oggetto individuale (se non una quantità individuale) interpretato come una curva eventualmente a più ordinate.

[135]Vedremo nel prossimo paragrafo III.3.*a*. α., che una funzione è per Euler generalmente suriettiva relativamente a un codominio complesso.

ciente cura il problema dell'estendibilità degli algoritmi differenziali e integrali al caso di funzioni a dominio e codominio complesso. Credo che sia questa la ragione che spiega l'assenza altrimenti sbalorditiva, eppure costante in tutto il XVIII secolo, di ogni accenno alla possibilità di una rappresentazione geometrica dei numeri complessi, peraltro chiaramente intesi come coppie ordinate di numeri reali. Se cerchiamo quindi in questa assenza la causa del mancato sviluppo dell'analisi complessa nel XVIII secolo compiamo, io credo, un'inversione di causa e effetto. Sia come sia, la lettura dei testi matematici settecenteschi sembra confermare che le considerazioni funzionali esplicitamente legate all'ipotesi di una variabilità sull'intero campo complesso, tanto degli argomenti che dei valori di una funzione restarono essenzialmente confinate in domini di ricerca ristretti (sostanzialmente la teoria delle equazioni algebriche) o limitate a osservazioni sporadiche atte a giustificare un passaggio locale di qualche dimostrazione.[136] In tutti questi casi i matematici settecenteschi sembrano perfettamente in grado di manipolare i numeri immaginari ordinandoli in generale relativamente al loro modulo e traendo dalla loro considerazione conclusioni generalmente corrette.

Questo a parte, le considerazioni precedenti dovrebbero mostrare come la nozione euleriana di funzione conducesse a un'interpretazione delle equazioni algebriche come *equazioni intrinsecamente funzionali*, la cui reinterpretazione come equazioni numeriche dipende da un'interpretazione specifica (e del tutto particolare) delle funzioni che esprimono le radici. E' allora chiaro che da un simile punto di vista la distinzione fra equazioni classiche di tipo differente si presenta come secondaria relativamente alla natura profonda del problema principale che esse pongono: determinare una classe di forme analitiche che, sostituite a un certo insieme di simboli atomici per quantità, trasformano l'equazione data in un'equivalenza identica o in un'identità numerica. Molte delle considerazioni svolte fin qui relativamente alle equazioni algebriche possono così essere facilmente estese anche al caso di equazioni classiche di genere differente, le quali furono generalmente interpretate durante la seconda metà del XVIII secolo come equazioni squisitamente funzionali. Se fra queste quelle che, insieme alle equazioni algebriche, svolsero senza dubbio il ruolo principale, in quanto rappresentazioni implicite di classi di quantità, furono le equazioni differenziali (ordinarie o ai differenziali parziali), a queste occorre senza dubbio aggiungere, per completare l'elenco delle equazioni classiche generalmente studiate nel corso del XVIII secolo, almeno altre cinque famiglie di equazioni. La prima di queste famiglie è ovviamente costituita dalle equazioni alle differenze finite, che vennero molto spesso intese come una sorta di versione algebrica delle equazioni differenziali. La seconda è invece quella delle equazioni che oggi diciamo più propriamente funzionali, in cui l'incognita è rappresentata dal simbolo generico per una funzione di cui l'equazione esprime il comportamento rispetto a

[136] E' il caso a esempio, della dimostrazione lagrangiana della sviluppabilità di ogni funzione in serie intera posta all'inizio della *Théorie* [cfr. Lagrange (1797), pp. 7-8 e (1813), pp. 8-9] su cui verrò nel prossimo capitolo III.6., sez. b..

determinate sostituzioni delle variabili, come è il caso dell'equazione $F(x+y) = F(x) + F(y)$ richiamata (insieme a altre, nelle dimostrazione di Æpinus-Euler del teorema del binomio.[137] La terza famiglia è quella costituita da un'identità $y = F(x)$ intesa come un'equazione classica[138] risolta dalla classe di funzioni indicata dalla generica equivalenza per posizione $x = F^{-1}(y)$. Molto simile è il caso delle equazioni della quarta famiglia. Esse sono infatti costituite da un'identità della forma $y = A + Bx + Cx^2 +$ &c. intesa appunto in senso classico e risolta da una posizione della forma $x = A + By + Cy^2 +$ &c., dove i coefficienti A, B, C, &c. vanno opportunamente determinati. Per quanto la difficoltà essenziale sia qui proprio quella di determinare questi coefficienti, il problema posto - genericamente indicato come problema del "ritorno delle serie" - è, in senso proprio, quello della determinazione di una serie sviluppo per la quantità x, intesa come funzione di y. Il simbolo incognito è quindi ancora una volta x. Differente è invece il caso della quinta famiglia di equazioni, dove le incognite sono direttamente costituite dai coefficienti di una generica serie intera associata arbitrariamente a una forma assegnata $F(x)$, in modo da trarre, dopo opportune modificazioni, un'identità della forma (9) che costituisce appunto un'equazione classica, la cui soluzione è data dalle successive determinazioni dei coefficienti A, B, C, &c. in funzione delle costanti presenti in $F(x)$.

II. 2. μ. *Il metodo funzionale*

Se a queste equazioni aggiungiamo le equazioni algebriche e quelle differenziali abbiamo un quadro che a me sembra completo delle modalità in cui i matematici settecenteschi pensavano fosse possibile introdurre, per mezzo di un'equiparazione fra due strutture simboliche (o fra una struttura simbolica e un simbolo atomico), una rappresentazione implicita di una classe di quantità. Per quanto queste modalità siano fra loro profondamente differenti sotto numerosi aspetti e pongano al matematico difficoltà da affrontare per mezzo di procedure operazionali anche molto diverse, le equazioni cui esse rinviano possono venire riunite in base alla tipologia del problema che esse propongono e che dal punto di vista di Euler sembra presentarsi come un problema squisitamente funzionale: assegnato un insieme di condizioni che si chiede vengano rispettate da una certa classe di funzioni originariamente intese come incognite, si tratta di operare sulle equazioni che esprimono queste condizioni in modo da giungere a una caratterizzazione opportuna,[139] e comunque esplicita, delle funzioni che compongono questa classe o almeno all'individuazione di certe loro proprietà. La soluzione di questo problema costituisce la terza fase (la sola che attenga intrinsecamente

[137] Cfr. la precedente nota (85).

[138] Cfr. *sopra*.

[139] L'opportunità dipende ovviamente dal problema a cui corrispondono le equazioni assegnate e non può quindi essere meglio precisata in termini generali. Il compito di una teoria generale sarà allora quello di fornire gli strumenti fondamentali per produrre in ogni situazione particolare le informazioni richieste.

a una teoria generale delle quantità) di un metodo universale di indagine scientifica che per la sua diffusione e l'ampiezza delle sue applicazioni può ben essere considerato come un tratto distintivo di quella nuova scienza matematica della natura[140] che fu senza dubbio uno dei prodotti più tipici dell'età dell'illuminismo.[141] Questo metodo, è stato ricostruito da J. Dhombres, che lo ha qualificato come "funzionale",[142] nei termini seguenti:

> Cette méthode fonctionnelle consiste à résumer analytiquement un problème donné en introduisant une ou des fonctions inconnues (1ère phase), puis à relier fonctions et données du problème par une ou des équations les concernant (2ème phase), à résoudre ces équations, *d'ailleurs de manière indépendante* [corsivo mio] du problème posé (3ème phase) pour aboutir en définitive à l'application au problème originel (4ème phase). Les équations liant la ou les fonctions introduites lors de la première phase sont des *équations fonctionnelles* [...].[143]

Se l'impostazione di Euler permette quindi di reinterpretare in termini generalissimi un procedimento sostanzialmente già diffuso a partire dalla fine del secolo precedente relativamente alla soluzione di numerosi problemi geometrici e meccanici, assegnando alle incognite lo statuto di funzioni, piuttosto che, volta a volta, di ordinate, velocità, distanze, o altre entità specifiche, essa conduce anche a una singolare contraddizione fra le esigenze intrinsecamente conseguenti a questa impostazione e le effettive capacità dell'analisi euleriana di fare fronte a esse:

> Le vice [...] [de] cette méthode - scrive ancora Dhombres - est une contradiction entre la généralité nécessaire sur les fonctions inconnues pour la mise en équation de la première étape et la restriction tout autant nécessaire sur ces fonctions pour l'obtention effective de solutions lors de la troisième étape. Car généralement la méthode exige la prise en compte de *toutes* les solutions de

---

[140]Lo stesso metodo può evidentemente applicarsi anche alla soluzione di problemi strettamente matematici, totalmente interni alla teoria generale delle quantità astratte [cfr. Dhombres (1976), pp. 150-64].

[141]Per quanto molte superficiali ricostruzioni [valga per tutte l'esempio di Cohen (1980)] abbiano genericamente assegnato a Newton (o perfino a Galileo) il merito di aver messo a punto un metodo matematico di indagine della natura "that has been more or less followed by exact scientist ever nice" [cfr. *ivi*, p. 16: si tratta di una soltanto delle innumerevoli citazioni che potrebbero essere tratte dal libro di Cohen, il cui contributo principale agli studi newtoniani consiste nell'aver riformulato decine e decine di volte l'ovvia osservazione secondo la quale il massimo merito di Newton consiste nell'aver introdotto un "metodo" capace di "trattare matematicamente la realtà"], non è difficile rendersi conto che la scienza matematica della natura si sviluppa nel corso del XVIII secolo - a dispetto delle roboanti dichiarazioni di principio che si richiamano incessantemente all'eredità di Newton e alla sua impostazione empirista [*sic!*] - secondo impostazioni metodologiche profondamente differenti da quelle dei *Principia*, trovando nella seconda metà del secolo un assetto peculiare che la differenzia profondamente dalla stessa fisica matematica ottocentesca. Per alcuni esempi del contrasto fra "l'ideale analitico" del XVIII secolo e la nuova fisica matematica di primo ottocento cfr. fra gli altri: Dhombres (1989), Dahan (1989) e Blondel (1989). Un analisi dettagliata dei contributi di Cauchy agli sviluppi della nuova fisica matematica è invece l'oggetto di Dahan (1990). Per un vasto panorama di insieme cfr. inoltre Grattan-Guinness (1990).

[142]Cfr. in particolare, Dhombres (1986), (1987a), (1987b) e (1988).

[143]Cfr. Dhombres (1988), p. 25.

> l'équation fonctionnelle introduite, sans aucune restriction, quitte à éliminer à la dernière étape celles des solutions qui ne relèvent pas du problème posé.[144]

Ora, questa esigenza di generalità nella soluzione dell'equazione funzionale non è a ben guardare la semplice trasposizione di un principio metodologico particolare rispondente a preoccupazioni locali di eleganza o al timore di imporre per così dire *a priori* delle limitazioni che a un'analisi più attenta, senza dubbio più agevole a fronte della possibilità di disporre di tutte le soluzioni, potrebbero forse dimostrarsi illegittime. Ciò che qui è in gioco è la stessa concezione complessiva della scienza matematica. La terza fase partecipa infatti, dal punto di vista euleriano, a un momento separato che attiene a una teoria generale delle quantità astratte, la quale non è che volta a volta applicata alla soluzione di problemi particolari. Così la soluzione di un'equazione funzionale costituisce in sé un problema matematico del tutto indipendente da ogni possibile interpretazione di questa equazione, la quale non si presenta in se stessa che come un'espressione puramente formale che non fa che esibire certe relazioni operazionali fra simboli per quantità astratte la cui rappresentazione esplicita resta incognita. Il problema non è allora quello di individuare tutti gli oggetti appartenenti a una certa famiglia (a esempio tutte le curve) che rispondono alle condizioni assegnate, ma tutte le forme analitiche la cui sostituzione ai simboli generici che indicano l'incognita produce equivalenze identiche o identità numeriche.

Questa impostazione non è tuttavia la conseguenza di una rinuncia che fa della teoria delle quantità astratte una "matematica pura" incondizionata dalle sue *eventuali* applicazioni particolari e ridotta a un gioco formale fine a se stesso, a un divertimento intellettuale che solo in qualche fortunata circostanza può essere riscoperto *a posteriori* come un ausilio per le ricerche riferite a specifiche classi di quantità. Essa è piuttosto il corrispettivo di una speranza di unificazione scientifica la quale si fonda sulla riconosciuta capacità rappresentativa di certi oggetti analitici, di certe strutture simboliche, manipolabili in quanto tali per mezzo di un adeguato insieme di regole operazionali. Così i più disparati problemi particolari diventano una sorta di banco di prova di questa speranza: quelli già risolti chiamano a una reinterpretazione opportuna della soluzione individuata e della procedura che ha condotto a essa in quanto applicazione della teoria generale, quelli ancora insoluti chiamano al duplice obbiettivo di fornire una soluzione secondo i canoni desiderati (ciò che confermerebbe la speranza e soddisfarebbe all'esigenza epistemologica di unità) o, nel caso in cui questa non si mostrasse come facilmente raggiungibile, di individuare comunque una soluzione alla quale la stessa teoria generale deve mostrarsi capace di adeguarsi.

Ma che cosa significa adeguarsi? Per capirlo è necessario capire anche che cosa è un problema riferito a quantità specifiche. Certo, non si tratta di individuare delle relazioni capaci di condurre a determinazioni opportune fra quantità qualsiasi selezionate o costruite arbitrariamente separatamente le une dalle altre. Non si tratta a esempio di tracciare a caso una curva su un foglio di carta e chiedere quale relazione intrattengano l'ascissa e l'ordinata

---

[144] Cfr. *ivi*.

di quella curva rispetto a un certo sistema di riferimento. Il problema è piuttosto, in termini generali, quello di passare da relazioni già assegnate a relazioni incognite, ovvero da quantità individuate per mezzo di certe leggi a partire da quantità date arbitrariamente a quantità connesse per altre leggi a queste stesse quantità o alle quantità date. In termini generalissimi la questione è allora quella di tradurre delle leggi di natura qualsiasi - ma pur sempre delle leggi riconoscibili come tali e quindi dotate di una certa universalità - in leggi di altro genere capaci di condurre a determinazioni opportune. La questione è allora differente a seconda della natura delle leggi assegnate. In questo quadro il problema della generalità di una scienza delle quantità astratte può essere posto in almeno due modi del tutto distinti: da una parte esso può consistere nel problema della capacità di tale scienza di reinterpretare le leggi assegnate in condizioni che permettano l'applicazione dei suoi procedimenti; da un'altra parte esso può consistere nella capacità di questa scienza di ritrovare per mezzo dei propri procedimenti le stesse soluzioni già ritrovate per mezzo di procedimenti particolari (riferiti alla natura specifica delle quantità in gioco), reinterpretandole nei termini degli oggetti di cui essa tratta, assicurando nel contempo l'impossibilità di pervenire a soluzioni diverse da quelle che essa prescrive.

Se misuriamo la speranza euleriana relativamente ai problemi scientifici effettivi abbordati nel corso del XVIII secolo non dovremmo avere difficoltà a concludere che dal primo punto di vista essa doveva apparire come perfettamente fondata; piuttosto il problema che, in questo senso, poteva apparire aperto era quello di interpretare in termini puramente analitici certi algoritmi - come quello differenziale - o certe procedure *standard* - come quelle che conducevano alle equazioni oggi dette di Euler-Lagrange per la soluzione di problemi di massimi o minimi generalizzati - giustificando *poi* la loro applicabilità agli usuali contesti geometrici o meccanici, cosa che d'altronde Lagrange fece in due riprese nella sua memoria del 1760-61 sul calcolo delle variazioni[145] e, quasi quarant'anni più tardi, nella *Théorie*. La questione è invece diversa se la guardiamo dal secondo punto di vista. Non appena il problema particolare comporta infatti condizioni non traducibili analiticamente che tramite il ricorso a un'equazione classica e dà quindi il via all'applicazione del metodo funzionale, l'esigenza di generalità che questo stesso metodo pone sembra scontrarsi con innumerevoli difficoltà. In primo luogo, anche ammettendo *a priori* che la ricerca di forme analitiche sostituibili con successo nell'equazione data corrisponda alle determinazioni delle effettive soluzioni del problema in termini di quantità specifiche, resta aperta la questione dei metodi di determinazione delle forme adeguate. Se nel caso di equazioni algebriche di grado superiore al quarto, all'ignoranza di una procedura universale che conducesse a esprimere le radici come funzioni dei coefficienti faceva fronte un teorema di enumerazione che poteva in

[145]Cfr. Lagrange (1760-61a), a cui fa seguito, per un'esposizione delle applicazioni meccaniche della nuova teoria, Lagrange (1760-61b). Ritrovo qui, mi pare, il contenuto essenziale della tesi (F.vii) di Fraser [cfr. il precedente paragrafo II.2.β.], di cui cfr. anche, a proposito dell'evoluzione del calcolo delle variazioni durante il XVIII secolo, Fraser (1985).

molti casi risultare prezioso,[146] nel caso di equazioni differenziali non solo mancavano, tranne nei casi più semplici, metodi generali di soluzione, ma non vi era neppure traccia di un criterio veramente affidabile che garantisse che quelle eventualmente individuate fossero effettivamente tutte le soluzioni possibili o assicurasse di converso l'esistenza di soluzioni distinte.[147] Lo stesso metodo degli sviluppi in serie intera - pure largamente utilizzato come strumento per giungere infallibilmente a un'espressione analitica della "soluzione generale" e passare in molti casi da questa, assunte adeguate condizioni iniziali, a una determinazione numerica per approssimazione - non poteva essere qui invocato come un ausilio effettivo. Se è vero che opportunamente adeguata, la quarta procedura discussa nel precedente paragrafo II.2.κ., poteva infatti applicarsi alla ricerca di uno sviluppo che, sostituito in ogni equazione, algebrica o differenziale, producesse equivalenze identiche fra serie intere,[148] è anche vero che espressa in questo modo, la "soluzione ge-

---

[146]Per quanto mai dimostrato in modo immune da critiche, il teorema fondamentale dell'algebra, enunciato per la prima volta da Girard nel 1629 [cfr. Girard (1629)] e riformulato da Descartes nella *Géométrie*, non venne mai messo in dubbio dai matematici settecenteschi, che anzi tentarono in più occasioni di fornirne una prova più convincente. Fra le altre cfr. quella di d'Alembert [cfr. d'Alembert (1746), pp. 182-95].

[147]Cfr. Dhombres (1988), p. 25-7.

[148]Per prendere un esempio classico, si consideri l'equazione delle onde (su cui verrò fra poco): $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 y}{\partial z^2}$ e si ponga: $y = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \left[\sum_{h=0}^{\infty} A_{k,h} z^h\right]$. Sostituendo nell'equazione assegnata, dopo aver calcolato i relativi rapporti differenziali, si avrà allora: $\sum_{k=0}^{\infty} k(k-1)x^{k-2}\left[\sum_{h=0}^{\infty} A_{k,h} z^h\right] = \sum_{k=0}^{\infty} x^k \left[\sum_{h=0}^{\infty} A_{k,h}\, h(h-1)z^{h-2}\right]$ e quindi, applicando il metodo dei coefficienti indeterminati, $A_{k+2,h} = \frac{(h+2)(h+1)}{(k+2)(k+1)} A_{k,h+2}$, che fornisce una classe di serie intere:

$$y = y(x, z) = \left[\sum_{h=0}^{\infty} A_{0,h} z^h\right] + \left[\sum_{h=0}^{\infty} A_{1,h} z^h\right] x + \sum_{k=0}^{\infty} x^{k+2}\left[\sum_{h=0}^{\infty} \frac{(h+2)(h+1)}{(k+2)(k+1)} A_{k,h+2} z^h\right]$$

che sostituite nell'equazione di partenza produce l'equivalenza identica (fra serie intere):

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^k \left[\sum_{h=0}^{\infty} (h+2)(h+1)\ A_{k,h+2}\ z^h\right] =$$

$$\left[\sum_{h=0}^{\infty} A_{0,h+2}\ (h+2)(h+1)z^h\right] + \left[\sum_{h=0}^{\infty} A_{1,h+2}(h+2)(h+1)z^h\right] +$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} x^{k+2}\left[\sum_{h=0}^{\infty} \frac{(h+4)(h+3)}{(k+2)(k+1)} A_{k,h+4}\ (h+2)(h+1)^h\right]$$

Si noti che lo stesso procedimento fornisce anche classi di serie che costituiscono soluzioni formali per una qualsiasi equazione algebrica in cui i coefficienti sono funzioni di una o più variabili indipendenti. Posta l'incognita uguale a una serie generica è infatti sufficiente sviluppare i coefficienti, sostituire, moltiplicare fra loro le serie il cui prodotto costituisce i diversi addendi dell'equazione così trasformata e applicare il metodo dei coefficienti indeterminati. Per una diversa applicazione del metodo alla determinazione di una serie che esprime una potenza intera qualsiasi di una radice di nerale" di un'equazione differenziale era, tranne che in rari casi, difficilmente "intelligibile" e quindi difficilmente reinterpretabile in termini di quantità particolari. Ma quand'anche questo ostacolo avesse potuto venir superato, restava il problema delle soluzioni singolari. Contrariamente ai dettami del metodo generale, non erano infatti pochi i casi in cui un'indagine geometrica, anche abbastanza semplice, poteva individuare soluzioni singolari di certe classi di equazioni differenziali (a esempio gli inviluppi delle famiglie di curve contenute nella soluzione generale), che restava invece assai più difficile ritrovare *a priori* in termini analitici. Da questo punto di vista, le procedure geometriche potevano tuttavia intendersi come una sorta di guida euristica per la messa a punto di un corrispettivo metodo analitico e fungere quindi da propulsore per un'evoluzione interna al programma euleriano. Il sensazionale successo di Lagrange, il quale pervenne alla fine del secolo a formulare, nel quadro della sua teoria delle funzioni analitiche,[149] la prima teoria veramente generale delle soluzioni singolari di un'equazione differenziale (o meglio, nel linguaggio di Lagrange: alle funzioni derivate), trasformò quindi questa difficoltà nell'occasione di una conferma tanto più importante quanto raggiunta su un terreno apparentemente tanto sfavorevole. Questo successo fu senza dubbio una delle ragioni che permisero a Lagrange di ribadire la sua antica fiducia nella possibilità di pervenire a una adeguata rifondazione del *calcolo* a partire dalla teoria degli sviluppi formali in serie intera. Ma se in questo modo Lagrange mostrava come attraverso la nozione euleriana di funzione - che egli intese essenzialmente come una forma analitica - si potesse giungere a rendere convenientemente conto in termini del tutto generali, oltre che dell'intero edificio del *calcolo*, anche di oggetti geometrici tanto refrattari quali le curve che esprimono geometricamente le soluzioni singolari di un'equazione differenziale - che potevano infatti essere fatte risultare da un'interpretazione particolare di certe classi di funzioni (analiticamente intese) - egli non riusciva ancora a fornire un adeguato corrispettivo analitico di quelle "curve arbitrarie" che fin dal 1749 lo stesso Euler aveva inteso come soluzione geometrica dell'equazione delle onde[150] e che qualche anno prima Arbogast, in una memoria vincitrice del concorso dell'Accademia di Pietroburgo per l'anno 1787, aveva esplicitamente descritto come curve che corrispondono, tratto dopo tratto, a diverse forme analitiche, in modo che i loro tratti successivi possano essere fra loro tanto congiunti che disgiunti.[151]

Mi riferisco alla nota vicenda incentrata sul cosiddetto problema delle "corde vibranti":[152] data una corda fissata ai suoi estremi, si trattava di stu-

---

un'equazione algebrica qualsiasi, cfr. Lagrange (1768), su cui verrò nel prossimo capitolo III.4.sez.*a*.

[149]Cfr. Lagrange (1797), pp. 67-73. (1801), lez.XV-XVIII, (1860a) lez.XIV-XVII e (1813) pp.92-100.. Tornerò su questo punto nei prossimi paragrafi III.6..*e*.γ. e III.6..*e*.ζ..

[150]Cfr. Euler (1749).

[151]Cfr. Arbogast (1791).

[152]Fra le numerose ricostruzioni di questa vicenda cfr. Truesdell (1960), parte III, pp. 237-300, Grattan-Guinness (1970), cap. 1, pp, 1-21, Kline (1972), pp. 503-22 e Bottazzini (1981), pp. 25-42.

diarne le vibrazioni infinitesimali individuando le curve piane che ne esprimono le differenti posizioni al variare del tempo. Pensata la famiglia di queste curve come una funzione a due variabili $y = y(x, t)$ riferita a un sistema di assi ortogonali x, y e a un parametro t, la cui variazione permette il passaggio da una curva piana all'altra, d'Alembert[153] tradusse i dati di questo problema in un'equazione ai differenziali parziali che oggi scriveremmo sotto la forma $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, riconoscendola immediatamente come "l'equazione delle onde".[154] Per risolvere questa equazione egli fece poi uso di una sostituzione di variabili che lo condusse alla soluzione seguente

$$(19) \qquad y = y(x, t) = \varphi(ct + x) + \psi(ct - x)$$

in cui φ e ψ sono delle funzioni qualsiasi che possono venir caratterizzate in termini più precisi attraverso la considerazione delle condizioni del problema.[155] Considerando la condizione di fissità degli estremi ($y(0, t) = y(a, t) = 0$) e introducendo due nuove funzioni[156] $\Phi(x) = y(x, 0)$ e $\Psi(x) = \frac{\partial y(x, t)}{\partial t}\Big|_{t=0}$, che esprimono rispettivamente la posizione e la velocità iniziale della corda, d'Alembert giunse a caratterizzare la soluzione del problema meccanico proposto nei termini seguenti:

$$y = y(x, t) = \varphi(ct + x) - \varphi(ct - x)$$

$$(20) \qquad \varphi(x) - \varphi(-x) = \Phi(x)\ ;\ \varphi(x) + \varphi(-x) = \int \Psi(x)dx$$

---

[153] Cfr. d'Alembert (1747a).

[154] Fu integrando questa equazione che sessant'anni più tardi Fourier giunse alla sua nota serie trigonometrica [cfr. Fourier (1807) e (1822)].

[155] Ponendo infatti $ct+x = z$ e $ct-x = v$ si ha, in base alle regole del calcolo differenziale:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}[\varphi(ct + x) + \psi(ct - x)] = \frac{\partial}{\partial x}\left[\frac{d\varphi(z)}{dz}\frac{dz}{dx} + \frac{d\psi(v)}{dv}\frac{dv}{dx}\right] = \left[\frac{d^2\varphi(z)}{dz^2}\frac{dz}{dx} - \frac{d^2\psi(v)}{dv^2}\frac{dv}{dx}\right] =$$

$$= \left[\frac{d^2\varphi(ct+x)}{d(ct+x)^2} + \frac{d^2\psi(ct-x)}{d(ct-x)^2}\right]$$

$$\frac{\partial^2}{\partial t^2}[\varphi(ct + x) + \psi(ct - x)] = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{d\varphi(z)}{dz}\frac{dz}{dt} + \frac{d\psi(v)}{dv}\frac{dv}{dt}\right] = c\left[\frac{d^2\varphi(z)}{dz^2}\frac{dz}{dt} - \frac{d^2\psi(v)}{dv^2}\frac{dv}{dt}\right] =$$

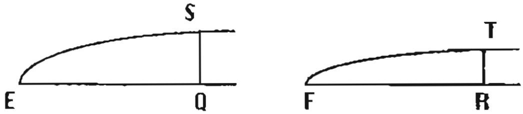
$$c^2\left[\frac{d^2\varphi(ct+x)}{d(ct+x)^2} + \frac{d^2\psi(ct-x)}{d(ct-x)^2}\right]$$

[156] Cfr. d'Alembert (1747b).

Per quanto sia chiaro che la (20) esprime il fatto che la corda può assumere infinite posizioni, le quali dipendono dalla sua posizione e dalla sua velocità iniziale, essa non sembra richiedere alcuna restrizione relativamente alla natura particolare delle curve che rappresentano geometricamente tali posizioni. E' su questo punto che si accese il dibattito fra d'Alembert e Euler:[157] il primo convinto della impossibilità di intendere queste curve altro che come un'interpretazione particolare di una qualche forma analitica, il secondo incapace di trovare alcuna ragione di principio per introdurre questa limitazione. Naturalmente è la posizione di Euler che qui ci interessa. Ritrovata la (19) e considerata la condizione di fissità degli estremi, egli crede possibile disegnare una curva anguilliforme indicando in questo modo, direttamente in termini grafici, la soluzione del problema. Ecco come egli si esprime:

> Ayant donc décrit une semblable courbe anguilliforme, soit réguliere, contenüe dans une certaine équation, soit irréguliere, ou mécanique, son appliquée quelconque PM fournira les fonctions, dont nous avons besoin pour la solution du problême.[158]

La stessa conclusione è riformulata da Euler anche qualche anno più tardi:

> [...] toute fonction, de quelque nature qu'elle soit peut toujours être représentée par une ligne courbe, dont l'appliquée exprime une certaine fonction de l'abscisse. Ayant donc construit pour la fonction marquée par φ une ligne courbe ES et pour la fonction marquée par ψ une autre ligne courbe FT, si nous prenons dans celle-la l'abscisse EQ = $x+ct$, e dans celle ci l'abscisse FR = $x-ct$, les appliquées seront: QS = $\varphi(x+ct)$ et RT = $\psi(x-ct)$ et la somme de ces deux appliquées, ou le leur
>
> 
>
>
> multiple quelconque, nous fournira toujours une valeur convenable pour y qui satisfera à l'equation $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = cc\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$, et qui par consequent sera propre à nous representer le mouvement véritable d'une corde, pourvu qu'elle soit conforme aux autres proprietés mentionées au commencement.
>
> Or, sans faire encore attention à ces propriétés, et m'arrêtant uniquement à l'equation $\left(\frac{ddy}{dt^2}\right) = cc\left(\frac{ddy}{dx^2}\right)$ il est important de remarquer, que les deux courbes ES et FT sont absolument arbitraires, et qu'on les peut prendre à volonté.[159]

Euler parla qui di "funzioni", ma il suo riferimento è chiaramente differente dall'insieme delle forme analitiche (semplici) o dall'universo delle

---

[157]Cfr., oltre alle precedenti memorie di d'Alembert, anche Euler (1749) [tradotta in francese come Euler (1748a)] e d'Alembert (1750).

[158]Cfr. Euler (1748a), p. 80.

[159]Cfr. Euler (1753), p. 213

quantità astratte in quanto rappresentate da queste forme. La stessa questione su cui verte il confronto con d'Alembert verte d'altra parte su una separazione fra due concetti: da una parte il concetto di ordinata di una curva generica che corrisponde al concetto di una quantità particolare che il problema correla a altre quantità particolari, dall'altra parte quello di rappresentazione analitica di questa quantità. Ora, se la funzione è intesa come "quantità astratta", la quantità particolare che costituisce qui l'oggetto dell'indagine non è in senso stretto una "funzione". Tuttavia la stessa traduzione del problema originale in un'equazione classica prevede la trasposizione di questo oggetto in un'entità analitica indicata da un simbolo atomico generico sottoposto a certe leggi operative, il quale non è in senso stretto un'ordinata, ma può al massimo essere una sua rappresentazione. Così il simbolo generico per l'incognita di un'equazione classica associata a un problema particolare secondo le prime due fasi del metodo funzionale riceve inevitabilmente una doppia interpretazione: in quanto simbolo generico della quantità su cui verte il problema e in quanto segnale di un posto vuoto in una struttura simbolica. Il potere rappresentativo delle forme analitiche semplici si misura così in base alla possibilità di conciliare in generale queste due interpretazioni per mezzo della sostituzione di questo simbolo con classi opportune di forme di tal genere. La stessa verifica di questa possibilità richiede tuttavia una distinzione fra la nozione di quantità, in quanto entità che gode di certe proprietà generali espresse, in termini particolari, dai dati del problema e la nozione di forma analitica, e introduce così una distinzione fra i due correlati del concetto euleriano di "funzione". Indipendentemente quindi dal modo in cui si voglia intendere la soluzione espressa dalla (19), la stessa articolazione di tale interpretazione richiede l'introduzione di un vocabolario che scinda fra le nozioni di forma e quantità generica. L'unificazione introdotta per mezzo di una definizione generale sembra così venir meno non appena si affacci l'esigenza di una verifica. Non stupisce quindi che lo stesso d'Alembert sia costretto all'uso di un vocabolario duplicato il quale distingue fra "funzione" e "equazione":

> [...] on ne peut ce me semble exprimer y analytiquement d'une manière plus générale, qu'en la supposant une *fonction* de t et de x. Mais dans cette supposition, on ne trouve la solution du problème que pour les cas où les differentes figures de la corde vibrante peuvent être renfermées dans une seule et même *équation*. Dans tous les autres cas il me paroit impossible de donner à y une forme générale.[160]

Se accettiamo di intendere il termine "funzione" sia in quest'ultima citazione che in quelle precedenti come sinonimo di "quantità astratta correlata a altre quantità", indipendentemente da ogni considerazione riferita a una sua rappresentabilità analitica (diversa da quella realizzata per mezzo di una semplice associazione a un simbolo atomico sottoposto a certe leggi operative), possiamo interpretare le dichiarazioni di Euler come un riconoscimento del limitato potere rappresentativo dell'universo delle forme analitiche sem-

[160]Cfr. d'Alembert (1750), p. 358. I corsivi sono miei.

plici. Il problema delle corde vibranti è infatti tale che la stessa soluzione formale indicata dalla (19) esprime il fatto che l'equazione associata a questo problema è soddisfatta da ogni sostituzione di y con un simbolo altrettanto generico che non caratterizza in nessun modo una classe di forme analitiche semplici. Ciò è è d'altra parte una conseguenza dalla stessa possibilità di definire direttamente il differenziale come differenza infinitamente piccola di una quantità, piuttosto che come esito di un algoritmo e di trarre da questa definizione, e senza nessun riferimento a un algoritmo riferito a certe classi di forme, la regola per la differenziazione delle quantità dipendenti da quantità che dipendono a loro volta da altre quantità (che oggi qualifichiamo usualmente come regola per la differenziazione delle *funzioni* composte). In tal modo è possibile ragionare direttamente sulle curve, intendendo l'equazione come l'espressione di condizioni riferite a differenze infinitesime di un'ordinata qualsiasi. Intesa così l'equazione delle onde, la (19) esprime solo il fatto che comunque venga tracciata una curva, posto che la sua ordinata sia somma di due ordinate riferite a due diverse ascisse $z = ct+x$ e $v = ct-x$, essa soddisfa alle condizioni del problema. E' quindi naturale vedere la limitazione di d'Alembert come immotivata.

Per quanto apparentemente più conseguente, la posizione di Euler non è tuttavia meno problematica. Anche se indipendente dal riferimento a una forma analitica, la nozione di differenziale come differenza infinitamente piccola non è infatti genericamente riferibile, senza ulteriori precisazioni, a ogni genere di curva. In particolare appare difficile capire come una curva che muti direzione in uno o più punti del suo percorso possa essere pensata come differenziabile in quei punti e quindi tale da potersi intendere come soluzione di un'equazione differenziale (non condizionata). Proprio di questo genere sono tuttavia le cosiddette "curve discontinue" che Euler introduce all'inizio del secondo volume dell'*Introductio* per mezzo della seguente definizione:

> Linea scilicet curva *continua* ita est comparata, ut ejus natura per unam ipsius x functionem definitam exprimatur. Quodsi autem linea curva ita sit comparata, ut variæ ejus portiones BM, MD, DM, &c. per varias ipsius x functiones exprimantur; ita ut, postquam ex una functione portio BM fuerit definita, tum ex alia functione portio MD describatur; hujsmodi lineas curvas *discontinuas* seu *mixtas* et *irregulares* appellamus: propterea quod non secundum unam legem constantem formatur, atque ex portionibus variarum curvarum continuarum componuntur.[161]

La variazione della rappresentazione analitica comporta infatti, tranne che in casi particolari, la presenza di almeno un punto lungo il percorso della curva in cui essa cambia direzione. Se Euler pensa così a "curve discontinue" come a soluzioni "non d'alembertiane" del problema delle corde vibranti, egli deve anche chiarire che cosa possa venir inteso come un differenziale puntuale di queste curve o almeno specificare i termini in cui egli legge l'equazione delle onde e i rapporti che questa intrattiene con il problema assegnato. Proprio a

---

[161] Cfr. Euler (1748), vol. II, p. 6. E' chiaro che il termine "funzione" torna qui a essere utilizzato come sinonimo di "forma analitica (semplice)".

questa difficoltà sembra fare riferimento Lagrange nella sua memoria del 1759:

> [...] [La] construction de Mr. Euler est evidcment beaucoup plus générale que celle que Mr. d'Alembert a imaginé, celui-cy ayant toujours supposé que la courbe génératrice[162] fut régulière, et qu'elle puisse être renfermée dans une equation continuë[163] [...]. Mais comme Mr. d'Alembert n'a apporté aucune raison particulière pour appuyer son objection, M. Euler n'en a aussi apporte aucune, d'où il suit que la question reste encore indécise. [...] puisque la construction de Mr. Euler est deduite immediatement de l'intégration de l'équation différentielle donnée cette construction n'est applicable par sa propre nature qu'aux courbes continuës.[164]

L'idea di Lagrange è allora quella di risolvere il problema delle corde vibranti senza alcun ricorso diretto all'equazione delle onde. A questo scopo egli si serve di un'interpretazione meccanica della corda come di un insieme di infinite particelle di massa infinitesima sottoposte a una certa forza da cui dipende la vibrazione. Partendo da un'approssimazione discreta di un tale modello, egli può introdurre il differenziale $\dfrac{\partial^2 y_n}{\partial t^2}$ (dove y_n indica l'ordinata corrispondente all'*n*-esima particella) come l'espressione di una forza e superare quindi la difficoltà posta dai punti di variazione della direzione. Per quanto il successivo passaggio al limite richieda una reintroduzione delle condizioni di integrabilità e differenziabilità puntuali,[165] Lagrange crede così di essersi liberato dal vincolo posto dalla dimostrazione euleriana e di essere quindi nella condizioni di riaffermare in termini legittimi la possibilità di una "curva discontinua" di essere soluzione del problema delle corde vibranti.

Per quanto senza dubbio geniale, una tale soluzione resta tuttavia del tutto particolare e non si applica che al problema specifico delle corde vibranti, senza affrontare il nodo essenziale che la discussione fra d'Alembert e Euler aveva condotto al pettine e che verteva sulla rappresentatività generale della teoria delle forme analitiche. Questo nodo si presenta in modo ancora più intricato non appena passiamo a considerare l'altra classe di "curve non-d'alembertiane" che Euler sembra intendere come soluzioni possibili di tale problema. La definizione del secondo volume dell'*Introductio* è infatti tale da non comportare alcuna complementarietà fra gli universi separati delle curve "continue" e "discontinue". A fianco di queste due classi di curve è così possibile introdurne una terza che raggruppa quelle curve che potremmo dire "totalmente arbitrarie", in cui almeno un tratto sia tracciato per mezzo di un movimento casuale di un punto, il quale non possa essere rappresentato da alcuna forma analitica. Ora, se nessuna ragione di principio sembra opporsi alla possibilità di intendere tali curve come soluzioni del

---

[162] Si tratta ovviamente della curva descritta dalla corda nella sua posizione iniziale e indicata in (20) per mezzo della "funzione" $\Phi(x) = y(x, 0)$.

[163] Cfr. sotto.

[164] Cfr. Lagrange (1759), pp. 20-1.

[165] Cfr. Truesdell (1960), p. 263.

problema della corde vibranti, queste si presentano per loro stessa natura come oggetti analiticamente non esprimibili: se la stessa legittimità della riduzione della matematica a una teoria generale di quantità astratte analiticamente rappresentate sembra dipendere dalla possibilità di un'estensione del quadro dell'*Introductio*, questa estensione appare non solo difficile, ma forse impossibile senza sconvolgere lo stesso assunto su cui il programma euleriano sembra prendere corpo.

II. 2. v. *Continuità / discontinuità*

E' proprio questo il tema di una memoria di chiaro stampo metodologico,[166] pubblicata da Euler qualche anno più tardi, allo scopo manifesto di tornare sui temi di ordine generale che il dibattito sulle corde vibranti aveva implicitamente posto sul tappeto. Il programma che questa memoria delinea è quello di un'adeguata estensione dell'analisi, la quale possa condurre a un'introduzione in essa di un nuovo oggetto matematico costituito da una trasposizione analitica delle "curve non continue" che il dibattito sulle corde vibranti aveva mostrato intervenire in modo essenziale nella soluzione geometrica di problemi connessi a un'equazione ai differenziali parziali. Dalla possibilità di questa estensione dipende infatti le realizzabilità del progetto di edificazione di una teoria generale delle quantità astratte di cui la geometria e la meccanica non siano che delle applicazioni particolari. La strada che Euler sembra scegliere per pervenire a questo risultato è quella di una generalizzazione della nozione di funzione, la quale permetta di intendere una curva non continua come un'interpretazione particolare di un'opportuna classe di funzioni introdotta per mezzo di un esplicito riferimento alla soluzione di un'equazione ai differenziali parziali. Perché questa estensione possa qualificarsi come tale e non si trasformi piuttosto in una vera e propria riedificazione della teoria prospettata nell'*Introductio* occorre tuttavia che la generalizzazione che conduce a essa sia tale da garantire l'integrità dell'intera costruzione già realizzata e in particolare la possibilità di salvaguardare la totale legittimità dei procedimenti formali che ne costituiscono la struttura più interna. Questo certo non sarebbe il caso di una generalizzazione che pensasse una funzione come una collezione di valori connessi uno a uno ai membri di un'altra collezione di valori. Una forma analitica potrebbe certamente pensarsi come una rappresentazione concisa di una funzione così intesa e la teoria delle forme analitiche potrebbe quindi mantenere il suo ruolo come una delle componenti essenziali della nuova analisi. Ciò condurrebbe tuttavia a rendere illegittime buona parte delle inferenze generalmente accettate in modo incondizionato e a richiedere quindi una ridefinizione della stessa struttura architettonica della teoria, la quale ponesse al primo posto la determinazione generale degli strumenti atti a una discriminazione

[166]Cfr. Euler (1765). Su questa memoria cfr Dhombres (1988), che ne fornisce in appendice una traduzione francese e al quale rimando per maggiori approfondimenti e per ulteriori argomenti a sostegno di molte delle tesi che presenterò nel seguito.

dei contesti di validità di queste inferenze. Se sarà proprio questa la strada imboccata da Cauchy, la memoria euleriana non può a mio parere leggersi in nessun modo come un preludio a questo programma e neppure come una preconizzazione di questa alternativa.

Se il progetto che Euler vuole conseguire è quindi chiaro, così come chiari sono i vincoli a cui egli intende sottoporre la propria costruzione, il linguaggio che egli sceglie resta in molti punti impreciso, e testimonia in tal modo delle difficoltà intrinseche al raggiungimento dell'obiettivo. Le esigenze contrapposte di adeguamento della teoria generale delle quantità all'emergenza di nuovi oggetti particolari e di conservazione delle strutture principali della costruzione già realizzata conducono inevitabilmente a molti punti di inciampo che Euler sembra mascherare per mezzo di una retorica consumata, piuttosto che affrontare con la necessaria schiettezza. La sua stessa *ouverture* è a questo proposito significativa:

> Quæ in Analysi de functionibus, seu quantitatibus per quampiam variabilem utcunque determinatis, tradi solent, ad eas tantum functiones restringuntur, quæ continuæ vocantur, et quarum formatio certa quadam lege continetur.[167]

Ma che cosa significa che una quantità "è determinata per mezzo di una variabile"? e che cosa qualifica una "legge di formazione"? e che cosa vuol dire che "ciò che si insegna in analisi sulle funzioni si riduce alle sole funzioni continue"? La sola fra queste domande a cui pare possibile rispondere in un modo abbastanza preciso, ricostruendo il punto di vista di Euler, è la seconda. La sussistenza di una "legge di formazione" per una "funzione" $y = y(x)$ sembra corrispondere all'assegnazione o di una rappresentazione esplicita della quantità y per mezzo di una forma analitica contenente la variabile x o di un'equazione classica fra le variabili x e y. Nel primo caso sembra potersi dire che la forma analitica debba essere semplice, mentre nel secondo sembra doversi affermare che l'equazione debba essere algebrica o comunque non differenziale. Per quanto riguarda la prima domanda, tutto ciò che sembra possibile fare è constatare la differenza terminologica fra la nuova definizione e quella stessa delle *Institutiones calculi differenzialis*[168] - che pure ne condivide la natura "causale"[169] - e la varietà degli oggetti specifici che nel corso della sua memoria Euler qualifica come "funzioni" di una data variabile, i quali possono in generale ricondursi, a me pare, a "quantità" di cui certe circostanze di differente natura (analitica, geometrica o meccanica) garantiscono la dipendenza da altre quantità. Qualora questa dipendenza si esprima per mezzo della sussistenza di *una* "legge" di formazione (nel senso precedente) la funzione sarà detta continua. La caratterizzazione delle "funzioni continue" dipende allora dalla possibilità di asserire la sussistenza di una simile legge e è così facile immagine numerose occasioni in cui di una certa "funzione" non si sappia dire con certezza se essa è o meno "continua". Ancora più delicato è il problema sollevato dalla terza domanda. Euler vuole

---

[167] Cfr. *ivi*, p. 4.
[168] Cfr. il precedente paragrafo II.2.η..
[169] Cfr. Dhombres (1988), pp. 38-9.

affermare che le definizioni e i risultati contenuti nei suoi stessi trattati debbano essere limitati all'universo delle funzioni continue o piuttosto che questi risultati (pur mantenendo tutta la loro generalità) non siano *applicabili* che allo studio delle quantità particolari. che possano qualificarsi come funzioni di tal genere e che devono quindi essere *affiancati* da definizioni e risultati nuovi e essenzialmente diversi? Per quanto la frase in questione resti assolutamente sibillina, le reazioni che la memoria euleriana provocò, o meglio *non* provocò, fanno pensare che essa sia stata generalmente letta dai maggiori matematici coevi nel secondo modo piuttosto che nel primo. Questo sembra essere d'altra parte anche il punto di vista dello stesso Euler il quale non esita, qualche pagina più oltre, a richiamarsi espressamente e senza nessuna ulteriore precisazione a quella reinterpretazione del *calcolo* in quanto teoria dei rapporti evanescenti che egli aveva già fornito, dieci anni prima, nelle *Institutiones*.[170]

E' sufficiente continuare la lettura del primo paragrafo per rendersi conto, d'altra parte, che il concetto euleriano di funzione non si è ancora liberato dai vincoli assai stretti che provengono da una sua partecipazione al concetto di quantità. Per quanto dal nostro punto di vista saremmo infatti portati a leggere la precedente definizione calcando l'accento sulla nozione causale di determinabilità - che il precedente delle *Institutiones* ci autorizzerebbe a ricondurre a quella di dipendenza - lo stesso prosieguo della memoria rende evidente che l'interpretazione intesa di Euler insiste piuttosto sul carattere di quantità che una funzione deve comunque possedere: una funzione è in primo luogo *una* quantità e ciò significa che essa può, al più, ricevere un certo insieme di valori determinati, ma certamente non ridursi a essere essa stessa una collezione di valori comunque determinati. Così come la distanza fra due punti in un piano è in primo luogo un'estensione, la quale per quanto misurabile resta essenzialmente altro rispetto al suo valore riferito a un'unità, la funzione è ciò che riceve una determinazione e non un insieme di determinazioni. Ciò conduce a cercare l'unità di una funzione, il suo carattere di oggetto intrinsecamente uno, in quello che potremmo intendere come il sostrato comune delle determinazioni successive. Così i differenti attributi che una funzione può ricevere non possono in nessun modo prescindere dalla sussistenza di tale sostrato e dal suo carattere di quantità. (Questo non è ovviamente il caso della moderna nozione di funzione per cui l'unità dell'oggetto `funzione´ è garantita *a priori* dall'arbitraria riunificazione in *un* insieme di elementi fra loro distinti e singolarmente perfettamente interpretabili come meri valori numerici. Gli attributi di una funzione moderna possono così riferirsi alla struttura interna dell'insieme che è comunque considerato come *uno*.) A qualsiasi entità esso si riferisca, l'attributo "continuo" è d'altra parte un attributo molto particolare. In termini aristotelici esso qualifica il carattere intrinsecamente unitario dell'entità a cui esso si riferisce, afferma il fatto che l'unità non dipende da un'arbitraria convenzione linguistica (per cui si può parlare a esempio di *un* movimento anche in riferimento agli scatti successivi della lancetta a progressione discreta di un

[170]Cfr. il precedente paragrafo II.1. λ..

orologio al quarzo), ma è propria della natura stessa di tale entità.[171] Per dire di qualche cosa che esso è continuo, occorre quindi riconoscerlo in se stesso come uno. Per dire che esso è non continuo occorre assumerlo come uno e riconoscere il carattere arbitrario e puramente convenzionale di questa assunzione. Ora, se il termine "quantità" è impiegato in senso stretto, che cosa può significare per una quantità (a esempio per una distanza) non essere *una*? Di fronte alla evidente difficoltà che questa domanda presenta sembrano aprirsi tre alternative: i) negare la matrice aristotelica della nozione euleriana di continuità; ii) negare la qualifica di quantità per una funzione euleriana; iii) interpretare l'attribuzione di continuità a una funzione in senso traslato come un'attribuzione non direttamente riferita alla funzione, ma alle modalità della dipendenza causale. La terza alternativa sembra a me la più soddisfacente: dire di una funzione (intesa come quantità) che essa è continua significa affermare che le modalità della sua dipendenza (o determinabilità) relativamente a un'altra quantità rispondono a un intrinseco carattere di unità, il quale è garantito da una rappresentabilità della funzione per mezzo di *una* forma analitica semplice, sia essa nota o ignota.[172]

Ma se la rappresentabilità per mezzo di una forma analitica semplice viene meno in quanto carattere essenziale di una quantità che possa qualificarsi come funzione, come è possibile esprimere in modo per così dire tangibile l'unità del sostrato, ovvero il carattere effettivo di quantità del referente di un simbolo analitico atomico? Per quanto in linea di principio si possa negare questa come un'esigenza primaria di una teoria generale delle quantità astratte, la mancanza di una rappresentazione diversa da quella costituita dalla mera assegnazione di un nome non solo conduce a numerose difficoltà espositive, ma rischia anche di rendere oscura la stessa nozione di quantità, la quale resta orfana di ogni corrispettivo esplicativo. Benché la scelta di Euler possa apparire sorprendente, essa è a ben guardare del tutto conseguente alla sua concezione della teoria delle funzioni discontinue come teoria separata, aggiunta alla teoria delle funzioni continue per far fronte adeguatamente alle esigenze di soluzione di una classe di problemi dai connotati del tutto specifici e dalle origini esplicitamente geometriche (o meccaniche). Invertendo i termini della relazione curva-funzione rispetto alla stessa formulazione del secondo volume dell'*Introductio*,[173] egli assegna alle curve la proprietà di rappresentare le funzioni:

---

[171] Ho cercato di difendere questa interpretazione della nozione aristotelica di continuità nel secondo capitolo di Panza (1989) a cui mi permetto quindi di rimandare.

[172] La rappresentazione implicita di una quantità per mezzo di un'equazione algebrica sembra comportare così la continuità solo in quanto garanzia di rappresentabilità esplicita e diretta per mezzo di una forma analitica semplice. Se così non fosse, perché non dovremmo accettare di qualificare come continue anche le funzioni soluzioni di *una* equazione differenziale qualsiasi?

[173] Cfr. Euler (1748), vol. II, p. 6:

> Quanquam complures linæ curvæ per motum puncti continuum mechanice describi possunt, quo pacto tota linea curva simul oculis offertur, tamen hanc linearum curvarum ex functionibus originem hic potissimum contemplabimur, tanquam magis analyticam latiusque patentem, atque ad calculum magis accomodatam. Quælibet ergo

> [...] ita ut indoles omnium functionum aptissime per lineas curvas repræsentari possit. Ita quomodocunque quantitas y per x determinatur, seu quæcunque functio fuerit y ipsius x, semper curva describi potest, cuius abscissæ cuicunque x conveniat ea ipsa applicata y, hæcque linea curva congrue naturam illius functionis repræsentare æstimatur. Hinc etiam vicissim proposita linea curva quacunque, eius applicatæ certas quasdam functiones abscissarum exhibent, quarum natura in ipsa linæ curvæ natura involvitur.[174]

Compiuta una simile inversione, Euler può trasporre alle funzioni la proprietà di continuità che nel 1748 egli aveva assegnato soltanto alle curve e introdurre esplicitamente la discontinuità come la proprietà complementare:

> Iam vero notissimum est, in Geometria sublimiori alias lineas curvas considerari non solere, nisi quarum natura certa quadam relatione inter coordinatas, per quampiam æquatione expressa definiatur, ita ut omnia eius puncta per eandem æquationem tanquam legem determinentur. Quæ lex cum principium continuitatis in se complecti censeatur, quippe qua omnes curvæ partes ita vinculo arctissimo inter se cohærent, ut nulla in illis mutatio salvo continuitatis nexu locum invenire possit; hanc ob rem istæ lineæ curvæ continuæ appellantur,[175] nihilque interest, sive æquatio illarum naturam continens sit algebrica sive transcendens,[176] sive cognita sive etiamnum incognita, dummodo intelligamus dari quandam æquationem, qua natura huiusmodi linearum curvarum exprimatur. [...]
> Constituto continuitatis criterio sponte patet, quid sit functio discontinua, seu lege continuitatis destituita: omnes enim linæ curvæ per nullam certam æquationem determinatæ, cuiusmodi libero manus tractu delineari solent tales functiones discontinuas suppeditant.[177]

Euler ha così posto le condizioni per una esplicita formulazione del suo programma. Anche in tal caso la prosa di Euler merita la citazione:

> Iam omnibus huiusmodi lineis et functionibus discontinuis in Analysi geometrica[178] nullum locum concedi, per se est manifestum, cum universa hæc speculatio in linearum, quæ considerantur, proprietatibus investigandis sit occupata, quod negotium nullo modo suscipi posset, nisi natura linearum certa quadam lege et æquatione contineretur.[...]
> Grandissimi [...] momenti quæstio hic exoritur, quid de functionibus discontinuis, vel lineis sine ulla certa lege descriptis, sit iudicandum, et num et quatenus

---

functio ipsius x suppeditabit lineam quandam, sive rectam sive curvam, unde vicissim linea curvas ad functiones revocare licebit. Cujusque ergo lineæ curvæ natura exprimetur per ejusmodi functionem ipsius x [...].

Un simile punto di vista prelude ovviamente alla distinzione fra *curve* continue e discontinue, piuttosto che a quella fra *funzioni* continue e discontinue, distinzione che qualifica peraltro le curve discontinue come curve rappresentabili a tratti per mezzo di funzioni (intese come forme analitiche).

[174]Cfr. Euler (1765), pp. 3-4.

[175]Il contesto rende evidente come Euler intende qui "curva" come sinonimo di "funzione".

[176]Euler sembra riferirsi qui a "equazioni" (non classiche) che forniscono rappresentazioni esplicite.

[177]Cfr. *ivi*, pp. 4-5.

[178]Ovvero nelle applicazioni geometriche dell'analisi (usuale).

> illis locus in Analysi concedi possit? In problemate certe modo memorato [quello delle corde vibranti] nullum est dubium, quin corda, quæ initio ita fuerit deducta, ut eius figura nulla æquatione comprehendi possit, motum sit consecutura, eoque durante singulis momentis ea sit certam figuram et motum receptura, cuius determinatio sane ad Analysin motusque scientiarum est referenda, sive fines cognitioni nostræ præscripti huic quæstioni solvendæ sufficiant, sive secus. Utroque casu quæstio semper foret omni nostra attentione digna, et cum circa quantitates versetur, ad Analysin certe pertinere est censenda [...]. Verum etiam agnosco, hoc problema ad peculiare Analyseos genus adhuc parum excultum, esse referendum, cuius generis adeo vis et natura in hoc consistat, ut functiones etiam discontinuas necessario in se complectatur.[179]

Non si tratta quindi di ripensare i fondamenti dell'analisi, ma di estenderne i confini, di aprire le porte a un nuovo dominio per niente contraddittorio (almeno dal punto di vista di Euler) rispetto ai precedenti:

> Ad litem hanc componendam [quella delle corde vibranti] observo, neque in Algebra communi, neque in ea Analyseos infinitorum parte, quæ adhunc potissimum est tractata, functiones discontinuas admitti posse. Multo latius autem Analysis infinitorum patere, atque eiusmodi partes complecti est iudicanda, quæ a functionibus discontinuis non solum non abhorreant, sed eas adeo ita natura sua involvant, ut nullum problema eo pertinens rite solutum sit censendum, nisi functiones prorsus arbitrarie, hincque etiam discontinuæ, in solutionem fuerint introductæ.[180]

Strano modo di ragionare, certo, ai nostri occhi, ma del tutto conseguente alla nozione di funzione come quantità. Distinte le funzioni a seconda del numero delle loro variabili, Euler definisce il rapporto differenziale $\frac{dy}{dx}$ riferito a una funzione a una variabile $y = y(x)$, esattamente come nelle *Institutiones*, per mezzo dell'equiparazione $\frac{dy}{dx} = \left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{\Delta x=0}$, senza sentire in nessun modo la necessità di introdurre alcuna specificazione riferita alla natura delle funzioni a cui egli si riferisce e anzi sottolineando che un tale rapporto "quouis casu determinatam quantitatem sortitur".[181] L'esempio della funzione (continua) $y = ax^2 + bx + c$ è anzi inteso da Euler come generalmente esplicativo. L'analogia geometrica (o forse quella polinomiale[182]) sembra evidentemente sufficiente a garantire la differenziabilità di ogni funzione, ovvero la possibilità di intendere comunque come una nuova quantità (eventualmente costante) il rapporto $\left(\frac{\Delta y}{\Delta x}\right)_{\Delta x=0}$.[183] Non solo: essa sembra perfettamente adeguata a garantire la possibilità di passare, sempre senza alcuna precisazione, ai rapporti differenziali di ordine superiore, alla stessa algebra dei rapporti differenziali, alla definizione dell'integrale come primitiva e all'introduzione delle costanti di integrazione. A partire da tali

---

179Cfr. *ivi*, pp. 6-8.

180Cfr. *ivi*, p. 8.

181Cfr. *ivi*, p. 12.

182Cfr. *sotto*.

183Tornerò sulla questione nella seconda parte del presente paragrafo.

presupposti Euler non ha poi alcuna difficoltà a introdurre le funzioni a più variabili e a definire il rapporto differenziale totale come somma dei rapporti differenziali parziali. A questo punto egli può allora compiere il passo decisivo:

> At calculus integralis ad functiones duarum variabilium accommodatus, plurimum differt a calculo integrali communi, ubi non nisi functiones unius variabilis occurrunt, et præcepta omnino singularia postulat, præterquam quod in eo omnia quoque artificia prioris partis sint in usum vocanda. Verum haud diu est, ex quo hæc pars Analyseos coli est cœpta, ita ut vix adhunc prima eius elementa satis sint evoluta. [...]
> Huius autem novi calculi vis et quasi proprius character minime adhunc satis perspectus videtur. Quemadmodum enim calculi integralis communis vis in eo consistit, ut qualibet integratione nova quantitas constans arbitrio nostro permissa in calculum introducatur: ita in hac parte, circa functiones binarum varibilium occupata, singulis integrationibus, non solum nova quantitas constans, sed adeo nova functio cuiuspiam variabilis prorsus inderterminata, in calclum invehitur, quæ ita ab arbitrio nostro pendet, ut eius loco etiam functiones discontinuæ assumi queant. Quare functionum discontinuarum usu ab hoc fere novo calculi genere nonsolum non excluditur, sed etiam quasi essentialiter ad eius naturam pertinere sit iudicandus [...].[184]

Per quanto Euler non accompagni queste affermazioni con nessuna adeguata dimostrazione, la quale indichi in generale la relazione sussistente fra un'equazione ai differenziali parziali e una funzione (o una classe di funzioni) discontinua(e), esse conducono a pensare direttamente le funzioni discontinue come soluzioni possibili (o parte di soluzioni possibili) di tali equazioni e aprono quindi la strada a una loro interpretazione in quanto oggetti puramente analitici.

La conferma di questa possibilità è delegata da Euler alla presentazione di un nuovo esempio - differente da quello delle corde vibranti - in cui la stessa costruzione geometrica fornisce un'immediata giustificazione intuitiva della necessità di pensare la funzione indeterminata introdotta nella soluzione dell'equazione assegnata come una funzione assolutamente arbitraria, la cui continuità non è in nessun modo richiesta. Si tratta di trovare un solido tale che le normali a ogni punto della sua superficie taglino un piano di riferimento comune (interno al solido) formando dei segmenti di lunghezza costante. Partendo dall'ovvia soluzione costituita da una sfera,[185] è facile giungere in termini intuitivi alla soluzione generale, immaginando una traslazione del cerchio massimo di tale sfera, la quale descriva un cilindro il cui asse può venir arbitrariamente deformato dando luogo a una curva comple-

[184] Cfr. *ivi*, pp. 20-1.

[185] Il problema è ovviamente una generalizzazione solida del semplice problema piano di trovare una curva le cui differenti normali taglino un asse comune formando segmenti di lunghezza costante, il quale è banalmente risolto per mezzo della posizione dell'equazione ai differenziali ordinari $y^2 + y^2\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - a^2 = 0$, da cui è facile trarre $y = \pm\sqrt{a^2 - (x-b)^2}$ (dove b e una costante arbitraria) e $y = \pm a$. La curva cercata si identifica allora con un cerchio di raggio a e centro di posizione arbitraria $(0,b)$, o con una coppia di rette parallele a distanza $2a$ (soluzione singolare).

tamente arbitraria.[186] Presentata questa costruzione, Euler ne cerca una deduzione analitica, la quale dovrà ovviamente fare intervenire una funzione arbitraria (e non necessariamente continua, nel senso precedente) che corrisponda alla totale arbitrarietà dell'asse del cilindro deformato. Presa una superficie generica riferita a un sistema di assi ortogonali, si tratta di esprimere analiticamente la normale a un suo punto generico $P(x,y,z)$, porla uguale a una costante arbitraria a e risolvere l'equazione differenziale così costruita. Se $Q(x^*, y^*, 0)$ è il punto in cui tale normale taglia il piano x, y, si avrà (per ovvie considerazione su triangoli simili): $x^* = x + z(d_x z/dx)$ e $y^* = y + z(d_y z/dy)$ (dove $d_x z$ e $d_y z$ indicano i differenziali di z relativamente a x e y). Introducendo la notazione oggi usuale, avremo allora l'equazione:[187]

$$(21) \qquad \left[PQ = \sqrt{(x-x^*)^2 + (y-y^*)^2 + z^2}\,\right] z\sqrt{\left(\frac{\partial z}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial z}{\partial y}\right)^2 + 1} = a$$

la cui soluzione è tratta da Euler per mezzo di una parametrizzazione. Ponendo infatti $\dfrac{\partial z}{\partial x} = \dfrac{\sin\phi\cos\omega}{\cos\phi}$ e $\dfrac{\partial z}{\partial y} = \dfrac{\sin\phi\sin\omega}{\cos\phi}$ si ha, sostituendo nella (21), $z = a\cos\phi$ e quindi:

$$(22) \qquad d[a\cos\phi] = -a\sin\phi\, d\phi = \frac{\partial z}{\partial x}dx + \frac{\partial z}{\delta y}dy = \sin\omega\, dy + \cos\omega\, dx$$

ovvero, integrando separatamente:[188]

$$(23) \qquad -a\sin\phi = x\cos\omega + y\sin\omega - \int d\omega\,[y\cos\omega - x\sin\omega]$$

---

[186] L'intuizione euleriana si limita ovviamente a deformazioni che oggi diremmo continue, in modo che la soluzione generale è pensata come un cilindro a asse curvilineo isomorfo al segmento. [Si noti il carattere essenzialmente topologico del ragionamento di Euler.]

[187] Si noti che le considerazioni geometriche che portano a determinare le coordinate di Q in funzione di quelle di P richiedono l'interpretazione dei differenziali come segmenti, in modo che i rapporti $d_x z/dx$ e $d_y z/dy$ vanno pensati come rapporti fra quantità separate. Una giustificazione della (21) nei termini della "metafisica" dei rapporti evanescenti richiede dunque una costruzione essenzialmente diversa. Euler risolve la difficoltà presentando direttamente tale equazione senza fornirne alcuna giustificazione. Per ciò che riguarda le notazioni basterà osservare che Euler distingue i rapporti differenziali parziali da quelli ordinari per mezzo dell'introduzione di parentesi tonde, scrivendo a esempio $\left(\dfrac{dz}{dx}\right)$ in luogo di $\dfrac{\partial z}{\partial x}$. Per semplificare le sue scritture egli è allora costretto a porre le sostituzioni simboliche $\left(\dfrac{dz}{dx}\right) = p$ e $\left(\dfrac{dz}{dy}\right) = q$.

[188] L'integrale del secondo membro è chiaramente ottenuto per parti.

Essendo il primo membro un integrale esatto, ciò deve essere vero anche per il secondo, il quale può rispettare questa condizione solo se l'integranda $y \cos \omega - x \sin \omega$ è una funzione della sola variabile ω. Questa condizione è secondo Euler non solo necessaria, ma anche sufficiente.[189] Ponendo allora $y \cos \omega - x \sin \omega = \dfrac{dF(\omega)}{d\omega} = \Omega(\omega)$ e ricordando che $a \cos \phi = z$ (e quindi: $a \sin \phi = \pm\sqrt{a^2 - z^2}$), è facile passare dalla (23) alla soluzione generale[190] della (21):

$$(24)\quad \begin{aligned} &\pm\sqrt{a^2 - z^2} = x \cos \omega - y \sin \omega - \int \Omega(\omega) d\omega \\ &y \cos \omega - x \sin \omega = \Omega(\omega) \end{aligned}$$

dove "denotet Ω functionem quamcunque ipsius ω utcunque indefinitam, ut etiam functiones discontinuæ inde non excludantur".[191] Pensando infatti ω come una funzione arbitraria di x e y, x e y potranno essere intese a loro volta come delle funzioni arbitrarie di ω. Indicando rispettivamente queste funzioni con $\varphi(\omega)$ e $\psi(\omega)$ avremo allora: $\Omega(\omega) = \varphi(\omega) \cos \omega - \psi(\omega) \sin \omega$, ciò che giustifica l'affermazione di Euler.[192] Tratta la (24) questi ne fornisce un'interpretazione geometrica che la riconduce alla stessa soluzione trovata in precedenza costituita da un cilindro con asse curvilineo arbitrario.[193]

Per quanto dal nostro punto di vista chiaramente insufficiente per rispondere alla difficoltà che il dibattito sulle corde vibranti aveva posto al programma euleriano, la memoria del 1765 doveva apparire al contrario ai membri della comunità matematica dell'epoca e allo stesso Euler come un passo decisivo in direzione di una adeguata soluzione del problema. Certo restava la necessità di introdurre alcuni chiarimenti linguistici, di riorganizzare il materiale secondo un'architettonica più soddisfacente e soprattutto di chiarire in termini espliciti la nozione di differenziale in riferimento a una funzione qualsiasi (continua o discontinua) senza rinviare implicitamente all'ausilio intuitivo di una curva liberamente tracciata. Questi potevano tuttavia apparire come dei problemi locali che sarebbero stati certamente risolti da una ricerca più minuziosa. Il programma lanciato nell'*Introductio* poteva

---

[189]Come ho già notato, le funzioni euleriane (tanto continue che discontinue) sono intese senza eccezione come differenziabili. Tornerò su questo punto più sotto.

[190]Le ovvie soluzioni singolari $z = \pm a$ non sono prese in considerazione da Euler, il quale cerca evidentemente delle soluzioni geometricamente interpretabili secondo le richieste del problema.

[191]Cfr. Euler (1765), p. 25.

[192]Ponendo d'altra parte $\omega = \chi(x, y)$, si avrà: $\Omega(\omega) = \Gamma(x, y) = x \cos \chi(x, y) - y \sin \chi(x,y)$, da cui è chiaro che la soluzione generale della (21) contiene una funzione arbitraria delle stesse variabili x, y.

[193]Cfr. su questo punto Dhombres (1988), pp. 57-66.

essere continuato e spettava al tempo introdurre in esso le opportune correzioni locali e ampliarne adeguatamente gli esiti. Se la stessa nozione di funzione arbitraria appare ai nostri occhi come incompatibile con i presupposti essenziali di tale programma e non fu mai esplicitamente chiarita all'interno di esso, la memoria di Euler mostrava infatti come essa potesse venire per così dire "raggiunta" a partite da questi stessi presupposti, attraverso l'introduzione di deroghe tutto sommato locali o comunque solo surrettiziamente introdotte. Il compito di rendere dati deroghe ancora più nascoste (fino a renderle quasi del tutto impercettibili) fu assunto da Lagrange, il cui trattamento delle equazioni "alle derivate parziali", entro la nuova teoria delle funzioni analitiche, seppe condurre alla prima giustificazione di carattere generale dell'intervento di "funzioni arbitrarie" in certe soluzioni di questo genere di equazioni.[194] Anche sul fronte della difficoltà apparentemente più grave il programma euleriano mostrava così non solo tutta la sua tenacia, ma anche l'ampiezza delle proprie risorse: non solo esso sopravviveva, ma si presentava al contrattacco esibendo un successo che la vecchia impostazione differenziale aveva fino a allora impedito.

Queste affermazioni possono forse sorprendere. Anche qualora si accettasse infatti la restrizione alle sole funzioni espresse da *una* forma analitica semplice o corrispondenti a *una* curva continua (nel nostro senso), resterebbero ancora ai nostri occhi molti problemi irrisolti, i quali vertono essenzialmente sulla generale ammissione euleriana di differenziabilità. Prima di affrontare un tale insieme di questioni è tuttavia necessario introdurre qui una osservazione di carattere più generale, la quale mi pare possa contribuire a chiarirne i termini. Per questo è sufficiente soffermarsi su un punto particolare che, per motivi di semplicità, ho fino a qui accantonato. Le quantità sono state infatti considerate finora indipendentemente dalla loro natura di quantità variabili o costanti. In termini astratti una costante non è infatti altro che una quantità tanto indeterminata quanto una variabile alla quale si applicano senza restrizione tutte le leggi di trasformazione connesse a operazioni elementari. Nel corso di una trattazione generale riferita a forme analitiche semplici la distinzione fra costanti e variabili è quindi strettamente inessenziale e non vi è nessuna ragione per intendere una identità come $x=a$ come l'assegnazione di un valore alla quantità x, piuttosto che come l'espressione di un'eguaglianza fra due quantità astratte. A ben guardare la situazione non cambia neppure passando dalle operazioni elementari a operazioni di genere differente come la differenziazione, l'integrazione o lo sviluppo in serie. Qui la distinzione fra costante e variabile non esprime infatti operativamente che la determinazione delle quantità relativamente alle quali certe operazioni vengono compiute. Vi sono tuttavia circostanze nelle quali una quantità costante è direttamente espressa per mezzo di un valore numerico, il quale non può venire trattato come una quantità astratta pur partecipando a una teoria generale delle quantità. Se facciamo astrazione dagli indici delle operazioni (fra cui possiamo ovviamente contare ogni genere di fattore numerico), i quali sono parte integrante della forma analitica

[194]Cfr. il prossimo paragrafo III.6.*e*. ζ..

in cui compaiono (e possono banalmente venir eliminati ricorrendo a scritture meno compatte), una teoria generale delle quantità sembra tuttavia non richiedere l'introduzione di nessun valore numerico differente da 0,1 e $\sqrt{-1}$. Questi numeri possono d'altra parte essere intesi più che come valori particolari di certe quantità, come oggetti formali sottoposti a precise proprietà operative. Una teoria generale delle quantità può quindi essere svolta del tutto indipendentemente dalla considerazione della stessa nozione di *valore* di una quantità, la quale interviene piuttosto relativamente alle applicazioni particolari di tale teoria. Se questa possibilità non sembra tradursi per i matematici settecenteschi in un precetto rigoroso, essa sembra render conto del modo in cui essi considerano le relazioni fra quantità astratte e valori particolari di queste quantità: tali valori non sono che determinazioni possibili di una quantità, la cui considerazione può in certe circostanze, esprimere delle proprietà interessanti di certe forme analitiche che esprimono quantità correlate. Ciò che resta totalmente estraneo all'ambito concettuale determinato dal programma euleriano è l'idea di considerare, nel contesto di una teoria generale delle quantità astratte, la determinazione numerica, o per meglio dire il *valore*, che una certa quantità, isolatamente presa, riceve grazie a una determinata assegnazione di valore alle quantità correlate. Una tale considerazione può al più trovar luogo nel corso di particolari applicazioni della teoria generale, la quale, in quanto teoria delle quantità astratte, non può che prescindere da esse.

Ciò significa che una funzione non è immediatamente pensata come "immersa" in un dominio, relativamente al quale è necessario valutare le sue proprietà locali. Essa è al contrario un oggetto globale che autodetermina il dominio entro il quale la sua considerazione rimane sensata e conduce alla soluzione dei diversi problemi particolari. L'esempio più ovvio è quello della funzione (eulerianamente continua) $y = 1/x$, di cui non sembra sensato predicare alcuna proprietà locale riferita al punto $x = 0$, dove la funzione è semplicemente non definita: la scrittura analitica non esprime per questa sostituzione alcuna quantità (finita). Se a ciò aggiungiamo il fatto che una funzione eulerianamente continua corrisponde a *una* forma analitica semplice o alla radice di un'equazione algebrica è facile capire che nessuna funzione di tal genere può essere intesa da questo punto di vista come modernamente discontinua o non differenziabile. E' così, a esempio, che nel presentare i "principi del metodo dei limiti", nella sua settima lezione all' *Ecole Normale de l'an III*, Laplace può affermare che "la limite de l'expression d'une suite de grandeurs, est l'expression de la limite de ces grandeurs".[195]

[195]Cfr. Ec. Norm.III (s.d.), vol. IV, pp. 49 e (1800-01), parte I, *ibidem* (XXVII *séance*, 11 germinale, anno III [31/3/1795], *ivi*, pp. 1-70 e *ibidem* [si noti che la prima lezione di Laplace (e di Lagrange) è in realtà una lezione introduttiva comune]). Le lezioni di Laplace [su cui cfr. Dhombres (1980) - il quale non manca di sottolineare [cfr. *ivi*, p. 344] l'implicita dichiarazione di continuità in senso moderno per tutte le funzioni continue in senso euleriano contenuta nella frase citata -] furono ripubblicate, insieme a quelle di Lagrange, sul *cahier* 7-8 (t.II) del *Journal de l'Ecole Polytecnique* [cfr. rispettivamente Laplace (1812b) e Lagrange (1812)]. Una riedizione commentata dell'intero corpo delle lezioni tenute all'*Ecole Normale de l'an III* [su cui cfr. Depuy (1895)] è tuttora in corso sotto la direzione di J. Dhombres presso l'editore Gauthier-Villars.

Eventuali problemi potranno quindi sorgere solo in relazione a funzioni che oggi qualificheremmo come continue, ma localmente non differenziabili,[196] ovvero alle "curve discontinue" dell'*Introductio*. Anche in tal caso tuttavia la questione verte su considerazioni puntuali che non dovrebbero presentarsi che in ambito applicativo. Una curva di tal genere potrebbe essere studiata per mezzo del ricorso a una classe di funzioni ovunque differenziabili, le cui connessioni sarebbero perfettamente espresse nei termini dell'interpretazione particolare fornita dal problema assegnato. Per riferirci al problema precedente, potremmo così pensare un cilindro il cui asse è costituito da una curva localmente non differenziabile come una successione di cilindri giustapposti, ognuno dei quali potrebbe essere inteso separatamente come una soluzione del problema assegnato.

Ai fini della costruzione di una teoria delle quantità astratte, la quale possa presiedere adeguatamente alle necessità applicative proprie della scienza settecentesca, una funzione può quindi essere genericamente considerata non solo come differenziabile, ma anche di classe C^{∞}. Eventuali eccezioni potranno al massimo riguardare alcuni punti isolati e non riguarderanno quindi che l'applicabilità delle conclusioni raggiunte in termini generali. Anche la condizione di differenziabilità, così come quella di convergenza di uno sviluppo, si presenta quindi agli occhi dei matematici settecenteschi come una condizione di applicabilità, la quale lungi dal presentarsi come una condizione *a priori* per la validità di certi risultati, non richiede che un'analisi *a posteriori* dei risultati raggiunti in via generale, in riferimento a quantità astratte e del tutto indipendentemente dalla considerazione dei loro eventuali valori.[197]

II. 2. ξ. *Ultime considerazioni*

Ancora una volta è così la nozione stessa di "quantità astratta" la pietra angolare di una costruzione concettuale la cui diversità dai moderni punti di vista ha spesso condotto a sommari giudizi di inidoneità. Se infatti il dibattito sulle corde vibranti aveva messo in mostra l'impossibilità di ridurre completamente questa nozione a quella di forma analitica, esso non aveva per nulla messo in crisi la convinzione che si potesse costruire una teoria matematica in cui le quantità non entrassero che per le proprietà che le rendono tali. E neppure aveva messo in crisi, la convinzione che la struttura più interna di questa teoria dovesse continuare a essere costituita da una trattazione delle forme analitiche.

---

[196] Come è noto, il primo esempio di una curva-funzione continua, ma ovunque non differenziabile è infatti assai più tardo [cfr. la nota 82 del prossimo paragrafo III.2.*c*. β.] e è facile capire come la considerazione della possibilità stessa di una simile eventualità restasse del tutto estranea all'orizzonte concettuale settecentesco.

[197] Proprio questa distinzione fra "generale" e "particolare" sarà alla base della dimostrazione lagrangiana della sviluppabilità di ogni funzione $y = f(x+\xi)$ in una serie intera dell'incremento ξ. Tornerò su questa distinzione in occasione dell'analisi di una tale dimostrazione [cfr. il prossimo cap. III.6.sez.*b*].

La stessa analisi moderna sembra d'altra parte ben lungi da espellere dal proprio dominio delle considerazioni di forma, le quali non solo restano spesso alla base di considerazioni numeriche, ma raggiungono in numerosi casi, sia pure in un rinnovato orizzonte concettuale, quella autonomia che i matematici della seconda metà del XVIII secolo hanno loro assegnato.

> Gli studi sulle funzioni - scriveva S. Pincherle, in un suo appunto del 1884 - possono essere di due specie: di valore o di forma. Gli studi di valore sono quelli d'indole più elementare, che si presentano per primi e nei quali si studiano le variazioni che avvengono nel valore di una funzione al variare della variabile e le conseguenti proprietà delle funzioni stesse.
> Riscontrando proprietà più o meno analoghe in varie funzioni queste si riuniscono in Classi aventi proprietà comuni, e lo studio di queste Classi si può chiamare studio di *forma*. [...] In ultima analisi lo studio di forma sarà quello in cui, in luogo di entrare in gioco i vari studi di una funzione, figura la funzione come un tutto, come un elemento della questione, e non figurano, almeno essenzialmente, i valori della variabile indipendente. [...] Ogni problema di valore sulle funzioni, conduce a problemi di forma. Per esempio, dato un elemento di funzione analitica, studiare le proprietà della funzione rappresentata è un problema di valore che conduce al problema: quali funzioni si possono rappresentare mediante serie di una determinata natura?[198]

Certo, non vi è in queste parole, così come nell'orientamento di nessun matematico moderno, alcuna preconizzazione di un programma riduzionista, il quale creda possibile pensare ogni considerazione di valore come un'applicazione di certe considerazioni di forma. Proprio questo è invece il tratto distintivo di quel modo di vedere di cui la stessa memoria di Euler del 1765 è un'ulteriore conferma. Per quanto questi giunga a distinguere fra forma analitica e quantità astratta, egli propone infatti di trattare le quantità non riducibili a forme analitiche per mezzo di un procedimento puramente formale, fondato in ultima istanza sulle proprietà del calcolo differenziale, che lungi dal qualificarle come delle arbitrarie collezioni di valori, le connette a certe forme che, se non ne forniscono alcuna rappresentazione (esplicita o implicita), esprimono pur sempre alcune loro proprietà e permettono una loro trattazione analitica.

Il solo problema (di un certo rilievo) che all'indomani di questa memoria poteva dunque considerarsi come aperto per il programma euleriano era così quello di assegnare un senso non meramente geometrico alla nozione di differenziale per le funzioni globalmente discontinue (quelle espresse da curve tracciate *libera manu*), intese come quantità dipendenti da altre in base a leggi analiticamente non caratterizzabili. Se guardiamo le cose da questo punto di vista, l'ipotesi avanzata da Lagrange nella *Théorie* sembra non solo non contraddittoria rispetto all'ispirazione profonda della memoria euleriana, ma tale da fornire una soluzione possibile per questo problema. L'idea essenziale di Lagrange è infatti quella di intendere il *calcolo* non come una teoria delle differenze infinitamente piccole, ma come una teoria delle relazioni intercorrenti fra una funzione $f(x)$ e i coefficienti dello sviluppo in serie

---

[198] Cfr. Pincherle, *Manoscritti*, vol. III (Gennaio - Settembre 1884), Bibl. dell'Archiginnasio, Bologna.

intera della funzione correlata $f(x + \xi)$.[199] Per quanto la nozione di sviluppo sia connessa, secondo il punto di vista illustrato nel precedente paragrafo II.2.κ., a leggi di trasformazioni formali, era certo possibile immaginare di estenderla in modo da renderla applicabile anche a funzioni globalmente discontinue. Le leggi di trasformazione che conducono alla costruzione dello sviluppo non sono infatti che codificazioni di procedimenti atti a salvaguardare la rappresentatività su opportuni domini e si poteva certamente immaginare che a *ogni* quantità fosse possibile associare una serie intera che ne fornisse una rappresentazione su domini opportuni e i cui coefficienti fossero delle funzioni (eventualmente arbitrarie), ma connesse alla funzione di partenza per mezzo di un legame che poteva intendersi come l'espressione analitica del legame differenziale. Le proprietà del differenziale avrebbero così potuto essere tratte dalle proprietà delle serie intere del tutto indipendentemente dalla possibile rappresentatività di una funzione per mezzo di una forma analitica finita.[200] Così, per quanto Lagrange inizi il suo trattato ribadendo la definizione del termine "funzione" presentata da Euler nell'*Introductio* [201] e si riferisca costantemente all'universo delle forme analitiche, la sua fondazione poteva certamente essere intesa come estendibile, con opportune correzioni locali di carattere essenzialmente linguistico, anche a funzioni eulerianamente discontinue. Ma cosa avrebbe potuto convincere un matematico di fine Settecento che una quantità qualsiasi, fosse essa una funzione continua o discontinua (nel senso di Euler), potesse essere associata a uno sviluppo in serie intera capace di fornirne, entro certi intervalli, una rappresentazione?

Una risposta può forse venirci da un'osservazione dello stesso Lagrange. Presentando, nella sua quinta e ultima lezione all'*Ecole Normal de l'an III*,[202] il metodo della "curva degli errori" per la soluzione grafica di un'equazione numerica,[203] egli scrive:

> En effet, tout se réduit à décrire ou faire passer une courbe par plusieurs points, soit que ces points soient donnés par le calcul, ou par une construction, ou même par des observations, ou des expréssions isolées et indipendantes les unes des au-

---

[199]Cfr. il prossimo capitolo III.6.. Come ho già ricordato nel precedente paragrafo II.1.ι., questa idea venne in realtà presentata per la prima volta da Lagrange in una memoria del 1772 [cfr. Lagrange (1772), su cui tornerò nel prossimo cap. III.4, sez.*b*.], che tuttavia non andò oltre la sua enunciazione (in forma peraltro piuttosto diversa rispetto alla *Théorie*). Essa venne invece ripresa da Arbogast che in una memoria rimasta inedita [cfr. Arbogast (1789)] la utilizzò per presentare una trattazione completa dei principi del "calcolo differenziale e integrale". Anche in questo caso l'impostazione è significativamente differente da quella della *Théorie* [sul manoscritto di Arbogast mi permetto di rimandare a Panza (1985)].

[200]Cfr. il prossimo paragrafo III.6.c.ε..

[201]Cfr. il precedente paragrafo II.2.η..

[202]Cfr. Ec. Norm. III (s. d.), vol. IV, pp. 401-20 e (1800-01), parte I, *ibidem* (XLII *séance*, 22 germinale, anno III [11/4/1795]). Ma cfr. anche la precedente nota (195).

[203]Data un'equazione, si tratta di assegnare all'incognita dei valori arbitrari, calcolare gli errori che risultano e trasporli su un sistema di assi ortogonali come ordinate corrispondenti a ascisse date dai valori assegnati all'incognita. Interpolando si ottiene così una curva (la "curva degli errori") le cui intersezioni con l'asse della ascissa forniscono le radici dell'equazione.

> tres. Le problème est, à la vérité indéterminé; car on peut, à la rigueur, faire passer par des points donnés une infinité de courbes différentes, régulières ou irrègulières, c'est-a-dire, soumises à des équations, ou tracées arbitrairement à la main; mais il ne s'agit pas de trouver des solutions quelconques, mais les plus simples et le plus aisées à employer.
> Mais si le cercle est la courbe la plus simple par sa description, elle ne l'est pas par son équation entre les abscisses et les ordonnées rectangles. Sous ce dernier point de vue, on peut regarder, comme les plus simples, les courbes dont l'ordonnée est exprimée par une fonction entière et rationnelle de l'abscisse telle que $y = a + bx + cx^2 + \&c.$ y étant l'ordonnée et x l'abscisse. Ces sortes des courbes s'appellent en général paraboliques, [...] leur considération est toujours utile dans la gradation approchée des courbes, car on peut toujours faire passer une courbe de ce genre, par tant de points qu'on voudra d'une courbe proposée, puisqu'il n'y a qu'à prendre autant des coëfficients indéterminés a, b, c, &c. qu'il y a de points proposés, et de déterminer ces coëfficiens, de manière que les abscisse et les ordonnées, pour ces points, soient données. Or il est clair que, quelque que puisse être la courbe proposées, la courbe parabolique, ainsi tracée, en differera toujours, d'autant moins que le nombre des points donnés sera plus grande, et la distance moindre.[204]

Ora, se la distinzione fra il numerabile e il piucchenumerabile non è introdotta, ovvero non è concettualizzata la differenza di cardinalità fra l'insieme dei numeri naturali e il continuo, non è forse possibile pensare che la possibilità di procedere indefinitamente nella costruzione dei termini successivi di una serie (intera) corrisponda alla possibilità di procedere indefinitamente a successive partizioni di una curva assegnata arbitrariamente. Non vi è allora qui una ragione intuitiva per pensare, *a priori* rispetto alla considerazione di ogni metodo di sviluppo, che *ogni* curva, possa essere non solo approssimata per mezzo di un polinomio finito, ma espressa per mezzo di una serie intera? e che ogni funzione possa quindi essere intesa come associabile a uno sviluppo che, sotto certe condizioni, possa fornirne una rappresentazione analitica e esprimerne quindi le proprietà essenziali?

Questo modo di ragionare incontra certo molte difficoltà legate in particolare alla facile constatazione di divergenza di molti sviluppi fuori da un certo intervallo e all'isomorfismo fra ogni porzione di uno stesso continuo. Ma qualora la distinzione fra infiniti di ordine diverso non sia associata a una concettualizzazione della numerabilità come proprietà caratteristica dell'infinito del primo ordine, queste difficoltà non possono immediatamente venir tradotte in un rigetto delle conclusioni precedenti. E se *ogni* curva può essere espressa per mezzo di una serie intera, non vi è alcuna ragione per immaginare che non tutte le *quantità* possano essere rappresentate da una forma analitica. Fu d'altra parte solo dopo molti anni che il programma euleriano era stato abbandonato (almeno dalla ricerca di punta) che i matematici seppero spiegare perché e dove un tale argomento risulta fallace.

---

[204] Cfr. *ivi*, pp. 415-16 e parte 1, *ibidem*.

APPENDICE II. 2-A.

Scopo della presente appendice è quello di fornire alcuni significativi esempi testuali a conferma delle conclusioni raggiunte nel precedente paragrafo II.2.κ. e di discutere diverse formulazioni di un criterio di convergenza.

II. 2-A. α. *Una discussione sul "teorema" del binomio*

Quando, nella sua terza lezione all' *Ecole Normale de l'An III* [1], il 9 dicembre 1975, Laplace presentava ai suoi allievi la formula binomiale di Newton egli credeva certamente di riferirsi a un risultato non solo perfettamente noto, ma anche completamente acquisito. Egli era tuttavia probabilmente consapevole delle difficoltà che restavano ancora da superare allo scopo di fornire per esso una dimostrazione generale e del tutto irreprensibile. E' forse per questo che, di fronte al rischio di inoltrarsi su un terreno troppo accidentato, egli preferì astenersi dal far seguire l'enunciazione del teorema da una delle tante dimostrazioni di cui all'epoca si disponeva, preferendo il ricorso a un argomento retorico, ma senza dubbio altamente convincente: dimostrata per esponenti interi positivi, tale formula può essere generalizzata "per induzione"[2] a esponenti di ogni genere, seguendo in questo la stessa via tracciata da Newton.[3]

Nonostante questa evidente incompletezza, i dubbi che la lezione di Laplace suscitò negli astanti non riguardarono la legittimità dimostrativa di una semplice generalizzazione induttiva, ma alla generale validità della formula. Cinque giorni più tardi questi partecipava a una "*séance de débat*",[4] nel corso della quale egli era infatti costretto a rispondere a due obiezioni analoghe che mettevano in dubbio la stessa correttezza dell'identità:

(1) $$(1+x)^{-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \&c.$$

la quale non è ovviamente che un semplice esempio della formula binomiale generalizzata. La prima obiezione è registrata sotto il nome di Simon e consi-

[1] Cfr. Ec. Norm. III (s. d.), vol., I, pp. 369-81 e (1800-01), parte I, vol., I, pp. 381-93 (X *séances)* [cfr. la nota (195) del precedente paragrafo II.2.ν.].

[2] Laplace sembra qui passare per la verità dal problema della dimostrazione a quello della scoperta. Egli non fa infatti che osservare che l'induzione è "la source de presque toutes les découvertes dans l'analyse e dans la nature dont touts les phénoménes sont [...] les résultats mathématiques d'un petit nombre de lois invariables" [cfr. *ivi*, p. 380 e p. 392].

[3] Per quanto storicamente falsa, la tesi secondo la quale Newton sarebbe arrivato a stabilire la sua formula per mezzo di una semplice generalizzazione induttiva era largamente diffusa nella seconda metà del secolo. Per l'effettivo percorso dimostrativo di Newton cfr. Whiteside (1967-81), vol. I, pp. 96-142 [mi permetto a questo proposito di rimandare a Panza (1989), pp. 83-8].

[4] Cfr. Ec. Norm. III (1800-01), parte II, vol. 1, pp. 130-34.

ste semplicemente nel reclamare l'assurdità del risultato tratto da (1) per la facile sostituzione $x = 1$:

$$(2) \qquad \frac{1}{2} = 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \&c.$$

Ecco la risposta da Laplace:

> Dans l'*usage* [corsivo mio] de la formule du binôme, comme dans celui de toutes les expressions en séries il faut avoir soin qu'elles soient *convergentes* [...]. Telle est la série précédente, lorsque l'on y suppose x moindre que l'unité; mais si l'on suppose x plus grande que l'unité, la série est divergente et ne doit plus être *employée* [corsivo mio]. Cependant la consideration de ces séries, independamment de leur convergence et de leur divergence, est utile *dans l'analyse* [corsivo mio]. Si la solution d'un problème conduit à une série que l'on parvienne à sommer, cette somme résout le problème, quelque soit la valeur de x, quoique la série ne puisse être *employée* [corsivo mio] que dans certaines limites.[5]

Questa risposta non sembra convincere il cittadino Viguergne, il quale ripropone la medesima obiezione sotto una nuova forma. Lo stesso risultato (1), egli osserva, deriva anche per una semplice divisione reiterata (realizzata secondo il metodo di Mercator); sono dunque le stesse "leggi dell'algebra" che si mostrano in difetto allorquando si ponga a esempio la sostituzione $x = 11$. Ecco la nuova risposta:

> Lorsqu'une série, ordonnée par rapport aux puissances croissantes de x, est divergente, les géométres l'ordonnent d'une autre manière, afin de la rendre convergente; ainsi dans l'exemple que vous proposez, ils ordonnent la série par rapport aux puissances négatives de x et ils ont, au lieu de l'unité, divisé par $1+x$, cette série
>
> $$(3) \qquad \frac{1}{x} - \frac{1}{x^2} + \frac{1}{x^3} - \&c.$$
>
> qui est très-convergente, lorsque $x = 11$.[6]

Per questo basta trasformare $(1+x)^{-1}$ in $(x+1)^{-1}$ e dividere secondo lo stesso metodo di Mercator. La possibile contro-obiezione che afferma che per $x=1$ anche la (3) dà lo stesso risultato paradossale (2) non avrebbe certo spaventato Laplace, il quale avrebbe potuto proporre di sviluppare il binomio in questione secondo le potenze di $(x - 1)$. Sfruttando la ovvia identità $(1+x)^{-1} = [2+(x-1)]^{-1}$ si ha infatti, sia applicando la formula binomiale che dividendo secondo il metodo di Mercator:

$$(4) \qquad (1+x)^{-1} = [2+(x-1)]^{-1} = \frac{1}{2} - \frac{1}{4}(x-1) + \frac{1}{8}(x-1)^2 - \frac{1}{16}(x-1)^3 + \&c.$$

che per $x = 1$ dà esattamente:

---

[5]Cfr. *ivi*, pp. 130-31.

[6]Cfr. *ivi*, pp. 131.

(5) $\frac{1}{2} - 0 + 0 - 0 + \&c. = \frac{1}{2}$

Per quanto riferite a un problema che alla fine del secolo chiunque avrebbe considerato come elementare, quale quello posto dalla cosiddetta "serie di Grandi"[7] (e anzi proprio per questo), le due risposte di Laplace appaiono a me come del tutto paradigmatiche. Se la prima sembra infatti esprimere una concezione della relazione fra una serie e la sua "somma" essenzialmente differente da quella che ritroviamo oggi in tutti i corsi di "analisi elementare", la seconda contiene l'implicita affermazione di una sorta di teorema che, per quanto mai dimostrato nella sua forma generale, ricorre assai spesso nei testi matematici settecenteschi sotto la forma di una presupposizione concessa come ovvia. Traducendo queste risposte nei termini di due principi generali, esse potrebbero venir riformulate nei termini seguenti:

Princ. I. Il problema della convergenza/divergenza di una serie riguarda l'applicabilità di questa serie al fine di ottenere adeguate approssimazioni numeriche; esso si presenta sotto la forma di un problema *a posteriori*: data una relazione analitica del tipo

(6) $F(x) = K_0 + K_1x + K_2x^2 + K_3x^3 + \&c.$

(in cui K_0, K_1, K_2, &c. sono dei coefficienti numerici determinati), la cui validità non dipendente che dalla corretta applicazione di alcuni metodi *standard* di sviluppo e che esprime quindi un risultato analitico generale, ci si può domandare sotto quali condizioni tale relazione esprime *anche* un'identità numerica. Ciò avviene per tutti quei valori di x per cui le somme parziali della serie approssimano indefinitamente un valore limite finito, ovvero quando la serie è *convergente* . In questo caso essa può venir utilizzata per ottenere delle approssimazioni numeriche; nel caso contrario (la serie è divergente) questo impiego è invece illegittimo e può portare a veri e propri paradossi.

Princ. II. Per ogni funzione $F(x)$ e per ogni punto x_0 di x è possibile generare "algebricamente", operando su questa stessa funzione secondo dei procedimenti *standard*, una serie intera ordinata secondo le potenze di una funzione opportuna $g(x)$ della stessa variabile, la quale converge a una funzione $h(g(x))$ identicamente equivalente alla funzione di partenza e esprime quindi il valore numerico che questa funzione assume secondo la sostituzione $x = x_0$.[8]

[7]Cfr. il prossimo capitolo III.1..

[8]Si noti che questa operazione può in ogni caso essere ricondotta a una traslazione, ciò che assegna a $g(x)$ la forma di un polinomio di primo grado: $g(x) = x \pm a$.

Seguendo i due precedenti principi, il problema della convergenza si riduce al problema di trovare, per uno sviluppo dato, un intervallo di applicazione e, per un intervallo dato, uno sviluppo applicabile.

Ma come è possibile valutare, in termini non semplicemente intuitivi, la convergenza di una serie assegnata? Rispondendo a Simon, Laplace fa seguire il termine "*convergentes*"dalla seguente precisazione:

> [...] *convergentes*, c'est-à-dire que les termes qui suivent ceux que l'on considere, soient très petits et d'autant moindres que l'on prend un plus grand nombre de termes dans la série, en sorte que ce qui est négligé, devienne de plus en plus insensible qu'aucune grandeur donnée.[9]

Trasponendo una simile esplicazione in un linguaggio più preciso, potremmo dire che secondo Laplace vale il seguente criterio:

$$\text{Crit. I:} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k \ \text{è conv.} \Leftrightarrow \left[\ \exists K \text{ t. c. } (k>K) \Rightarrow \begin{cases} |a_k| \text{ è inf. piccolo} \\ |a_{k+1}| < |a_k| \end{cases} \ \right]$$

Dal conseguente di questa doppia implicazione sembra infatti seguire:

$$(7) \qquad [N \rightarrow \infty] \Rightarrow \left[\sum_{k=N}^{\infty} a_k \rightarrow 0 \right]$$

come richiede Laplace nella seconda parte della sua precisazione.[10]

Nei paragrafi che seguono presenterò due esempi che confermano i principi I e II di Laplace e che permettono di riformularne il criterio I.

II. 2-A. β. *Una memoria di Euler del 1754-55*

Il primo di questi esempi è costituito da una memoria di Euler del 1754-55 esplicitamente dedicata a una discussione relativa alla relazione che sussiste fra una serie e "la sua somma".[11] La questione verte, secondo Euler

---

[9]Cfr. pp. 130-31.

[10]Si noti che (7) può al più essere trasformato in una definizione di convergenza, ma certamente non in un criterio. L'enunciazione del Criterio I è quindi essenziale.

[11]Cfr. Euler (1754-55). Una traduzione inglese largamente commentata di questa memoria è in Barbeau-Leah (1976). Euler concepisce il suo intervento come una precisa presa di posizione in una "controversia" matematica, che, in realtà, era ormai stata di fatto appianata con la generale accettazione del punto di vista che Euler ha il merito di formulare per primo in modo esplicito e chiaro. Ecco come egli stesso si esprime nel sommario anteposto alla sua memoria (redatto come usualmente in terza persona) [cfr. *vi*, p.)(19)(]:

> Argumentum hic subi Auctor tractandum sumit, quod adhuc summis difficultates premebatur, atque opinionem illa, qua vulgo investigationes mathematicæ ab omni controversia immunes potantur, haud mediocriter, debilitabat. Inesse autem in Mathesi eiusmodi speculationes, circa quas summi geometræ maxime dissenserit, omnino negari nequit, neque hoc tantum in Mathesi adplicata usu venit [..] sed etiam,

sul significato che vogliamo assegnare al termine "somma". Se infatti assumiamo che la "somma" di una serie coincide con l'addizione "*in acto*" dei suoi termini, allora dobbiamo concludere che una serie divergente non ha somma e non possiamo quindi associare una "somma" a una serie che nel caso in cui questa sia qualificata come convergente. Tuttavia,

> cum autem in analysi series ex evolutione fractionum seu quantitatum irrationalium, vel etiam trascendentium, oriantur, in calculo vicissim licebit loco cuiusque seriei eam quantitatem, ex eius evolutione nascitur substituere.[12]

Se accettiamo quindi di intendere la "somma" di una serie come la funzione di cui essa è sviluppo (e pensiamo quindi ogni serie come uno sviluppo di una funzione, eventualmente incognita), possiamo associare una "somma" a qualsiasi serie:

> Eatenus [...] tantum series infinitæ in analysi locum inveniunt, quatenus ex evolutione cuispiam expressionis finitæ sunt ortæ[...]. Si igitur receptam summæ notionem ita tantum immutemus, ut dicamus, cuiusque seriei summam esse expressionem finitam, ex cuius evolutione illa ipsa series nascantur; omnes difficultates [...] sponte evanescunt.[13]

Ogni serie, continua Euler, può allora essere rimpiazzata "nel corso del calcolo"[14] dalla sua "somma" senza che ciò conduca né a "errori di diritto", né a inaccettabili conseguenze. Qualora la serie diverge, questa sostituzione non conduce infatti che a esprimere delle relazioni operazionali, mentre nel caso in cui essa converge, la sua "somma" (definita come sopra) corrisponde alla stessa "addizione in atto" dei suoi termini, permettendo delle valutazioni numeriche.

Perché questo punto di vista non conduca tuttavia a fastidiose confusioni, è necessario disporre di un esplicito criterio di convergenza che permetta di distinguere facilmente fra i due casi. Ecco come Euler si esprime:

> Convergentes autem series dicitur quarum termini continuo siunt minores, atque tandem penitus evanescunt [...]. Divergentes autem series dicitur, quarum termini non ad nihilum tendunt, sed vel infra certem limitem nunquam decrescunt, vel adeo in infinitum excrescunt.[15]

La prima tentazione è quella di tradurre una tale definizione nel seguente criterio:

Crit. II: $\sum_{k=0}^{\infty} a_n$ è conv. $\Leftrightarrow \{a_n\} \rightarrow 0$

quod inprimis mirum videatur, ipsi Mathesi pura et abstracta, eximia litium obiecta suppeditavit.

[12]Cfr. *ivi*, pp.)(21)(-)(22)(.

[13]Cfr. *ivi*, pp. 211-12.

[14]Euler intende qui chiaramente il calcolo come una procedura di trasformazione formale.

[15]Cfr. *ivi*, p.)(20)(.

il quale è tuttavia contraddetto dall'ovvio esempio della serie armonica a cui Euler aveva dedicato la propria attenzione fin da vent'anni prima.[16] Considerata la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c}{u+kb}$, Euler aveva osservato che, benché i suoi termini successivi vadano progressivamente diminuendo, "tamen summa huiusmodi seriei in infinitum continuatæ semper est infinita".[17] Per giungere a tale conclusione egli si era richiamato a un criterio generale, ovviamente differente da Crit. II:

> Series in infinitum continuata summam habet finitam, etiam si ea duplo longius continuetur nullum accipiet augmentum sed id quod post infinitum adiicitur cogitatione, re vera erit infinite parvum.[18]

Per quanto nelle parole di Euler non si possa trovare a rigore che la formulazione di una condizione necessaria di convergenza, sembra opportuno assegnare alle sue intenzioni la presentazione di un vero e proprio criterio,[19] il quale può essere riformulato in uno dei due seguenti modi:[20]

$$\text{Crit. III:} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k = L \Leftrightarrow \left[N = \infty \Rightarrow \sum_{k=N}^{2N} a_k = \text{inf. piccolo} \right] \quad [L = \text{finito}]$$

$$\text{Crit. IV:} \quad \sum_{k=0}^{\infty} a_k = L \Leftrightarrow \left[N \to \infty \Rightarrow \sum_{k=N}^{rN} a_k \to 0 \right] \quad [L = \text{finito}, r \in \mathbf{N}]$$

La serie armonica considerata è al contrario tale che:

$$\frac{(r-1)Nc}{u+(rN-1)b} < \sum_{k=N}^{rN} a_n < \frac{(r-1)Nc}{u+Nb} \tag{8}$$

da cui, ponendo N infinito, si trae:

---

[16]Cfr. Euler (1734-35).

[17]Cfr. *ivi*, p. 150.

[18]Cfr. *ivi*, p. 150-51. Barbeau e Leah [cfr. Barbeau-Leah (1976), p. 155] hanno inteso un tale criterio come una "versione *non-standard*" del criterio di Cauchy.

[19]Si noti tuttavia che per trarre la sua conclusione Euler non ha alcun bisogno di intendere il suo criterio anche come l'espressione di una condizione sufficiente.

[20]Commentando il criterio di Euler alla fine del secolo, Montucla [Cfr. Montucla (1799-1802), vol. III, p. 236] dirà che esso prospetta una soluzione al problema della convergenza "qui n'aura peut-être pas l'assentiment de tous les lecteurs". In effetti, egli continua, "on se demandera sans doute ce que l'on peut entendre par une quantité prolongée au de là de l'infini". Ciò non gli impedirà, in realtà, di cogliere la profondità dell'intuizione di Euler:

> Cela est néanmoins analytiquement vrai; car l'esprit géométrique semble n'être arrêté par aucunes bornes, pas même celles de l'infini, et Euler donne des exemples de son assertion paradoxale.

$$(9) \qquad \frac{(r-1)c}{r\,b} < \sum_{k=N}^{rN} a_n < \frac{(r-1)c}{b}$$

contro le prescrizioni del criterio.

Tornando allora alla memoria del 1754-55, sembra inevitabile concludere che la riformulazione contenuta nel Criterio II non corrisponda all'interpretazione intesa di Euler della propria definizione. Con le parole "tandem penitus evanescunt" riferite ai termini successivi di una serie convergente, egli non vuole evidentemente significare semplicemente che questi termini "svaniscono" o "divengono zero", ma che essi lo fanno "abbastanza velocemente".

II. 2-A. γ. *Il criterio di d'Alembert*

Il secondo esempio è costituito da due articoli di d'Alembert. Ecco come egli si esprime nel primo di essi, la voce "Série ou suites" de l' *Encyclopédie*:

> [...] lorsque la *suite* ou la *série* va toujours en approchant de plus en plus de quelque quantité finie, et que par conséquent les termes de cette *série*, ou les quantités dont elle est composée, vont toujours en diminuant, on l'appelle une *suite convergente*.[21]

D'Alembert definisce una "série ou suite" come "un ordre ou une progression de quantités, qui croissent ou décroissent suivant quelque loi".[22] Sembra così - e gli stessi esempi che egli presenta lo confermano - che piuttosto che di "serie" (in senso moderno) si debba parlare qui di "successioni".[23] Questa interpretazione rende tuttavia palesemente inadeguata la precedente definizione di "suite convergente"; d'Alembert non poteva infatti ignorare la possibilità di costruire successioni convergenti crescenti.[24] Ciò a parte, quello che resta interessante è l'idea di definire la convergenza di una serie - o, per usare i termini di d'Alembert, della "somma di una successione" - nei termini della convergenza della successione delle sue ridotte parziali.[25] L'associazione fra serie e successioni non deve tuttavia condurci a conclusioni affrettate. Se invece della successione delle ridotte, consideriamo infatti la successione dei termini di una serie, ci troviamo in una situazione singolare.

---

[21]Cfr. d'Alembert (Ser.), p. 93b. D'Alembert afferma che una "serie" [cfr. *sotto*] convergente "devient enfin égale" al limite.

[22]Cfr. *ivi*.

[23]La distinzione fra le serie e le successioni non era rispecchiata nel Settecento da nessuna precisa convenzione linguistica, per cui l'uso del termine "série" per riferirsi a una successione è assai frequente.

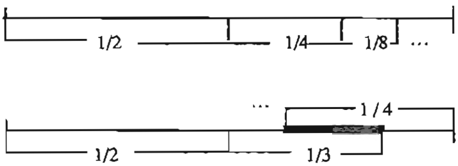
[24]Un esempio ovvio è fornito dalla successione $\left\{\frac{n}{n+1}\right\}$.

[25]Cfr. *ivi*, p. 94a-b.

Se, secondo d'Alembert, la convergenza di una serie qualsiasi $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ implica infatti (per k abbastanza grande) la condizione $|a_k| < |a_{k-1}|$, l'esempio della serie armonica mostra che il viceversa non è vero: una condizione reputata necessaria non corrisponde quindi a una condizione sufficiente. Ecco come d'Alembert giustifica una tale circostanza:

> Si une suite infinie décroissante exprime de parties qui ne puissent pas subsister dans un tout séparément les unes des autres, mais qui soient telles que pour exprimer leur valeur, il soit nécessaire de supposer la même quantité prise plusieurs fois dans le même tout; alors la somme de ces parties sera plus grande que le tout supposé, et même pourra être infiniment plus grande [...]. Ainsi la progression harmonique 1/2, 1/3, 1/4, &c.[26]

La seguente rappresentazione geometrica chiarirà la situazione.



$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2^k}$$

$$\sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k}$$

Ciò non significa che lo studio della successione costituita dai termini di una serie non possa essere d'aiuto allo scopo di valutarne la convergenza. Per passare dalla precedente condizione a una condizione sufficiente non occorre infatti che introdurre una opportuna precisazione riferita ai valori che possono essere assunti dall'indice k. E' proprio l'introduzione (implicita) di tale precisazione che permette a d'Alembert, qualche anno più tardi, di determinare in termini del tutto generali l'intervallo di convergenza della serie binomiale.[27] Assunto lo sviluppo del binomio $(1+x)^{\alpha}$, egli considera il rapporto fra i suoi termini di ordine k e k-1:

$$\text{(10)} \qquad \frac{a_k(x)}{a_{k-1}(x)} = \frac{x(\alpha-k+1)}{k} = x\left(\frac{\alpha+1}{k} - 1\right)$$

e afferma:

> [...] pour que la série soit convergente, il faut que ce rapport (abstraction faite du signe qu'il doit avoir) soit < que l'unité.[28]

Intese alla lettera queste parole non fanno in verità che ribadire la necessità della condizione già presentata, sotto una forma diversa, nell'articolo prece-

[26]Cfr. *ivi*, p. 94b.
[27]Cfr. d'Alembert (1768).
[28]Cfr. *ivi*, p. 171.

dente. Nel seguito della sua memoria d'Alembert mostra tuttavia di intendere questa come una condizione sufficiente. Assunta infatti la diseguaglianza

$$(11) \qquad \left| x\left(\frac{\alpha+1}{k} - 1\right)\right| < 1$$

egli pone in essa $k = \infty$ e interpreta la risultante $|x| < 1$ come garanzia di convergenza della serie data. La correzione implicita, che trasmuta la condizione precedente in una condizione sufficiente consiste ovviamente nella richiesta che il rapporto resti minore dell'unità anche nel caso in cui l'indice assuma dei valori infiniti. Possiamo quindi scegliere fra le due seguenti riformulazioni:

$$\text{Crit. V:} \quad \left[\exists K \text{ t. c. } (k>K) \Rightarrow \left|\frac{a_k}{a_{k-1}}\right| < 1 \text{ (k fin. o inf.)}\right] \Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ è conv.}$$

$$\text{Crit. VI:} \quad \left[\left(\exists K \text{ t. c. } (k>K) \Rightarrow \left|\frac{a_k}{a_{k-1}}\right| < 1\right) \& \left(\text{Non } \left|\frac{a_k}{a_{k-1}}\right| \rightarrow 1 \text{ se } k\rightarrow\infty\right)\right] \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} a_k \text{ è conv.}$$

Per quanto il precedente risultato riferito alla serie binomiale fosse ormai, negli anni sessanta del secolo, ampiamente assodato,[29] la via tramite la quale d'Alembert lo raggiunge contiene così l'indicazione di un criterio generale capace di ben altre applicazioni.[30] L'interesse di un tale criterio non è tuttavia legato soltanto alla sua generale applicabilità nella ricerca dell'intervallo di convergenza di una serie. Esso rende altresì chiaro che il comportamento dei primi *n* termini di una serie (con *n* arbitrariamente grande) non può essere inteso come un indice affidabile della natura di questa; una serie può infatti essere convergente (rispettare il criterio) anche se le sue prime ridotte parziali divergono e, viceversa, essa può risultare divergente (non rispettare il criterio) anche qualora le sue prime ridotte parziali convergano. In questi casi il criterio può essere utilizzato per determinare il punto a partire dal quale una serie cominci a convergere o a divergere,[31] informazione che può

[29] Per le prime formulazioni di questo risultato, nel caso particolare della potenza $\alpha=-1$ cfr. il prossimo capitolo III.1..

[30] In realtà d'Alembert non spende nessuna parola per giustificare la sua assunzione, che dovrebbe quindi essere intesa più come una definizione, che come un criterio.

[31] Utilizzando un tale criterio si può mostrare che per ogni *n*, esiste almeno una serie binomiale che comincia a convergere (o a divergere) solo a partire dall'*n*-esimo termi-

essere di grande utilità qualora la serie venga utilizzata allo scopo di produrre delle approssimazioni.[32] Lo scopo principale della memoria è d'altra parte proprio quello di fornire, a partire da tale criterio, alcuni nuovi metodi di approssimazione; lo studio delle condizioni di convergenza si presenta così come del tutto funzionale a questo obiettivo. La stessa formulazione del risultato generale relativo all'intervallo di convergenza di una serie binomiale generica è d'altra parte sintomatica di un simile approccio:

> [...] la série donnera *faux*,[33] toutes les fois que x, prise positivement ou négativement sera > 1 puisque la série sera alors divergente a son extrémité; et [...] au contraire, lorsque x sera < 1, la série pourra toujours être employée puis qu'elle sera convergente à son extrémité et que son dernier terme sera infiniment petit.[34]

II. 2-A. δ. *Due citazioni per concludere*

Concluderò con due citazioni. La prima è tratta dal primo volume della seconda edizione del *Traité* di Lacroix, pubblicato a Parigi nel 1810. La seconda è tratta dal *Cours d'analyse* di Cauchy, pubblicato sempre a Parigi nel 1821, solo undici anni dopo. Non occorreranno commenti per sottolineare la diversità profonda degli orientamenti che esse esprimono.

> Il est à propos - scrive Lacroix - de faire attention au mot *développement* que l'on emploie ici ai lieu de celui de *valeur*; car une série ne donne pas toujours la valeur de la fonction à laquelle appartient [...] ainsi qu'on peut le remarquer sur la fraction $\frac{a}{a-x}$, dévelloppée suivant les puissance de x. [...] ce n'est donc que dans ce cas qu'il est permis de l'employer à déterminer par approximation cette vrai valeur; mais cependant l'expression
>
> (12) $$1+\frac{x}{a}+\frac{x^2}{a^2}+\&c.$$
>
> [...] est tellement liée avec la fraction $\frac{a}{a-x}$, que si une question nous conduisait à la série (12) nous serions en droit d'en conclure que la fonction cherchée n'est autre que $\frac{a}{a-x}$, ou si nous découvrions quelques proprieté relative à une suite de

ne. La serie che risulta dallo sviluppo di $\left[1+\left(\frac{b+1}{b}\right)\right]^{1/2}$ comincia a esempio a divergere solo a partire dal primo termine il cui indice sia maggiore di $\frac{3b+3}{2}$.

[32] E' chiaro che se una serie comincia a divergere solo a partire da un certo valore dell'indice essa può venire impiegata per fornire approssimazioni esatte anche se non indefinitamente migliorabili.

[33] D'Alembert utilizza qui la terminologia di Varignon (1815) [cfr. il prossimo paragrafo III.1.θ.].

[34] Cfr. d'Alembert (1768), pp. 173-4.

termes tels que (12), nous pourrions affirmer qu'elle appartient à la fraction $\frac{a}{a-x}$.[35]

Ecco invece come si esprime Cauchy:

> Quant aux méthodes, j'ai cherché à leur donner tout la rigueur qu'on exige en géométrie, de manière à ne jamais recourir aux raisons tirées de la généralité de l'algèbre. Les raisons de cette espèce, quoique assez communément admises, surtout dans le passage des séries convergentes aux séries divergentes, et des quantités réelles aux expressions imaginaires, ne peuvent être considérées, ce me semble, que comme des inductions propres à faire pressentir quelque fois la vérité, mais qui s'accordent peu avec l'exactitude si ventée des sciences mathématiques. On doit même observer qu'elles tendent à faire attribuer aux formules algébriques une étendue indéfinie, tandis que, dans la réalité, la plupart de ces formules subsistent uniquement sous certaines conditions, et pour certaines valeurs des quantités qu'elles renferment. En déterminant ces conditions et ces valeurs, et en fixant d'une manière précise le sens des notations dont je me sers, je fais disparaître toute incertitude; et alors les différentes formules ne présentent plus que des relations entre les quantités réelles, relations qu'il est toujours facile de vérifier par la substitution de nombres aux quantités elles-mêmes. Il est vrai que, pour rester constamment fidèle à ces principes, je me suis vu forcé d'admettre plusieurs propositions qui paraîtront peut-être un peu dures au premier abord. Par exemple, j'énonce dans le chapitre VI qu'*une série divergente n'a pas de somme.* [...] Ainsi, avant d'effectuer la sommation d'aucune série, j'ai dû examiner dans quels cas les séries peuvent être sommées, ou, en d'autres termes, quelles sont les conditions de leur convergence; et j'ai, a ce sujet, établi des règles générales qui me paraissent mériter quelque attention.[36]

Non è difficile ritrovare in queste parole il manifesto di un nuovo programma di ricerca che, sia pure attraverso un cammino contrastato, conquisterà ai propri punti di vista un'intera comunità scientifica.

APPENDICE II. 2-B.

Nella presente appendice presenterò alcuni risultati moderni relativi al polinomio e alla serie di Taylor, sottolineando le più evidenti differenze fra punto di vista a cui essi rispondono e le concezioni settecentesche.

II. 2-B. α. *Polinomio e serie di Taylor di una funzione data*

Diciamo *polinomio di Taylor* d'ordine n della funzione $f(x)$ nel punto $x = a$ il polinomio

---

[35]Cfr. Lacroix (1810-19), vol. I, pp. 4-5.

[36]Cfr. Cauchy (1821), pp. II-V.

$$(1) \qquad P_{f,n}(x, a) = f(a) + f'(a)(x\text{-}a) + \frac{f''(a)}{2!}(x\text{-}a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x\text{-}a)^n$$

E' chiaro che una funzione f(x) possiede un polinomio di Taylor d'ordine n nel punto $x = a$ se e soltanto se in tal punto essa é n volte derivabile, ovvero se le sue prime n derivate vi esistono finite. Una condizione necessaria (anche se non sufficiente) perché ciò avvenga è che tale funzione sia *ivi* continua insieme alle sue prime n-1 derivate.

Una funzione f(x) è di classe C^∞ su un intervallo (b, c) se essa è tale che per ogni n la sua derivata n-esima $f^{(n)}(x)$ è definita in ogni punto di tale intervallo. Se f(x) è una funzione di classe C^∞ su un dato intervallo (b, c) e $a \in (b, c)$ possiamo porre per ogni n l'identità:

$$(2) \qquad f(x) = f(a) + f'(a)(x\text{-}a) + \frac{f''(a)}{2!}(x\text{-}a)^2 + \ldots + \frac{f^{(n)}(a)}{n!}(x\text{-}a)^n + R_{f,n}(x, a)$$

che definisce la funzione $R_{f,n}$ (x, a), la quale è detta "resto del polinomio di Taylor di ordine n della funzione f(x) nel punto x = a". Diciamo che quest'ultima funzione è sviluppabile in una *serie di Taylor* centrata sul punto $x = a$ in un intervallo (b, c) comprendente a se e solo se $b < c$ e $R_{f,n}$ (x, a) è tale che

$$(3) \qquad \forall x \in (b, c)\ \mathrm{Lim}_{n\to\infty} R_{f,n}(x, a) = 0$$

Se questa condizione è rispettata si potrà allora scrivere:[1]

$$(4) \qquad f(x) = f(a) + f'(a)(x\text{-}a) + \frac{f''(a)}{2!}(x\text{-}a)^2 + \ldots = T_a[f(x)] \quad [x \in (b, c)]$$

ciò che indica che la serie $T_a\,[f(x)] = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x\text{-}a)^k$ (detta appunto "serie di Taylor della funzione f(x) nel punto $x = a$") converge alla funzione f(x) sull'intervallo (b, c).

Se f(x) è di classe C^n sull'intervallo[2] [a, x] e la sua derivata di ordine n+1 $f^{(n+1)}(x)$ esiste su (a, x), allora il resto $R_{f,n}$ (x, a) del polinomio di Taylor $P_{f,n}$ (x, a) può essere scritto sotto la forma:

---

[1] Si noti che in notazione moderna l'uso dei tre puntini indica che la somma deve essere proseguita all'infinito. Nei testi settecenteschi è invece più usuale l'impiego del simbolo "&c." che indica una prosecuzione non necessariamente infinita della somma. E' solo il contesto che può quindi discriminare in tal caso fra una serie e un polinomio d'ordine arbitrario. La stessa cosa vale ovviamente anche per prodotti o successioni.

[2] Ricordo che un intervallo è indicato ponendo i suoi limiti fra parentesi tonde qualora esso non comprenda tali limiti (intervallo aperto), mentre è indicato ponendo i suoi

$$(5) \qquad R_{f,n}(x, a) = \frac{f^{(n+1)}(\lambda)}{(n+1)!}(x-a)^{n+1} \qquad \left[\lambda \in (a, x)\right]$$

Si dice allora che il resto è espresso in "forma di Lagrange".[3] Ciò significa che esiste un numero λ appartenente all'intervallo (a, x) che soddisfa l'identità (2) secondo la sostituzione (5). Se $f^{(n+1)}(x)$ è continua su $[a,x]$, allora questo stesso resto può essere scritto anche sotto la forma:

$$(6) \qquad R_{f,n}(x, a) = \frac{1}{n!}\int_a^x (x - t)^n f^{(n+1)}(t)\, dt$$

Si dice allora che il resto è espresso in forma integrale.

II. 2-B. β. *Funzioni analitiche*

Se una funzione $f(x)$ è sviluppabile in una serie di Taylor centrata sul punto $x = a$ in un intervallo (b, c) è evidente che tale funzione possiede su questo intervallo uno sviluppo in serie intera della forma $\sum_{k=0}^{\infty} A_k (x-a)^k$; ciò significa che esiste una serie intera di tale forma la quale converge a $f(x)$ su (b, c). $f(x)$ è d'altra parte una *funzione analitica in* $x = a$ se e solo se essa è sviluppabile in serie intera in $x = a$, ovvero se esiste un intorno aperto V di a tale che esiste una serie intera $\sum_{k=0}^{\infty} A_k (x-a)^k$ la quale converge a $f(x)$ per ogni x appartenente a esso ($f(x)$ sarà poi analitica su un intervallo I se e solo se essa è analitica in ogni punto di tale intervallo). Una funzione sviluppabile in una serie di Taylor centrata sul punto $x = a$ in un intervallo (b, c) è dunque analitica in $x = a$. Anche il viceversa è d'altra parte vero. Si dimostra infatti che se una funzione è sviluppabile in serie intera in $x = a$ essa è di classe C^∞ in V e la serie $\sum_{k=0}^{\infty} A_k (x-a)^k$ è tale che $A_k = \frac{f^{(n)}(a)}{n!}$.[4] Siccome una serie intera risulta sempre convergente su un intervallo centrato sullo zero

limiti fra parentesi quadre qualora esso li comprenda (intervallo chiuso). Assumo qui che $x > a$.

[3]Nella sezione III.6.*d.* presenterò e discuterò il procedimento tramite il quale Lagrange perviene al risultato oggi generalmente formulato nei termini precedenti.

[4]La dimostrazione è assai semplice e si riduce sostanzialmente al procedimento (4) - (6) esposto nel precedente paragrafo II.2.κ. (la (4) deve ovviamente essere condizionata dalla posizione $x \in V$).

(ovvero per $|x-a| \leq 0$) possiamo in generale indicare l'intervallo (b, c) con la notazione $(a-\delta_0, a+\delta_0)$.

Se $b = a-\delta_0$, $c = a+\delta_0$ e $\delta_0>0$ la condizione (3) è allora una condizione necessaria e sufficiente di analiticità per la funzione $f(x)$ in $x = a$. Ciò non significa naturalmente che $f(x)$ è analitica in $x = a$ se e solo se la serie parziale $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ tende a zero quando n tende all'infinito, ovvero se e solo se la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ risultante dal polinomio $P_{f,n}(x, a)$ per la posizione $n = \infty$ è convergente. Il resto $R_{f,n}(x, a)$ è infatti definito in (2) come differenza fra $P_{f,n}(x, a)$ e la funzione $f(x)$ e *a priori* non vi è alcuna garanzia che la convergenza della serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ in $(a-\delta_0, a+\delta_0)$ implichi la coincidenza fra $R_{f,n}(x, a)$ e $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$: la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(a)}{k!}(x-a)^k$ può infatti convergere in $(a-\delta_0, a+\delta_0)$ senza convergere alla funzione $f(x)$. Una condizione sufficiente perché questa eventualità si verifichi, ovvero perché una funzione $f(x)$ di classe C^{∞} sia sviluppabile in $x = a$ in una serie di Taylor centrata sul punto $x = a$ e sia quindi analitica in tale punto è che:

(7) $$\forall x \in (a-\delta_0, a+\delta_0)\, \exists M \exists N \forall n\, (n>N) \Rightarrow \left((\sup_{x \in (a-\delta_0,\, a+\delta_0)} |f^{(n)}(x)| \leq M \frac{n!}{\delta_0^n} \right)$$

In questo caso la funzione $f(x)$ e la serie $T_a[f(x)]$ sono equivalenti in $(a-\delta_0, a+\delta_0)$ e si può quindi studiare la funzione $f(x)$ studiando la serie $T_a[f(x)]$.

Se a è fissato e $f(x)$ è analitica in $x = a$ il problema è allora quello di determinare il valore massimo di δ_0 - che verrà indicato con δ $(0<\delta\leq\infty)$ - per cui la serie di Taylor centrata sul punto $x = a$ converge alla funzione in $(a-\delta_0, a+\delta_0)$. Una volta che questo valore è stato fissato si dirà che la (4) vale se e solo se $|x-a|<\delta$ o, in alcuni casi, $|x-a|\leq\delta$. Naturalmente, mantenendo fisso a, δ varia da funzione a funzione e, per la stessa funzione, esso può variare con a. Se una funzione $f(x)$ definita su I è tale che

(8) $$\forall a \in I\ (\delta_f = \delta_f(a) = 0)$$

essa non è analitica in nessun punto del suo insieme di definizione. Al contrario se $f(x)$ è tale che

(9) $$\forall a \begin{cases} (a \in I \supseteq I') \Rightarrow \delta_f = \delta_f(a) > 0 \\ (a \in I - I') \Rightarrow \delta_f = \delta_f(a) = 0 \end{cases}$$

allora essa è analitica sul sottoinsieme I' del suo insieme di definizione.

II. 2-B. γ. *Sviluppo di Taylor per $f(\underline{x}+\xi)$*

Se in (4) si sostituisce x con $z+\varepsilon$ e si pone $b = a-\delta$, $c = a+\delta$ si ha (posto che f(x) sia analitica in $x = a$):

(10) $$f(z+\xi) = f(a) + f'(a)(z-a+\xi) + \frac{f''(a)}{2!}(z-a+\xi)^2 + \dots \qquad [(z+\xi)\in(a-\delta,\ a+\delta)]$$

Se si considera z come un valore di x e si pone $a = z$ la (10) diventa:

(11) $$f(z+\xi) = f(z) + f'(z)\xi + \frac{f''(z)}{2!}\xi^2 + \dots \qquad [\xi\in(-\delta,\ \delta)]$$

Così se la funzione f(x) è sviluppabile in serie intera in un intorno di centro z e di raggio δ (ovvero se essa è analitica in $x = z$), per $|\xi|<\delta$ si ha:

(12) $$_{\xi}\Delta f(z) = f'(z)\xi + \frac{f''(z)}{2!}\xi^2 + \frac{f'''(z)}{3!}\xi^3 + \dots$$

II. 2-B. δ. *Approccio locale / approccio globale*

Da questo punto di vista il teorema che afferma la sviluppabilità in serie di Taylor è, per differenti ragioni, un risultato *locale*.[5] In primo luogo esso non è generalizzabile a tutte le funzioni. In secondo luogo la stessa proprietà dell'analiticità è una proprietà locale. Una funzione f(x) può essere analitica in $x = a_1$ e non analitica in $x = a_2$. Se f(x) è analitica in $x = a$, $\delta=\delta(a)$ può essere infinito. In tal caso la serie T_a[f(x)] è convergente a f(x) per ogni x. Ecco alcuni esempi:

(13)
$$\text{(i)}\quad T_0[e^x] = 1 + x + \frac{x^2}{2!} + \frac{x^3}{3!} + \dots = e^x \quad [\forall x]$$

$$\text{(ii)}\quad T_0[\sin x] = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \dots = \sin x \quad [\forall x]$$

$$\text{(iii)}\quad T_0[\cos x] = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \dots = \cos x \quad [\forall x]$$

[5] Si ricordi che la sviluppabilità in serie di Taylor corrisponde alla sviluppabilità in serie intera. Tutto ciò che segue vale quindi anche relativamente alla proprietà di una funzione di essere sviluppabile in serie intera.

Naturalmente questo è anche il caso di tutte le funzioni polinomiali, il cui sviluppo in serie di Taylor è identicamente uguale alla funzione per ogni scelta di a.

Per contro vi sono molte funzioni analitiche in $x = a$ per cui $\delta=\delta(a)$ è finito. E' questo il terzo senso in cui la sviluppabilità in serie di Taylor è una proprietà locale. Ecco anche per questo caso alcuni esempi:

$$\text{(i)}\quad T_0\left[\frac{1}{1\pm x}\right] = 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + \ldots = \frac{1}{1\pm x} \quad [|x|<1]$$

$$(13_{bis})\qquad \text{(ii)}\quad T_0[\log(1\text{-}x)] = -x - \frac{x^2}{2} - \frac{x^3}{3} - \ldots = \log(1\text{-}x) \quad [|x|<1]$$

$$\text{(iii)}\quad T_0[(1+x)^{-1/2}] = 1 - \frac{x}{2} + \frac{3}{8}x^2 - \ldots = (1+x)^{-1/2} \quad [|x|<1]$$

Il carattere locale della sviluppabilità di una funzione in serie di Taylor non fu mai esplicitato in termini generali nel corso del XVIII secolo. Al contrario, l'identità (12), con $f^{(n)}(x) = \dfrac{d^n f}{dx^n}$, fu generalmente considerata come l'espressione di un "teorema" universale valido per ogni funzione e per ogni x e ξ, il cui contenuto consisteva nella determinazione della forma generale dello sviluppo in serie intera di una funzione qualsiasi. Tuttavia i matematici settecenteschi sapevano perfettamente che una funzione $f(x)$ poteva essere sviluppabile in differenti serie intere a seconda della funzione della variabile x che veniva scelta come variabile di riferimento e che questi diversi sviluppi potevano convergere o divergere su differenti intervalli riferiti alla variazione di x.[6] Un esempio classico è dato dalla funzione (13_{bis})(i):[7] se $|x|<1$ lo sviluppo $T_0[f(x)]$ è convergente alla funzione, mentre se $1\leq|x|\leq 2$ questo non è il caso; per avere uno sviluppo convergente si può allora passare allo sviluppo in serie intera secondo le potenze di $\dfrac{1}{2\pm x}$ e eventualmente sviluppare successivamente ogni termine in serie intera di x:

$$(14)\qquad \frac{1}{1\pm x} = \frac{1}{(2\pm x)-1} = \frac{1}{2\pm x} + \frac{1}{(2\pm x)^2} + \frac{1}{(2\pm x)^3} + \ldots$$
$$= \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \ldots\right] \mp \left[\frac{1}{4} + \frac{2}{8} + \frac{3}{16} + \ldots\right]x + \left[\frac{1}{8} + \frac{3}{16} + \frac{6}{32} + \ldots\right]x^2 \mp \ldots$$

---

[6]Cfr. il precedente paragrafo II.2-A.α..

[7]Cfr. Varignon (1715) su cui tornerò nel prossimo capitolo III.1..

Questo sviluppo non è tuttavia convergente se $2 \leq |x| \leq 3$; in questo caso è tuttavia sufficiente passare allo sviluppo in serie intera secondo le potenze di $\frac{1}{3 \pm x}$ procedendo come sopra. Allo stesso modo se $n-1 \leq |x| \leq n$ (n = 1, 2,...) si avrà uno sviluppo convergente passando alla serie intera secondo le potenze di $\frac{1}{n \pm x}$.

Per quanto il caso della funzione $\frac{1}{1 \pm x}$ non fu mai esplicitamente considerato (per quel che io sappia) nel corso del XVIII secolo in relazione al "teorema" di Taylor, è chiaro come esso mostri che esistono delle funzioni $f(x)$, anche molto semplici, per le quali, dato un qualsiasi sviluppo $T_a[f(x)]$, questo converge alla funzione solo su un sottointervallo proprio dell'insieme di definizione di questa. Se studiamo lo sviluppo di Taylor di una tale funzione nel punto $x = a$, considerato come preventivamente fissato, ci accorgiamo facilmente che le "caratteristiche polinomiali" che tale funzione possiede nell'intervallo $(a-\delta, a+\delta)$ non sono stabili sul suo insieme di definizione, vale a dire che le relazioni:

$$(15) \quad \begin{aligned} &\text{(i)} \quad f(x) = T_a[f(x)] \\ &\text{(ii)} \quad f(z+\xi) = f(z) + f'(z)\xi + \frac{f''(z)}{2!}\xi^2 + \dots \end{aligned}$$

non sono rispettivamente valide per ogni x e per ogni ξ. Così, se interpretiamo quello che i matematici settecenteschi chiamavano "teorema di Taylor" come l'affermazione che per ogni a (in cui la funzione sia di classe C^∞) - o almeno per un'opportuna scelta di a - la relazione (15)(i) esprime delle identità numeriche incondizionate relativamente al valore di x, e ugualmente la (15)(ii) per ogni z (in cui la funzione sia di classe C^∞) e relativamente ai valori di ξ, è oltremodo facile trovare dei controesempi per questo "teorema": talmente facile che non è assolutamente credibile che questi non fossero mai stati individuati come tali. Se nel precedente paragrafo II.2.κ. ho cercato di fornire un'interpretazione della nozione settecentesca di sviluppo che permetta di evitare questa difficoltà, qui vorrei indicare alcune delle ragioni matematiche che permettono a mio parere di intendere l'approccio matematico settecentesco come un approccio largamente legittimo, almeno relativamente all'orizzonte delle funzioni elementari.

Il mio punto è il seguente: anche qualora le relazioni (15) volessero venir effettivamente lette come l'espressione di un'identità numerica, ancora esse potrebbero venir introdotte da quantificazioni diverse da quelle indicate qui sopra, le quali potrebbero renderle molto più difficilmente vulnerabili all'attacco di controesempi. Uno dei modi per fare questo potrebbe essere a esempio quello di leggere il "teorema" di Taylor nei termini seguenti (z è qui considerato come un valore di x):[8]

$$
(16)\quad
\begin{array}{l}
\text{per ogni funzione } f(x) \text{ definita su I e di classe } C^{\infty} \text{ su } L \subseteq I \\[1em]
\text{(i)}\ \ \forall z(z\in I)\ \exists a(a\in L)\ \exists\delta(\delta>0) \\
\qquad\qquad [(z\in(a-\delta,\ a+\delta))\ \&\ (x\in(a-\delta,\ a+\delta) \Rightarrow\ f(x) = T_a[f(x)])] \\[1em]
\text{(ii)}\ \ \forall z(z\in L)\ \exists\delta(\delta>0)\left[(\xi\in(-\delta,\ \delta)) \Rightarrow \left({}_{\xi}\Delta f(z) = f'(z)\xi + \dfrac{f''(z)}{2!}\xi^2 + \ldots\right)\right]
\end{array}
$$

Così inteso questo "teorema" esprimerebbe la possibilità di trovare per ogni funzione f(x) e per ogni valore z di x (sottoposto alle condizioni indicate): i) uno sviluppo di f(x) in una serie intera della forma $\sum_{k=0}^{\infty} A_k (x-a)^k$ il quale converga a f(x) su un intervallo contenente z, ma non centrato su z; ii) uno sviluppo di f($z+\xi$) in una serie intera della forma $\sum_{k=0}^{\infty} A_k \xi^k$ il quale converga a f($z+\xi$) su un intervallo centrato sullo zero di raggio non nullo.[9]

La (16)(i) fornisce una formulazione del "teorema" di Taylor che lo rende assai prossimo al contenuto del corollario IV, prop. XII della prima versione del *De Quadratura* redatta da Newton nell'inverno 1691-92 e solo recentemente pubblicata da Whiteside.[10] Newton interpreta in realtà il suo risultato nei termini di un metodo di determinazione delle successive derivate[11] puntuali di una funzione soluzione di un'equazione differenziale qualsiasi, piuttosto che come una caratterizzazione dei coefficienti di uno sviluppo in serie intera per una funzione assegnata. Nella proposizione XII egli presenta infatti un procedimento atto alla costruzione di una soluzione in serie intera per un'equazione differenziale qualsiasi F(x, y, $\dot{y}$, $\ddot{y}$, $\dddot{y}$, &c.) = 0 e distingue a questo scopo fra tre casi: quello in cui x è presa come "molto piccola", quello in cui è presa come "molto grande" e quello in cui la sua grandezza é "media". La soluzione $y = y(x)$ è allora espressa per mezzo di una serie intera rispettivamente in x, $1/x$ e $(x-a)$ (in quest'ultimo caso a é scelto in modo che la differenza $(x-a)$ sia "molto piccola"[12]). Il corollario IV si

[8] Le limitazioni riferite alla variazione di z sono implicitamente assunte nel settecento come costitutive del concetto di funzione [cfr. il precedente par. II.2.v.].

[9] Si noti che se gli sviluppi fossero tali che l'intervallo di convergenza fosse, nel caso (i), centrato su z e, nel caso (ii),di raggio nullo, la (15)(i) e la (15)(ii) si ridurrebbero entrambe all'identità banale $f(z) = f(z) + 0 + 0 + \ldots$

[10] Cfr. Whiteside (1967-81), vol. VII, pp. 48-129. Tornerò su questo punto nel prossimo paragrafo III.2.a.δ..

[11] Per Newton si tratta in realtà dei rapporti fra le successive flussioni di $y = y(x)$ e le successive potenze della flussione prima di x.

[12] Il contesto ci conduce a interpretare i termini "molto piccola" e "molto grande" come "abbastanza piccola (ma finita)" e "abbastanza grande ma finita" piuttosto che come "infinitamente piccola" e "infinitamente grande".

riferisce al terzo caso e afferma che i successivi coefficienti della serie corrispondono alle derivate dei diversi ordini in $x = a$. E' chiaro che qui la scelta di a dipende dal valore di x che è stato fissato, mentre l'assunzione dell'esistenza di un δ finito adeguato costituisce una presupposizione su cui riposa lo stesso metodo di sviluppo in serie intera della funzione soluzione di un'equazione differenziale qualsiasi. La ricchezza del punto di vista di Newton è proprio nel rifiuto di considerare δ come infinitamente piccolo, ciò che ricondurrebbe lo sviluppo a una somma di infinitesimi di ordine crescente.[13] Questo rifiuto riposa a ben guardare su una presupposizione almeno tanto forte quanto le presupposizioni infinitesimaliste *à la* Leibniz: si tratta di assumere la stabilità delle "caratteristiche polinomiali" di una funzione qualsiasi f(x) su degli intervalli finiti, la cui determinazione precisa resta un problema *a posteriori*.

Il corollario IV differisce tuttavia in modo sostanziale dal corollario III, in cui Newton presenta un risultato analogo riferito al primo caso in cui x é "molto piccola" (la serie é intera relativamante a x). In esso il centro dello sviluppo in serie intera è infatti prefissato nel punto $x = 0$ e il "teorema" afferma quindi l'esistenza, per ogni funzione, di un δ finito tale che in $(-\delta, \delta)$ la funzione è sviluppabile in una serie intera identificabile con la serie di Taylor centrata sullo zero (la quale è usualmente detta "serie di Maclaurin").

Un tale risultato è ovviamente più forte rispetto a (16)(i) e si trova sotto questo punto di vista in una condizione simile a (16)(ii) di cui non è a ben guardare che un caso particolare (per $z = 0$). In questa seconda formulazione il centro dell'intervallo di stabilità è infatti identificato con il punto $x = z$, in modo che la quantificazione su z esprime la richiesta che, per ogni funzione e per ogni valore z di x, possa essere costruita una serie di Taylor centrata sul punto $x = z$, la quale converga a f(x) su un intervallo finito $(z-\delta, z+\delta)$ - al quale appartiene il punto $x = z+\xi$. Per quanto più forte rispetto a (16)(i) e quindi dotato di maggior contenuto logico,[14] (16)(ii) resta pur sempre assai protetto rispetto alla possibilità di trovare controesempi effettivi nell'universo delle funzioni elementari. Si tratterebbe infatti, a questo scopo, di trovare una funzione elementare f(x) di classe C^∞ su L tale che:

$$(17) \qquad \exists z(z \in L)\ \forall \xi \left({}_{\xi}\Delta f(z) \neq f'(z)\xi + \frac{f''(z)}{2!}\xi^2 + \ldots \right)$$

cosa che non appare certamente semplice.

Per confermare la mia affermazione considererò il caso della funzione

$$(18) \qquad E(x) = \begin{cases} \exp\left(-\dfrac{1}{x^2}\right) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

[13] Cfr. il prossimo cap. III.2..

[14] Si ricordi che il contenuto logico di una proposizione è misurato dall'ampiezza della classe dei suoi falsificatori potenziali (ovvero dei controesempi possibili).

generalmente indicata come un controesempio elementare al "teorema" di Taylor[15] e già considerata come tale da Cauchy.[16] Se è senz'altro vero che per ogni ξ lo sviluppo di Taylor di $E(0+\xi)$ converge alla costante 0, mentre non esiste alcun δ positivo tale che $[\xi \in (-\delta, \delta)] \Rightarrow [E(\xi) = 0]$, occorre osservare che né la funzione né le sue derivate di tutti gli ordini sono in senso stretto delle funzioni elementari, essendo definite proprio nel punto $x=0$, solo grazie a dei prolungamenti con continuità. D'altra parte, pur se si volesse allargare l'universo delle funzioni settecentesche anche a funzioni come $E(x)$ - ovvero si interpretasse la nozione settecentesca di funzione in modo da intendere $E(x)$ come *una* funzione definita in $x = 0$ - ancora si potrebbe sostenere che il "contenuto profondo" del "teorema" di Taylor, così come esso è inteso nel Settecento, non è contraddetto da controesempi costituiti da funzioni per cui le implicazioni (16)(i)-(ii) risultano falsificate dalla scelta di valori isolati di z. Per evitare questo genere di controesempi "banali" le proposizioni (16) potrebbero così essere corrette sostituendo alle quantificazioni "$\forall z$" delle quantificazioni indebolite del tipo: "$\forall z$ salvo che per valori particolari e isolati".[17]

II. 2-B. ε. *Serie di Bernoulli*

Riprendiamo l'identità (4) e pensiamo x e a come differenti valori di una stessa variabile t. Essendo per ipotesi la funzione $f(t)$ definita e differenziabile per $t \in (a-\delta, a+\delta)$, la sua derivata $f'(t)$ risulta integrabile fra a e x, per x

---

[15] Si noti che per dimostrare che tale funzione sia un controesempio a (16)(i) bisognerebbe dimostrare che per $x = 0$ (per altri valori di x la funzione non comporta difficoltà particolari per il teorema di Taylor comunque espresso) non esiste alcun valore di a che rende la serie numerica $T_a[E(0)]$ convergente a $E(0) = 0$.

[16] Cfr. il prossimo paragrafo III.6.*b*.β..

[17] La questione è in realtà qui più controversa di quanto possa sembrare a prima vista. Se è infatti vero che i matematici settecenteschi concepissero l'analisi come una scienza di quantità astratte e quindi essenzialmente *non determinate* [cfr. il precedente paragrafo II.2.v.], è anche vero che - a quanto io sappia - essi non abbiano mai introdotto esplicitamente la specificazione: "salvo che per valori isolati della variabile" se non in riferimento all'esistenza (ovvero al carattere finito [per questa interpretazione della nozione di esistenza, con particolare riferimento a Ampère (1806), cfr. Volkert (1989)]) delle funzioni assegnate e delle loro derivate di tutti gli ordini [è chiaro che, intesa in tal senso, una tale specificazione è contenuta nella richiesta che z vari rispettivamente su I e L]. Un esempio istruttivo è in questo senso quello di Lagrange che nella *Théorie* formula sì il "teorema" di Taylor badando a specificare che esso non si riferisce che a valori generici della variabile, e può quindi essere contraddetto da valori particolari e isolati,, ma sembra riferire questa specificazione alla possibilità stessa di costruire lo sviluppo, ovvero al carattere indefinitamente differenziabile delle funzioni involte. Non è difficile capire che la stessa specificazione assume nei due casi un significato del tutto diverso, riguardando in un senso la correttezza delle identità infinitarie intese come identità numeriche e nell'altro la rappresentatività delle forme finite manipolate analiticamente nel corso della costruzione dello sviluppo.

che appartiene a $(x\text{-}\delta,\ a+\delta)$. Essendo allora $\int_a^x f'(t)dt = f(x) - f(a)$, la (4) può essere scritta sotto la forma:

$$(19)\qquad \int_a^x f'(t)\, dt = f'(a)(x\text{-}a) + \frac{f''(a)}{2!}(x\text{-}a)^2 + \ldots \qquad [x \in (a\text{-}\delta,\ a+\delta)]$$

Allo stesso risultato si arriva calcolando l'integrale $\int_a^x f'(t)dt$ per mezzo di integrazioni per parti indefinitamente reiterate secondo le sostituzioni:

$$(20)\qquad \begin{array}{lll} u = f'(t)\ ; & u = f''(t)\ ; & u = f'''(t)\ ; \ \ldots \\ v = (t\text{-}x)\ ; & v = \dfrac{(t\text{-}x)^2}{2!}\ ; & v = \dfrac{(t\text{-}x)^3}{3!}\ ; \ldots \end{array}$$

presupponendo che $f(t)$ sia di classe C^∞ su $(a\text{-}\delta,\ a+\delta)$ e che il resto che permane dopo l'ennesima integrazione $R_n(x, a) = (-)^n \int_a^x (t\text{-}x)^n \dfrac{f^{(n+1)}(t)}{n!}dt$ tenda a zero per n che tende all'infinito.[18]

Se lo stesso integrale è calcolato secondo le sostituzioni:

$$(21)\qquad \begin{array}{lll} u = f'(t)\ ; & u = f''(t)\ ; & u = f'''(t)\ ; \ \ldots \\ v = (t\text{-}a)\ ; & v = \dfrac{(t\text{-}a)^2}{2!}\ ; & v = \dfrac{(t\text{-}a)^3}{3!}\ ; \ldots \end{array}$$

si ha, per le stesse presupposizioni:[19]

$$(22)\qquad \int_a^x f'(t)\, dt = f'(x)(x\text{-}a) - \frac{f''(x)}{2!}(x\text{-}a)^2 + \frac{f'''(x)}{3!}(x\text{-}a)^3 - \ldots \qquad [x \in (a\text{-}\delta,\ a+\delta)]$$

Ponendo in (19) e in (22) $a = 0$ si ha allora:

---

[18] Si noti che in tal modo si ha direttamente, tanto lo sviluppo $T_a[f(x)]$ di una funzione qualsiasi $f(x)$ che rispetti le condizioni date, che il resto di $P_{f,n}(x, a)$ espresso in forma integrale [cfr. la (6)].

[19] Ovviamente nell'espressione del resto in forma integrale bisognerà ora sostituire il binomio $(t\text{-}x)$ con il binomio $(t\text{-}a)$.

$$(23)\quad \begin{cases} \displaystyle\int_0^x f'(t)\,dt = f'(0)x + \frac{f''(0)}{2!}x^2 + \frac{f'''(0)}{3!}x^3 + \dots \\ \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad [x\in(-\delta,\delta)] \\ \displaystyle\int_0^x f'(t)\,dt = f'(x)x - \frac{f''(x)}{2!}x^2 + \frac{f'''(x)}{3!}x^3 - \dots \end{cases}$$

Ponendo quindi $f'(t) = g(t)$ si avranno i seguenti sviluppi:

$$(24)\quad \begin{aligned} &\text{(i)} && \int_a^x g(t)\,dt = g(a)(x-a) + \frac{g'(a)}{2!}(x-a)^2 + \frac{g''(a)}{3!}(x-a)^3 + \dots \\ & && \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad [x\in(a-\delta,\, a+\delta)] \\ &\text{(ii)} && \qquad\qquad\quad = g(x)(x-a) - \frac{g'(x)}{2!}(x-a)^2 + \frac{g''(x)}{3!}(x-a)^3 - \dots \\ &\text{(iii)} && \int_0^x g(t)\,dt = g(0)x + \frac{g'(0)}{2!}x^2 + \frac{g''(0)}{3!}x^3 + \dots \qquad [x\in(-\delta,\delta)] \\ &\text{(iv)} && \qquad\qquad\quad = g(x)x - \frac{g'(x)}{2!}x^2 + \frac{g''(x)}{3!}x^3 - \dots \end{aligned}$$

La (24)(iv) è conosciuta dagli storici come "teorema di Bernoulli"; essa fornisce infatti, specificandone le condizioni di convergenza alla funzione, lo sviluppo di Johann I Bernoulli per l'integrale di una funzione qualsiasi $g(t)$ (di classe C^∞ su $(-\delta, \delta)$).[20]

Le formule (24) possono essere tratte direttamente (e senza alcun ricorso allo sviluppo di Taylor) a partire dall'integrale $\int_a^x g(t)\,dt$, ancora tramite integrazioni per parti reiterate relative a sostituzioni opportune. In particolare, se l'integrale è considerato come indefinito e si pongono le sostituzioni:

$$(25)\quad \begin{aligned} &\text{(i)} && u = g(t)\,; && u = g'(t)\,; && u = g''(t)\,; && \dots \\ & && v = t\,; && v = \frac{1}{2!}t^2\,; && v = \frac{1}{3!}t^3\,; && \dots \\ &\text{(ii)} && u = g(t)\,; && u = g'(t)\,; && u = g''(t)\,; && \dots \\ & && v = t-x\,; && v = \frac{(t-x)^2}{2!}\,; && v = \frac{(t-x)^3}{3!}\,; && \dots\ [x \text{ costante}] \end{aligned}$$

---

[20] Cfr. il prossimo capitolo III.2.sez.*d*.

si traggono le identità:

$$\text{(i)} \quad \int g(t)\,dt = C_1 + g(t)t - \frac{g'(t)}{2!}t^2 + \ldots + (-)^{n-1}\frac{g^{(n-1)}(t)}{n!}t^n + (-)^n\int\frac{g^{(n)}(t)}{n!}t^n\,dt$$

$$(26) \quad \text{(ii)} \quad = C_2 + g(t)(t-x) - \frac{g'(t)}{2!}(t-x)^2 + \ldots +$$

$$+ (-)^{n-1}\frac{g^{(n-1)}(t)}{n!}(t-x)^n + (-)^n\int\frac{g^{(n)}(t)}{n!}(t-x)^n\,dt$$

che ponendo le dovute condizioni di differenziabilità e di convergenza a zero del resto si trasformano in sviluppi analoghi a (24)(iv) e (24)(ii).

Entrambi questi sviluppi sono d'altra parte equivalenti allo sviluppo in serie di Taylor. Per passare da quest'ultimo agli sviluppi corrispondenti a (26)(i) e (26)(ii) è sufficiente considerare la (12) e la (4) e porre rispettivamente in queste identità: $z=t$, $f(z)= \int g(t)dt$, $\xi = -t$ e $a = t$, $f(a)= \int g(t)dt$, $x =$ cost.. Poste queste sostituzioni avremo infatti:

$$\text{(i)} \quad \left(\int g(t)\,dt\right)_{t=0} = \int g(t)\,dt - g(t)t + \frac{g'(t)}{2!}t^2 - \ldots \qquad [t\in(-\delta,\,\delta)]$$

$$(27)$$

$$\text{(ii)} \quad f(x) = \int g(t)\,dt - g(t)(t-x) + \frac{g'(t)}{2!}(t-x)^2 - \ldots \qquad [t\in(x-\delta,\,x+\delta)]$$

da cui la (26)(i) e la (26)(ii) sono ovvie. Invertendo il procedimento è d'altra facile passare, per un'adeguata scelta delle costanti, dagli sviluppi corrispondenti a (26)(i) e (26)(ii) a (12) e (4).

I risultati che i matematici settecenteschi indicavano come "teorema di Taylor" e "teorema di Bernoulli" sono quindi strettamente equivalenti fra loro. Così se riconosciamo nella (24)(iv) il "teorema" enunciato per la prima da Johann I Bernoulli[21] nel 1694 abbiamo buoni argomenti per credere che l'usuale attribuzione a Taylor della scoperta dello sviluppo che porta il suo nome[22] sia del tutto ingiustificabile: non solo un risultato analogo può essere rintracciato in un manoscritto di Newton nel 1691-92, ma un'altro risultato del tutto equivalente fu pubblicamente presentato da Bernoulli fin dal 1694. Tuttavia un'analisi più attenta dei testi in questione mostra a mio parere

[21] Cfr. Johann I Bernoulli (1694).

[22] Il riferimento e à Taylor (1715).

delle profonde differenze interpretative che giustificano non solo una tale attribuzione,[23] ma anche la considerazione dei risultati in questione come una trasposizione oggettuale di strutture concettuali del tutto diverse fra loro. Affronterò esplicitamente la questione nel prossimo capitolo III.2.. Qui non si trattava che di fornire, secondo i canoni moderni e a compendio dei risultati presentati nei precedenti paragrafi e delle considerazioni cui essi hanno dato luogo, un prospetto delle connessioni esistenti fra gli sviluppi in serie di Taylor e quelli in serie di Bernoulli.

[23] Cfr. Feigenbaum (1985), p. 6.

Parte III

Analitica degli oggetti

A Laura e Francesco

III. 1.
LA QUESTIONE DELLA SERIE DI GRANDI (1696 - 1715)*

> In deinem Nichts hoff ich das All zu finden.
>
> W. Goethe, *Faust*, Parte II, (I, 5)
> [Faust a Mefistofele].

III. 1. α. *Premessa: il "paradosso" di Grandi e la "forza dell'infinito"*

Il terzo corollario della proposizione VII del *Quadratura circoli et Hyperbole* pubblicato a Pisa da Guido Grandi nel 1703 contiene un risultato che dovette certamente apparire come sorprendente anche al suo stesso autore:

> [...] eandem lineam infinities positam, & infinities subtractam relinquere sui medietatem.[1]

In realtà la conclusione di Grandi riguarda la serie costituita dal porre e dal levare indefinitamente un determinato segmento finito DV - identificato per mezzo di una complessa costruzione geometrica - serie che è riconosciuta uguale a un altro segmento finito VS, che è a sua volta uguale per costruzione alla metà dello stesso segmento DV. Esprimendo una tale conclusione in simboli si avrà allora:

$$(1)\ DV - DV + DV - DV + \&c. = VS = \frac{1}{2}DV$$

Grandi non specifica se un tale risultato debba essere considerato come un risultato generale, la cui validità non dipende dalla natura particolare del segmento DV, o se esso debba al contrario pensarsi come intimamente connesso a questa stessa natura e quindi non estendibile a ogni quantità finita. Egli si limita la notare che una conclusione analoga avrebbe potuto essere tratta anche dalla precedente proposizione III,[2] la quale fa tuttavia riferi-

---

*Molto del materiale discusso nel presente capitolo mi è stato segnalato da Livia Giaccardi che ringrazio quindi vivamente. Molte delle tesi che sosterrò nel seguito sono d'altra parte maturate nel corso di numerose discussioni con Giulio Giorello di cui si confronti, sull'argomento in questione, Giorello (1985b) e (1985a), pp. 71-72, 206-7 e 216-17.

[1]Cfr. Grandi (1703), p. 29 [cfr. la prossima nota (3)].

[2]Cfr. *ivi*, pp. 5-6. [cfr. la prossima nota (3)].

mento a una costruzione che non differisce in termini essenziali da quella utilizzata nella proposizione VII.

Del tutto differente è il caso della seconda edizione del trattato, pubblicata ancora a Pisa sette anni più tardi.[3] Benché questa non presenti infatti alcuna novità né nella dimostrazione, né nell'enunciazione della proposizione VII e dei suoi corollari, Grandi crede opportuno aggiungere, a sostegno e a commento del corollario III, una nuova giustificazione e un lungo scolio, dai quali appare assolutamente evidente la fiducia nella generale estendibilità del risultato (1). Ecco il testo della prima di queste due addizioni:

> Sed inquies: aggregatum ex infinitis differentiis infinitarum ipsi DV æqualium, sive continuè, sive alternè sumptarum, est demum summa ex infinitis nullitatibus, seu 0, quomodo ergo quantitatem notabilem aggreget? At repono, eam Infiniti vim agnoscendam, ut etiam quod per se nullum est multiplicando, in aliquid commutet, sicuti finitam magnitudinè dividendo, in nullam degenerare cogit; unde per infinitam Dei Creatoris potentiam omnia ex nihlo facta, omniaque in nihilum redigi posse: neque adeò absurdum esse, quantitatem aliquam, ut ita dicam, creari per infinitam vel multiplicationem, vel additionem ipsius nihili, aut quodvis quantum infinita divisione, aut subductione in nihilum redigit.[4]

Grandi assegna così alla "forza dell'infinito" la capacità di trarre da una somma di zeri infinitamente protratta[5] una quantità finita. Proprio la possibilità di accedere a questa forza caratterizza d'altra parte la potenza creatrice di Dio di cui la (1) sembra allora fornire una sorta di modello matematico. Benché una tale giustificazione sia così esplicitamente concettuale, essa non sembra intervenire nell'argomento matematico di Grandi che *a posteriori*, per confermare un risultato tratto indipendentemente da essa,[6] mostrandone, al di là delle apparenze immediate, la compatibilità con intuizioni metafisiche più profonde. Anzi, proprio lo scopo di trovare un accordo fra la conclusione di una dimostrazione geometrica reputata irrefutabile - grazie al suo (presunto) carattere oggettivo - e un'intuizione, che essa pare a prima vista contraddire, sembra guidare la penna di Grandi nella redazione di entrambe le addizioni. Non è d'altra parte credibile che Grandi non avesse osservato che la stessa identità infinitaria $0+0+0+0+\&c. = a$ (con a una quantità finita) può essere negata secondo una dimostrazione del tutto analoga a

[3]Cfr. Grandi (1710a). Le numerose aggiunte rispetto al testo del 1703 sono meticolosamente indicate da Grandi [cfr. *ivi*, p. XX]. Ciò permette di limitare i riferimenti bibliografici alla sola seconda edizione alla cui paginazione faccio d'altra parte riferimento anche in relazione al testo della prima.

[4]Cfr. *ivi*, p. 29.

[5]Per capire il riferimento di Grandi basta porre la (1) sotto la forma:

$$(DV\text{-}DV) + (DV\text{-}DV) + (DV\text{-}DV) + \&c. = 0 + 0 + 0 + \&c. = \frac{1}{2}DV$$

La legittimità di questo passaggio è qui evidentemente assunta come scontata.

[6]Nello scolio Grandi presenta un'ulteriore giustificazione *a posteriori* fondata su una dubbia analogia [cfr. *ivi*, p. 30]. Egli porta l'esempio di un padre che morendo lascia ai suoi due figli un prezioso gioiello impedendone per testamento tanto la vendita che la cessione. Essendo improponibile una divisione del bene (che perderebbe così il suo valore) i fratelli decidono di custodirlo alternativamente un giorno ciascuno giungendo così, attraverso un porre e levare indefinitamente protratto, a un'equa distribuzione dell'eredità.

quella che lo conduce a (1),[7] qualora gli zeri successivi non siano il risultato del porre e del levare infinite volte la stessa quantità. La creazione dal nulla richiede quindi il possesso preventivo di un'entità quantificabile la quale deve essere posta e levata per produrre la metà di se stessa. Se d'altra parte la (1) venisse incondizionatamente trasformata in nell'identità $0+0+0+0+\&c. = a$, la quale fosse assunta come valida del tutto indipendentemente dalla procedura che l'ha prodotta, verrebbe meno, non solo la neutralità dello zero rispetto all'addizione infinite volte reiterata, ma anche l'univocità dei risultati delle stesse operazioni aritmetiche applicate a contesti infinitari. Come sapere infatti se una infinita somma di zeri, che non fossero ciascuno il risultato del porre e del levare della stessa quantità, eguagli la quantità a, piuttosto che un'altra quantità b? Tale incertezza si riproporrebbe ogni volta che si avesse a che fare tanto con somme di zeri di cui non si conosca la provenienza, o che si considerino come l'espressione di un'assenza originaria di quantità, che con somme di zeri prodotti ciascuno dal porre e dal levare di una stessa quantità che cambi di volta in volta. Come stabilire infatti quale quantità dovrebbe venir scelta come risultato di una somma quale $A_1-A_1 + A_2-A_2 + A_3-A_3 + \&c.$? E' così evidente che qualsiasi argomento fondato semplicemente sulla "forza dell'infinito" non possa che fornire una giustificazione *a posteriori* di un risultato tratto per altra via. Spetta alla dimostrazione *a priori* di stabilire se l'infinita somma di zeri in questione sia o no tale da produrre una quantità finita e eventualmente di determinarla.

Il carattere *a posteriori* di un tale argomento concettuale é d'altra parte esplicitamente sottolineato dallo stesso Grandi nella *Risposta Apologetica*[8] che questi contrappose nel 1712 a una lettera pubblica di Alessandro Marchetti,[9] che lo aveva esplicitamente tacciato di sostenere manifeste assurdità. Il seguente passaggio è a questo proposito sintomatico:

> [...] Questo[10] è tutto il progresso, che mi ha condotto a questo stupendo paradosso:[11] in cui non vedendo io qual principio abbia supposto, che non sia prima ò da me, ò da altri dimostrato; nè sapendo avvertire quale illazione men che legittima sia stata da' sovraposti principij cavata; non so come possa il dottissimo Avversario avere per non ancora ben dimostrata quella forza dell'Infinito, che in questo riscontro spiccar si vede.[12] Onde è pregato da me ben vivamente, per l'amore, che debbono i Matematici portare alla verità, e per lo zelo, che dobbiamo avere,

---

[7]Cfr. il prossimo paragrafo III.1.ε..

[8]Cfr. Grandi (1712).

[9]Cfr. Marchetti (1711) [cfr. la recensione sugli *Acta Eruditorum*, 1713, pp. 26-32.

[10]Grandi si riferisce qui alla dimostrazione geometrica del suo corollario che egli riformula in termini sostanzialmente immutati rispetto alla versione originale del 1703.

[11]Il termine "paradosso" era stato introdotto da Grandi per riferirsi al suo risultato fin dal 1710. Ecco come egli si esprime nello scolio che ne fornisce un commento [cfr. Grandi (1710a), pp. 29-30:

> Quò ad primum, observo plurimos Mathematicos non vulgares, qui libellum nostrum legere, expendere, ac comprobare dignati sunt, Corollarii hujus novitate perculsos, atque in summam tam inaudite, inexpectateque veritatis admirationem adductos fuisse, cùm nihil huic stupendo paradoxo simile in tota Geometria se uspiam legisse testarentur.

[12]Lungi dal richiamarsi alla "forza dell'infinito" per dimostrare il suo "paradosso", Grandi vede in esso una manifestazione di questa, che viene così constata *a posteriori*.

> che nelle nostre scienze di sua natura certissime, ed evidentissime, non s'insinui verun'ombra di dubbio, non piglino piede gli errori in esse commessi per nostro sbaglio, a voler particolarmente insegnarmi qual sia il passo falso, che mi abbia fatto dalla vera strada in ciò traviare, e nel preteso gravissimo sbaglio fattomi inciampare; dandomi cortesemente la mano per rimettermi nella buona carriera.[13]

Un tale punto di vista non elimina tuttavia il problema della conferma o, che dir si voglia, della legittimazione *a posteriori* del "paradosso". A questo scopo Grandi introduce nella *Risposta* un argomento nuovo e essenzialmente differente da quelli cui egli fatto aveva ricorso due anni prima. Al generico richiamo alla "forza dell'infinito", la quale permetterebbe la creazione dal nulla, egli affianca ora un più articolato riferimento alle ormai codificate dottrine infinitesimaliste[14] - le quali, come vedremo, restavano in quanto tali estranee alla dimostrazione del 1703 - potendo così citare a sostegno del proprio risultato numerose autorità matematiche, quali quelle di Wallis o Barrow, Newton o Leibniz, Bernoulli o Hermann.[15]

> E' vero - scrive Grandi -, che alcuni di questi Autori per *nulla* intendono un *nulla assoluto*, ed altri un *nulla sol rispettivo*, cioè una parte infinitesima, che aggiunta, ò levata ad una data grandezza, non la fa ricrescere, nè scemare: ma finalmente al mio proposito tanto serve l'una, che l'altra ipotesi, e sempre torna il medesimo conto per ogni verso, e da qualunque parti si riguardi, mostrerà sempre la medesima verità, fondandosi sopra di questo principio: *Che l'Infinito al finito sta come l'unità allo zero* [...] così moltiplicando lo zero infinite volte, conviene, che lo stesso risulti, che pigliando il finito una volta sola: onde il nulla infinite volte replicato ci darà qualche quantità: il che doveasi dimostrare.[16]

Grandi sfrutta così l'ambiguità della concettualizzazione infinitesimalista che, se da una parte assume la distinzione fra l'infinitamente piccolo e lo zero, non può affiancare a essa un'analoga distinzione fra il reciproco di una quantità infinitamente piccola e un'entità diversa, corrispettiva allo zero. Il coacervo di argomenti in cui egli si addentra è tipico di questa difficoltà[17] a

---

[13]Cfr. Grandi (1712), p. 260.

[14]Cfr. *ivi*, parte II, cap. IV, pp. 201-213.

[15]Cfr. *ivi*, pp. 202-03.

[16]Cfr. *ivi*, pp. 203-4.

[17]Grandi discute in primo luogo l'obiezione secondo la quale l'ipotesi $\infty : a = 1 : 0$ (dove a è una quantità finita qualsiasi), congiunta alla legittimità del passaggio da tale proporzione all'identità $\infty \cdot 0 = a$, conduce alla conclusione (certamente assurda) che "tutte le grandezze finite sieno fra di loro uguali" [cfr. *ivi*, p. 204].

> [...] conviene avvertire all'equivoco - egli scrive [cfr. *ivi*, p. 204 e 206] -, il quale si nasconde in ciascuno di questi tre termini, *Infinito*, *Unità*, e *Zero*. Imperocchè, non pigliandosi questi nel medesimo senso in tutte le proposizioni dell'argomento, si rende questo fallace e sofistico.[...]
>
> Quando adunque si dice da' Geometri, che generalmente l'Infinito al finito sta come l'unità allo zero [...]. Conviene intendere questa proposizione in in senso accomodo, avendo il dovuto riguardo a' termini, che si paragonano; di modo che, dopo d'aver riferito una certa grandezza infinita ad una data quantità finita, come sarebbe ad un palmo, e considerata la proporzione loro essere, come quella, che ha una certa grandezza computata come un'*Unità*, ad una parte di essa minore di qualunque assegnabile, e però nulla, la quale non potrà esprimersi con veruna frazione, ò minuzia, ma solamente con lo zero: se vorremo poscia riferire nella stessa ragione

cui la pratica matematica dell'epoca non sapeva rispondere che attraverso una capacità non codificabile di distinguere volta a volta i contesti di applicabilità di certi principi e il senso da assegnare a questi. Se questa distinzione era per sua stessa natura tale da non poter dipendere da alcun criterio di carattere generale, essa rispondeva all'esigenza generica di evitare "assurdità manifeste" e di scegliere nei vari casi l'alternativa capace di condurre alla "soluzione corretta".[18] Questa esigenza, apparentemente vuota, poteva in realtà funzionare da guida a condizione di disporre di parametri esterni per valutare, almeno in certe applicazioni considerabili come paradigmatiche, l'assurdità delle ipotesi e la correttezza delle conclusioni. Il principio di induzione e l'intuizione del matematico creativo poteva poi trasferire la scelte compiute in contesti diversi. Ora, la questione sollevata da Grandi si poneva sotto questo punto di vista in termini assai delicati. Ciò che era in gioco era proprio un parametro di assurdità. Le ipotesi infinitesimaliste potevano o no essere intese in modo da permettere di concludere che una certa somma "infinita" di "zeri" eguagliasse una "quantità finita"? Molto probabilmente né Grandi né altri avrebbero con tanta convinzione risposto positivamente se la stessa conclusione non sembrasse venir comprovata da un argomento di genere diverso, dipendente dal solo principio geometrico di continuità.[19] Il problema era quindi difficile: accettare la prova geometrica e piegare quindi la concettualizzazione infinitesimalista a rendersi compatibile

---

> ancora un'infinito ad un'altro finito maggiore, per esempio ad un braccio, che contiene quattro palmi, bisognerà prendere, non già il medesimo infinito di prima, ma un'altro quadruplo di esso, a volere che *in tutto rigore* si mantenga la proporzione; ò pure se vogliamo riferire lo stesso infinito di prima ad un braccio, converrà *in rigore* cangiar la supposizione dell'unità, e pigliarne un'altra, ch'esser dovrebbe la quarta volta appunto della prima [...].

Questo non è tuttavia tutto. Se i rapporti ∞/a e ∞/b $(a \neq b)$ sono infatti diversi fra loro, essi non lo sono che per una quantità "infinitamente piccola in paragone della ragione *infinita*",

> onde si può ancora senza scrupolo ammettere, che indifferentemente sia vero essere la ragione dell'Infinito al finito la medesima, che dell'unità allo zero, senza più minutamente distinguere una unità da un'altra, ed un'infinito da un'altro [cfr. *ivi*, pp. 207-08].

E da ciò non si dovrà concludere se non che due diverse quantità finite sono uguali "in paragone dell'*infinito*".

Per quel che riguarda poi l'obiezione possibile di incommensurabilità dell'infinito al finito, Grandi si limita a osservare che lo scopo della definizione euclidea di commensurabilità [cfr. *Elementi*, lib. V, def. 4], per cui due grandezze hanno fra di loro un rapporto solo se rispettano il principio di Archimede, "fu solamente l'escludere dal potersi paragonare insieme le quantità di genere totalmente diverso" [cfr. *ivi*, p. 209], e che se anche Archimede "avesse inteso d'una moltiplicazione da farsi solo con numeri *finiti* e non con *infiniti* potrebbe allora rispondersi, che la detta definizione si riferisca solo alle proporzioni *assegnabili*" [cfr. *ivi*, pp. 210-11].

> Che poi non sia omogeneo il nulla coll'unità - continua Grandi [cfr. *ivi*, pp. 211-2] -, per essere questa una cosa positiva, e quella una mera negazione di ogni essere, non è ragione convincente [...]. [...] e per far vedere, che sufficientemente sono omogenei l'unità, e lo zero, per potersi insieme paragonare in proporzione *geometrica*, basta osservare, che secondo tutti i Geometri si fa entrare lo zero insieme con tutti i numeri nella stessa proporzione *aritmetica*, come 3. 2. 1. O. -1. -2. -3., &c..

[18] Cfr. le stesse citazioni di Grandi contenute nella precedente nota (17).

[19] Cfr. *sotto*.

con la sua conclusione o rigettare questa come assurda e cercare quindi l'errore in una prova apparentemente inconfutabile?

La polemica Grandi-Marchetti[20] è stata liquidata in due righe da G. Loria:

> Non ci arrestiamo sulla polemica che egli [Grandi] ebbe con il suo collega Alessandro Marchetti [...], che non presenta ormai alcun interesse.[21]

A dispetto di questo giudizio davvero lapidario, la vicenda ha così a mio parere un carattere esemplare: da una parte le ragioni intuitive fondate sulla stessa concettualizzazione dello zero come espressione dell'assenza di quantità,[22] che conducono a rigettare le conclusioni di una dimostrazione apparentemente inattaccabile, dall'altra la ricerca spesso affannosa di una legittimazione *a posteriori* del risultato di questa dimostrazione, a cui la certezza della prova assegna una sorta di indubitabilità *a priori*. Se così chiunque si fermasse oggi alla superficie del dibattito - non prendendo in esame che le posizioni sostenute, indipendentemente dalle loro ragioni - non potrebbe che sentenziare, proprio come Marchetti, l'assurdità della posizione di Grandi, chi cercasse di addentrarsi nel vivo della discussione sarebbe certamente condotto a un giudizio più cauto, il quale dovrebbe da un lato sottolineare la "modernità" dell'approccio metodologico di quest'ultimo e cercare dall'altro le ragioni della fiducia concessa a una dimostrazione che oggi verrebbe certamente rigettata come fallace. Proprio una tale ricerca costituisce l'obiettivo del presente capitolo. Le conclusioni a cui essa condurrà giustificheranno d'altra parte l'inserimento di questo nel piano della mia dissertazione: è infatti mio parere che dietro la posizione di Grandi - che, come vedremo, sarà anche quella di Leibniz - vi sia in ultima istanza l'assegnazione di una priorità a argomenti di natura squisitamente geometrica, rispetto a considerazioni di carattere più propriamente algebrico. Sarà proprio l'inversione di questa gerarchia a segnare una delle radici più evidenti della vicenda storica che nella presente dissertazione è mio obiettivo ricostruire.

III. 1. β. *Un lemma per la dimostrazione di Grandi*

La dimostrazione della proposizione VII del *Quadratura circuli et hyperbolæ* utilizza come lemma essenziale la proposizione I dello stesso trattato:

> PROP. I Si ratio magnitudinum AB, BC continuetur in infinitum ad minores terminos CD, DE, EF &c. sitque magnitudo AI tertia proportionalis post differentiam primæ AB à secunda BC, & ipsam primam magnitudinem AB,

---

[20] Marchetti controbatterà alla risposta di Grandi l'anno successivo con una nuova lettera pubblica [cfr. Marchetti (1713)], di cui si confronti la recensione negli *Acta Eruditorum*, 1713, pp. 518-9.

[21] Cfr. Loria (1929-33), p. 652.

[22] A proposito del concetto di zero e del suo carattere non numerico nella matematica pre-moderna cfr. Giorello (1981).

Dico ipsam AI æquari aggregato omnium simul infinitorum terminorum AB, BC, CD, DE, &c.[23]

Traducendo un tale enunciato in termini analitici possiamo formulare il lemma di Grandi nei termini seguenti:

Lemma I: Se $\{A_k\}_0^{\infty}$ è una successione decrescente di termini positivi i cui termini sono fra loro in proporzione continua [$A_0 : A_1 = A_1 : A_2 = A_2 : A_3 =$ &c.] e T é la terza proporzionale fra (A_0-A_1) e A_0 [$(A_0-A_1) : A_0 = A_0 : T$], allora:

$$(2) \qquad T = \sum_{k=0}^{\infty} A_k$$

Essendo in generale, per le ipotesi assunte: $A_k = b^{-k+1}a^k$ [$0<a<b$], il lemma equivale all'enunciazione dell'identità:

$$(3) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} b^{-k+1}a^k = \frac{b^2}{b-a} \qquad [0 < a < b]$$

Ponendo $a = b/x$ si avrà $A_k = \dfrac{b}{x^k}$ [$b>0$, $x>1$] e quindi:

$$(4) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b}{x^k} = \frac{bx}{x-1} \qquad [b > 0,\ x > 1]$$

Se accettiamo l'ipotesi che Grandi intenda implicitamente riferirsi a successioni, i cui termini decrescono in valore assoluto, le condizioni di validità delle identità (2), (3) e (4) diventano rispettivamente: $|A_k| < |A_{k+1}|$; $|a| < |b|$; $|x| < 1$. Non rispettando queste condizioni e ponendo b = DV e $x = -1$, la (4) si trasforma nella (1) che, per b = DV = 1, assume la forma classica della cosiddetta "serie di Grandi":

$$(5) \qquad 1 - 1 + 1 - 1 + 1 - \&c. = \frac{1}{2}$$

la quale viene così tratta per mezzo di una sostituzione non concessa nella formula che esprime lo sviluppo in serie intera relativamente a $\dfrac{1}{x}$ di $\dfrac{x}{x-1}$. E' chiaro che la (5) deriva anche direttamente dalla (3) ponendo: $b = 1$ e $a = -x$ o $a = x$, oppure: $b = 1/x$ e $a = -1/x^2$ o $a = 1/x^2$, e operando negli sviluppi rispettivamente le sostituzioni non concesse: $x = 1$; $x = -1$; $x = 1$; $x = -1$. In tal

[23]Cfr. Grandi (1710a), p. 1.

modo la "serie di Grandi" è tratta secondo una sostituzione non concessa a partire dagli sviluppi in serie intera relativamente a x e a $1/x$ di $\frac{1}{1+x}$ e $\pm\frac{1}{1-x}$. Benché questa sia la procedura con cui la (5) è generalmente tratta nella maggioranza delle ricostruzione storiche[24] (o nei testi matematici in cui essa è indicata come controesempio alla validità di quest'ultimi sviluppi per $|x| = 1$), essa non corrisponde al percorso argomentativo di Grandi, che non solo sembra considerare la (5) come un caso particolare della (1), ma perviene a quest'ultima identità grazie a un'argomentazione essenzialmente diversa da quella indicata qui sopra. L'enunciato della proposizione I è d'altra parte tutt'altro che ambiguo, sottoponendo la (2) a una condizione esplicita di decrescenza della successione $\{A_k\}_0^\infty$. Per evitare questa condizione occorre quindi giustificare in termini indipendenti la possibilità di un'estensione della (4) al di fuori dei limiti di validità che essa riceve in quanto conseguenza della (2). E' proprio su questo punto che verte, come vedremo, la dimostrazione di Grandi che, lungi dal passare direttamente dalla (2) alla (5), utilizza la (2) per trarre un risultato geometrico da cui la (1) risulta per mezzo di un passaggio al limite garantito da un applicazione dal principio di continuità inteso in termini geometrici. E' così la (1) che giustifica la (5), ovvero, più in generale, l'estensione della (2) al caso $a = -b$ ($b>0$).

III. 1. γ. *Due dimostrazioni del lemma: Torricelli e Grandi, 1701*

Prima di affrontare il prosieguo dell'argomento di Grandi è tuttavia opportuno soffermarsi sulla dimostrazione della proposizione I. Se quest'ultima non poteva infatti considerarsi nel 1703 come l'enunciato di un risultato nuovo e non faceva anzi che riformulare una conclusione già nota e nei confronti della quale ormai da tempo i matematici avevano cessato di nutrire dubbi di sorta, restava ancora aperto il problema di scegliere, fra le differenti dimostrazioni possibili, quella più opportuna a garantirne una adeguata collocazione entro l'edificio della conoscenza matematica. Se per fornirne una prova formale bastava infatti - invertendo il percorso euristico - sviluppare la frazione $\frac{b^2}{b-a}$ o secondo il metodo di Mercator o per mezzo di una semplice applicazione del "teorema" del binomio,[25] era davvero sufficiente richiamarsi a simili procedure, sorte da un'estensione delle leggi algebriche elementari, per giustificare un'identità che doveva potersi riferire ai valori di certe grandezze determinate e fornire quindi la prova della sussistenza di numerose equivalenze geometriche? Se a una possibile risposta negativa aggiungiamo la preoccupazione di fornire una dimostrazione che fosse nel contempo la più generale e la più elementare, comprendiamo come all'inizio del XVIII

[24]Cfr. a esempio: Cantor (1880-1908), vol. 3, p. 365, Loria (1929-33), p. 656, Boyer (1968), pp. 477-78, Kline (1972), pp. 445-46, Kitcher (1984), p. 242.
[25]Cfr. il precedente paragrafo II.2.κ..

secolo la questione potesse rimanere ancora largamente controversa. Le stesse parole con cui Grandi presenta la propria dimostrazione del 1703 sono a questo proposito significative:

> Post Archimedem in postrema Parabolæ quadraturam id specialiter de ratione quadrupla ostendentem, Primus, quod sciam, id generaliter notavit, ac demonstravit Torricellius *de dimens. Parab. lemm.* 27. mox Cavallerius *in schol. ejusd. lemm.* hinc Gregorius à Sancto Vincentio, Guarinus, De Chales, aliique variis methodis id comprobantes, quod & nos aliàs fecimus *in Hugenianis cap.* 10, *n.* 3. ut superfluum videri possit hìc quidquam addere, nisi gratam nonnullis futuram sperarem novam, hanc physicam rationem, idipsum confirmandi, quam, ob methodi varietatem adjungere non gravabor.[26]

Fra le numerose dimostrazioni cui Grandi si riferisce in questo passo, due almeno meritano a me pare un'attenzione particolare. Se quella di Torricelli resta infatti paradigmatica per il suo carattere squisitamente geometrico, quella di cui lo stesso Grandi si era servito due anni prima, nel corso della "dimostrazione geometrica" del "teorema di Huygens" si accumuna, per il suo carattere puramente analitico, alla semplice giustificazione della (3) come caso particolare dello sviluppo di Mercator o di quello binomiale.[27] Queste due strategie argomentative sono così sintomatiche di due approcci apertamente contrapposti: mentre Torricelli ragiona infatti su un insieme infinito di segmenti individuati per mezzo di una legge geometrica di costruzione indefinitamente reiterabile e conclude asserendo la scomponibilità di un segmento dato in infinite parti, ognuna delle quali risulta per costruzione uguale a un diverso segmento dell'insieme di partenza, Grandi prospetta una procedura formale che trasforma un'equivalenza infinitaria, arbitrariamente assunta e considerata evidentemente come identica, nell'identità (4). Se queste due impostazioni si giustificano certamente in base alla scelta di differenti modalità rappresentative per quantità assunte come qualsiasi, quello che qui è forse più importante sottolineare è che tale diversità, per così dire originaria, non conduce in questo caso a quell'inversione nella struttura stessa della dimostrazione che é invece tipica dei procedimenti di sommazione che sfruttano gli usuali metodi analitici di sviluppo, i quali *prima* esibiscono il risultato (dedotto in via puramente formale) e *poi* ne cercano le condizione di validità.[28] Nel primo caso le condizioni di decrescenza

---

[26] Cfr. Grandi (1710a), pp. 1-2.

[27] Cfr. rispettivamente: Torricelli (1644), *De dimensione parabolæ*, lemmi XXIV - XXVII [cfr. anche Torricelli (1919-44), vol. I,1, pp. 147-50] e Grandi (1701).

[28] Il problema costituito dalla ricerca delle ragioni intrinseche ai metodi di sviluppo in serie intera che fanno di questi dei procedimenti formali che *solo sotto alcune condizioni* danno luogo a identità riferite ai valori delle quantità involte (ovvero delle ragioni che limitano, ma non impediscono, l'estendibilità delle leggi algebriche a contesti infinitari) non fu mai affrontato, a mia conoscenza, nel corso del XVII e XVIII secolo. La difficoltà di tale problema convinse evidentemente i matematici a limitare i propri sforzi alla determinazione *a posteriori* delle condizioni di convergenza o divergenza delle serie costruite per mezzo di tali metodi [non sono d'altra parte per nulla persuaso che una tale questione possa a tutt'oggi considerarsi come completamente risolta]. All'agilità e la generalità conquistate per mezzo di un impiego universale dei metodi di sviluppo, fa così riscontro una perdita di capacità esplicativa.

della successione assegnata e di positività dei suoi termini e nel secondo quella di decrescenza in valore assoluto dei termini della serie che compone il primo membro dell'equivalenza di partenza si presentano infatti come condizioni di validità dello stesso argomento dimostrativo che presenterebbe altrimenti un evidente *non sequitur*. Sotto questo aspetto la dimostrazione di Grandi si differenzia quindi in modo essenziale da una giustificazione della (3) fondata sul ricorso a un metodo *standard* di sviluppo.[29]

Consideriamo in primo luogo la dimostrazione di Grandi del 1701. Essa consiste semplicemente nel porre l'equazione infinitaria:

$$(6) \qquad A_0x - A_0 + A_0 - \frac{A_0}{x} + \frac{A_0}{x} - \frac{A_0}{x^2} + \frac{A_0}{x^2} - \&c. = A_0x$$

e nel dividere entrambi i membri per x-1. Sommando fra loro due a due i termini che compongono il primo membro, è facile trarre:

$$(7) \quad \text{i)} \quad \frac{A_0x - A_0}{x-1} + \frac{A_0 - \frac{A_0}{x}}{x-1} + \frac{\frac{A_0}{x} - \frac{A_0}{x^2}}{x-1} + \&c. = \frac{A_0x}{x-1}$$

ovvero:

$$\text{ii)} \quad A_0 + \frac{A_0}{x} + \frac{A_0}{x^2} + \&c. = \frac{A_0x}{x-1}$$

che, come è chiaro, corrisponde alla (4).

Il commento di questa dimostrazione sarà certamente più agevole se la poniamo a confronto con la dimostrazione geometrica di Torricelli. Questa richiede il ricorso a tre lemmi ausiliari:

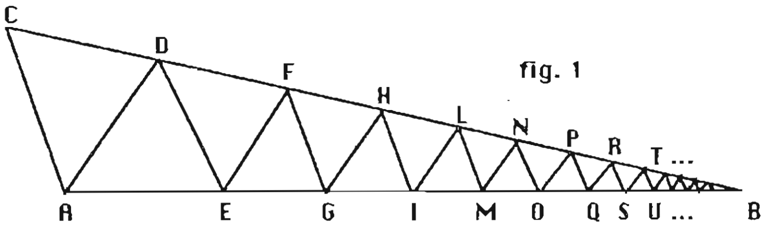
Lemma II:[30] Data la figura 1, se i segmenti AC, ED, GF, &c. sono paralleli fra loro, così come i segmenti e AD, EF, GH, &c., questi segmenti sono anche in proporzione continua fra loro e si avrà quindi:

(8) i) AC : ED = ED : GF = GF : IH = &c.

ii) AD : EF = EF : GH = GH : IL = &c.

[29] Si noti che rispetto a queste giustificazioni la dimostrazione di Grandi ha anche il vantaggio di non richiedere l'ausilio di nessun risultato generale e di poter quindi essere attestata *prima* di ogni dimostrazione di un tale risultato

[30] Si tratta del lemma XXIV di Torricelli [cfr. la precedente nota (27)].



Lemma III:[31] Se il flessilineo CADEFGH&c. (fig. 1) è continuato all'infinito, allora i suoi lati AC, ED, GF, &c. esauriranno i termini della successione geometrica[32] i cui primi termini siano dati dai segmenti AC e ED e non vi sarà alcun lato del flessilineo parallelo a AC che non sia un termine di questa progressione.

Lemma IV:[33] Per trovare il segmento somma dei termini di una successione geometrica decrescente di cui siano dati i primi due termini AC e ED, basta costruire la figura 2, in cui i segmenti AD, PF, QH, &c. sono fra loro paralleli così come i segmenti WC, ED, GF, &c.. WC sarà allora il segmento cercato.

E' evidente come i lemmi III e IV seguano rispettivamente dai lemmi II e III. E' quindi necessario dimostrare innanzitutto il lemma II.

A questo scopo è sufficiente notare che nella figura 1 i triangoli ABC, EBD, GBF, &c. sono tutti simili fra loro, così come lo sono i triangoli ABD, EBF, GBH, &c. Ciò permette di scrivere le proporzioni: i) AC : ED = AB : EB; ii) AB : EB = DB : FB; iii) DB : FB = ED : GF. Componendo (i) e (ii) si avrà poi, AC : ED = DB : FB e, componendo quest'ultima proporzione con (iii): AC : ED = ED : GF. Reiterando un simile procedimento si avrà allora la (8)(i), mentre la (8)(ii) potrà essere tratta del tutto analogamente.

[31] Si tratta del lemma XXV di Torricelli [cfr. la precedente nota (27)].
[32] Ricordiamo che successione è detta "geometrica" quando il suo termine generale è riconducibile alla forma Aa^k (con A e a costanti relativamente a k). Data questa definizione è banale dimostrare che una successione è geometrica se e solo se i suoi termini sono in proporzione continua. Il termine "serie geometrica" è invece usualmente utilizzato per riferirsi a serie il cui termine generale sia riconducibile alla forma a^k (dove a è una costante relativamente a k). Mentre la successione dei termini di una serie geometrica è quindi sempre una successione geometrica, la somma infinita dei termini di una successione geometrica non è una serie geometrica che a meno di un fattore costante.
[33] Si tratta del lemma XXVI [cfr. la precedente nota (27)].

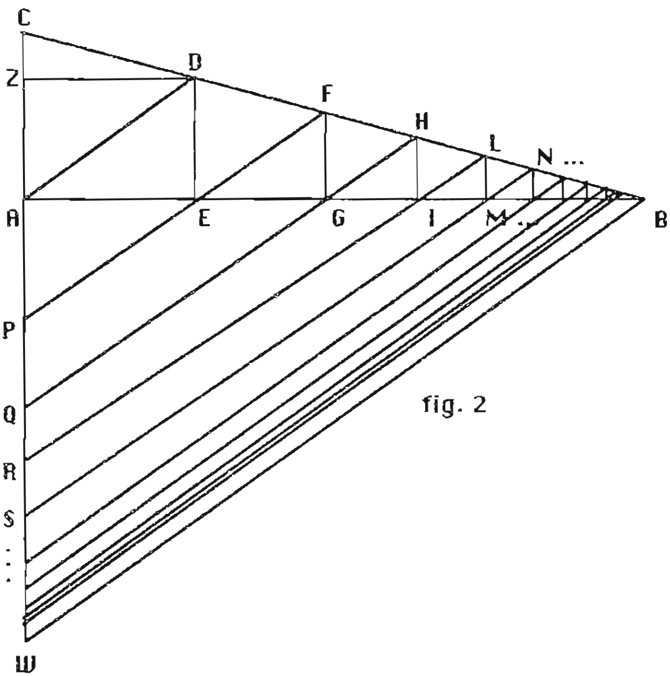


fig. 2

Per quanto riguarda il lemma III basterà considerare la successione geometrica {AC, ED, X_1Y_1, X_2Y_2,..., X_nY_n, &c.} in cui tutti i termini precedenti a X_nY_n sono per ipotesi costituiti dai lati successivi del flessilineo CADEFGH&c.. Il segmento $X_{n-1}Y_{n-2}$ sarà allora un lato del flessilineo che potremmo indicate con L_{n+1} e la condizione di geometricità della successione permetterà di trarre $X_nY_n = \frac{(L_{n+1})(ED)}{AC}$. Indicando d'altra parte con L_{n+2} il lato del flessilineo successivo a L_{n+1}, si avrà, per il lemma II: $L_{n+2} = \frac{(L_{n+1})(ED)}{AC} = X_nY_n$, ciò che dimostra che il segmento X_nY_n è un lato del flessilineo. Analogamente sarà poi facile dimostrare che se L_n è un lato del flessilineo, allora esso è un termine della successione.

Il riferimento geometrico rende perfettamente chiaro che il lemma III si riferisce a una *qualsiasi* successione geometrica *decrescente*. Se infatti la scelta del segmento AC è perfettamente libera, è ovvio che per poter costruire un flessilineo di cui AC sia il primo lato è necessario vincolare la scelta del segmento ED (la quale sarà altrimenti perfettamente libera) alla condizione AC > ED. Data quindi una qualsiasi successione geometrica, *purché decrescente*, sarà sempre possibile associare a essa un flessilineo come CADEFGH&c. (fig. 2) e costruire a partire da esso il segmento WC. Prolungando i lati EF, GH, IL, &c. fino a intercettare WC, sarà poi ovvio trarre le identità: ED = PA, GF = QP, IH = RQ, &c.. Il lemma III congiunto a un'intuizione che garantisce la convergenza a WC della somma infinita AC + PA + QP + &c. conduce allora facilmente alla conclusione:

(9) AC + ED + GF + IH + &c. = WC

che giustifica l'enunciato del lemma IV.

Per dimostrare il lemma I[34] è a questo punto sufficiente dimostrare che nella figura 2 il segmento AC è medio proporzionale fra il segmento WC e la differenza ZC = AC - ED. A questo scopo basta d'altra parte comporre le proporzioni ZC : AC = CD : CB e CD : CB = AC : CW, tratte rispettivamente grazie alla similitudine dei triangoli ZDC e ABC e ADC e WBC.

La dimostrazione di Torricelli scarica quindi sull'intuizione geometrica garantita dalla rappresentazione figurativa delle quantità in gioco la legittimazione tanto della reiterabilità indefinita della successione, che dell'esistenza di un limite finito per la somma dei suoi termini: la condizione di decrescenza - che è qui riferita alla lunghezza dei segmenti e si accompagna quindi implicitamente alla condizione di positività dei termini della successione - non è così che una condizione di costruibilità della figura che costituisce l'oggetto stesso cui si applica l'intuizione. Questo tuttavia non implica che lo stesso risultato non possa essere dimostrato *per altra via* anche nel caso in cui la successione non sia una successione decrescente a termini positivi. Il modo più semplice per valutare questa possibilità consiste nel ragionare *a posteriori* sul risultato già raggiunto per successioni decrescenti a termini positivi: data una generica successione geometrica $\{A_k\} = \left\{b^{-k+1}a^k\right\}_0^\infty$ e il limite $\frac{b^2}{b-a}$ cui tende la somma dei suoi termini nel caso in cui essa è assunta come decrescente e a termini positivi, si tratta di valutare, per così dire in concreto, la legittimità dell'estensione della (3) anche al caso in cui le condizioni di decrescenza e positività non sia rispettata. Consideriamo in primo luogo il caso di una progressione crescente di termini positivi ($0<b<a$). Per negare l'estendibilità della (3) - intesa come un'identità riferita ai valori delle quantità involte - è sufficiente in questo caso osservare che una tale eventualità condurrebbe a eguagliare una somma di infiniti termini sempre più grandi a una quantità negativa e senz'altro finita, comportando quindi una conseguenza palesemente assurda. Lo stesso ragionamento vale ovviamente per successioni decrescenti a termini negativi ($a<b<0$). In questo caso un'estensione della (3) porterebbe infatti a identificare una quantità positiva e senz'altro finita con una sottrazione indefinitamente reiterata di termini positivi sempre più grandi da termini costantemente negativi. Prendiamo ora

[34] Per Torricelli si tratta del lemma XXVII [cfr. la precedente nota (27)]:

Suppositis infinitis magnitudinibus in continua proportione Geometrica maioris inæqualitatis, erit prima magnitudo media proportionalis inter primam differentiam et inter aggregatum omnium.

una successione crescente, ma a termini negativi ($b<a<0$). Data la (3), riferita a successioni crescenti a termini positivi, basta ovviamente moltiplicarla membro a membro per -1 per trarre un'identità del tutto equivalente, ma riferita a successioni crescenti a termini negativi, a cui l'intuitiva legittimità di questa operazione, anche in contesti infinitari, sembra conferire certezza indipendentemente da ogni ulteriore dimostrazione.[35] La questione si pone certamente in termini meno semplici qualora si considerino successioni a segni alterni (a e b di segni discordi). In tal caso è infatti necessario ricorrere alla considerazione delle prime n ridotte parziali della serie, le quali danno luogo a una nuova successione i cui termini sembrano differire sempre di meno o sempre di più dal valore limite $\frac{b^2}{b-a}$ a seconda se la successione geometrica considerata è decrescente o crescente relativamente al valore assoluto dei suoi termini (rispettivamente: $|a| < |b|$ e $|b| < |a|$, con a e b di segni alterni). Tutto ciò conduce a pensare, *indipendentemente dalla formulazione di ogni ulteriore dimostrazione*, che la validità della (3) possa essere estesa al caso in cui la successione sia tale che $|a| < |b|$ e negata qualora essa sia invece tale che $|b| < |a|$. Resta il caso in cui $|a| = |b|$. Mentre è abbastanza naturale concludere che qualora a e b abbiano segni concordi la (3) debba essere negata anche in questo caso (o, se preferiamo, accettata in quanto equiparazione all'infinito - positivamente o negativamente preso - di una serie palesemente divergente a termini tutti positivi o tutti negativi), la questione è certamente più controversa qualora a e b siano uguali in modulo, ma differenti per segno. In questo caso la (3) si trasforma infatti nell'identità $b - b + b - b +$ &c. $= b/2$, che può, se isolatamente considerata, lasciare dei dubbi tanto riguardo alla sua legittimità, che alla sua assurdità: la decisione deve qui essere presa in base a ragioni diverse, che valutino le conseguenze di un'eventuale accettazione (o di un'eventuale rigetto) di una tale estensione della (3).

Le precedenti considerazioni possono certo apparire ingenue agli occhi di un matematico moderno, ma io credo che esse possano congetturalmente venir assegnate a un matematico di fine seicento, il quale avesse, da una parte. appreso, grazie alla dimostrazione di Torricelli, che una somma infinita di segmenti in proporzione continua decrescente eguaglia il rapporto fra il quadrato del primo di essi e la differenza fra il primo e il secondo e condividesse, dall'altra, il programma di estensione e autonomizzazione dei metodi analitici, intesi come procedure riferite a quantità qualsiasi. A fronte di simili considerazioni un tale matematico avrebbe d'altra parte concluso: i) che i metodi analitici di sviluppo conducono a identità (riferite ai valori delle

[35] Si noti che per pervenire a questo risultato per mezzo di una dimostrazione puramente geometrica (la quale non faccia uso di argomenti analitici, come la moltiplicazione membro a membro della (9) per -1 o come l'introduzione di misure negative per i segmenti AC, ED, FG, &c.) occorre modificare essenzialmente la dimostrazione di Torricelli, cercando un segmento che in luogo di una somma infinita esprima una differenza infinitamente protratta. Questo è un ovvio esempio dell'aumento di generalità garantito dall'accettazione di un'impostazione analitica.

quantità considerate) verificabili solo sotto alcune condizioni; ii) che se queste condizioni non sono direttamente rispecchiate dalle procedure formali a cui tali metodi danno luogo (la cui attuabilità resta assolutamente generale e la cui attuazione conduce invariabilmente ai medesimi risultati), esse non corrispondono neppure alle condizioni di redigibilità delle corrispondenti dimostrazioni geometriche (qualora queste siano possibili); iii) che se un'analisi *a posteriori* del risultato tratto per mezzo di queste procedure - accompagnata da un'indipendente dimostrazione geometrica riferita a certi casi particolari - permette di stabilire, grazie al ricorso a parametri esterni, condizioni sicure di validità o non validità delle identità, essa resta in qualche caso non conclusiva e richiede quindi il ricorso a diversi strumenti valutativi.

In questo quadro la strategia di Grandi diventa non solo perfettamente comprensibile, ma anche assolutamente "naturale": accettata la conclusione e la dimostrazione di Torricelli - che si riferisce, come ovvio, a un'addizione in senso geometrico di segmenti - si tratta di redigere una corrispondente dimostrazione analitica - implicitamente riferita a una somma algebrica di quantità qualsiasi e condizionata dalla posizione $|a| < |b|$ - e di cercare in altre considerazioni una giustificazione per un'eventuale estensione del medesimo risultato al caso $a = -b$. La dimostrazione del 1701 corrisponde all'attuazione della prima parte di questa strategia,[36] quella del terzo corollario della proposizione VII del *Quadratura* ne esaurisce invece la seconda parte.

Torniamo allora alla dimostrazione del 1701. Per quanto Grandi non lo espliciti, è facile capire che la condizione di decrescenza del valore assoluto dei termini successivi della serie che costituisce il primo membro della (6) è una condizione indispensabile per il prosieguo del suo argomento. Benché, isolatamente presa, la (6) possa infatti essere intesa come un'identità formale, è evidente come questa interpretazione non possa venir accompagnata da un'interpretazione del passaggio da (6) a (7) come un'inferenza algebrica generalizzata. Il riordinamento compiuto nel corso di questo passaggio corrisponde infatti, in un contesto finitario, all'indebita eliminazione di un addendo che può venir trascurato in una serie solo qualora il suo valore assoluto sia indefinitamente decrescente.[37] Non solo: affermare la validità della (6) del tutto indipendentemente dal valore di x, ovvero in quanto identità formale, significa assumere *a priori* la neutralità dell'operazione, anche infinitamente reiterata, di aggiungere e togliere una stessa quantità e accettare quindi implicitamente l'identità infinitaria 0+0+0+0+&c. = 0, sia nel caso in cui i differenti addendi del primo membro siano il risultato del porre e del levare di una stessa quantità presa ogni volta diversa dalla volta

---

[36]Grandi non sembra in nessun modo contrapporre la dimostrazione del 1703 a quella, così diversa, del 1701, che egli ripropone - anche se in termini rievocativi - in un articolo del 1706 apparso sugli *Acta Eruditorum* [cfr. Grandi (1706), p. 152].

[37]Per quanto Grandi affermi [cfr. *ivi*] che la sua dimostrazione è estendibile anche al caso in cui la successione sia presa come finita, è ovvio che in questo caso la somma finale debba essere trasformata nel rapporto $\frac{A_0(x^{n+1}-1)}{(x-1)x^n}$ in cui n è l'esponente dell'ultimo termine considerato.

precedente, sia nel caso in cui la quantità posta e levata sia costantemente la stessa. Questa assunzione é ovviamente contraddittoria rispetto alla (1) che afferma invece l'identità a $a/2$ della somma di zeri $(a - a) + (a - a) + (a - a) +$ &c. Intesa senza limitazioni, la stessa (6) conterrebbe d'altra parte tanto la (1) che una sua negazione. Per accorgersi di questo basta operare in essa le sostituzioni $x = 1$ e $x = -1$. Nel primo caso si avrebbe:

(10)
i) $-A_0 - A_0 + A_0 + A_0 - A_0 - A_0 + \&c. = -A_0$
ovvero:
ii) $2A_0 - 2A_0 + 2A_0 - \&. = A_0$

che come è chiaro equivale alla (1), mentre nel secondo, che è peraltro escluso dalla successiva divisione per x-1, si trarrebbe immediatamente:

(11) $A_0 - A_0 + A_0 - A_0 + A_0 - A_0 + \&c. = A_0$

che è invece contraddittoria rispetto a (1). Così come la dimostrazione di Torricelli, la dimostrazioni di Grandi del 1701 non si applica quindi che a successioni decrescenti - anche se ora la decrescenza è esplicitamente riferita al valore assoluto dei termini. Il caso di successioni stazionarie a segni alterni resta ancora indeciso e chiama quindi a una dimostrazione di natura diversa.

III. 1. δ. *Ancora sul lemma: la dimostrazione del 1703*

E veniamo alla dimostrazione di Grandi del 1703, che questi presenta come un "argomento fisico"[38] a sostegno del lemma. Data una successione geometrica decrescente di segmenti {AB, BC, CD, &c.} costituiti da porzioni successive di una stessa retta r (fig. 3), si considerino due mobili K e L che si muovono contemporaneamente su questa retta da sinistra a destra con velocità uniformi rispettivamente proporzionali ai segmenti AB e BC. Il moto di questi sia tale che L sia in B quando K è in A. E' evidente allora che L sarà in C quando K è in B, in D quando K è in C, e così via, in modo che negli istanti in cui K è nei punti A, B, C, &c. la distanza fra i due mobili sarà data dai segmenti AB, BC, CD, &c. della successione assegnata.[39] Essendo per ipotesi AB >

---

[38]Cfr. la citazione di cui alla precedente nota (26).

[39]Sia per semplificare $\left\{A_{k-1}A_k\right\}_{k=0}^{\infty}$ la successione data. La velocità di K e L sarà rispettivamente uguale a $(A_0A_1)W$ e $(A_1A_2)W$ con W una costante qualsiasi. Se K e L sono rispettivamente in A_0 e A_1 in t_0 e K è in A_1 in t_1, allora l'intervallo temporale t_0-t_1 sarà tale che $A_0A_1 = (A_0A_1)W(t_0-t_1)$ e si avrà quindi: $t_0-t_1 = 1/W$. L sarà allora in t_1 in un punto X_1 tale che $A_1X_1 = (A_1A_2)W(t_0-t_1) = (A_1A_2)$. X_1 coinciderà quindi con A_2. Allo stesso modo se K è in A_2 in t_2 allora si avrà: $t_1-t_2 = \frac{A_1A_2}{(A_0A_1)W}$ e L sarà quindi in un punto

BC, la velocità di K sarà superiore alla velocità di L e vi sarà quindi un punto I, a destra di A e B in cui K e L perverranno contemporaneamente.[40] Il segmento AI sarà allora l' "aggregato" di tutte le differenze AB, BC, CD, &c. percorse da K prima di pervenire a I. Ora, nel tempo in cui K percorre AI, L percorrerà BI e quindi il rapporto fra AI e BI è uguale al rapporto AB/BC delle velocità di K e L e quindi, essendo AB = AI - BI:

(12) AI : AB = AB : (AB - BC)

che conclude la dimostrazione del lemma.

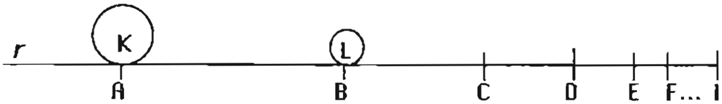


fig. 3

Grandi ritorna così a una dimostrazione *à la* Torricelli scaricando sull'intuizione meccanica l'accertamento dell'esistenza di un punto I in cui i due mobili coincidono e su quella geometrica l'equiparazione fra la distanza AI e la somma della serie assegnata. La dimostrazione non si applica quindi che a successioni decrescenti a termini tutti positivi e non fa che rendere più agile

---

X_2 tale che $A_2X_2 = (A_1A_2)W \dfrac{A_1A_2}{(A_0A_1)W} = \dfrac{(A_1A_2)^2}{(A_0A_1)}$. E' quindi ovvio che X_2 coinciderà quindi con A_3. Reiterando questo ragionamento si dimostra facilmente che per ogni k X_k coincide con A_{k+1}, come afferma Grandi.

[40]Ecco come Grandi si esprime [cfr. Grandi (1710a), p. 2]:

> [...] ita ut semper aliquis ex terminis propositæ progressionis intercipiatur inter utrumque mobile, quousque, decrescente infra quamlibet magnitudinem, simul cum ipsis terminis, mobilium distantia, in fine tandem progressionis, utriusque mobilis centrum concurrat.

Per trovare un tale punto I basterà cercare il tempo τ tale che $(A_0A_1)W\tau = (A_1A_2)W\tau - A_1A_2$. Essendo $\tau = \dfrac{A_0A_1}{(A_0A_1 - A_1A_2)W}$ si avrà allora $A_0I = (A_0A_1)W\tau = \dfrac{(A_0A_1)^2}{(A_0A_1 - A_1A_2)}$ come Grandi dimostra per mezzo di un procedimento analogo. Si noti che la decrescenza della successione implica la positività di τ che sarebbe altrimenti minore o uguale a zero. La difficoltà è allora quella di dimostrare che A_0I possa essere considerato come il segmento somma dei segmenti che formano la successione. A questo scopo si osservi che per ogni k, se K e L sono rispettivamente nei punti A_k e X_k in t_k, allora X_k coincide con A_{k+1} e è facile dimostrare che l'intervallo temporale $t_0 - t_k = \dfrac{A_0A_k}{(A_0A_1)W}$ è minore di τ e quindi A_0A_k è minore di A_0I. La differenza $A_0I - A_0A_k$ è d'altra parte uguale alla differenza:

$$\frac{(A_0A_1)^2}{A_0A_1 - A_1A_2} - \sum_{r=0}^{k-1} (A_0A_1)^{-r+1} (A_1A_2)^r = \frac{(A_0A_1)^{-k+2}(A_1A_2)^k}{A_0A_1 - A_1A_2}$$

che tende a zero quando k tende all'infinito.

il percorso argomentativo torricelliano, grazie all'introduzione di un riferimento meccanico peraltro assai semplice. Lo scopo ultimo del trattatello di Grandi è d'altra parte quello di pervenire a risultati di quadratura geometricamente intesi, ciò che non richiede alcun ricorso a successioni di altro genere. La stessa indagine relativa a successioni stazionarie a segni alterni può inoltre essere condotta a partire dal risultato ristretto di Torricelli che non necessita quindi di alcuna estensione.

Piuttosto, ciò che va notato è che la nuova dimostrazione si fonda esplicitamente sulla negazione delle note conclusioni di Zenone: lungi dal contenere essa stessa una soluzione del paradosso di Achille e della Tartaruga, assume *a priori*, come un dato intuitivo escluso da ogni dubbio, l'esistenza di un punto in cui i due corridori dovranno infinite appaiarsi.[41]

III. 1. ε. *La proposizione VII del Quadratura e il suo corollario III*

La proposizione I interviene nella dimostrazione della proposizione VII sotto le spoglie di una sua ovvia conseguenza che Grandi enuncia come segue:

> PROP. II Ab eadem prima magnitudine A duæ infinitæ progressiones terminorum continuè proportionalium incipiant, prior A, B, C, D, E &c. posterior A, M, N, P, &c.
> Dico, aggregatum ex terminis omnibus prioris ad aggregatum ex omnibus terminis posterioris progressionis esse, ut reciprocè prima differentia posterioris ad primam differentiam prioris seriei.[42]

Benché Grandi non espliciti il riferimento a progressioni decrescenti e a termini positivi, il ricorso alla proposizione I rende del tutto ovvia questa limitazione. Traducendolo in termini analitici il nuovo lemma di Grandi può così riformularsi nei termini seguenti:

Lemma V: Se $\{A_k\}_0^\infty$ e $\{B_k\}_0^\infty$ sono due successioni geometriche decrescenti di termini positivi tali che $A_0 = B_0$, allora:

$$(13) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} A_k : \sum_{k=0}^{\infty} B_k = (B_0 - B_1) : (A_0 - A_1)$$

Dato il lemma I, la dimostrazione è assolutamente banale. Seguendo il percorso di Grandi, basta porre successivamente le identità $(A_0)^2 = \dfrac{\sum_{k=0}^{\infty} A_k}{A_0 - A_1}$ e

[41] Cfr. a questo proposito lo scolio che Grandi appone alla sua dimostrazione [cfr. *ivi*, pp. 2-4].

[42] Cfr. *ivi*, p. 4.

$(B_0)^2 = \dfrac{\sum_{k=0}^{\infty} B_k}{B_0 - B_1}$ che sotto la condizione $A_0 = B_0$ conducono ovviamente alla (13). La proposizione II non richiede così ulteriori commenti.

Veniamo invece alla proposizione VII:

PROP. VII Si fiat [fig. 4], ut quadratum diametri AB ad quadratum tangentis AG (diametro jam minoris) ita ipsa diameter, vel ei æqualis HG ad Q_1G, & hæc ad Q_2G, eadem ratione ad infinitos terminos Q_3G, Q_4G, Q_5G, &c. prorogata.

Dico, summam ex omnibus horum terminorum differentiis alternè sumptis HQ_1, Q_2Q_3, Q_4Q_5, &c. æqualem esse sinuí verso BX arcus BZ, per secatem BG intercepti.[43]

Dato un semicerchio BMA, tracciata la tangente AV nel punto A, indicato con G il punto di intersezione fra tale tangente e il prolungamento della secante BZ e presa sul segmento HG, parallelo e uguale al diametro AB, una successione di punti $\{Q_k\}_0^\infty$ (Q_0 coincidente con H) tale che la successione di segmenti $\{Q_kG\}_0^\infty$ sia una successione geometrica di ragione $(AB)^2/(AG)^2$, la proposizione VII afferma l'identità infinitaria:[44]

(14) $HQ_1 + Q_2Q_3 + Q_4Q_5 + \ldots + Q_n Q_{n+1} + \&c. = \sin v. (\text{arc. } BZ) = BX.$

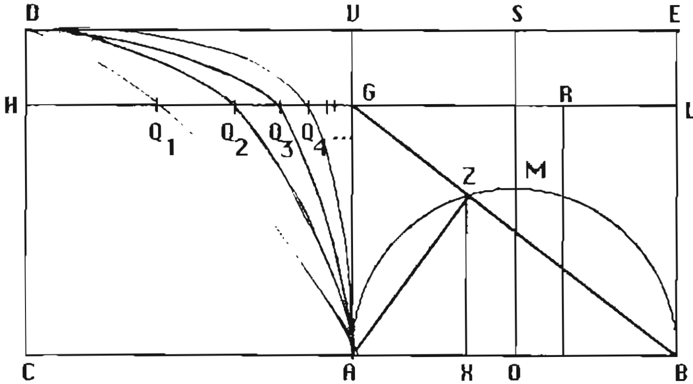


fig. 4

[43]Cfr. *ivi*, p. 27. Per evitare confusioni possibili ho modificato alcune notazioni di Grandi che naturalmente non fa uso di indici, e indica i punti Q_1, Q_2, &c. con i simboli numerali 1, 2, &c..

[44]Si ricordi che geometricamente il seno verso (che indico qui, seguendo la notazione dell'epoca con "sin v.") è uguale al rapporto fra la porzione del raggio compresa fra il piede del seno e l'origine dell'arco e il raggio (ciò che si indica analiticamente per mezzo dell'identità: $\sin v.\ x = \frac{r - \cos x}{r}$). Grandi prende quindi implicitamente il raggio OB come unitario.

La dimostrazione di Grandi procede come segue. Data la successione geometrica decrescente $\left\{Q_k G\right\}_0^\infty$ di ragione $(AB)^2/(AG)^2$, si consideri la successione associata $\left\{Q_k Q_{k+1}\right\}_0^\infty$ delle differenze (positive) $(Q_kG - Q_{k+1}G)$ [$k = 0, 1, 2$, &c.] fra i segmenti che compongono la prima successione. E' facile dimostrare che anche la seconda successione è geometrica e decrescente e che la sua ragione è uguale alla ragione della prima.[45] Se di tale seconda successione $\left\{Q_k Q_{k+1}\right\}_0^\infty$ prendiamo soltanto i termini di posto pari abbiamo una terza successione geometrica decrescente $\left\{Q_{2k} Q_{2k+1}\right\}_0^\infty$ di ragione[46] $(AB)^4/(AG)^4$. Le successioni $\left\{Q_k Q_{k+1}\right\}_0^\infty$ e $\left\{Q_{2k} Q_{2k+1}\right\}_0^\infty$ soddisferanno così le condizioni previste dal lemma V (la proporzione II di Grandi) e si potrà quindi scrivere, secondo la (13), la proporzione:

$$(15) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} Q_kQ_{k+1} : \sum_{k=0}^{\infty} Q_{2k}Q_{2k+1} = (HQ_1 - Q_2Q_3) : (HQ_1 - Q_1Q_2)$$

Assumendo come un'evidenza geometrica l'identità $HG = \sum_{k=0}^{\infty} Q_kQ_{k+1}$ e esprimendo Q_2Q_3 in funzione di Q_1Q_2 e HQ_1, dalla (15) si trae:

$$(16) \qquad \frac{HG}{\sum_{k=0}^{\infty} Q_{2k}Q_{2k+1}} = \frac{HQ_1 + Q_1Q_2}{HQ_1}$$

[45]Grandi assume questa come un'inferenza ovvia e non ne fornisce alcuna prova. Per assicurarsi della sua correttezza basta d'altra parte osservare che se $\{A_k\}_0^\infty$ è una successione geometrica di ragione p/q, allora per ogni k si avrà: $A_k : A_{k+1} = A_{k+1} : A_{k+2} = p : q$, e quindi: $(A_k - A_{k+1}) : A_k = (A_{k+1} - A_{k+2}) : A_{k+1}$, ovvero, invertendo i medi, $(A_k - A_{k+1}) : (A_{k+1} - A_{k+2}) = A_k : A_{k+1} = p : q$.

[46]Essendo, come nella precedente nota (45), $A_k / A_{k+1} = A_{k+1}/A_{k+2} = p/q$ sarà anche: $A_k / A_{k+2} = (A_{k+1})^2/(A_{k+2})^2 = p^2/q^2$.

Essendo d'altra parte per ipotesi $HQ_1/Q_1Q_2 = (AB)^2/(AG)^2$, sarà facile trarre, sfruttando la similitudine fra i triangoli ABZ, ABG e XBZ:[47]

$$(17) \qquad \frac{HQ_1 + Q_1Q_2}{HQ_1} = \frac{(AB)^2 + (AG)^2}{(AB)^2} = \frac{(BG)^2}{(AB)^2} = \frac{BG}{BZ} = \frac{AB}{BX}$$

La congiunzione di (16) e (17) conduce poi facilmente all'identità:

$$(18) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} Q_{2k}Q_{2k+1} = \frac{(BX)(HG)}{AB} = BX$$

che corrisponde chiaramente alla (14) e conclude quindi la dimostrazione.

A partire dal diametro AB del semicerchio dato, si costruiscano ora due quadrati uguali ABEV e CAVD e si immagini che il punto Z si muova lungo la semicirconferenza AMB, da A a M. Il punto X si muoverà a sua volta sul diametro AB da A a O e il punto G percorrerà la tangente AV da A a V provocando il movimento di H su CD da C a D. Prolungato il segmento HG fino a incontrare in L il lato BE del quadrato costruito su AB, si prenda su GL un punto R tale che GR = XB. Sia BRS la curva disegnata dal punto R nel corso della sua traslazione sul segmento mobile GL; il punto S sarà allora tale che $VS = SE = AO = \frac{1}{2}DV$. Essendo d'altra parte i punti Q_k (k = 1, 2, 3, &c.) presi su HG (che traslando resta costantemente uguale e parallela a se stesso) in modo che i rapporti fra i segmenti Q_kQ_{k+1} e $Q_{k+1}Q_{k+2}$ (k = 0, 1, 2, &c.) siano costantemente uguali al rapporto $(AB)^2/(AG)^2$, il quale varia con il variare di AG, questi punti disegneranno nel corso della traslazione di HG delle curve AQ_kD (k = 1, 2, 3, &c.) di genere parabolico e di grado $2k$.[48]

Se, data questa costruzione, è evidente che la (18) vale per ogni posizione di Z compresa fra A e M, il principio geometrico di continuità - "ciò che vale fino al limite, vale anche al limite" - conduce a estendere questa stessa identità anche alle situazioni limite. Facendo coincidere Z con M e quindi G con V, H con D, X con O e R con S, avremo BX = VS e, per ogni μ (μ = 1, 2, &c.), $Q_\mu G = DV$ e quindi $Q_{2k}Q_{2k+1} = Q_{2k}G - Q_{2k+1}G = DV - DV$. La (18) si trasforma

---

[47] La similitudine fra i triangoli ABZ e ABG permette infatti di trarre la proporzione BG: AB = AB : BZ, da cui segue $(AB)^2 = (BG)(BZ)$.

[48] Anche in questo caso la prova - che Grandi sottintende - è del tutto banale. Posti AB = a, AG = z e $HQ_k = y_k = y_k(z)$, si avrà, per le ipotesi assunte, $Q_{k-1}G$: $Q_kG = a^2 : z^2$ e quindi: $y_k(z) = a - \frac{(Q_{k-1}G)z^2}{a^2}$. Essendo $Q_0G = HG = a$ si ha allora successivamente: $y_1(z) = a - a^{-1}z^2$; $y_2(z) = a - a^{-3}z^4$;...; $y_n(z) = a - a^{-2n+1}z^{2n}$; &c.. Ponendo poi in $y_k(z)$, $z = 0$ e $z = a$ si traggono facilmente le identità verificate per ogni valore di k: $y_k(0) = a$ e $y_k(a) = 0$, che esprimono la concorrenza di tutte le curve nei punti A e D.

allora nella (1), la cui asserzione costituisce il contenuto del corollario III della proposizione VII:

> Coroll. III Ex quo ubique (HG - Q_1G) + (Q_2G - Q_3G) + (Q_4G - Q_5G) + &c. æquetur ordinatæ GR, constant, etiam, (DV - DV) + (DV - DV) + (DV - DV) + &c. æquari VS, idest eandem lineam infinities positam, & infinities subtractam relinquere sui medietatem.[49]

Benché Grandi non ne faccia alcuna menzione, lo stesso procedimento dimostrativo conduce a provare l'identità 0+0+0+0+&c. = 0, qualora i differenti addendi del primo termine siano per così dire l'espressione di una nullità originaria. Facendo coincidere infatti Z con A, i punti Q_k (k = 1, 2, 3, &c.) e X coincideranno tutti con lo stesso punto A, mentre il punto H corrispondente al punto Q_0 coinciderà con il punto C, in modo che la (14) si trasformerà nell'identità:

(19) (CA-0) + (0-0) + (0-0) + &c. = CA + 0 + 0 + 0 + &c. = AB = CA

Il contenuto del "paradosso di Grandi" non può quindi essere generalizzato all'affermazione del carattere finito di un'infinita somma di zeri e ciò per ragioni inerenti alla sua stessa dimostrazione. Così come l'argomento *ad limitem superiorem* conduce infatti ad asserire la (1), l'analogo argomento *ad limitem inferiorem* porta inevitabilmente alla (19). Se accettiamo quindi che la legge di continuità garantisca il passaggio al limite dobbiamo anche accettare che una somma infinita di zeri si comporti in modo diverso a seconda della provenienza dei suoi addendi. Benché Grandi non discuta mai questa conseguenza della sua prova, essa è talmente evidente che è difficile pensare che egli non l'avesse scorta; anche nei suoi argomenti *a posteriori*, questi non cerca mai d'altra parte che di mostrare *la possibilità* per una somma di infiniti zeri di eguagliare una quantità finita. Ciò non toglie che la questione sia in se stessa alquanto delicata. Se è vero infatti che una simile situazione può anche riscontrarsi, a esempio, per il rapporto 0/0, che può venire interpretato come un rapporto che assume valori diversi a seconda dell'origine degli zeri che lo compongono,[50] è anche vero che in questo caso siamo di fronte a un'entità algebricamente priva di significato, la quale viene così intesa come espressione di un limite. Al contrario introducendo nella (18) l'esplicito riferimento all'operazione di passaggio al limite, essa si trasforma comunque - sia che si calcoli il limite della somma che la somma dei limiti - in una relazione fra entità algebriche perfettamente definite: tanto il limite della somma delle differenze ($\mathrm{Lim}_{G\to V} \sum_{k=0}^{\infty} Q_{2k}Q_{2k+1} = \mathrm{Lim}_{G\to V}$ BX = VS), che

---

[49]Cfr. *ivi*, p. 29. Cfr. la citazione di cui alla precedente nota (1). Essendo, secondo la notazione della precedente nota (48), $Q_{2k}\, Q_{2k+1} = y_{2k+1}(z) - y_{2k}(z) = a^{-4k+1}z^{4k} - a^{-4k-1}z^{4k+2}$, la posizione limite $z = a$ conduce, per ogni k, all'identità $Q_{2k}\, Q_{2k+1} = a - a$, che trasforma la (18) nell'espressione generica del paradosso di Grandi: $a - a + a - a$ + &c. = $a/2$.

[50]Questa sarà almeno l'opinione di Euler [cfr. il precedente paragrafo II.1.λ.].

quello delle differenze stesse ($\mathrm{Lim}_{G\to V}\ Q_{2k}Q_{2k+1} = 0$) sono infatti delle quantità algebricamente manipolabili e perfettamente definite. L'algebra stessa, una volta che sia estesa a trattare somme infinite, viene così a perdere il suo carattere di univocità e quindi la sua propria generalità. Per evitare questa conclusione - che ancor prima che paradossale sembra gravemente sconveniente - occorre tuttavia distinguere fra somma dei limiti e limiti della somma e per far questo non vi è altra strada che quella di uscire da un ambito squisitamente geometrico, assegnando alla somma dei limiti il carattere di un concetto strettamente analitico, privo di ogni corrispettivo geometrico. E' per questo che il passaggio dagli zeri a delle differenze infinitamente piccole muta in termini essenziali il contenuto della questione, a meno che il termine "quantità infinitamente piccola" non sia qui inteso come un artificio linguistico per riferirsi a degli zeri effettivi o, come si preferisce, a dei limiti raggiunti. Se questo non è il caso e si cerca il valore delle differenze $Q_{2k}Q_{2k+1}$ per $AG = AV\text{-}\omega$, con ω un infinitamente piccolo, avremo infatti:[51] $Q_{2k}Q_{2k+1} = 2\omega + A\omega^2 + B\omega^3 + \&c.$ con A, B, &c. delle costanti che possono sempre venir determinate in funzione di AV. Sostituendo nella (14) e omettendo gli infinitesimi di ordine superiore si avrà così l'identità $2\omega + 2\omega + 2\omega + \&c. = OB + \varepsilon = VS + \varepsilon$ (con ε una quantità infinitamente piccola che si può sempre determinare in funzione di ω), la quale non ci dice ancora nulla sul comportamento della serie qualora G coincida effettivamente con V, a meno che non si assumano le identità $2\omega = 0$ e $VS + \varepsilon = VS$, ciò che equivale esattamente al passaggio al limite compiuto da Grandi, che porta così, ancora, tutto il peso della conclusione.

III. 1. ζ. *Il capitolo VIII, parte II della Risposta apologetica: nuove dimostrazioni e conferme*

Il "paradosso di Grandi" non è così che la conseguenza di un'applicazione del principio geometrico di continuità a un risultato ottenuto in base a una dimostrazione irreprensibile e riferito a una successione di differenze fra ordinate qualsiasi di una famiglia di curve paraboliche, la cui legge di costruzione è del tutto esplicita. O l'aspetto paradossale della (1) non corrisponde quindi alla sua falsità o è le stesso principio geometrico di continuità a dover essere considerato come inapplicabile nel caso in questione. Il passaggio a un meta-livello ci conduce quindi a leggere la dimostrazione di Grandi, prima che come una dimostrazione della (1) - e quindi dell'estendibilità della (3) al caso $a = -b$ - come una prova inappellabile della sussistenza di una contraddizione fra due presunte evidenze, intese fino a allora come originarie: la neutralità dell'operazione di sommare lo zero (anche infinitamente reiterata) e la generale validità del principio geometrico di continuità. Da una parte un'evidenza algebrica,

[51] Per una dimostrazione è sufficiente prendere HQ_k come nella precedente nota (48) e calcolare il valore delle differenze $HQ_{k+1} - HQ_k$ per la sostituzione $z = a - \omega$.

fondata sulla fiducia nell'estendibilità di una legge aritmetica fondamentale a contesti infinitari; dall'altra un'evidenza garantita da un principio geometrico di uniformità, quello stesso su cui da qualche decennio se era cominciato a erigere lo straordinario edificio del *calcolo* leibniziano. Fra esse era necessario scegliere: l'evidenza algebrica doveva piegare quella geometrica, mostrandone il carattere illusorio; o viceversa l'evidenza geometrica doveva estendere la sua luce fino a mostrare l'erroneità delle nostre ingenue supposizioni riferite a una materia tanto delicata quale quella dell'infinito? La scelta era certamente difficile anche in considerazione del fatto che, a guardare le cose dappresso, le due evidenze contrastanti apparivano in verità come conseguenze diverse di una sola convinzione metafisica, di natura ben più generale, riferita alla struttura stessa della realtà, intesa - aristotelicamente[52] - come espressione di un ordine universale. Era così la fiducia nella presumibilità di un principio generalissimo di uniformità che sembrava venir meno e una scelta si imponeva fra due differenti modalità in cui questa fiducia doveva venire incrinata, modalità che corrispondevano, in ultima istanza, all'affermazione di una gerarchia. Caduta la speranza di una costruzione perfettamente circolare, occorreva scegliere un punto di partenza, un parametro di certezza a cui piegare il succedersi delle conseguenze.

Certo il professore di Pisa, Guido Grandi,[53] "monaco camaldolese", non era una personalità intellettuale di statura sufficiente a comprendere fino in fondo la natura di un tale contrasto, come dovette con tutta probabilità essere invece il caso di Leibniz, che al paradosso di Grandi dedicò alcune lettere, fra cui una a Wolff, pubblicata nel 1713 sugli *Acta Eruditorum*.[54] Tuttavia egli comprese che la questione era assai delicata e nella risposta a Alessandro Marchetti non si limitò a ripresentare il suo argomento matematico o a fornirne delle giustificazioni *a posteriori*.

> Io voglio provarmi - egli scrive -, se posso spiegare alquanto più chiaramente la forza delle dimostrazioni da me recate, e darne ancora qualche altro più manifesto riscontro.[55]

Proprio questo è lo scopo dei paragrafi VII-XIV del capitolo VIII, parte II della *Risposta Apologetica*.[56]

Il primo "riscontro" proposto da Grandi consiste in una opportuna modificazione della dimostrazione del 1703, la quale permette di considerare il caso limite esaminato nel corollario III della proposizione VII come una situazione intermedia di un processo, piuttosto che come una situazione finale. Data la costruzione rappresentata nella figura 4 si prenda ora su HG (figura 5) una successione di punti $\{P_k\}_0^\infty$ - P_O coincidente con G - tale che sia la

---

[52]Mi sia concesso rinviare al cap. 2 di Panza (1989).

[53]Sulla personalità di Grandi cfr. Molitor (1934).

[54]Cfr. il prossimo paragrafo III.2.η. e in particolare la prossima nota (78).

[55]Cfr. Grandi (1712), p. 260.

[56]Cfr. *ivi*, pp. 260-73. Nei precedenti paragrafi dello stesso capitolo Grandi non fa che ripresentare nei dettagli, ma senza alcuna modificazione, le dimostrazioni del *Quadratura*.

successione di segmenti $\{HP_k\}_0^\infty$ a essere una successione geometrica di ragione $(AB)^2/(AG)^2$. La collezione di curve AQ_kD (k = 1, 2, 3, &c.) verrà allora sostituita dalla collezione di curve CP_kV (k = 1, 2, 3, &c.), anch'esse di genere parabolico e di grado $2k$, cosicché in luogo della (14) si potrà scrivere l'identità:

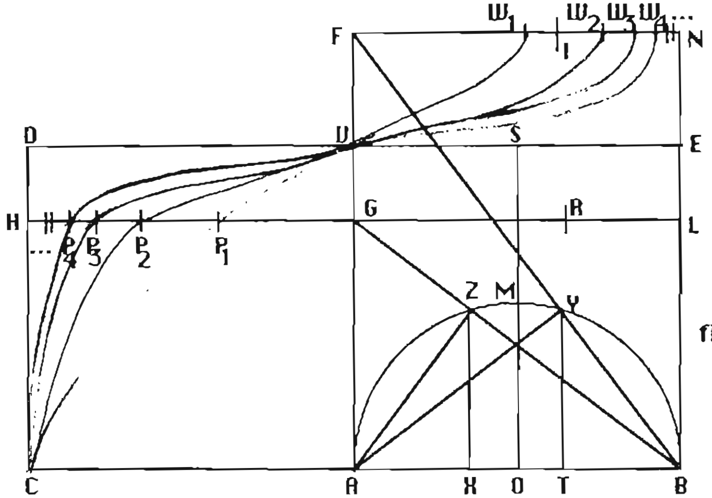


fig. 5

(20) $P_1G + P_3P_2 + P_5P_4 + ... + P_{n+1}P_n$ + &c. = sin v. (arc. BZ) = BX

che potrà ovviamente venire dimostrata come quest'ultima. Si prolunghi quindi il segmento AV fino a un punto F qualsiasi (ma tale che VF < AB) e si tracci la perpendicolare FN a AF, la quale incontri in N il prolungamento di BE. Su FN si prenda una successione di punti $\{W_k\}_0^\infty$ - W_0 coincidente con F - tale che la successione di segmenti $\{W_kN\}_0^\infty$ sia una successione geometrica di ragione $(AF)^2/(AB)^2$. Tracciate da F le curve VW_k (k = 1, 2, 3, &c.) di ordinata FW_k non sarà difficile rendersi conto che esse danno luogo a una collezione di iperboli di grado $2k$, ognuna delle quali può così essere posta in corrispondenza con la curva di ugual grado della collezione CP_kV (k = 1, 2, 3, &c.) condividendo con essa la tangente in V.[57] La congiunzione di queste

[57] Per una dimostrazione analitica di questa asserzione si consideri, come nella precedente nota (48), AV = a, AF = t e a + $FW_k = w_k(t)$ (questa posizione permette di riferire le curve CP_kV e le curve VW_k alla medesima ascissa costruita prolungando CD). Essendo per costruzione $FW_0 = 0$, sarà allora ovvio trarre: $w_1(t) = 2a - a^3t^{-2}$; $w_2(t) = 2a - a^5t^{-4}$;...; $w_n(t) = 2a - a^{2n+1}t^{-2n}$. Prendendo ora il punto di ascissa $t = a$, il quale coincide ovviamente con V avremo, per ogni k, $w_k(a) = a$ e $w'_k(a) = 2k$. Allo stesso modo, ponendo CH = AG = z e $HP_k = v_k(z)$ si trae, essendo $v_0(z) = a$, $v_1(z) = a^{-1}z^2$, $w_2(z) = a^3z^4$, ..., $v_n(z) = a^{-2n+1}t^{2n}$. Prendendo così il punto di ascissa $z = a$, coincidente con V si ha, per

curve dà così luogo a una nuova collezione di curve CP_kVW_k geometricamente continue. Ragionando sulle successioni decrescenti di segmenti $\left\{W_kW_{k+1}\right\}_0^{\infty}$ e $\left\{W_{2k}W_{2k+1}\right\}_0^{\infty}$ in modo del tutto analogo che in occasione della dimostrazione della (14) si trae (grazie alla similitudine dei triangoli ABF, AYF e TBY):

$$(21) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} W_{2k}W_{2k+1} = AT$$

Prendendo ora[58] su FN un segmento FI uguale a AT e facendo variare Y su MB, il punto I descriverà una curva che taglia VE in S e prolunga quindi la curva BRS, la cui ordinata tracciata perpendicolarmente a AF rappresenta per ogni punto di questo segmento, preso come piede, o la somma delle differenze $P_{2k}P_{2k+1}$ o quella delle differenze $W_{2k}W_{2k+1}$. Alla collezione di curve geometricamente continue CP_kVW_k fa così riscontro una curva BRI anch'essa geometricamente continua, che esprime il comportamento delle somme $\sum_{k=0}^{\infty} P_{2k}P_{2k+1}$ e $\sum_{k=0}^{\infty} W_{2k}W_{2k+1}$ associate a questa collezione. Valutando tanto la (20) che la (21) relativamente alla loro comune situazione limite AG = AF = AV si ha ovviamente la (1), che si presenta così come l'espressione di una situazione intermedia di un processo geometricamente rappresentabile in termini perfettamente continui. Ecco il commento di Grandi:

> [...] essendo [...], per la costruzione, l'ordinata di detta curva BRI sempre uguale alle differenze alternatamente prese di quelle ordinate, ò paraboliche, ò iperboliche; è necessario il concludere, che altresì l'infinite differenze della EV, comune ordinata dell'iperbole, ò della VD comune ordinata delle parabole, si trovino eguali all'ordinata VS, che é la metà dell'una e dell'altra. Né può immaginarsi, che per esser nulle coteste differenze in questo particolar caso, la quantità dell'ordinata alla curva BRI svanisca, ò si ristringa in un punto; anzi perché tutte le GR interposte fra' punti A, e V, sono di qualche grandezza maggiore del raggio BO; e tutte le FI, oltre il punto V, sono di qualche grandezza minore [*sic*.!] [59] del detto raggio, ma sempre queste, e quelle tanto più s'accostano all'egualità del medesimo raggio, quanto più vicine sono al punto V: chi può mai dubitare, che nello

ogni k, $v_k(a) = w_k(a) = a$ e $v'_k(a) = w'_k(a) = 2k$. Per una dimostrazione di questo risultato Grandi rimanda ai capitoli 5 e 7 di Grandi (1701).

[58] Modifico qui la costruzione di Grandi che, ragionando per analogia, e evitando l'esplicita derivazione della (20) sembra credere che la somma $\sum_{k=0}^{\infty} W_{2k}W_{2k+1}$ sia uguale al seno verso dell'arco BY, piuttosto che al suo complemento rispetto al dimetro del cerchio AMB e prende quindi il punto I in modo che FI sia uguale a TB. La curva BSI invece di presentare un minimo in S è così secondo Grandi monotona decrescente. Non mi pare credibile che l'individuazione di un tale errore potesse condurre Grandi a modificare il suo argomento. Da un punto di vista geometrico la presenza di un minimo non sembra infatti potersi intendere come indicatrice di una discontinuità di qualche sorta.

[59] Cfr. la precedente nota (58).

> stesso punto non sia l'ordinata precisamente uguale al suddetto raggio, di cui tutte l'altre sono ò successivamente maggiori, se corrispondono alle parabole, ò successivamente minori [*sic.!*],[60] se traggono la loro origine dalle Iperbole?[61]

L'argomento complessivo è così quanto mai esplicito: la continuità geometrica garantisce la validità dell'estensione del risultato raggiunto per successioni decrescenti a opportune successioni stazionarie. Tuttavia Grandi non si limita a questo. Egli vuole ancora dimostrare che la sua costruzione non è l'unica, la quale possa legittimare la posizione della (1).[62] A questo scopo egli ripropone la dimostrazione del 1701 della proposizione I del *Quadratura*, traducendola in termini geometrici e scaricando quindi sull'intuizione della continuità di una curva la legittimazione del passaggio al limite. Dato un quadrato GDCB (figura 6), si inscrivano in esso le curve paraboliche (con equazione della forma $y_k(x) = A + Bx^k$)[63] DQ_kB (k = 2, 3, &c.), le quali restano costantemente al di sopra della diagonale DQ_1B e, tracciata a partire da un punto M preso arbitrariamente su BC la trasversale MN parallela a BG, si consideri la somma delle differenze positive $(MQ_{2k} - MQ_{2k+1}) = Q_{2k+1}Q_{2k}$ (k = 0, 1, 2, &c. e Q_0 coincidente con N). Si prenda allora su MN un punto L tale che $ML = \sum_{k=0}^{\infty} Q_{2k+1}Q_{2k}$ la cui traslazione al traslare di M su BC descrive una curva GLE. Essendo facile derivare dall'ipotesi, per ogni k, l'identità $(MN)(MQ_k) = (MQ_1)(MQ_{k-1})$ (che esprime il fatto che la successione delle differenze $Q_{k+1}Q_k$ (k = 0, 1, 2, &c.) è una successione geometrica decrescente), è anche immediato porre l'altra identità infinitaria:

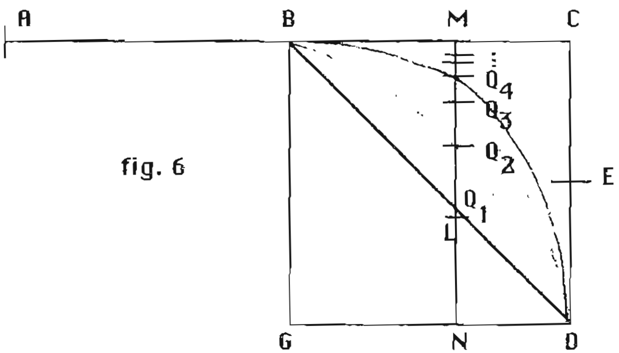


fig. 6

[60]Cfr. la precedente nota (58).

[61]Cfr. Grandi (1712), pp. 262-3.

[62]Grandi vuole mostrare [cfr. *ivi*, p. 263] che "non sia unico e singolare"

> l'esempio addotto, e nel mio libro proposto, per dimostrare, che l'infinite differenze di linee eguali alternativamente poste, e levate equivalgono alla metà d'una di tali grandezze.

L'interesse è quindi chiaramente rivolto alla questione dell'estendibilità della (3) al caso di successioni stazionarie.

[63]Grandi si riferisce a curve paraboliche di tale specie come "parabola di Apollonio", "parabola cubica" e "parabole di grado successivamente superiore".

$$(22)\qquad \begin{aligned}(MN + MQ_1)(ML) &= (MN + MQ_1)\sum_{k=0}^{\infty}(MQ_{2k} - MQ_{2k+1})\\ &= (MN)^2 + \sum_{k=0}^{\infty}[(MQ_1)(MQ_k) - (MN)(MQ_{k+1}) = (MN)^2\end{aligned}$$

ovvero: $ML = (MN)^2/AM$ (con $AM = AB + BM = MN + BM$), che esprime il fatto che la curva GLE è un'iperbole equilatera di asintoti AF e AC. Questa curva taglierà quindi il segmento CD nel suo punto mediano, cosicché si avrà $CE = MN/2$, e - commenta Grandi -

> dovendo, per costruzione, essere cotal'ordinata eguale a CD, manco la stessa CD; con la medesima CD, detrattane di nuovo CD; e così infinite volte, secondo che si riferisce da diverse parabole, alle quali serve di comune applicata: rimane chiarissimo, che la stessa grandezza infinite volte posta, e levata, lascia la metà di se stessa.[64]

Ancora una volta Grandi presenta così una dimostrazione geometrica del tutto irreprensibile qualora la variazione di un punto resti compresa fra due estremi dati[65] e legittima il passaggio al limite grazie al riferimento a una curva continua che esprime la somma cercata. Egli può così tradurre la propria dimostrazione in termini perfettamente analitici e affermare la legittimità della posizione $a = -b$ nell'identità (3), che egli trae ripetendo la stessa dimostrazione del 1701.[66] Facendo d'altra parte coincidere il punto M con il punto B la (22) conduce ancora una volta all'identità BG+0+0+0+&c. = BG, che limita, come è stato più volte osservato, il "paradosso di Grandi" al caso di particolari somme infinite di zeri.

Presentato così il proprio argomento *a priori*, Grandi ne fornisce una ulteriore conferma *a posteriori* esibendo nuove situazioni matematiche che verificano l'ipotesi $0\cdot\infty = a$ (con a una quantità finita). Si consideri in primo luogo la ridotta parziale di ordine n della serie che compare nella (4) e se ne calcoli la somma. Adattando opportunamente la dimostrazione del 1701 del lemma I[67] non è difficile trarre l'identità:

$$(23)\qquad \sum_{k=0}^{n}\frac{b}{x^k} = \frac{b(x^{n+1}-1)}{x^n(x-1)}$$

---

[64]Cfr. *ivi*, p. 263.

[65]Riguardo alla (22) valgono ovviamente tutte le osservazioni già fatte in rifermento alla (6); la sua assunzione - indipendentemente da ogni ulteriore dimostrazione - non può quindi considerarsi legittima che nel caso in cui si sia posta la condizione $BM < BC$.

[66]Cfr. *ivi*, pp. 265-6.

[67]Cfr. la precedente nota (37).

Prendendo ora $n = \infty$ e, quindi, $b/x^n = 0$, e comparando la (4) con la trasformata della (23) per questa sostituzione, si trae:

$$(24) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{b}{x^k} = \frac{0(x^{\infty}-1)}{x-1} = \frac{bx}{x-1}$$

ovvero: $0x^{\infty} = 0 \cdot \infty = bx$. Essendo in secondo luogo, per ogni v e w, $\log(v) + \log(w) = \log(vw)$ si ha, ponendo le sostituzioni $v = 0$ e $w = 0$, $\log(0) + \log(\infty) = -\infty + \infty = 0 = \log(0 \cdot \infty)$, e quindi passando, agli esponenti: $1 = 0 \cdot \infty$.

Non sarà certamente il caso di soffermarsi a commentare questi proto-argomenti, francamente abbastanza ingenui. Quel che è più interessante é invece notare come Grandi concluda le sue riflessioni passando alla considerazione di somme infinite di quantità infinitamente piccole, piuttosto che di veri e propri zeri.

> Confesso - egli scrive - che facendo meco stesso più volte riflessione a questi, e tanti altri riscontri, che sempre mi conducevano a confermarmi nella certezza, che ho di quel mio Corollario, non ostante che ritrosa la fantasia poco si accomodasse ad arrendervi, mi sono studiato di ammollire alquanto la durezza dell'espressioni, con cercare di ridurre le differenze assolutamente nulle, delle linee precisamente eguali tra loro, al piccolissimo divario di linee prossimamente eguali, cioè d'un'infinitesimo differenti; acciocché non si desse da moltiplicare all'Infinito ciò, che rigorosamente s'intende per zero, ma una parte infinitamente piccola, che in riguardo al suo tutto suol'essere da' Geometri riputata per nulla [...].[68]

Data ancora la costruzione di cui alla dimostrazione del 1703 della proposizione VII del *Quadratura*, si prenda su AV il punto G infinitamente vicino a V (figura 7) e si tracci da esso la parallela HG al segmento DV. Questa incontrerà la curva AQ_nD ($n \geq 1$) in un punto Q_n infinitamente vicino a H da cui si tracci la perpendicolare al segmento HG che tagli DV in T_n. Si consideri ora la tangente in D alla curva AQ_nD e si indichi con W_n il punto in cui essa incontra il segmento AV, in modo che W_nV sia la sottotangente a questa curva relativa al punto D e all'asse AV. Ponendo allora $AV = DV = a$ non sarà difficile trarre l'identità:[69] $W_nV = a/2n$ da cui - confondendo Q_n con P_n, ovvero l'arco infinitesimo di curva Q_nD con la corrispondente porzione P_nD della sua tangente - Grandi trae: $DT_n = 2nGV$. Ripetendo la stessa procedura su tutte le curve AQ_kD (k = 1, 2, 3, &c.) troveremo su DV una collezione di punti T_k (k = 1, 2, 3, &c.) tali che, per ogni k, $DT_k = 2kGV$. Si indichi ora con F il punto medio di AV e si ponga $FV = z$ e $GV = dz$;[70] la somma infinta delle differenze infinitesime $T_{2k}V$- $T_{2k+1}V$ (k = 0, 1, 2, &c. e $T_0V = DV$) sarà rappresentata allora dalla serie:

---

[68]Cfr. *ivi*, p. 268.

[69]Cfr. la precedente nota (48).

[70]Cfr. *sotto*.

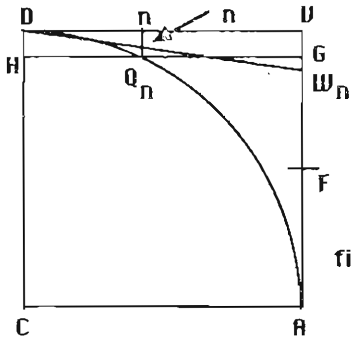


fig. 7

(25) $$\sum_{k=0}^{\infty} T_{2k}T_{2k+1} = \sum_{k=0}^{\infty} [(a-4kdz) - (a-(4k+2)dz)]$$

che Grandi considera uguale alla serie[71] $\sum_{k=0}^{\infty} (-)^k [a - 2kdz]$, le cui ridotte parziali di ordine $2n$-1 e $2n$ sono rispettivamente uguali a $2ndz$ e a-$2ndz$. Ora, continua Grandi,

> esprima [...] il numero[72] $2n$ l'altissimo grado infinitesimo dell'ultima parabola, che concepire si possa; dunque l'aggregato di tutte quell'infinite differenze, ò sarà uguale ad infinite dz, ò pure alla quantità a, detrattane infinite dz; ma infinite dz fanno l'intera z cioè FV; e la quantità a, cioè la DV, ovvero l'AV detrattane la stessa z, che comprende l'infinite dz, che vuol dire FV, ci dà la residua AF; dunque l'infinite differenze suddette esser debbono eguali ò alla FV, ò alla AF, ciascuna delle quali è appunto la metà di DV.[73]

E così,

> se [...] l'Avversario ha difficoltà d'ammettere, che la stessa precisa linea DV infinite volte posta, e levata lasci la metà di se stessa, potrebbe in quel cambio pigliare DV, meno T_1V; con T_2V, meno T_3V, &c.. E così non sarebbero infiniti zeri, ma infinite parti infinitesime, che sarebbero qualche quantità.[74]

---

[71]E' chiaro che un simile riordinamento non permette di mantenere la corrispondenza fra la serie e la somma infinita delle differenze $T_{2k}T_{2k+1}$, la quale corrisponde peraltro alla serie $\sum_{k=0}^{\infty} Q_{2k+1}Q_{2k}$ valutata in un punto infinitamente vicino a V. Allo stesso risultato si può così pervenire direttamente senza passare per la considerazione delle tangenti, come ho d'altra parte proposto alla fine del precedente paragrafo III.1.ε..

[72]Grandi scrive in realtà m invece di $2n$ lasciando implicito il riferimento a un numero pari.

[73]Cfr. *ivi*, pp. 270-71.

[74]Cfr. *ivi*, pp. 269-70.

L'argomento di Grandi è chiaramente errato e non solo in quanto esso richiede un riordinamento non concesso (o - se si preferisce - una considerazione di ridotte parziali non appartenenti alla serie originaria, dimostrata uguale al seno verso dell'arco BZ).[75] Se è pur vero infatti che questi pone nel corso della sia dimostrazione l'identità FV = z è anche chiaro che questa è assolutamente arbitraria e del tutto incompatibile con la scelta di AV = a come ascissa del punto D in cui sono prese le tangenti alle curve AQ_nD. Se infatti assumiamo la posizione GV = dz che permette di trarre la (25), avremo integrando nel punto V, $\left[\int_0^x dz\right]_{x=a} = a$ ciò che, in linguaggio moderno, conduce a valutare la serie riordinata - che può dopo tutto essere considerata indipendentemente dal procedimento che l'ha originata - come una serie dotata di una classe limite $\{0, a\}$. La certezza che Grandi ha ormai maturato nel suo risultato è tale che la prospettiva di trovarne una conferma lo conduce non solo alla più evidenti delle circolarità, ma perfino alla postulazione arbitraria di un'identità contraddittoria rispetto allo stesso svolgersi della sua dimostrazione. E' così dubbio che l'individuazione di un tale errore e la sua correzione avrebbero condotto Grandi a tornare sui suoi passi e a vedere nella sua costruzione una prova dell'erroneità, piuttosto che della correttezza della (1).

La fallacia della dimostrazione non esaurisce tuttavia l'interesse dell'argomento cui essa dà luogo. Sintomatica è infatti anche la disinvoltura con la quale Grandi fa uso, nel corso della prova, dello stesso principio che egli intende dimostrare, asserendo *a priori* che il prodotto $\infty \cdot dz$ è uguale a z. Certo, qui egli si richiama a una pratica matematica corrente, ma è proprio l'usualità di questa assunzione nei procedimenti del *calcolo* leibniziano che avrebbe potuto mostrare ai suoi occhi la natura del tutto differente del risultato espresso dalla (1), il quale non sembra per nulla riducibile all'assunzione del carattere finito di una somma infinita di infinitamente piccoli. Qualche perplessità Grandi deve d'altra parte averla nutrita sulla cogenza del suo stesso argomento se, nonostante le "approvazioni" di Leibniz,[76] egli reputa alla fine più opportuno accantonarlo.

> Ma - egli scrive - per quanto sembri chiaro e speditissimo questo modo di esporre quel mio paradosso, per renderlo più agevole ad essere conceputo, io non stimerei opportuno di servirmene, giacché niuna necessità abbiamo di abban-

---

[75] Cfr. la precedente nota (71).

[76] Ecco a questo proposito come Grandi presenta il precedente argomento [cfr. *ivi*, p. 268]:

> [...] esporrò qui candidamente i pensieri, e le riflessioni da me fatte sopra di ciò, non senza impulso, ed approvazione di un Gran Geometra, che per maggior sicurezza, e franchigia, mi confortava a contenermi in questa contesa tra simili ripari, sperando, che questi riuscir dovessero inaccessibili, non che insuperabili a qualunque assalto degli aggressori.

donare la strada già da noi sopra spianata abbastanza, e ridursi in tali angustie, nelle quali altre difficoltà incontrar si potrebbero.[77]

III. 1. η. *L'intervento di Leibniz: legge di continuità, legge di giustizia*

Implicitamente chiamato in causa da Grandi in un passaggio della *Risposta Apologetica*, Leibniz interviene nel dibattito l'anno successivo, pubblicando sugli *Acta Eruditorum* una recensione della seconda edizione del *Quadratura* e una lettera a Wolff, in cui egli risponde alle perplessità del suo interlocutore circa l'asseribilità della (1).[78] In realtà nella recensione Leibniz non fa che esporre il contenuto del corollario incriminato rinviando per un commento alla lettera successiva,[79] il cui tenore è tutt'altro che ambiguo: rigettate le giustificazioni *a posteriori* presentate da Grandi nel commento al suo risultato e nello scolio successivo,[80] egli afferma in modo esplicito la validità della dimostrazione geometrica del 1703, intesa come una semplice applicazione della *legge di continuità*, e cerca nuove giustificazioni *a posteriori* mediante un ricorso alla *legge di giustizia*.

Tradotto il contenuto della proposizione I del *Quadratura* in termini esplicitamente analitici e riconoscendo in esso lo sviluppo di Mercator,

---

[77]Cfr. *ivi*, p. 271.

[78]Cfr. *Acta eruditorum, Supplementa*, t. V, 1713, pp. 260-64 e 264-70. La lettera a Wolff è anche in Gerhardt (1849-63), vol. V, pp. 282-87.

[79]Ecco come Leibniz si esprime [cfr. *Acta Er., cit.*, p. 261]:

> Circa hoc paradoxum equidem - scrive Leibniz - moneri nonnulla poterant; sed præestat ipsum *calculi infinitesimalis* autorem, *scientæ infiniti* maximum propagatorem, Illustrem *Leibnitium*, in epistola ad Celeb. *Wolffium* nostrum, Matheseos alterum in Germania cum Leibnitio lumen, data, quam mox subjiciemus, de illo differentem audire.

[80]Cfr. a questo proposito il precedente paragrafo III.1.α. e in particolare la nota (6). Mentre l'argomento portato da Leibniz contro la cogenza della "parabola" della pietra preziosa sembra indiscutibile, quello indirizzato a negare l'asseribilità di un'analogia con la creazione à francamente incomprensibile e sembra mostrare peraltro una scarsa attenzione al carattere del tutto particolare della serie di zeri proposta da Grandi [cfr. la conclusione del precedente paragrafo III.1.ε.]. Ecco comunque come Leibniz si esprime [cfr. Gerhardt (1849-63), vol. V, pp. 382 e 385-6]:

> Intelligo, Dn. Grandium hanc vim infinito tribuere, ut ex nihilo faciat aliquid, et hinc non ineleganter illustrare velle Creationem rerum, quæ ex nihilo fit per Divinam omnipotentiam. Sed Creatio non est simplex repetitio Nihilorum, continetque realitem novam et positivam superadditam. [...]
>
> [...] re accuratis considerata, similitudo [gemmæ] hic nimis claudicat, et *primum* quidem quia in casu nostro (ipse sentiente Cl. Grandio) res pendet a privilegio infiniti, quod, secundum ipsum, repetitione ex Nihilo Aliquid faciat. At in casu isto familiæ herciscundæ res æque locum habet, licet finitus sit annorum numerus. [...] Et *secundo* ipsa ratio differentiæ in eo consistit, quod in casu communis juris duorum, alternis possidentium, id quod datur et tollitur, non est totum jus in re, sed usus unius anni, et non nisi totius juris particula: et toto jure in annos distributo, usuque in centum annos concesso, patet usum unius anni non esse nisi centesimam partem juris integri; et ita cum unusquisque hoc modo obtineat quinquaginta centesimas, patet unumquemque totius juris dimidium habere. Des in casu nostro ipsa unitas, ipsum totum (non particula) nunc datur, nunc adimitur.

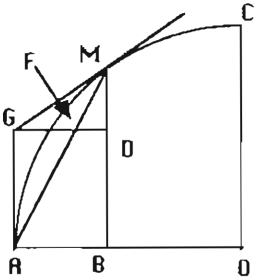
$$(26) \qquad \frac{1}{1 \pm x} = 1 \mp x + x^2 \mp x^3 + \&c.$$

che egli sottopone esplicitamente alla condizione $|x|<1$, Leibniz vuole in primo luogo sottolineare l'utilità di questo risultato per la soluzione di numerosi problemi di quadratura. Tuttavia l'esempio che egli porta non è certamente il più immediato. Invece di limitarsi a mostrare l'utilizzo della (26) nella quadratura dell'iperbole, egli riformula nei termini dell'algoritmo integrale un risultato al quale egli era già pervenuto fin dal 1673[81] e che lo stesso Grandi aveva ripresentato nella proposizione IX del *Quadratura*.[82] Esprimendo l'area di un settore circolare per mezzo dell'area di una curva associata di ordinata razionale[83] Leibniz si era infatti accorto, fin dai suoi primi studi matematici, dell'identità fra tale area e quella della curva di equazione $y = \dfrac{1}{1+x^2}$, in cui la variabile x indica la porzione del raggio sottesa dal settore in questione. Utilizzando la (26) e integrando membro a membro egli trae allora l'identità:

[81]Cfr. Montucla (1799-1802), vol. II, pp. 378-79, il quale rinvia per un'esplicazione del metodo impiegato per giungere a questo risultato a una lettera a Oldenburg del 27 Agosto 1676 [cfr. Gerhardt (1849-63), vol. I, pp. 114-122, in particolare, p. 117] e a Ozanam (1684) e Catelan (1691). Cfr. anche comunque Leibniz (1682) (al quale rinvia lo stesso Leibniz) e Gerhardt (1849-63), vol. V, pp. 88-92.

[82]Cfr. Grandi (1810), pp. 36-7.

[83]Leibniz aveva in particolare trovato che l'area del segmento di cerchio AMF è uguale alla metà dell'area ABD della curva ADC formata dal movimento del punto D d'intersezione fra l'ordinata BM del cerchio e la parallela GD all'asse passante per l'intersezione G fra la tangente in M e quella in A e aveva quindi espresso l'area del settore ABM = Area (seg. AMF) + Area (triang. ABM) come l'area di una curva di ordinata uguale a $\frac{1}{1+x^2}$ (dove x = AB).



$$\frac{1}{2} r \operatorname{Arc} \cos \frac{r-x}{r} = \int_0^x \frac{dx}{1+x^2} = \int_0^x dx - \int_0^x x^2 dx + \int_0^x x^4 dx - \int_0^x x^6 dx + \&c. \tag{27}$$
$$= x - \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} - \frac{x^7}{7} + \&c.$$

che per $x = r = 1$ fornisce la cosiddetta "serie di Leibniz" per lo sviluppo di π:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \&c. \tag{28}$$

L'esempio non è certamente scelto a caso. Oltre a permettere a Leibniz di ricordare una delle sue prime scoperte matematiche, esso indica infatti come la (26), che per $x = \pm 1$ si trasforma in un esempio del "paradosso di Grandi", possa essere trasformata per mezzo di un'integrazione in una nuova serie certamente non solo convergente su tutto l'intervallo chiuso [-1, 1], ma anche tale da produrre, per le sostituzioni incriminat,e un elegante sviluppo numerico. Dietro questa scelta si cela così l'intenzione di fornire implicitamente un ulteriore argomento a favore delle tesi di Grandi che il lettore attento avrebbe potuto affiancare a quelli espliciti contenuti nel prosieguo della lettera.[84]

E' proprio a questi che vale quindi la pena di spostare ora l'attenzione. Il primo passo di Leibniz consiste in una fedele riproduzione della dimostrazione geometrica del 1703 che egli commenta nei termini che seguono:

> Atque hoc consentaneum est *Legi Continuitatis*, a me olim in Novellis Literariis Baylianis primus propositæ, et Legibus Motus applicatæ: unde fit, *ut in continuis extremum exclusivum tractari possit ut inclusivum*, et ita ultimus casus, licet tota natura diversus, pateat in generali lege cæterorum, simulque paradoxa quadam ratione, et ut sit dicam, *Figura Philosophico-rhetorica* punctum in linea, quies in motu, specialis casus in generali contradistincto comprehensus intelligi possit, tanquam punctum sit linea infinite parva seu evanescens, aut quies sit motus evanescens, aliaque id genus, quæ *Joachimus Jungius*, Vir profundissimus, *toleranter vera* appellasset, et quæ inserviunt plurimum ad inveniendi artem, etsi meo judicio aliquid fictionis et imaginaris complectantur, quod tamen reductione ad expressiones ordinarias ita facile rectificatur, ut error intervenire non possit: et alioqui Natura ordinatim semper, non per saltus procedens, legem continuitatis violare nequit.[85]

[84] Se un matematico odierno accetta infatti senza difficoltà l'idea che un'integrazione formale termine a termine possa modificare l'intervallo di convergenza di una serie intera, questa idea non doveva certamente essere così scontata all'inizio del XVIII secolo; l'esempio di Leibniz poteva così porre più di un problema agli oppositori di Grandi, ai quali esso accollava l'onere dell'esplicazione di una circostanza apparentemente tanto "paradossale".

[85] Cfr. Gerhardt (1849-63), vol. V, p. 385.

Ma come realizzare in questo caso la "riduzione a espressioni ordinarie" di ciò che è "fittizio e immaginario"? e come quindi essere certi che questo non può indurre in "errore"? La risposta di Leibniz sembra contenuta nell'ultima proposizione della precedente citazione: per quanto la riduzione appaia qui difficile e anzi tale da produrre conseguenze apparentemente paradossali, la certezza deriva da un assunto di ordine più generale che fa dell'invocata legge di continuità un principio universalmente inviolabile. "La natura non procede per salti". Il problema più urgente non è allora quello di operare la traduzione dall' "immaginario" all' "ordinario" - ciò che a ben guardare non ha alcuna conseguenza relativamente alla certezza del risultato, che è comunque assicurata - ma quello di "eliminare la difficoltà" che la (1) sembra comportare, ovvero di dare ragione, *a posteriori*, tanto della sua verità che della sua apparente paradossalità:

> Verum enim vero hic ostendit se difficultas et a Te, Vir Clarissime, et a Cl. Marchetto merito objecta. Cum enim EV-EV [figura 4] vel 1 - 1 sit 0, nonne sequitur EV-EV+EV-EV+EV-EV+&c. in infinitum, vel 1-1+1-1+1-1+&c. in inf. nihil aliud esse quam 0+0+0+&c.? quod quomodo facere possit 1/2, non apparet.[86]

All' "ingegnosa ma zoppicante" esplicazione di Grandi[87] Leibniz contrappone il proprio richiamo alla "legge di giustizia":

> Nunc ergo veram, et fortasse inexpectatem, certe singularem, *æningmatis* solutionem, et *paradoxi* rationem afferamus, reduendo ad seriem finitam, et deinde transuendo ad infinitam. Considerandum est nempe, casus seriei infinitæ esse duos, inter se distinguendos, eosque in casu seriei infinitæ mira quadam ratione confundi. Nempe series finita 1-1+1-1+&c. dupliciter explicari potest, vel enim constant ex *numero membrorum pari*, et terminatur per -, velut 1-1, aut 1-1+1-1, aut 1-1+1-1+1-1, aut quousque tandem progrediare, quibus casibus semper prodit 0; vel *numero membrorum impari*, et terminatur per +, veluti 1, aut 1-1+1, aut 1-1+1-1+1, aut quousque tandem progrediare, quibus casibus semper prodit 1. At cum *Series* est *infinita*, nempe 1-1+1-1+1-1+&c. in infinitum, ita ut excedat numerum quemqunque, tunc evenescente natura numeri, evanescit etiam paris aut nimparis assignabilitas: et cum ratio nulla sit pro paritate magis aut imparitate, adeoque pro prodeunte 0 magis quam pro 1, fit admirabili naturæ ingenio, ut transitu a finito ad infinitum simul fiat transitus a disjunctivo (jam cessante) ad unum (quod superest) positivum, inter disjunctiva medium. Et quoniam ab iis qui de æstimatione alæ scripsere, ostendum est, cum medium inter duas quantitates pari ratione nitentes sumendum est, sumi debere medium arithmeticum, quod est dimidium summæ, itaque natura rerum eandem hic observat *justitiæ legem*: et proinde cum 1-1+1-1+1-1+&c. in casu finito numeri paris sit 0, at in casu finito numeri terminorum imparis sit 1, sequitur evanescente utroque in casum membrorum multitudine infinitorum, ubi paris imparisque jura confunduntur, et tantundem rationis pro utroque est, prodire $\frac{0+1}{2}=\frac{1}{2}$. Quod proponebatur.[88]

Anche messa a parte la questione relativa alla legittimità di un ricorso ai principi del calcolo delle probabilità per decidere del comportamento di una somma infinita, restano almeno due punti particolari che rendono l'argo-

[86] Cfr. *ivi*.
[87] Cfr. la precedente nota (80).
[88] Cfr. *ivi*, pp. 386-7.

mento di Leibniz perlomeno non cogente. In primo luogo non è difficile osservare che la dimostrazione di Grandi assegna il limite 1/2 alla sola serie $\sum_{k=0}^{\infty}(+)^k [DV - DV]$ e non alla $\sum_{k=0}^{\infty}(-)^k DV$ alla quale invece un tale argomento si riferisce. In secondo luogo, anche nel caso della seconda serie risulta del tutto evidente che la probabilità di avere un valore 1/2 per le ridotte parziali casualmente prese è costantemente zero e ciò rende, da un punto di vista probabilistico, il "paradosso di Grandi" un esempio di discontinuità, piuttosto che di continuità.

Ciò detto è tuttavia certo che sbaglieremmo a concentrare la nostra attenzione su queste pur evidenti e non secondarie inadempienze, per così dire interne allo stesso punto di vista leibniziano. La questione principale che emerge dalla lettura della lettera a Wolff é piuttosto quella della "legge di continuità": incapace di darsi una ragione per l'apparente fallacia a cui sembra condurre tale presupposto metafisico, così profondamente connesso all'intero edificio della propria matematica, Leibniz, come Grandi, cerca infatti affannosamente un'esplicazione che assegni alla (1) una sorta di legalità nascosta. D'altra parte l'arbitro ultimo della verità non può essere certo individuato in una "apparenza di paradossalità" sopratutto se essa si contrappone ai principi stessi di una "metafisica" tanto potente e radicata quale quella che egli ha invocato:

> Porro hoc argumentandi genus, etsi Metaphysisicum magis quam Mathematicum videatur, tamen firmum est: et alioqui Canonum *Veræ Metaphysicæ* (quæ ultra vocabulorum nomenclaturas procedit) major est usus in Mathesi, in Analysi, in ipsa Geometria, quam vulgo putatur.[89]

Leibniz sembra tuttavia scorgere il problema più delicato che il suo approccio comporta: se la continuità è infatti affermata relativamente al valore della somma infinita delle differenze $Q_{2k}Q_{2k+1}$ (k = 0, 1, 2, &c.), essa non può che venir negata relativamente all'estendibilità delle leggi dell'algebra.[90] Egli non trova tuttavia la forza per affrontare apertamente al questione e si limita a un evidente artificio retorico preceduto da un appello al futuro, che come oggi sappiamo, è stato largamente disatteso:

> Interim ex ipsa seriérum et infiniti natura idem colligi, non jucundum tantum, sed etiam ad accuratas de infinito ratiocinationes instituendas, recludendosque magis magisque novæ doctrina fontes, utilissimum futurum est. Simul cavebitur, ne scientia nova per paradoxa minime defendenda infametur. Itaque ab objectionem, quod ex nullitatibus quotcunque minime fieri possit aliquid, non respondendum erat distinguendo inter finitum et infinitum, quasi regula in infinito fallat; sed concessa generaliter regula, ostendendum erat, uti nunc factum est, applicationem ejus hic cessare.[91]

---

[89] Cfr. *ivi*, p. 387.
[90] Cfr. le considerazioni poste all'inizio del precedente paragrafo III.1.ζ..
[91] Cfr. *ivi*.

Probabilmente soddisfatto del sostegno di fondo concesso da Leibniz alla propria tesi principale, Grandi preferì assumere nei confronti della lettera di questi un atteggiamento deferente, riconoscendo la validità delle obiezioni che essa conteneva verso i propri argomenti *a posteriori*, senza rinunciare tuttavia a riaffermarli in termini opportunamente indeboliti.

> [...] doleo animadversionem tuam - egli scrive a Leibniz nel luglio dello stesso anno - ad me non pervenisse, antequam e prælo prodiret, ac pubblica fieret Responsio mea Apologetica ad D. Marchettum: tua enim doctrina usus essem ad rem, quæ vulgo adeo paradoxa, mihi vero certissima videtur, uberius declarandam. Cæterum, ubi creationis mysteriium, in multiplicatione infinita ejus quod per se nihil est, adumbravi, expresse me imperfectam analogiam promovere fassus sum, quæ paritatem omnimodam non postulat; unde quas disparitates attulisti, et ipse perlibenter amplector, sed non prohibent illæ, ne similitudo aliqua inter utramque operationem servetur, quantum satis ad mentem bene compositam persuadendam de possibilitate hujus mysterii, eamque adversus naturæ præjudicia confirmandam. [...] Exemplum illud de Gemma non esse adæquatum ultro agnovi [...], sed rude tantum exemplum, et in speciem vulgo plausibile recognovi [...].[92]

Anche rispetto all'argomento probabilistico di Leibniz l'atteggiamento di Grandi è assai prudente: l'esplicazione è certamente convincente, ma perché dovremmo negare che essa verte in ultima istanza proprio su quella "forza dell'infinito" che Leibniz vorrebbe invece accantonare?

> Eatenus enim in serie infinita confunduntur casus paris et imparis - scrive Grandi -, quatenus demum infinita est; ergo ratio cur illa series fiat = $a/2$, videatur ex Infiniti natura non incommode nec absurde petita: etsi, quomodo postea vis infiniti eo pertingat, non satis fortasse explicuerim, sed ex præclara animadversione tua penitus enucleandum reliquerim.[93]

D'altra parte, continua Grandi,

> Ad hæc certissimum est, partes infinitesimas, quas dx aut dy ex tuo præscripto dicimus, et velut nihil respectivum habemus, dum ex calculo expungimus, ubi ordinarias quantitates tractamus, tales esse, ut quantumlibet multiplicatæ per numerum finitum, adhuc nihil respectivum maneant, et expungi similiter debeant; per numerum vero inifinitum multiplicatæ, jam in quantitatem assignabilem assurgunt, et evadunt = x vel y &c. Cur ergo idem in nihilo absoluto non observetur, quod scilicet, etiamsi per finitum quemlibet numerum multiplicatum adhuc absolute nihil efficiat, nihilominus per infinitum, aut maximum qui concipi possit inter ipsosmet infinitos, illud multiplicando, ideam alicujus quantitatis exsurgere cogat?[94]

La ragione per cui Leibniz aveva evitato di addentrarsi in simili considerazioni, le quali sembrano inevitabilmente condurre alla conclusione preconizzata da Grandi, e aveva al contrario mostrato di voler contrapporre fra loro il proprio argomento probabilistico e ogni esplicazione fondata sulla "forza dell'infinito", è sufficientemente chiara e risiede in ultima istanza nella

---

[92]La lettera di Grandi è in Gerhardt (1849-63), vol. IV, pp. 215-17. Per la citazione cfr. *ivi*, pp. 215-16.
[93]Cfr. *ivi*, p. 216.
[94]Cfr. *ivi*.

difficoltà che lo stesso principio di continuità incontrerebbe qualora si volesse ammettere che una regola algebrica "*in infinitum fallat*". Una tale difficoltà è tuttavia intrinseca alla stessa accettazione della (1) e non è certo una strategia del silenzio che può convenientemente esorcizzarla. Per quanto del tutto inconsapevolmente, Grandi mette così il dito sulla piaga più dolente che le stesse osservazioni di Leibniz avevano lasciata aperta e anzi per molti versi approfondito. La risposta di questi[95] non può così che essere confusa o perlomeno non cogente. La sola via d'uscita, ovvero l'accettazione esplicita del carattere non universale del principio di uniformità, sembra essere infatti per lui del tutto preclusa.

> [...] mea sententia est, sæpius exposita - scrive Leibniz, ritornando su una posizione a lui cara, ma che male si adatta a fornire una risposta ai quesiti posti da Grandi -, infinite parvaspariter atque infinitas quantitates esse fictiones quidem, sed utiles ad ratiocinandum compendiose simul ac tuto. Et sufficere ut capiantur vere tam parvæ quam opus est, ut error sit minore dato; unde ostenditur, nullus. [...] Interea infinite parva concipimus non ut nihila simpliciter et absolute, sed ut nihila respectiva (ut ipse bene notas), id est ut evanescentia quidem in nihilum retinentia tamen characterem ejus quod evanescit. Talia ducta in quantitatem infinitam etiam modificatam concipimus producere quantitatem ordinariam. [...] Certe in nostra Analysi concipimus rectam infinitam modificatam, ut $aa{:}dx$, ductam in dx rectam in nihilum abeuntem vel quod idem est in statum annihilationis rectæ x continue decrescentis producere rectangulum ordinarium aa. [...] Et natura rebus legem continutatis inviolabilem a me olim in Novellis Reipublicæ prioribus apud Batavos editis expositam præscripsit, ut usus earum etiam in physicis ninquam fallat, etsi in illis non demonstratione rigorosa sed convenientæ rationibus constet, ut dicendum sit, Deum ipsum ad eas respexisse.[96]

E' difficile, leggendo queste righe, sfuggire alla sensazione di un uomo, giunto ormai agli ultimi scampoli della sua esistenza, che, incapace di affrontare con nuovo vigore una situazione la quale sembra mettere in discussione una parte così fondamentale del proprio sistema di credenze, si rifugia nella riproposizione di opinioni già espresse, incurante non solo della loro effettiva potenza esplicativa, ma perfino della loro stessa asseribilità alla luce delle evidenze raccolte. Se una soluzione poteva così esser prospettata per la difficoltà, non era certo a Leibniz - e ancor meno a Grandi - che si poteva chiederla.

III. 1. θ. *Le "precauzioni" di Varignon e la nascita di una teoria analitica della convergenza*

Le considerazioni contenute nei paragrafi precedenti dovrebbero rendere chiaro che solo la disponibilità a abbandonare, più o meno consapevolmente, un principio universale di uniformità avrebbe potuto mettere i matematici di primo settecento nelle condizioni di trarre un qualche insegna-

---

[95]Cfr. la lettera a Grandi del 6 Settembre 1713, in Gerhardt (1849-63), vol. IV, pp. 217-220.

[96]Cfr. *ivi*, pp. 218-19.

mento dalla lettura dei testi di Grandi. Una volta che questa disponibilità fosse infine maturata, la scelta certamente meno dispendiosa sarebbe certamente stata quella di rigettare la dimostrazione geometrica del 1703, affermando la possibilità di asserire insieme la proposizione VII del *Quadratura* e la negazione del suo corollario III. Compiere questo passo in termini del tutto espliciti, motivandolo *a priori* e discutendone le implicazioni di ordine generale avrebbe tuttavia condotto in tutta necessità a una trattazione che pochi fra gli intellettuali dell'epoca avrebbero saputo dominare e che poteva d'altra parte, con sufficiente spirito di "pragmaticità", venire evitata, rimandandola eventualmente a tempi più maturi o sperando che l'evoluzione successiva della conoscenza matematica potesse giustificare *a posteriori* o almeno non ricusare come inopportuna la scelta compiuta. E' difficile dire se proprio questa fu la valutazione di Varignon o se questi ebbe dalla sua parte il vantaggio invidiabile di una inconsapevolezza dei termini profondi della questione, accompagnata da una sufficiente competenza matematica che gli permettesse di passare dalla semplice denuncia di assurdità delle conclusioni di Grandi alla determinazione di un insieme di risultati generali che potessero intendersi, almeno in qualche senso, come una soluzione possibile del "paradosso". Sta di fatto che questi presentò nel 1715 una breve memoria[97] esplicitamente dedicata a discutere il caso del "paradosso di Grandi",[98] nella quale - senza fare alcun cenno non solo alla dimostrazione del *Quadratura* o al principio di continuità, su cui essa era basata, ma nemmeno a alcuna considerazione di ordine geometrico o a qualche riflessione riferita a un principio generale di uniformità o a qualche suo esempio o controesempio - fornisce per mezzo di due "teoremi" la determinazione generale delle condizioni di convergenza di una serie sorta dallo sviluppo di una potenza intera negativa di un binomio e dichiara così la questione definitivamente chiusa.

I teoremi di Varignon non differiscono in realtà in termini essenziali da quelli che Jacques I Bernoulli aveva presentato fin dal 1696 negli articoli 36 e 37 della sua *Positionum de seriebus infinitis*.[99] Fornita infatti nel corollario

---

[97]Cfr. Varignon (1715).

[98]L'*ouverture* di Varignon - che Grandi aveva d'altra parte attaccato con veemenza nella sua (1710b) a proposito della sua negazione dei numeri piuccheinfiniti di Wallis - è del tutto inequivoca:

> Au mois d'Octobre 1712 à la campagne, l'usage qu'on m'avoit écrit qu'un Auteur, d'ailleurs habile, venoit de faire de la suite infinie 1-1+1-1+1-1+&c. = 0+0+0+0+0+&c. resultante de la fraction $\frac{1}{1+1}$ divisée à l'infini à la maniere de *Mercator*, pour trouver la possibilité de la création, en croyant cette serie = $\frac{1}{1+1} = \frac{1}{2}$, me revint à l'esprit avec quelques autres méprises sur l'usage des suites ainsi résultants de la division infinie d'autres fraction, que j'avois remarquée dans des Auteur que la crainte de leur faire de la peine, m'empêche de nommer; ce qui me porta à chercher la source ce ces méprises: cette source me parut aussi être celle de pareille méprises qui pouroient se glisser dans l'usage des suites infinies résultas des puissances négatives à la manière de M. Newton.

[99]Cfr. Jacques I Bernoulli (1689-1704), parte III, art. 36-7; anche in Jacques I Bernoulli (1744), vol. II, pp. 749-51.

della proposizione VIII[100] la somma di una serie geometrica qualsiasi a termini decrescenti:

$$(29) \qquad \sum_{k=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} \qquad [|z| < 1]$$

egli trae da questo risultato la conversione in serie di una frazione qualsiasi della forma $\frac{p}{b \pm a}$. Lo sviluppo di questa frazione era ovviamente nel 1696 largamente noto e ad esso si era soliti pervenire tanto per il metodo di Mercator che secondo la regola del binomio. La novità del lavoro di Jacques Bernoulli consiste nel fatto che egli si pone per primo il problema di determinare in generale le condizioni che permettono di intendere questo sviluppo (ottenuto formalmente) come numericamente equivalente alla funzione generatrice. Realizzata la divisione di Mercator, egli sposta infatti l'attenzione dalla serie che ne risulta alla successione dei resti che essa produce:[101]

$$(30) \qquad R_n = \frac{p - (b \pm a)\sum_{k=0}^{n} (\mp)^k \frac{pa^k}{b^{k+1}}}{b \pm a} = (\mp)^{n+1} \frac{pa^{n+1}}{b^{n+1}} \frac{1}{(b \pm a)}$$

che è ovviamente decrescente al crescere di n se e solo se $|a|<|b|$.[102] Secondo Jacques Bernoulli questa è allora una condizione necessaria e sufficiente perché la serie che sorge dalla frazione data secondo la divisione di Mercator possa essere equiparata a una quantità finita, ovvero, come oggi diremmo,

---

[100]Cfr. *ivi*, vol. I, p. 381. Nella proposizione VIII Bernoulli afferma che se $\{a_k\}_0^n$ è una successione geometrica finita allora $\sum_{k=0}^{n-1} a_k = \frac{a_0[a_0 - a_n]}{a_0 - a_1}$. La dimostrazione è banale e non consiste che in una scomposizione della proporzione $a_0 : a_1 = \sum_{k=0}^{n-1} a_k : \sum_{k=1}^{n} a_k$ che, in accordo con la proposizione VII [che ripete la prop. 12 del V libro degli *Elementi*], vale per tutte le successioni geometriche finite $\{a_k\}_0^n$. Un tale risultato si trasforma ovviamente nella (29) (intendendo la condizione $|z|< 1$ come una condizione sufficiente), ponendo $n = \infty$, $a_k = z^k$ e assumendo che per successioni decrescenti $a_\infty = 0$ [cfr. prop. I e VI].

[101]Bernoulli sembra in realtà riferirsi ai resti della divisione, $(b \pm a)R_n = -(\pm)^{n+1} \frac{pa^{n+1}}{b^{n+1}}$ $(n = 1, 2, 3, ...)$ che d'altra parte decrescono se e solo se decrescono i resti R_n della serie. La mia formulazione non fa quindi che generalizzare il ragionamento di Bernoulli senza comportarne alcuna modificazione operativa.

[102]Il riferimento ai valori assoluti non è ovviamente esplicito in Jacques Bernoulli.

abbia un limite finito e sia quindi convergente,[103] e può quindi essere intesa come una condizione necessaria perché questa serie converga alla funzione generatrice.[104] Occorre quindi mostrare che una tale condizione è anche sufficiente. Per questo Jacques Bernoulli trasforma la serie prodotta dalla divisione di Mercator in una somma (algebrica) di due serie geometriche, ciò che gli permette di applicare la (29) e concludere quindi a favore dell'identità cercata:

$$(31)\qquad \sum_{k=0}^{n}(\mp)^k \frac{pa^k}{b^{k+1}} = \frac{p}{b}\left[1\mp\frac{a}{b}\right]\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{a^2}{b^2}\right)^k = \frac{p}{b}\left[1\mp\frac{a}{b}\right]\frac{1}{1-\dfrac{a^2}{b^2}} = \frac{p}{b\pm a}\quad [|b|>|a|]$$

La dimostrazione di Jacques Bernoulli riposa allora interamente sulla (29) (in cui la condizione $|z|<1$ non è intesa che come una semplice condizione sufficiente[105]) e sull'assunto che una serie è numericamente equivalente a una quantità finita se e solo se i suoi resti successivi decrescono (tendendo a zero[106]). Un tale assunto non è ovviamente oggetto di alcuna dimostrazione e è accettato nel testo di Bernoulli come un'evidenza originaria che, in quanto tale, non può che essere fondata su un estensione infinitaria delle leggi algebriche elementari. Queste considerazioni puramente analitiche permettono quindi di scartare *a priori* il caso $a = \pm b$, il quale fornirebbe, se fosse accettato quello che Bernoulli chiama un "*paradoxum* [*sic.*] *non inelegans*":[107]

$$(32)\qquad \frac{p}{b} - \frac{p}{b} + \frac{p}{b} - \frac{p}{b} + \&c. = \frac{p}{2b}$$

> Ratio autem paradoxi est - commenta Bernoulli -, quod continuata divisione ipsius p per $b+a$, residuum divisionis non minuitur, sed perpetuo ipsi p æquale

---

[103] Si noti che benché nel caso in questione la decrescenza di R_n implichi il suo tendere a zero, questo non è ovviamente il caso generale. La condizione richiesta da Jacques Bernoulli è così in generale una condizione necessaria, ma non sufficiente.

[104] In realtà Jacques Bernoulli condensa questo ragionamento in due sole frasi (l'una riferita la caso del binomio $b - a$ e l'altra analoga riferita al caso del binomio $b + a$ che mi paiono tuttavia inequivoche. Relativamente al caso del binomio b la egli scrive a esempio [cfr. *ivi*, vol. II, p. 750]:

> Est igitur quantitas $\frac{p}{b+a} = \frac{p}{b} - \frac{pa}{b^2} + \frac{pa^2}{b^3} - \frac{pa^3}{b^4} + \frac{pa^4}{b^5} - \ldots$ saltem si ponatur $b > a$: tum enim post singulas divisiones reliquum manet, continuo minuitur, donec continuata in infinitum operatione prorsus evanescat.

[105] Cfr. la precedente nota (100).

[106] Questa "precisazione" (che dal nostro punto di vista è tutt'altro che marginale) sembra implicita nel linguaggio di Bernoulli.

[107] Cfr. *ivi*, art. 37, cor. II, p. 751.

manet;[108] unde quotiens divisionis proprie non est sola series $\frac{p}{b} - \frac{p}{b} + \frac{p}{b} - \frac{p}{b} + \ldots$ sed $\frac{p}{b} - \frac{p}{b} + \frac{p}{b} - \frac{p}{b} + \ldots + \text{vel} - \frac{p}{2b}$.[109]

La questione posta dal "paradosso di Grandi" aveva così trovato una risposta matematica con sette anni di anticipo sulla prima edizione del *Quadratura*, quattordici sulla seconda e diciassette sulla lettera di Leibniz a Wolff. Una tale risposta si configurava tuttavia come una esclusione *a priori* della possibilità che delle serie a termini stazionari e a segni alterni esprimessero una quantità finita. E tale esclusione non era basata che su una estensione delle leggi algebriche al caso di somme infinite. Anche nel caso in cui Grandi e Leibniz avessero quindi avuto presente le conclusioni di Jacques I Bernoulli, essi avrebbero potuto intendere la dimostrazione geometrica del corollario III della proposizione VII del *Quadratura* come un'evidenza contraria al risultato che esse esprimevano, basata su considerazioni geometriche che quest'ultimo aveva *a priori* eliminato.

Nonostante questa possibile lettura del risultato di Grandi - la quale sembra chiamare a una giustificazione essenzialmente diversa dell'assunto di Bernoulli, che si prenda almeno il carico negativo di respingere l'argomento *per geometricam continuitatem* dello stesso Grandi e di Leibniz - Varignon non fa nella sua memoria che ripresentare in termini essenzialmente immutati il ragionamento di Bernoulli, dando semplicemente di esso una formulazione più dettagliata e accompagnandolo con un certo numero di esempi. Nel citare il lavoro di quest'ultimo, Varignon afferma in verità di essere giunto del tutto indipendentemente alle sue conclusioni, non avendo verificato che *a posteriori* il loro accordo con quelle cui questi era giunto quasi vent'anni prima. Se non vi é naturalmente nessuna ragione per dubitare della veridicità di questa affermazione, ciò che lascia perplessi è la pretesa di Varignon di fornire nella propria memoria la dimostrazione che Bernoulli avrebbe "trascurato" di dare.[110] Per quanto sinteticamente esposto l'argomento di Bernoulli non è infatti certamente meno esauriente di quello di Varignon e anzi è, in un certo senso, più profondo, riferendosi esplicitamente, a differenza di quello di quest'ultimo, al resto delle serie considerate.

E' proprio su questa assenza di un argomento effettivamente nuovo che io credo valga la pena di insistere nell'analisi della memoria di Varignon, la quale non fa che esorcizzare come assurda la pretesa di Grandi e di Leibniz, senza prendere in nessun modo in considerazione l'argomento positivo su

---

[108] Cfr. le precedenti note (101) e (102).

[109] Cfr. *ivi*, p. 751.

[110] Ecco come Varignon si esprime [cfr. Varignon (1715), p. 204]:

> [...] je trouvai au retour de la campagne, où j'avois découvert tout ce qui suit, que feu M. (Jacques) Bernoulli [questi morì all'età di cinquant'un anni nel 1705] [...] avait remarqué aussi le cas dans lequel ces suites issuës de divisions sont vrayes; mais sans en dire la raison, & sans en rien dire de celui où elles sont fausses [...]. Voici donc la démonstration qu'il a négligé de donner [...].

che essa era fondata: l'evidenza geometrica si piega implicitamente alle ragioni dell'algebra e non ha neppure l'onore di una citazione. Se da un punto di vista del tutto contingente ciò può forse spiegarsi con il fatto che, benché pubblicata solo nel 1718, nel volume dei *Mémoires de l'Académie* per l'anno 1715,[111] tale memoria venne con tutta probabilità effettivamente redatta nelle sue parti essenziali fin dall'autunno del 1712[112] (e quindi precedentemente alla pubblicazione sugli *Acta Eruditorum* della lettera di Leibniz a Wolff), è tuttavia sintomatico che neppure la scesa in campo del "grande" Leibniz a favore di Grandi abbia convinto Varignon della necessità di apportare qualche modifica al proprio testo.

La proposizione I di Varignon è la seguente:

PROP. I La division continuée à l'infini d'une fraction dont le dénominateur est un Binome, ou de deux parties,

I. Donne toûjours vrai lorsque ces deux parties sont inégales, & que la plus grande d'entr'elles est la premiere en diviseur.

II. Au contraire cette division infinie donne toûjours faux, lorsque c'est la moindre de ces deux parties inégales, qui est la premiere en diviseur.

III. Enfin cette division ne donne qu'un Infini qu'on connoissoit déja, lorsque le dénominateur de la fraction n'est que la difference de deux parties égales entr'elles; & lorsqu'il en est la somme, cette division donne toûjours faux.[113]

La proposizione II è d'altra parte del tutto analoga non facendo che riferirsi a una qualsiasi potenza intera negativa di un binomio sviluppato secondo la regola di Newton. Condensando le due proposizioni[114] e traducendo alla luce della dimostrazione di Varignon le locuzioni "dare vero" e "dare falso" in un linguaggio più famigliare, abbiamo quindi il seguente teorema:

Teorema: Per ogni numero naturale n e per ogni binomio $(b \pm a)$, se $|a|<|b|$ lo sviluppo binomiale $B_{-n}[b \pm a]$ della potenza negativa $(b \pm a)^{-n}$ converge al valore di tale potenza e in questo caso l'identità (numerica)

$$(33) \quad (b \pm a)^{-n} = B_{-n}[b \pm a]$$

è quindi *vera*. Se $|a|>|b|$ tale sviluppo diverge tendendo verso un limite infinito, mentre la potenza $(b \pm a)^{-n}$ resta finita; l'identità (numerica) (33) è quindi *falsa*. Infine se $a = b$ tanto lo sviluppo che la potenza generatrice assumono un valore infinito e l'identità (numerica) (33) non contiene quindi alcuna informazione; mentre

[111] La memoria porta la data 16 Febbraio 1715.

[112] Cfr. la citazione riportata nella precedente nota (98). Nella sua memoria Varignon non cita d'altra parte né La *Risposta Apologetica*, né la polemica fra Grandi e Marchetti.

[113] Cfr. *ivi*, pp. 205-6.

[114] Se dal nostro punto di vista la divisione di Mercator non è che che un caso particolare dello sviluppo binomiale, Varignon sembra distinguere fra i due procedimenti, i quali non equivarrebbero fra loro che relativamente ai risultati. Nell'interpretazione intesa di questi la proposizione I e la proposizione II non sembrano quindi fra loro in un rapporto riconducibile a quello fra il caso particolare, $n = 1$ e il caso generale $n = 1, 2, 3, \dots$.

se $a = \pm b$ lo sviluppo si trasforma nella serie $b^{-n} - n^{-n} + \frac{n(n+1)}{2!} b^{-n}$ +&c. e l'identità (numerica) (33) precedente é quindi *falsa.*

La conclusione (implicita) di Varignon è così che l'*impiego*[115] della sostituzione della potenza $(b \pm a)^{-n}$ con lo sviluppo binomiale $B_{-n}[b \pm a]$ (allo scopo di ottenere delle risultanze numeriche) è legittimo se $|a|<|b|$, mentre è del tutto pleonastico qualora $a = b$; in tutti gli altri casi esso è invece illegittimo, conducendo a delle conseguenze false. Se il risultato di Varignon non è così nuovo, così come non è nuovo l'argomento con cui questi lo sostiene, la formulazione dei suoi teoremi e il contesto in cui essi sono presentati segna a mio modo di vedere l'atto di nascita di un punto di vista matematico che dominerà incontrastato durante tutto il XVIII secolo. Non è tuttavia questo che ci interessa qui; è piuttosto opportuno venire alla dimostrazione del teorema I.

Applicando la regola del binomio e trasformando come Bernoulli la serie risultante in una somma (algebrica) di due serie geometriche avremo:

$$(34) \qquad B_{-n}[b \pm a] = \left(\sum_{k=0}^{\infty} (\mp)^k \frac{a^k}{b^{k+1}} \right)^n = \left(\frac{1}{b} \mp \frac{a}{b^2} \right)^n \left[\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a^2}{b^2} \right)^k \right]^n$$

che per $|a|<|b|$ dà, sommando la serie geometrica:[116]

$$(35) \qquad B_{-n}[b \pm a] = \left(\frac{1}{b} \mp \frac{a}{b^2} \right)^n \left[\frac{1}{1 - \frac{a^2}{b^2}} \right]^n = \left[\frac{1}{b \pm a} \right]^n$$

che dimostra la prima parte del teorema: la condizione $|a|<|b|$ è una condizione sufficiente perché l'identità (numerica) (33) sia *vera*. Per dimostrare la seconda parte (la condizione $|a|>|b|$ è una condizione sufficiente perché l'identità (numerica) (33) sia *falsa*), Varignon non fa che osservare che la condizione $|a|>|b|$

---

[115] Cfr. il precedente paragrafo II.2.κ. e l'appendice II.2-A..

[116] Si osservi che Varignon assume come noto il risultato che Bernoulli aveva dimostrato nel corollario della sua proposizione VIII [cfr. la precedente nota (100)]. La condizione $|a|<|b|$ è qui intesa come da Bernoulli come una condizione semplicemente sufficiente.

> rend infinie la somme de la serie G [la serie $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{a^2}{b^2}\right)^k$] [e quindi] [...] la serie [...] $\left(\frac{1}{b} -(\pm)\frac{a}{b^2}\right.$ G, issuë de la fraction $\frac{1}{a\pm b}$ [...] seroit aussi d'une valeur infinie, au lieu que cette fraction $\frac{1}{a\pm b}$ est finie.[117]

Si tratta allora di dimostrare la terza e ultima parte. Ponendo successivamente $a = b$ e $a = \pm b$ la (34) diviene rispettivamente:

$$
(36)\quad
\begin{aligned}
&\text{i)}\ B_{-n}[b\pm a] = \left(\frac{1}{b}+\frac{1}{b}\right)^n [1+1+1+1+1+\&c.]^n = \left[\left(\frac{1}{b}\right)[1+1+1+1+\&c.]\right]^n \\
&\text{ii)}\ B_{-n}[b\pm a] = \left(\frac{1}{b}-\frac{1}{b}\right)^n [1+1+1+1+1+\&c.]^n = \left[\left(\frac{1}{b}\right)[1\text{-}1+1\text{-}1+\ \&c.\right]^n
\end{aligned}
$$

Ora, continua Varignon, la sostituzione del terzo membro della (36)(i) nella (33) "ne nous apprendroit rien, sçachant désja que $\frac{1}{b-b} = \frac{1}{0}$ [=] infini"[118], mentre la sostituzione in essa del terzo membro della (36)(ii) conduce all'identità:[119]

$$
(37)\quad \left(\frac{1}{b+b}\right)^n = \left[\left(\frac{1}{b}\right)[1\text{-}1+1\text{-}1+\ \&c.\right]^n = \left[\frac{1}{b}\left(0+0+0+0+\ldots+\begin{cases}+0\\+1\end{cases}\right)\right]^n
$$

ovvero: $\left(\frac{1}{b+b}\right)^n = \left(\frac{0}{b}\right)^n = 0$ "en supponant pair le nombre des termes de la suite infinie", e $\left(\frac{1}{b+b}\right)^n = \left(\frac{0}{b}+\frac{1}{b}\right)^n = \left(\frac{1}{b}\right)^n$ "en le supposant impaire",

> ce qui seroit faux de part & d'autre - conclude Varignon - quand même il y auroit du pair ou de l'impair dans l'infini, pour lesquels je viens d'ajoûter $\begin{cases}+0\\+1\end{cases}$, sçavoir +0 pour le pair, & +1 pour l'impair: desorte que s'il n'y a ni l'un ni l'autre dans l'infini, cette addition de $\begin{cases}+0\\+1\end{cases}$ pour le dernier terme de la serie, s'y trouvant inu-

[117]Cfr. *ivi*, pp. 206-7.
[118]Cfr. *ivi*, p. 207.
[119]La notazione $+\begin{cases}+0\\+1\end{cases}$ è di Varignon.

tile, l'on auroit seulement ici[120] $\frac{1}{b+b} = \frac{1}{b}$ [0+0+0+0+0+0+&c.] $= \frac{0}{b} = 0$; ce qui seroit encore faux.[121]

La sola osservazione che mi pare opportuno aggiungere all'esposizione di una tale dimostrazione - che alla luce delle precedenti considerazioni si commenta da sé - riguarda l'unico punto di effettiva differenza rispetto all'argomento di Bernoulli: mentre quest'ultimo verteva essenzialmente sull'analisi della successione dei resti, affermando *a priori* che una serie converge se e solo se questa successione è decrescente (e tende a zero), Varignon ragiona sulla serie geometrica in quanto tale servendosi di considerazioni assai simili a quelle sviluppate nel precedente paragrafo III.2.γ. e non traendo da esse che un insieme di condizioni sufficienti, che si trasformano in condizioni necessarie solo alla fine della dimostrazione, grazie all'esaurimento di tutti i casi possibili.

Se, messa a parte questa differenza, l'argomento positivo di Varignon non è per nulla nuovo, egli affianca a esso un argomento negativo che nelle sue intenzioni dovrebbe mostrare in modo assolutamente indubitabile l'assurdità della (1). Ponendo infatti DV = 1 e accettando la riduzione della serie a una somma infinita di zeri su cui è possibile distribuire la moltiplicazione, è facile trarre, per ogni r (appartenente a $\mathbf{R}$[122]) l'identità:

$$(38) \qquad 2r\left(\frac{1}{2}\right) = r = 2r\,[0+0+0+0+0+\&c.] = 0+0+0+0+0+\&c.$$

ovvero:

suivant cette pensée de $\frac{1}{2}$ = 0+0+0+0+0+&c. cette seule & même serie seroit égale à chacun de tous le nombres qu'on pourroit faire signifier à r; & consequemment tous les nombres possibles seroient ainsi égaux entr'eux.[123]

E' evidente tuttavia che la (38) deve dal punto di vista di Grandi (o almeno dall'unico punto di vista non incompatibile con la sua stessa dimostrazione del 1803[124]) essere intesa come una semplice abbreviazione dell'identità:

$$(39) \qquad 2r\left(\frac{1}{2}\right) = r = 2r\,[1-1+1-1+1-1+\&c.] = 2r - 2r + 2r - 2r + 2r - 2r + \&c.$$

---

[120] La citazione è tratta dalla dimostrazione della proposizione I, in cui $n=1$.

[121] Cfr. *ivi*. Il linguaggio di Varignon fa pensare che il brano citato sia stato aggiunto dopo la lettura della lettera di Leibniz a Wolff, in risposta a l'argomento *a posteriori* che essa contiene.

[122] Varignon sembra in realtà riferirsi qui solo a numeri naturali, ma il suo argomento è ovviamente banalmente estendibile a tutti i numeri reali.

[123] Cfr. *ivi*, p. 208.

[124] Cfr. il precedente paragrafo III.1.ε..

che attesterebbe l'equiparabilità di ogni numero con la serie risultante dall'operazione infinitamente protratta del porre e del levare il suo doppio. L'argomento di Varignon è quindi valido solo a condizione di assumere *a priori* l'univocità del risultato delle operazioni algebriche, ovvero la loro indipendenza dall' "origine" dei termine sui quali esse operano. Ancora una volta è così solo una negazione *a priori* non esplicitamente e positivamente giustificata di un assunto di Grandi che regge la conclusione di Varignon e motiva la sua opposizione alla legittimità della (1).

Non sono tuttavia delle petizioni di principi di tal genere che sembrano preoccupare Varignon (il cui obiettivo principale appare proprio quello di indicare le conseguenze dei principi assunti). Il problema cui egli rivolge la propria attenzione è essenzialmente diverso e dipende dalla accettazione incondizionata dei propri teoremi: se lo sviluppo binomiale della potenza $(b\pm a)^{-n}$ non è (numericamente) equiparabile a tale potenza che nel caso in cui $|a|<|b|$, come è possibile trasformare quest'ultima in una serie intera qualora questa condizione non sia verificata? La risposta è affidata da Varignon al corollario I della proposizione I e allo scolio relativo.[125] Generalizzando le affermazioni di questi e riferendosi al caso di uno sviluppo binomiale qualsiasi a esponente intero negativo, essa può venir formulata nei termini che seguono:

Corollario: Per ogni numero naturale n se il binomio $(b\pm a)$, è tale che $|a|>|b|$ allora lo sviluppo binomiale[126] $B_{-n}[\pm a+b]$ della potenza negativa $(\pm a+b)^{-n} = (b\pm a)^{-n}$ converge al valore di tale potenza e in questo caso l'identità (numerica)

$$(40)\quad (b\pm a)^{-n} = B_{-n}[\pm a+b]$$

è quindi *vera*. Se questo binomio è invece tale che $|b|=|a|$ allora si hanno i due casi seguenti: i) se $a = b$ la potenza $(b\pm a)^{-n}$ è essa stessa infinita così come il suo sviluppo binomiale comunque tratto; ii) se $a = \pm b$, sarà sempre il caso che $|b|<|2b\pm a|$ e lo sviluppo binomiale[127] $B_{-n}[(2b\pm a)-b]$ convergerà quindi al valore della potenza $[(2b\pm a)-b]^{-n} = (b\pm a)$; l'identità (numerica)

$$(41)\quad (b\pm a)^{-n} = B_{-n}[(2b\pm a)-b]$$

sarà quindi *vera*.

[125] Il corollario II della stessa proposizione non contiene che l'estensione dei risultati di quest'ultima al caso $n>1$.

[126] Indico ovviamente con $B_\alpha[x+y]$ lo sviluppo binomiale di $(x+y)^\alpha$ secondo le potenze intere positive di y.

[127] Cfr. la precedente nota (126).

Il "suggerimento" di Varignon è quindi esattamente lo stesso che ottant'anni più tardi darà Laplace all'allievo Viguergne.[128] E' proprio generalizzando questo punto di vista a sviluppi qualsiasi che prenderà corpo, nel corso del XVIII secolo, la convinzione di potere per ogni valore di x associare a ogni funzione f(x) una serie intera convergente a tale funzione.[129] Restando tuttavia al caso dello sviluppo binomiale e svolgendo le operazioni indicate nella (41) nel caso in cui $a = \pm b$ si ha facilmente:

$$(42) \qquad (2b)^{-n} = \sum_{k=0}^{\infty} (-)^k \binom{-n}{k} 3^{-n-k}\, b^{-n}$$

e quindi, per $n = 1$[130]

$$\text{i)}\ \frac{1}{2b} = \frac{1}{b}\left[\frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \&c.\right] = \frac{1}{b}\left[\frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{9}}\right] = \frac{1}{2b}$$

(43) ovvero:

$$\text{ii)}\ \frac{1}{2} = \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \frac{1}{27} + \&c. = \frac{\frac{1}{9}}{\frac{1}{3} - \frac{1}{9}} = \frac{1}{2}$$

D'altra parte se R è un numero reale maggiore di 1 e $a = \pm b$, allora sarà sempre il caso che $|(R-1)b| < |(Rb \pm a)|$ e lo sviluppo binomiale $B_{-n}[(R \pm a) - ((R-1)b)]$ convergerà quindi al valore della potenza $[(Rb \pm a) - ((R-1)b)]^{-n} = (b \pm a)$ e quindi, come conclude Varignon,

> On peut trouver de même une infinité d'autres progressions géometriques décroissantes à l'infini, dont les sommes seront chacune $= \frac{1}{1+1}$ sans aucune Enigme, en continuant à l'infini la division d'un fraction quelconque[131] $\frac{1}{v-w}$ d'un dénominateur $v-w = 2$. C'est ainsi qui pour continuer avec succés la division d'une fraction quelconque à l'infini, quelqu'en soit le dénominateur, il le faut toûjours réduire à un de deux parties inégales, dont la plus grande soit la premiere en diviseur: de cette maniere une même fraction quelconque peut toûjours se résoudre non seulement en une infinité de series differentes; mais encore égales [...] chacune à cette fraction, & si visiblement égales, que cette fraction se

[128]Cfr. Il precedente paragrafo II.2-A.α..
[129]Cfr. il Principio II del precedente paragrafo II.2-A.α..
[130]Varignon non trae esplicitamente che la (43)(ii), partendo dall'assunzione $b = 1$, $a = \pm 1$. La generalizzazione del suo procedimento è tuttavia banale.
[131]Modifico qui per ragioni di chiarezza la notazione di Varignon che in luogo di due nuovi simboli letterali, utilizza i medesimi simboli a e b utilizzati per esprimere gli addendi del binomio generico ($b \pm a$).

> retrouve toûjours sans peine être la somme de chacune de ces series continuées à l'infini.[132]

Per quanto Varignon si limiti a proporre l'applicazione di una simile procedura di sviluppo fondata su una opportuna trasformazione identica[133] solo nel caso in cui si ponga l'identità $|a|=|b|$, lo stesso metodo può essere applicato per ottenere lo sviluppo della potenza $(b\pm a)^{-n}$ in serie intera di a (anziché di b) anche qualora sia il caso che $|a|>|b|$.[134] Se la mancata osservazione di questa possibilità si spiega facilmente con una ancora limitata attenzione ai caratteri particolari di una serie intera rispetto a altre forme di sviluppo per una funzione data, sarà proprio a partire da lavori come quello di Varignon che la pratica matematica degli sviluppi in serie intera saprà gradualmente convertirsi in una vera e propria teoria analitica la cui rilevanza nell'edificio della matematica settecentesca può difficilmente essere sopravvalutata.

---

[132] Cfr. *ivi*, pp. 211-12.

[133] Si osservi che le infinite serie numeriche le quali possono venire prodotte secondo il metodo di Varignon per approssimare la frazione $1/2b$ differiscono fra loro relativamente alla velocità della convergenza, in modo che più alta è la velocità di convergenza richiesta maggiore è la base delle successive potenze numeriche della serie e quindi più complessi sono i calcoli necessari a determinare le successive ridotte parziali.

[134] Un esempio di questo adattamento del metodo di Varignon è fornito nel precedente paragrafo II.2-B.δ..

III. 2.
I "TEOREMI" DI TAYLOR E DI BERNOULLI (1692 - 1742)*

III. 2. *a*.
RISULTATI NEWTONIANI

III. 2. *a*. α. *Un lemma dei* ***Principia****: la formula d'interpolazione di Newton-Gregory*

Nel quinto lemma del terzo libro dei *Principia* Newton presenta la soluzione del seguente problema geometrico:

> Invenire lineam curvam generis parabolici, quæ per data quotcunque puncta transabit.[1]

Dati i punti P_1, P_2, ..., P_n, si tracci relativamente a essi un asse AB (figura 1) e siano Q_1P_1, Q_2P_2, ..., Q_nP_n le distanze rispettive di questi punti da tale asse. Il problema è quello di trovare l'espressione polinomiale di una ordinata qualsiasi XY di una curva che passi per i punti dati. Siano a questo scopo: $b_{1,1}$, $b_{1,2}$, ..., $b_{1,n-1}$ i rapporti fra le differenze prime di questi segmenti e le loro rispettive distanze Q_1Q_2, Q_2Q_3, ..., $Q_{n-1}Q_n$; $b_{2,1}$, $b_{2,2}$, ..., $b_{2,n-2}$ i rapporti fra le differenze prime di questi rapporti e le distanze Q_1Q_3, Q_2Q_4, ..., $Q_{n-2}Q_n$; e così via fino a indicare con $b_{n-1,1}$ il rapporto fra la differenza $b_{n-2,1}-b_{n-2,2}$ e la distanza Q_1Q_{n-2}, in modo che si abbia, per ogni α e β (α = 1, 2, ..., n-1; β = 1, 2, ..., n-α) $b_{\alpha,\beta} = \dfrac{b_{\alpha-1,\beta+1} - b_{\alpha-1,\beta}}{Q_\beta Q_{\beta+\alpha}}$ con $b_{0,\nu} = Q_\nu P_\nu$ (ν = 1, 2, ...,n).
Siano ancora: $-Q_1X = p_1$; $-(Q_2X)p_1=p_2$; $(XQ_3)p_2 = p_3$;...; $(XQ_{n-1})p_{n-2}= p_{n-1}$ (in modo che il segno "-" sia riferito alle distanze fra X e i piedi delle ordinate poste alla sua sinistra e quello "+" alle distanze fra X e i piedi delle ordinate poste alla sua destra). La formula proposta da Newton è allora la seguente:

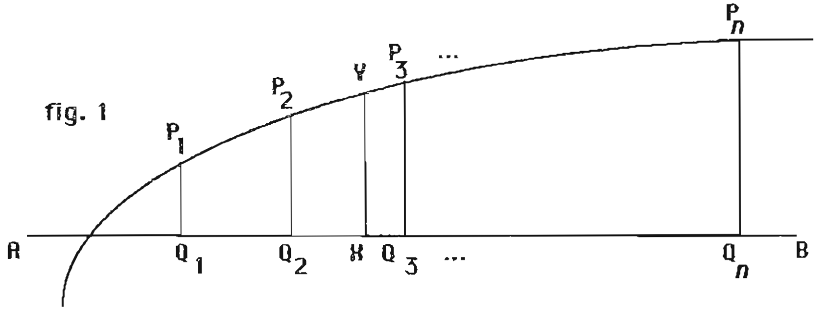
---

*Nelle sezioni *b* e *d* del presente capitolo mi riferirò in larga parte a materiali testuali già analizzati in modo assi penetrante da Lenore Feigenbaum nel suo recente articolo dedicato al "metodo degli incrementi" di Brook Taylor [cfr. Feigenbaum (1985)]. Ciò mi permetterà di evitare numerosi dettagli e di concentrare la mia attenzione su questioni di natura più propriamente interpretativa. Molte delle tesi che sosterrò non sono d'altra parte, che delle riformulazioni, sia pure giustificate in termini spesso diversi, di tesi già avanzate da Feigenbaum, sulle cui valutazioni generali mi trovo d'altronde in perfetto accordo. Sulla storia del "teorema" di Taylor cfr. anche Pringsheim (1900).

[1]Cfr. Newton (1687), p. 481.

(1) $XY = Q_1P_1 + (b_{1,1})(p_1) + (b_{2,1})(p_2) + (b_{3,1})(p_3) + \ldots + (b_{n-1,1})(p_{n-1})$

fig. 1



che è usualmente indicata come la "formula d'interpolazione di Gregory-Newton".[2] Se traducendo in un linguaggio analitico più usuale poniamo $AQ_1 = v$, $Q_1P_1 = y(v)$, $Q_1Q_k = h_{k-1} (k = 2, 3, \ldots, n)$ e $AX = x$ - e quindi $XY = y(x)$, $Q_k P_k = y(v+h_{k-1})$ $(k = 2, 3, \ldots, n)$ - avremo, per ogni β $(\beta = 1, 2, 3, \ldots, n-1)$ $p_\beta = (v-x)(v-x+h_1)(v-x+h_2)\ldots(v-x+h_{\beta-1})$ e $b_{1,\beta} = \dfrac{\Delta y(v+h_{\beta-1})}{h_\beta - h_{\beta-1}}$ (con $h_0 = 0$) a partire dalle quali è possibile costruire ricorsivamente le $b_{\alpha,1} = \dfrac{b_{\alpha-1,2} - b_{\alpha-1,1}}{h_\alpha}$ $(\alpha = 1, 2, \ldots, n-1)$ e quindi la (1). E' chiaro d'altra parte che se le distanze Q_1Q_2, Q_2Q_3, ..., $Q_{n-1}Q_n$ sono fra loro costantemente uguali a h, i segmenti Q_1Q_k $(k = 2, 3, \ldots, n)$ saranno a loro volta uguali al prodotto $(k-1)h$ e le $h_\mu (\mu = 1, 2, \ldots, n-1)$ dovranno quindi essere sostituite dai prodotti μh, ciò che comporta per ogni β $(\beta = 1, 2, \ldots, n-1)$, l'identità $b_{1,\beta} = \dfrac{\Delta y(v+[\beta-1]h)}{h}$ da cui è facile trarre, per ogni α $(\alpha = 1, 2, \ldots, n-1)$, $b_{\alpha,1} = \dfrac{\Delta^\alpha y(v)}{\alpha!\, h^\alpha}$. Invertendo i segni delle p_μ $(\mu = 1, 2, 3, \ldots, n-1)$ rispetto alla convenzione di Newton la (1) assumerà allora la forma:

(2) $$y(x) = y(v) + \frac{\Delta y(v)}{h}(x-v) + \frac{\Delta^2 y(v)}{2!\, h^2}(x-v)(x-v-h) + \ldots + \frac{\Delta^{n-1} y(v)}{(n-1)!\, h^{n-1}}(x-v)(x-v-h)\ldots(x-v-[n-2]h)$$

---

[2]Cfr. Kline (1972), p. 441. Per il riferimento a Gregory cfr. la lettera di Gregory a Collins del 23 Novembre 1670 [cfr. Turbnull-Hall-Tilling (1959-77), vol. 1, pp. 45-48].

Prendendo la differenza h dei valori dell'ascissa come infinitamente piccola e considerando infiniti punti P_1, P_2, &c. la (2) si trasforma ovviamente nello sviluppo di Taylor della funzione $y = y(x)$ relativamente al punto $x = v$. Non solo tuttavia Newton non trae nei *Principia* questa conseguenza, ma egli non fornisce neppure alcuna dimostrazione della sua formula di interpolazione.

III. 2. *a*. β. *Le proposizioni I e II del* <u>*Methodus Differentialis*</u>

Una dimostrazione per una formula di interpolazione differente è invece contenuta nel *Methodus Differentialis*, un breve trattatello composto da sei proposizioni che, benché redatto in forma definitiva solo in vista della sua pubblicazione, a cura di W. Jones nel 1711, in un *pamphet* miscellaneo contenente anche la prima edizione del *De Analysi* e dell'*Enumeratio*,[3] non fa che riformulare (e sviluppare) alcuni risultati già raggiunti da Newton probabilmente fin dall'autunno 1676.[4] Utilizzando per semplicità il linguaggio analitico utilizzato qui sopra, la prima di queste proposizioni può venir riformulata nei termini seguenti.[5]

Prop. I: Se l'ordinata $y = y(v+z)$ di una curva assegnata è uguale alla somma finita o infinita $y(v) + A_1 z + A_2 z^2 + \&c.$, allora le sue differenze prime relative a una qualsiasi differenza $\xi_\beta = h_\beta - h_{\beta-1}$ ($\beta = 1, 2, \&c.$, $h_0 = 0$) delle ascisse sono divisibili per questa differenza, ovvero il rapporto $b_{1,\beta} = \dfrac{\Delta y(v+h_{\beta-1})}{h_\beta - h_{\beta-1}}$ è espresso per mezzo di una forma intera. Questa proprietà vale anche per tutti i successivi rapporti $b_{\alpha,\beta} = \dfrac{b_{\alpha-1,\beta+1} - b_{\alpha-1,\beta}}{h_{\beta+\alpha-1} - h_{\beta-1}}$ relativi alle differenze di ordine superiore, i quali sono quindi tutti espressi per mezzo di una forma intera.

La dimostrazione di Newton consiste semplicemente nell'esporre i risultati delle successive operazioni limitatamente al caso di un ordinata espressa da una somma finita composta da cinque termini $y(v) + A_1 z + A_2 z^2 + A_3 z^3 + A_4 z^4$: la reiterabilità indefinita del procedimento esibito garantisce l'estendibilità della proprietà che questo stesso procedimento manifesta al caso di ordinate espresse tanto da polinomi di ordine qualsiasi che da serie intere. Consideriamo quest'ultimo caso. Essendo facile verificare che per ogni

---

[3]Cfr. Newton 1711, pp. 93-101.

[4]Cfr. Whiteside (1967-81), vol. IV, pp. 54-69. Per i rapporti fra il manoscritto del 1676(?) e il *Methodus differentialis*, cfr. *ivi*, pp. 7 e 54 (nota 1).

[5]Cfr. Newton (1711), pp. 93-4.

β (β = 1, 2, &c.) vale l'identità: $b_{1,\beta} = \sum_{k=1}^{\infty} A_k \left[\sum_{r=0}^{k-1} h_\beta^r \, h_{\beta-1}^{k-1-r} \right]$ è anche facile rendersi conto che per ogni α e per ogni β (α = 1, 2, &c., β = 1, 2, &c.) il rapporto $b_{\alpha,\beta}$ assume la forma $\sum_{k=\alpha}^{\infty} A_k \left[\sum_{k-\alpha} C(h_{\beta-1}, h_{\beta+\alpha-1}) \right]$ dove il simbolo $\left[\sum_{k-\alpha} C(h_{\beta-1}, h_{\beta+\alpha-1}) \right]$ indica la somma dei prodotti risultanti dalla moltiplicazione fra loro dei termini delle composizioni con ripetizione a k-α termini degli α+1 fattori $h_{\beta-1}, h_\beta, h_{\beta+1}, \ldots, h_{\beta+\alpha-1}$. La verifica dell'enunciato di Newton diventa allora immediata.

Si consideri ora un'ordinata $y = y(v+z)$ espressa da un polinomio di grado finito e uguale a n. E' allora evidente che le $b_{1,\beta}$ si trasformano a loro volte in somme finite a n addendi, le $b_{\alpha,\beta}$ sono quindi nulle per ogni $\alpha>n$. Per ogni β si avrà, d'altra parte:

$$
\begin{aligned}
&\text{i)}\ b_{n,\beta} = \sum_{k=n}^{n} A_k \left[\sum_{k-n} C(h_{\beta-1}, h_{\beta+n-1}) \right] = A_n \\
&\text{ii)}\ b_{n-1,\beta} = A_{n-1} + A_n \left[\sum_{1} C\, (h_{\beta-1}, h_{\beta+n-2}) \right] \\
(3)\quad &\text{iii)}\ b_{n-2,\beta} = A_{n-2} + A_{n-1} \left[\sum_{1} C\, (h_{\beta-1}, h_{\beta+n-3}) \right] + A_n \left[\sum_{2} C\, (h_{\beta-1}, h_{\beta+n-3}) \right] \\
&\ldots \\
&\text{n)}\ b_{1,\beta} = \sum_{k=1}^{n} A_k \left[\sum_{k-1} C\, (h_{\beta-1}, h_\beta) \right]
\end{aligned}
$$

Conoscendo i valori di $h_{\beta-1}, h_\beta, h_{\beta+1}, \ldots, h_{\beta+n-1}$ e delle successive ordinate $y(v+h_{\beta-1}), y(v+h_\beta), y(v+h_{\beta+1}), \ldots, y(v+h_{\beta-n-1})$ di una incognita curva polinomiale sarà allora possibile costruire l'espressione di un ordinata qualunque $y(v+z) = y(v) + A_1 z + A_2 z^2 +.. + A_n z^n$ di tale curva. Proprio questo è il contenuto della proposizione II di Newton.[6] Ponendo ora $\beta = 1$ e $z = P_1X$ (figura 1) avremo immediatamente $v+z = x$ e $y(v+h_{\beta-1}) = y(v)$, $y(v+h_\beta) = y(v+h_1), \ldots, y(v+h_{\beta-n-1}) = y(v+h_n)$; è così facile vedere come la nuova costruzione di Newton risolva il medesimo problema posto nel lemma V del terzo libro dei *Principia*, fornendo tuttavia una formula di interpolazione, almeno immediatamente, differente dalla (1).[7] Se le differenze delle ascisse sono prese costantemente uguali a h, la costruzione di Newton conduce

[6]Cfr. *ivi*, p. 95.

[7]Newton dedica alla costruzione di questa formula le proposizioni III e IV del suo trattato [cfr. *ivi*, pp. 95-99].

d'altra parte al sistema:[8]

$$(4) \qquad b_{\alpha,1} = \frac{\Delta^{\alpha} y(v)}{\alpha!\, h^{\alpha}} = \sum_{k=\alpha}^{n} A_k \binom{k-1}{k-\alpha} h^{k-\alpha} = \sum_{k=\alpha}^{n} A_k \frac{(k-1)(k-2)\ldots(k-\alpha+1)}{(\alpha-1)!} h^{k-\alpha}$$

$$[\alpha = 1, 2, 3, \ldots, n]$$

Data l'identità $A_n = \dfrac{\Delta^{n} y(v)}{n!\, h^{n}}$ si potrà trarre, allora, senza alcuna difficoltà: $A_{n-1} = \dfrac{\Delta^{n-1} y(v)}{(n-1)!\, h^{n-1}} - A_n (n-1)h$. Esprimendo la differenza n-esima in funzione della differenza $(n-1)$-esima, si avrà

$$(5) \qquad A_{n-1} = \frac{(2n-1)\, \Delta^{n-1} y(v) - (n-1)\, \Delta^{n-1} y(v+h)}{n!\, h^{n-1}}$$

da cui, ponendo $h=dx$ - e quindi $y(v+h) = y(v+dx) = y(v)$ - segue:

$$(6) \qquad A_{n-1} = \frac{n\, d^{n-1} y(v)}{n!\, dx^{n-1}} = \frac{d^{n-1} y(x)}{(n-1)!\, dx^{n-1}}$$

Non è d'altra parte difficile rendersi conto che la reiterazione del medesimo procedimento conduce in generale all'identità: $A_\alpha = \dfrac{d^{\alpha} y(x)}{(n-1)!\, dx^{n-1}}$. Generalizzando allora la conclusione tratta per il caso finito al caso infinito, sembra possibile trarre, anche dalla costruzione del *Methodus differentialis*, lo sviluppo di Taylor centrato sul punto $x = v$ di una qualsiasi funzione $y = y(x)$. Neanche in questo caso Newton procede tuttavia in questa direzione.

In nessuno dei due casi precedenti la mancata attenzione di Newton verso la comune conseguenza dei propri risultati è per la verità sorprendente. La derivazione di tale conseguenza richiede infatti una concettualizzazione del *calcolo* in quanto estensione della teoria delle differenze finite al caso di differenze infinitamente piccole e questa impostazione non è certamente

[8] La posizione $\beta = 1$ comporta infatti l'identità $h_{\beta-1} = 0$ e il coefficiente numerico di $A_k h^{k-\alpha}$ è quindi uguale al numero delle combinazioni con ripetizione di k-α elementi in un insieme di α elementi, ovvero a $\binom{(\alpha)+(k-\alpha)-1}{k-\alpha} = \binom{k-1}{k-\alpha}$.

quella di Newton. Si può notare, tuttavia, che in entrambi i casi l'assunzione di h come una differenza infinitamente piccola non comporta in nessun modo l'infinitesimalità dei termini successivi dello sviluppo, che si presenta così, a differenza che nel caso della derivazione infinitesimalista classica[9] ($y(x+\xi) = y(x) + A_1\xi + A_2\xi^2 + \&c.$; $\xi = dx$; $dy = A_1dx + A_2dx^2 + \&c. = A_1dx$; $A_1 = dy/dx$, 6&.), come una serie a termini finiti che esprime una quantità finita. Benché faccia un uso esplicito di presupposizioni infinitesimaliste, il precedente argomento conduce quindi allo sviluppo di Taylor senza modificare la natura dei termini successivi della formula di interpolazione da cui questo deriva. Sotto questo aspetto, esso non sembra così differire dall'argomento con cui Newton perviene effettivamente, qualche anno più tardi, alla determinazione di un tale sviluppo.

III. 2. $a.\gamma$. *La proposizione XII della prima versione del De Quadratura*[10]

Benché Newton non giunse alla determinazione di pubblicare il suo trattato *De quadratura curvarum* che nel 1704,[11] in appendice alla prima edizione dell'*Optiks*, egli cominciò a lavorare alla sua redazione fin dall'autunno del 1691,[12] giungendo a stilarne una versione compiuta già nel gennaio del 1692.[13] Nell'estate successiva egli ne inviò a.Wallis un *excerptum* destinato alla pubblicazione, che questi inserì nel XCV capitolo dell'edizione latina dell'*Algebra,*[14] apparsa a Oxford nel 1693.

Enunciata la generalizzazione del teorema relativo alla quadratura di una curva qualsiasi di ordinata $y = ax^\theta(b+cx^\eta)^\lambda$, che Newton aveva formulato fin dal 1676 in una famosa lettera a Oldemburg[15] (che questi aveva a sua volta inviato a Leibniz), l'estratto continua qualificando questo risultato come la conseguenza di una semplice applicazione di un metodo generale contenuto nella soluzione di due problemi reciproci: "*Data æquatione fluentes quotcunque quantitates involvente, fluxiones invenire: et vice versa*". Non mi

---

[9]Ritornerò più volte su questo punto nel corso del presente capitolo e del prossimo capitolo III.4..

[10]Mi permetto qui e nel prossimo paragrafo di riprendere con qualche lieve modifica alcuni brani contenuti nei paragrafi 12-14 del capitolo 3 del mio (1989).

[11]Cfr. Newton (1704b).

[12]Per la storia assai intricata della redazione newtoniana del *De Quadratura* cfr. l'introduzione e le note di Whiteside alla parte I del settimo volume dei *Mathematical Papers* di Newton [cfr. Whiteside (1967-81), vol. VII, pp. 1-182].

[13]Cfr. *ivi*, pp. 48-129. Tale versione venne peraltro anticipata da un *draft* preliminare di una certa ampiezza, anche se largamente incompleto [cfr. *ivi*, pp. 24-47].

[14]Cfr. Wallis (1693), pp. 390-96. Oltre al testo effettivamente pubblicato cfr. anche il testo ricostruito e commentato da Whiteside [Whiteside (1967-81), vol. VII, pp. 170-82].

[15]La lettera, datata 24 Ottobre 1676 (che era già stata citata da Wallis nel suo (1985), pp. 330-33) fu pubblicata poi nel *Commercium Epistolicum* [cfr. Collins (1712), pp. 67-86] e si trova ora in Gerhardt (1849-63), vol. I, pp. 122-47 e in Turbnull-Hall-Tilling (1959-77), vol. II, pp. 110-61. Per una traduzione italiana cfr. Cantelli (1958), pp. 111-30. La generalizzazione presentata nell'*excerptum* di Newton costituisce la prop. IX della versione del gennaio 1692.

soffermerò a considerare la seppur breve chiarificazione aggiunta a una formulazione tanto criptica per chi non avesse letto i numerosi ma ancora inediti trattati in cui Newton aveva esposto i principi del suo nuovo *calcolo*. Ciò che è qui interessante è piuttosto il procedimento generale con cui questi afferma di poter risolvere in ogni occasione il secondo di tali problemi: "*Ex æquatione fluxionem radicis involvente radicem extrahere*". Quella presentata da Newton non è che una semplificazione (relativa al caso di un'equazione del primo ordine) del metodo illustrato nella proposizione XII della versione più completa del suo trattato,[16] il quale fornisce, assegnata una qualsiasi equazione flussionale (ordinaria), un procedimento di costruzione di una serie intera che ne esprime (a meno di una arbitraria costante di integrazione) la soluzione generale. Riferendosi al caso di un'equazione di ordine qualsiasi, tale metodo può venir ricostruito nei termini che seguono.[17]

Sia x una quantità "abbastanza piccola"[18] e sia $F(x, y, \dot{x}, \dot{y}, \ddot{y}, \dddot{y}, \&c.) = 0$ l'equazione proposta, in cui si ponga $\dot{x} = 1$. Sia Kx^{λ} il termine di F in cui l'esponente di x è il minore, relativamente a quelli in cui non compare nessuno dei fattori $y, \dot{y}, \ddot{y}, \dddot{y}$, &c. e $Ax^{\mu_i} y^{\alpha_i} \dot{y}^{\beta_i} \ddot{y}^{\gamma_i}$ &c. il termine generico di F in cui compaia almeno uno dei fattori $y, \dot{y}, \ddot{y}, \dddot{y}$, &c. e sia ancora

$$(7) \qquad \nu_i = \frac{\lambda - \mu_i + \beta_i + 2\gamma_i + 3\delta_i + \&c.}{\alpha_i + \beta_i + \gamma_i + \delta_i + \&c.}$$

un numero associato a tale termine.[19] Sia, inoltre, $\nu = \mathrm{Max}_i\, \nu_i$. Il primo passo nel procedimento di Newton consiste nel porre l'identità:

$$(8) \qquad y(x) = ax^{\nu} + p$$

in cui a è un coefficiente indeterminato e p esprime il resto della serie. Per determinare a basta poi porre in F ax^{ν} al posto di y, ciò che permette di trarre una nuova equazione algebrica $F(x, ax^{\nu}, \nu ax^{\nu-1}, \nu(\nu-1)ax^{\nu-2}, \&c.) = 0$ su cui è possibile applicare il metodo degli indeterminati eguagliandone a zero il coefficiente di x^{λ} e traendo, quindi, un'ulteriore equazione in a che fornisce la determinazione richiesta. Passando alle flussioni si ha, d'altra parte, $\dot{y}(x) = \nu ax^{\nu-1} + \dot{p}$, $\ddot{y}(x) = \nu(\nu-1)ax^{\nu-2} + \ddot{p}$, &c. e quindi, sostituendo: $G(x, p, \dot{p}, \ddot{p}, \&c.) = F(x, ax^{\nu} + p, \nu ax^{\nu-1} + \dot{p}, \nu(\nu-1)ax^{\nu-2} + \ddot{p}) = 0$, da cui si può procedere come in precedenza per determinare il primo termine di p, ovvero il secondo termine della serie che esprime $y(x)$. Reiterando il procedimento si avrà così la serie cercata.

---

[16]Cfr. Whiteside (1967-81), vol. VII, pp. 93-100.

[17]Si noti che nella versione originale del *De Quadratura* tale metodo è presentato come un procedimento atto a esprimere (in serie intera) la soluzione di un'equazione assegnata, la quale non sia integrabile in termine finiti per mezzo di altri procedimenti.

[18]"Quantitas perparva" [cfr. *ivi*, p. 94]. Come sarà chiaro dalla natura del metodo, non vi è nessuna necessità che x sia *infinitamente* piccola.

[19]L'uso di una notazione con gli indici non mi pare modificare in modo rilevante il senso del testo di Newton.

Se x è, per contro, una quantità "abbastanza grande"[20], basta considerare il termine Hx^{ρ} di F, in cui l'esponente di x è il maggiore relativamente a quelli in cui non compare nessuno dei fattori y, $\dot{y}$, $\ddot{y}$, $\dddot{y}$, &c., porre:

$$(9) \qquad \sigma_i = \frac{\rho - \mu_i + \beta_i + 2\gamma_i + 3\delta_i + \&c.}{\alpha_i + \beta_i + \gamma_i + \delta_i + \&c.}$$

e $\sigma = \mathrm{Max}_i\, \sigma_i$ e procedere come in precedenza, assumendo l'identità $y(x) = ax^{\sigma} + p$. Se x non è abbastanza grande, né abbastanza piccolo,[21] basterà porre nell'equazione di partenza $x = w+v$ in modo che v sia abbastanza piccolo e risolvere, come nel primo caso, relativamente a v.

E' chiaro che, in questo terzo caso, il metodo di Newton corrisponde alla progressiva determinazione dei coefficienti di una generica serie intera $[A_0] + A_1(x-w) + A_2(x-w)^2 + A_3(x-w)^3 +$ &c. (dove A_0 è una costante arbitraria di integrazione), la quale è assunta *a priori* uguale a $y(x)$ e sostituita a tale variabile nell'equazione data.[22] Newton presenta questa procedura costruendo la ricorsivamente serie, tramite la considerazione di successive approssima-

[20]"Quantitas permagna" [cfr. *ivi*]. Cfr. la precedente nota (18).

[21]"Magnitudinis alicujus mediocris" [cfr. *ivi*, p. 96].

[22]Un semplice esempio chiarirà il metodo. Data l'equazione $1-x\dot{y} = 0$, si ha, agendo come nel primo caso, $Kx^{\lambda} = 1$, $\lambda = 0$, $\nu_1 = 0$, $\nu = 0$. La prima posizione dovrebbe quindi essere: $y(x) = a+p$. Sostituendo a a y nell'equazione di partenza, si trae, tuttavia, $1\text{-}0 = 0$, ciò che mostra l'impossibilità di esprimere la funzione soluzione centrando la serie sull'origine. Ponendo $x = w+v$, si ha d'altra parte la nuova equazione, $1-w\dot{y}-v\dot{y} = 0$, da cui si trae successivamente:

1] $Kv^{\lambda} = 1$, $\lambda = 0$, $\nu_1 = 1$, $\nu_2 = 0$, $\nu = 1$.

$y(v) = av + p$, $1 - wa - va = 0$, $1 - wa = 0$, $a = \dfrac{1}{w}$,

2] $1 - \left(\dfrac{1}{w} + \dot{p}\right)w - \left(\dfrac{1}{w} + \dot{p}\right)v = \dfrac{v}{w} + w\,\dot{p} + v\,\dot{p} = 0.$

$Kv^{\lambda} = \dfrac{v}{w}$, $\lambda = 1$, $\nu_1 = 2$, $\nu_2 = 1$, $\nu = 2$.

$p(v) = bv^2 + q$, $\dfrac{v}{w} + 2bvw + 2bv^2 = 0$, $\dfrac{1}{w} + 2bw = 0$, $b = -\dfrac{1}{2w^2}$.

3] $\dfrac{v}{w} + \left(-\dfrac{v}{w^2} + \dot{q}\right)w + \left(-\dfrac{v}{w^2} + \dot{q}\right)v = \dfrac{v^2}{w^2} - w\,\dot{q} - w\,\dot{q} = 0.$

$Kv^{\lambda} = \dfrac{v^2}{w^2}$, $\lambda = 2$, $\nu_1 = 3$, $\nu_2 = 2$, $\nu = 3$.

$q(v) = cv^3 + r$, $\dfrac{v^2}{w^2} + 3cwv^2 - 3cv^3 = 0$, $\dfrac{1}{w^2} - 3cw = 0$, $c = \dfrac{1}{3w^3}$

&c.

Da cui:

$$y(v) = \frac{v}{w} - \frac{v^2}{2w^2} + \frac{v^3}{3w^3} - \&c. \ [+ C]$$

ovvero, ponendo $C = \log(w)$ $[w > 0, x > 0]$,

$$y(v) = \log(w+v) = \log(x) = \log(w) + \frac{1}{w}(x-w) - \frac{1}{2w^2}(x-w)^2 + \frac{1}{3w^3}(x-w)^3 - \&c.$$

zioni sempre migliorate e completate da un resto.[23] La condizione di sufficiente piccolezza di *v* corrisponde, così, alla condizione di convergenza della serie e non deve essere confusa con una presupposizione infinitesimalista.[24]

Alla presentazione del proprio metodo, Newton fa seguire un brevissimo commento costituito da due concise osservazioni.

> Et nota - egli scrive - quod si quantitas *y* sit æquationis resolvendæ latus impossibile series prodibit infinite magna: et contra series omnis infinite magna denotat impossibilitatem lateris finiti.
> Nota etiam quod hæc operatio includit operationes omnes Analyticas qua dividimus, radices extrahimus et æquationes affectas resolvimus adeoque ad reductionem quantitatum omnium in series infinitas sufficit. Nam si fluxiones $\dot{y}$, $\ddot{y}$, $\dddot{y}$, &c. desunt, redit operatio ad extractionem radicum vel affectarum si æquationes sunt affectæ vel simplicium si non sunt affectæ vel denique ad divisionem si latus æquationis ad unicam tantum dimensionem ascendit.[25]

Concentriamo la nostra attenzione sulla seconda di queste osservazioni, la quale sembra riducibile alla categorica affermazione della generalità del metodo, che avrebbe la rimarchevole proprietà di condurre a una riduzione in serie di "*ogni quantità*". Vi sono due questioni interessanti sottese da una tale affermazione. La prima riguarda la nozione stessa di *quantità*, che Newton identifica implicitamente con la nozione analitica di *radice di un'equazione* (algebrica o differenziale), preconizzando apertamente la nozione settecentesca di *funzione*.[26] La seconda riguarda invece la generale applicabilità del metodo relativamente all'universo delle equazioni sia algebriche che differenziali.[27] Intesa in questo senso l'affermazione di Newton deve essere sostenuta da due argomenti separati, il primo dei quali sembra essere lasciato da questi del tutto implicito. La semplice esposizione del metodo rende d'altra parte perfettamente evidente che questo non richiede che un'applicazione reiterata, a fianco di semplici procedure algebriche, dell'algoritmo diretto del *calcolo* delle flussioni, ristretto alle funzioni di forma polinomiale: il problema inverso può essere generalmente risolto (sia pure mediante il ricorso a rappresentazioni infinitarie delle fluenti) mediante un semplice ricorso alla più facile delle applicazioni dell'algoritmo diretto.[28] Il problema più delicato è allora relativo alle equazioni algebriche. Se anche in questo caso è infatti evidente la possibilità di procedere secondo le indicazio-

---

[23] Si confronti questo procedimento con quello utilizzato da d'Alembert nel 1754 [cfr. il prossimo paragrafo III.4.*c*.β..

[24] Tornerò più avanti su questo punto.

[25] Cfr. *ivi*.

[26] Cfr. il precedente capitolo II.2..

[27] E' chiaro che il riferimento di Newton è qui unicamente a equazioni differenziali ordinarie. Sulle difficoltà della stessa concettualizzazione di un'equazione ai differenziali parziali dal punto di vista flussionista cfr. Guicciardini 1989.

[28] Dal punto di vista puramente formale è infatti evidente che quale che sia l'equazione differenziale assegnata, il procedimento di Newton conduce - eventualmente con l'ausilio di una traslazione [cfr. la precedente nota (22)] - alla costruzione di una serie soluzione.

ni di Newton, considerando l'equazione assegnata come un'equazione flussionale di tipo particolare, caratterizzata dalla posizione $\beta_i = \gamma_i = \delta_i =$ &c. $= 0$ ($i =$ 1, 2, &c.), nulla ci assicura che l'esito del procedimento sia immancabilmente quello desiderato. Vi sono infatti molte situazioni nelle quali la determinabilità dei coefficienti della serie soluzione dipende dalla soluzione di equazioni analoghe alla soluzione di partenza.[29] Invece di affrontare esplicitamente questa difficoltà, Newton preferisce osservare che nel caso di equazioni algebriche il metodo precedente si riduce a procedimenti già noti e, in particolare, al "metodo del parallelogramma" già esposto nel *de Methodis*.[30] Se consideriamo infatti l'angolo inferiore sinistro della casa del parallelogramma di Newton occupata da un termine della forma Wx^ry^s come un punto di coordinate ortogonali (s, r), una retta che unisce l'angolo inferiore sinistro della casa occupata dal termine Kx^λ all'angolo inferiore sinistro della casa occupata da un termine $Ax^{\mu_i}y^{\alpha_i}$ soddisfa - relativamente al sistema ortogonale così stabilito - l'equazione $y = -\dfrac{\lambda-\mu_i}{\alpha_i}x + \lambda$. Massimizzare il rapporto $\dfrac{\lambda-\mu_i}{\alpha_i}$ significa così scegliere, fra tutte le rette che uniscono la casa occupata dal termine Kx^λ a una delle altre case occupate, quella di coefficiente angolare massimo, ovvero proprio quella prescritta dal "metodo del parallelogramma". Se $Kx^\lambda + Wx^r y^s = 0$ è l'equazione ridotta individuata da questa retta, la prima approssimazione dell'equazione di partenza trovata per mezzo di quest'ultimo metodo sarà allora: $y(x) = -\dfrac{K}{W}x^{\frac{\lambda-r}{s}} + p = -\dfrac{K}{W}x^{\nu} + p$, che è, come è chiaro, analoga all'approssimazione trovata secondo il metodo del *De Quadratura*. Nel caso in cui la ridotta sia invece più complessa, essa potrà venire a sua volta semplificata mediante un'opportuna sostituzione $y = z+v$, e una successiva omissione provvisoria. Non è difficile rendersi conto che anche in tal caso la prima approssimazione proposta per la soluzione dell'equazione di partenza sarà ancora analoga alla (8).

III. 2. *a*. δ. *Ancora sulla proposizione XII della prima versione del* *De Quadratura*: *i quattro corollari*

L'identificazione dei due metodi (nel caso di equazioni algebriche) permette a Newton di rinviare, per ogni difficoltà di ordine particolar,e a considerazioni o esempi già presentati altrove e di passare quindi senza alcun ulteriore chiarimento al primo corollario:

[29] Un esempio è fornito dall'equazione $A_0 + A_1(x+y) + A_2(x+y)^2 +\ldots + A_n(x+y)^n$. E' infatti facile verificare che ν è in questo caso uguale a zero e che la determinazione di a dipende così dalla soluzione dell'equazione $A_0 + A_1a + A_2a^2 + \ldots + A_na^n$.

[30] Per questo riferimento cfr. la nota (101) di Whiteside, *ivi*, pp. 96-97. Per il "metodo del parallelogramma" cfr. invece il precedente paragrafo II.1.θ..

Cor. I: Hinc curvæ omnes per series interminatas convergentes quadrari possunt. Nam si Curvæ ascissa sit x et ejus ordinata reducatur in ejusmodi seriem, dein series tota multiplicetur per x et ejus termini subinde dividatur per indices dignitatum x: series quæ prodit erit area Curvæ, si modo area illa finitæ sit magnitudinis.[31]

E' l'intero programma dell'analisi settecentesca che sembra qui prendere corpo. Se da una parte si delinea infatti, in modo assai chiaro, una generalissima nozione di *funzione*, intesa come soluzione di un'equazione (eventualmente) differenziale, dall'altra si forniscono gli strumenti per passare dalla rappresentazione implicita a quella esplicita e per dare a quest'ultima la forma più conveniente per una generale e immediata applicazione del *calcolo* diretto e inverso. Dietro la dichiarazione di inessenzialità - sia rispetto ai metodi risolutivi, che alle proprietà rappresentative - della distinzione fra equazioni algebriche e equazioni differenziali (o flussionali, che dir si voglia), si profila la consapevolezza dell'inessenzialità della distinzione cartesiana fra *curve* geometriche e meccaniche. L'analisi si è dotata degli strumenti atti a rappresentare e a trattare adeguatamente curve di ogni sorta. La nuova distinzione fra *funzioni* algebriche e trascendenti - che verrà esplicitamente introdotta da Euler - non sarà così che una *sotto*-distinzione fra oggetti analitici e sarà, in quanto tale, profondamente diversa da quella cartesiana: mentre quest'ultima segnava una demarcazione fra domini matematici e metteva capo a un'esclusione, essa segnerà una omogeneità *sostanziale* fra oggetti di *forma* (analitica) differente ai quali si applicano le medesime operazioni e i medesimi principi.

Se infatti il metodo di Newton non si riferisce che a "quantità" rappresentate implicitamente per mezzo di equazioni non è per nulla difficile capire come esso possa estendersi alla costruzione della serie sviluppo di *ogni* funzione, anche data esplicitamente. Considerata a esempio la funzione $y(x) = \sin x$ è possibile porre $z(x) = y(x) - x = \sin x - x$, da cui è facile trarre, passando alle flussioni seconde e ponendo per semplicità $\dot{x} = 1$, $\ddot{z}+x+z = 0$ e quindi, applicando il metodo, $z(x) = -x^3/3! + x^5/5! -$ &c., ovvero: $y(x) = \sin x = x - x^3/3! + x^5/5! -$ &c. . Seguendo le indicazioni della proposizione XII del *De Quadratura* è così possibile sviluppate in serie (intera) tutte le funzioni trascendenti elementari, anche se per questo è necessario presupporre l'algoritmo differenziale per tali funzioni. Se tuttavia si accetta l'idea che una funzione trascendente è definita mediante l'equazione differenziale corrispondente (accompagnata da eventuali condizioni iniziali), la conoscenza dell'algoritmo differenziale per funzioni non polinomiali diventa inessenziale e il metodo di Newton si trasforma in un metodo di sviluppo dipendente unicamente dalla regola di trasformazione $d\,(ax^n) = anx^{n-1}$.[32]

Ciò non significa tuttavia che la semplice assunzione di una tale regola

[31] Cfr. *ivi*, p. 96. Non è difficile verificare che l'operazione prospettata da Newton corrisponde all'integrazione termine a termine relativamente a x.

[32] Si noti che l'algoritmo differenziale per la funzione $y = ax^n$ non svolge qui nessun altro ruolo che quello di una regola formale di trasformazione che conserva l'identità e in base alla quale sono definite le trasformate $\dot{y}, \ddot{y}, \dddot{y}$, &c. della funzione incognita y che entrano nell'equazione funzionale assegnata.

permetta di *dimostrare* in termini generali che ogni funzione, intesa come rappresentazione analitica di una quantità relativamente a altre, sia equivalente, su un intervallo finito, a una serie (intera). Il metodo di Newton non è infatti che un procedimento formale che conduce alla costruzione di una serie a partire da un'equazione data e non contiene in nessun modo la garanzia che la serie prodotta sia associabile alla equazione di partenza secondo una relazione diversa da quella determinata da questo mero procedimento costruttivo. Se infatti accettiamo l'idea che la richiesta di piccolezza per il valore della variabile indipendente non coincida trivialmente con la richiesta di un'infinita piccolezza, non abbiamo nessuna garanzia, neppure di ordine concettuale, per affermare che le omissioni introdotte non conducano che a delle approssimazioni, che la reiterazione del procedimento rende sempre più precise. Così delle due l'una: o assumiamo che Newton pensasse la relazione di sviluppo in termini strettamente formali - ciò che sembra venir contraddetto, fra l'altro, dalla stessa precisazione relativa alla piccolezza della variabile indipendente - o dobbiamo credere che egli disponesse di ragioni indipendenti per assumere *a priori* la riducibilità di ogni funzione in una serie (intera).

D'altra parte, se torniamo per un momento ai risultati esposti nel precedente paragrafo III.2.α. possiamo forse comprendere una di queste ragioni - probabilmente non secondaria. Dimostrato infatti che dato un qualsiasi insieme finito di punti $\{P_1, ..., P_n\}$, comunque collocati, relativamente a un sistema di riferimento costituito da un asse su cui è stata convenzionalmente fissata un'origine, è sempre possibile costruire una curva espressa da un'equazione $y = F(x)$ di forma polinomiale che passi per la totalità di questi punti, non è forse naturale pensare che un polinomio di grado infinito, purché non indefinitamente divergente, possa rappresentare una curva passante per un qualsiasi insieme infinito di punti? E, senza possedere la non triviale distinzione fra differenti cardinalità di un insieme infinito, non è forse naturale pensare che un insieme infinito di punti possa a sua volta dare luogo a una curva e quindi a una funzione, intesa come quantità? Così una forma analitica non intera per una certa quantità o un'equazione algebrica o differenziale possono venir pensate come una rappresentazione di una curva e, quindi, di un insieme di punti, rappresentazione che può, a sua volta, venire convertita in una serie intera, cercando l'espressione polinomiale (di grado infinito) che esprime la curva passante per la totalità di tali punti.[33] Il passaggio dal caso finito al caso infinito comporta certamente la necessità di introdurre delle restrizioni, ma se è dato un metodo costruttivo indefinitamente reiterabile che conduce all'individuazione dei coefficienti successivi del polinomio, perché dovremmo pensare che queste limitazioni debbano essere diverse dalla richiesta di non divergenza della somma prodotta? Il procedimento di Newton sembra mostrare, d'altra parte, la convinzione che questa richiesta possa essere comunque soddisfatta dalla considerazione di valori abbastanza piccoli della variabile indipendente, ma non per questo infinitamente piccoli. L'intervallo così definito si presenta allora come un

[33] Cfr. il precedente paragrafo II.2.ξ..

intervallo di stabilità delle caratteristiche polinomiali della funzione data. Ciò non significa ovviamente che una data funzione sia convertibile in una serie intera solo entro un tale intervallo. Basta infatti introdurre un'opportuna traslazione per rendere possibile la costruzione di una *diversa* serie intera, la quale è equivalente alla funzione data limitatamente a un nuovo intervallo che può non coincidere con quello precedente. Se non sembra che Newton possegga alcun argomento conclusivo a sostegno delle sue generalizzazioni (esplicite o implicite), il successivo sviluppo della ricerca matematica sembra avere mostrato - a dispetto dell'essenziale differenza che vige fra una curva e un insieme infinito di punti - la sostanziale correttezza delle sue intuizioni relativamente alle funzioni cui egli sembra dirigere la propria attenzione e che oggi qualifichiamo come elementari.

Quale che sia il giudizio che si voglia dare *a posteriori* sulle ragioni che possono aver condotto Newton a pensare che ogni "quantità" potesse venir rappresentata da una serie intera, è d'altra parte certo che questa convinzione costituisce il fondamento di un programma di ricerca matematico che la proposizione XII del *De Quadratura* sembra apertamente preannunciare. Newton non si limita tuttavia all'enunciazione di un programma. Egli ne fornisce altresì lo strumento fondamentale. I corollari II, III e IV di tale proposizione contengono infatti una formulazione esplicita del "teorema" di Taylor.

Fornendo una rappresentazione in serie della "radice" $y = y(x)$ di un'equazione qualsiasi, il metodo precedente permette infatti di derivare senza alcuna difficoltà la rappresentazione in serie intere delle sue flussioni di tutti gli ordini (corollario II[34]). Non è d'altra parte difficile rendersi conto, per mezzo di semplicissime sostituzioni, che i successivi coefficienti delle serie così costruite altro non sono, a meno di fattori numerici facilmente determinabili in generale, che le flussioni puntuali di questa stessa radice. I corollari III e VI non fanno che asserire questa identificazione:

Cor. III: Hinc verò si series prodit hujus formæ

(10) $y = ax + bx^2 + cx^3 + dx^4 + ex^5 + \&c.$

(ubi terminorum a, b, c, d, &c. aliqui vel deesse vel negativi esse possunt,) Fluxiones ipsius y, ubi x evaniscit, habentur ponendo $\dot{y}/\dot{x} = a$, $\ddot{y}/\dot{x}^2 = 2b$, $\dddot{y}/\dot{x}^3 = 6c$, [...] [&c.].[35]

Cor. IV: Et hinc si in æquatione resolvenda scribatur $w+v$ pro x ut in casu tertio et resolvendo æquationem prodeat series

[34]Si ha qui [cfr. *ivi*, p. 96] un analogo del corollario 1, relativamente al calcolo diretto: Cor. II: Ubi quantitas y ex æquatione resolvenda extrahitur, ejus fluxiones $\dot{y}, \ddot{y}, \dddot{y}$, &c. simul prodeunt. Nam si termini seriei multiplicetur per indices dignitatum x ac deinde dividantur per z, series quæ prodit æqualis erit $\dot{y}/\dot{x}$ et si termini hujus seriei similiter multiplicetur per indices dignitatum x & subinde dividantur per x series quæ jam prodit æqualis erit $\ddot{y}/\dot{x}^2$ & operatione repetita prodibit series nova æqualis $\dddot{y}/\dot{x}^3$ & sic deinceps in infinitum.

[35]Cfr. *ivi*, pp. 96-8.

(11) $[y =]\ ev + fvv + gv^3 + hv^4 + \&c.$,

fluxiones ipsius y ex assumpta utcunque magnitudine ipsius x habebuntur in æquationis finitis ponendo $v = 0$ et $w = x$. Nam tales erunt æquationes $\dot{y}/\dot{x} = e$, $\ddot{y}/\dot{x}^2 = 2f$, $\dddot{y}/\dot{x}^3 = 6g$, [...] &c. per Corollarium superius collectæ.

Ciò che certamente è più sorprendente per il lettore moderno è che Newton, lungi dall'intendere le identificazioni alle quali è pervenuto come una determinazione generale dei coefficienti della serie intera che costituisce lo sviluppo di una funzione assegnata, legge il proprio risultato in termini invertiti, vedendo in esso la determinazione delle derivate puntuali della funzione-soluzione (generale) dell'equazione assegnata. Il metodo della proposizione XII - egli conclude - oltre a condurre alla rappresentazione in serie della radice di un'equazione qualsiasi (algebrica o differenziale), permette così di determinare in forma finita le successive flussioni puntuali di tale radice, riducendone la ricerca alla soluzione di semplici equazioni del primo ordine:

Igitur æquatio resolvenda quæ fluxionem secundam aliasque $\ddot{y}$, $\dddot{y}$, &c. involvebat reducitur ad æquationem finitam $\dot{y}/\dot{x} = e$ quæ fluxionem primam solummodo involvit, et superest ut per Propositionem præcedentem investigetur huius reductio in æquationem finita in qua solæ fluentes quantitates y et x inveniantur.[36]

Per quanto l'inadeguata notazione utilizzata da Newton[37] renda fortemente ambiguo il contenuto dei suoi corollari, sembra difficile accettare l'interpretazione di Whiteside che vede in questa affermazione una confusione fra "la derivata generale $y'_x \equiv \dot{y}/\dot{x}$" e "il suo valore particolare $y'_w = e$".[38] Introducendo una notazione più opportuna i risultati enunciati da Newton possono allora riformularsi nei termini seguenti:

Se le serie $y(x) = A_0 + \sum_{k=1}^{\infty} A_k x^k$ $[x \in (-\delta, \delta)]$ e $y(x) = B_0 + \sum_{k=1}^{\infty} B_k (x - w)^k$ $[x \in (w-\eta, w+\eta)]$ esprimono la soluzione (generale)[39] di un'equazione (algebrica o differenziale) assegnata, allora le successive flussioni della

---

[36]Cfr. *ivi*, p. 98.

[37]Si osservi che l'inadeguatezza della notazione newtoniana non ha nulla a che vedere (almeno sotto l'aspetto di cui è qui questione) con l'uso delle lettere sovrappuntate per indicare le flussioni. La questione riguarda piuttosto la mancata esplicitazione del legame funzionale fra la flussione e la variabile indipendente a cui essa si riferisce.

[38]Cfr. *ivi*, nota (100), p. 99.

[39]Per quanto Newton non dedichi alcuna considerazione al problema posto dall'evidente pluralità delle soluzioni delle equazioni funzionali che egli considera, sembra difficile pensare che egli non si sia accorto della possibilità di pervenire, mediante il suo stesso metodo, a delle determinazioni non univoche dei coefficienti della serie soluzione, così come è del tutto certo che egli si fosse reso conto della necessità di aggiungere a queste delle costanti arbitrarie (determinabili in relazione a certe condizioni iniziali). Del tutto diverso è invece il caso delle soluzioni singolari, che Newton sembra ben lungi dal prendere in considerazione.

"quantità" y calcolate nei punti $x = 0$ e $x = w$ sono rispettivamente uguali, a meno di un fattore numerico, ai coefficienti A_k e B_k (k = 1, 2, &c.) di queste serie. In particolare si avrà:

$$(12) \quad \begin{array}{l} \text{i)}\ \frac{1}{k!}\left(\overset{(k)}{y}/\dot{x}^k\right)_{x=0} = A_k \\ \text{ii)}\ \frac{1}{k!}\left(\overset{(k)}{y}/\dot{x}^k\right)_{x=w} = B_k \end{array}$$

Considerando w come una variabile e ponendo $k = 1$ si avrà allora (essendo in generale $B_1 = B_1(w)$):[40]

$$(13) \qquad y(x) = \left(\int B_1(w)\ dw\right)_{w\,=\,x}$$

Se la dimostrazione della (12) non sembra comportare alcuna difficoltà,[41] ben diverso è il caso della (13) che Newton sembra tuttavia presentare come una ovvia conseguenza del suo corollario IV. E' forse proprio l'intuizione delle difficoltà relative a questa conclusione - che, nell'economia del testo, sembra presentarsi come l'obiettivo finale a cui tende l'intero argomento costituito dalla proposizione XII e dai suoi corollari - che condusse Newton a escludere i propri risultati dalla versione finale del *De Quadratura* che egli diede alle stampe dodici anni più tardi. Se l'impostazione dei primi trattati che questi aveva dedicato al *calcolo*[42] aveva infatti assegnato agli sviluppi in serie un ruolo assolutamente centrale, legato a un evidente programma di estensione e autonomizzazione dell'analisi, lo stesso non sembra potersi dire per i testi successivi, in cui non è al contrario difficile scorgere una sempre più evidente esigenza di perspicuità geometrica, la quale sposta gradatamente l'attenzione verso il problema delle quadrature finite, che è nel 1704 il fulcro essenziale della prima pubblicazione newtoniana dedicata al *calcolo* delle flussioni. In questo nuovo quadro la stessa proposizione XII del manoscritto del 1692 - la quale sembra testimoniare la permanenza di una problematica che aveva già a quel tempo perduto agli occhi di Newton molta della sua importanza - diventa, sopratutto se privata del suo esito finale costituito dalla (13), largamente marginale, trasformandosi in una brevissimo accenno che non ha altro scopo che quello di giustificare una conclusione di

[40] L'uso della notazione integrale mi pare qui, se non indispensabile, certamente consigliato da ragioni di semplicità e intelligibilità.

[41] Si noti che, in quanto tale, la (12) non si riferisce che ai coefficienti di una serie che è *già* stata individuata (o assunta) come lo sviluppo di una funzione assegnata (in termini impliciti).

[42] Mi riferisco qui principalmente al *Trattato dell'Ottobre 1666*, al *De Analysi* e al *De Methodis* [cfr. rispettivamente Whiteside (1967-81): vol. I, pp. 400-48; vol. II, pp. 206-47 e vol. III, pp. 32-353.

natura espressamente geometrica. Nello scolio conclusivo del suo *pamphet*[43] Newton si limita infatti a affermare che le flussioni degli ordini superiori "sunt ut termini serierum infinitarum convergentium",[44] così come risulta chiaro dall'esempio della fluente $y = x^m$, le cui flussioni sono proporzionali ai termini della serie binomiale in cui si sviluppa la "quantità" $y(x+o) = (x+o)^m$. Tali flussioni - continua Newton- possono d'altra parte venire rappresentate come ordinate di una successione di curve, ognuna uguale all'area della curva precedente. Se la fluente y è rappresentata dall'ordinata BH (figura 2) si ha allora:[45]

$$
\begin{array}{ll}
& y_{[n]}(x) = BH = \dfrac{\text{Area}(AGB)}{1} \left(= \displaystyle\int_0^x y_{[n-1]}(x)\, dx \right) \\[2ex]
& \dot{y}_{[n]}(x) \propto BG = \dfrac{\text{Area}(AFB)}{1} \left(= y_{[n-1]}(x) = \displaystyle\int_0^x y_{[n-2]}(x)\, dx \right) \\[2ex]
(14) & \ddot{y}_{[n]}(x) \propto BF = \dfrac{\text{Area}(AEB)}{1} \left(= y_{[n-2]}(x) = \displaystyle\int_0^x y_{[n-3]}(x)\, dx \right) \\[2ex]
& \dddot{y}_{[n]}(x) \propto BE = \dfrac{\text{Area}(ADB)}{1} \left(= y_{[n-3]}(x) = \displaystyle\int_0^x y_{[n-4]}(x)\, dx \right) \\[2ex]
& \&c.
\end{array}
$$

Gli stessi esempi che Newton sceglie per illustrare il suo risultato sono d'altra parte sintomatici di un'interpretazione che lo lega, piuttosto che alla teoria generale degli sviluppi in serie intera di una funzione qualsiasi, al problema dell'integrazione finita delle equazioni flussionali. A questo scopo egli presenta infatti la soluzione "per quadratura" di alcune equazioni di questo genere, in cui la ricerca della flussione possa ridursi alla ricerca di un' "area" della successione precedente.

Nonostante questa marginalizzazione operata da Newton nei confronti del proprio risultato del 1692 e, più in generale, della problematica matematica entro la quale esso trova una collocazione assolutamente centrale, la correlazione oggettiva manifestata dalla (12) saprà gradualmente ritrovare, negli anni successivi - dopo essere stato "riscoperta" da Brook Taylor[46] nel 1715 - tutta la sua centralità, tanto entro un contesto schiettamente geometrico come quello di Maclaurin[47] che entro lo stesso programma analitico

[13]Cfr. Newton (1704b), pp. 207-11.
[4]Cfr. *ivi*, p. 207.
[5]L'introduzione di un fattore unitario permette di esprimere la bidimesionalità dell'area pur garantendo le identità richieste.
[6]Cfr. il prossimo paragrafo III.2.γ..
[7]Cfr. il prossimo paragrafo III.2.*b*.α..

inaugurato da Euler,[48] il quale sembra d'altra parte segnare un esplicito ritorno all'impostazione matematica del giovane Newton.[49]

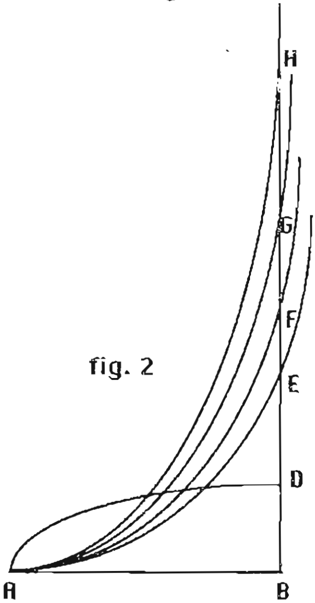


fig. 2

Se questa è di per sé una ragione per riconoscere nei corollari della proposizione XII dell'originale versione del *De Quadratura* un'acquisizione matematica di rilievo essenziale, io credo che i motivi di interesse che questi ultimi mantengono per un lettore non coevo trascendano abbondantemente questa ragione, che in quanto tale non verte che sulla (12), intesa indipendentemente dalla prova fornitane da Newton e dall'interpretazione che essa manifesta. Ho già presentato nel precedente paragrafo II.2-B.δ. una lettura possibile dei corollari III e IV, la quale esplicita le condizioni di validità che Newton sembra assegnare alle (12), indicando le differenze profonde che vigono fra (12)(i) e (12)(ii). Non ritornerò su questo punto. Ciò che mi interessa sottolineare qui è invece il carattere strettamente formale della dimostrazione newtoniana e la sua dipendenza da un'assunzione *a priori* che asserisce la sviluppabilità di ogni funzione (leggi: soluzione di un'equazione) in una serie intera. La dimostrazione di Newton è infatti cogente se e solo se si assume che per ogni funzione di una data variabile x e per ogni valore di questa variabile, esiste un polinomio di primo grado in x, $g(x)$, tale che esiste almeno una serie intera $\sum_{k=0}^{\infty} B_k [g(x)]^k$ (numericamente) equivalente alla funzione assegnata qualora $g(x)$ appartenga a un dato

[48]Cfr. il prossimo capitolo III.4..

[49]Spero che le evidenze testuali e i risultati delle analisi condotte nella presente dissertazioni, comparati a quelli tratti nel terzo capitolo del mio (1979) siano un argomento sufficiente per sostenere questa tesi.

intervallo centrato sullo zero e di raggio non nullo. Lungi dall'essere una conclusione della dimostrazione questa è quindi una sua premessa. Tutto ciò che il teorema ci dice è che i coefficienti di una serie presupposta come esistente hanno una certa forma e, essendo questa forma univoca, che la serie è *unica*. Questa impostazione resterà una costante in numerose dimostrazioni successive, che ripeteranno fedelmente il percorso newtoniano, pur evitando l'intermediario costituito dalla presentazione di un metodo autonomo di sviluppo. Posta l'equiparazione arbitraria fra una funzione qualsiasi e una serie intera generica (a coefficienti indeterminati), queste dimostrazioni procedono differenziando successivamente l'equazione infinitaria così ottenuta e introducendo volta a volta sostituzioni opportune atte a annullare tutti i termini delle serie prodotte tranne il primo, che è così identificato con il differenziale della funzione assegnata.[50] Se questa impostazione manifesta una concezione operazionalista del *calcolo*, le cui regole formali agiscono in essa del tutto indipendentemente dal "significato" che è stato loro assegnato,[51] essa non può venir congiunta alla lettura da sinistra a destra delle identità (12) (ovvero alla loro interpretazione come determinazioni delle flussioni a partire dei coefficienti e non viceversa) che a condizione che sia stato precedentemente fornito un metodo indipendente di sviluppo. Così l'autonomizzazione del contenuto dei corollari III e IV da quello della proposizione XII comporta inevitabilmente - a fronte del mantenimento dell'impostazione operazionalista newtoniana - una lettura invertita del risultato che essa esibisce. Il "teorema" di Taylor assume quindi la natura di un risultato generale, il quale presiede a un metodo di sviluppo fornendo una determinazione universale della forma dei coefficienti della serie cercata. Sarà Lagrange che, del tutto all'oscuro del precedente newtoniano, tornerà a prospettare una lettura diversa, intendendo le (12) come una vera e propria definizione della derivata di ordine k.[52]

III. 2. *b*.
IL TEOREMA III DELLA <u>METHODUS INCREMENTORUM</u> DI BROOK TAYLOR E IL SUO COROLLARIO II

III. 2. *b*. α. *Gli enunciati*

Il "teorema" di Taylor prende come è noto il proprio nome da quello

[50]Cfr. la dimostrazione (classica) presentata nel precedente paragrafo III.2.κ.. Se questo non fu, come vedremo, il percorso argomentativo seguito da Taylor nel 1715, già due anni dopo Stirling [cfr. Stirling (1717), pp. 32-33] seguì questa strada per pervenire a una giustificazione alternativa del risultato di questi.

[51]E' chiaro che la stessa dimostrazione può banalmente ripetersi, giungendo agli stessi esiti, anche qualora si faccia uso in essa, invece che dell'algoritmo differenziale, di un algoritmo diverso che ne condivida alcune proprietà strutturali [cfr. a questo proposito la nota (82) del prossimo paragrafo III.6.*b*.α.].

[52]Cfr. i prossimi capitoli III.4. e III.6..

del matematico inglese Brook Taylor che per primo lo enunciò in termini espliciti in un'opera a stampa, sotto la forma di una equiparazione fra la differenza finita di una funzione qualsiasi $y = y(x)$ e una serie intera ordinata secondo le potenze crescenti dell'incremento ξ della variabile principale. Un tale risultato costituisce il corollario II del teorema III della *Methodus incrementorum directa et inversa*, pubblicata a Londra nel 1715.[53]

Ecco l'enunciato di tale teorema:

Teor. III: Sint z et x quantitates duæ variabiles, quarum z uniformiter augetur per data incrementa $\underset{.}{z}$ et fit $n\underset{.}{z} = v$; $v - \underset{.}{z} = \dot{v}$, $\dot{v} - \underset{.}{z} = \ddot{v}$, et sic porrò. Tum dico quod quo tempore z crescendo fit $z+v$, x item crescendo fiet [54]

$$(15)\ x + \underset{.}{x}\frac{v}{1\underset{.}{z}} + \underset{..}{x}\frac{v\dot{v}}{1\cdot 2\ \underset{.}{z}^2} + \underset{...}{x}\frac{v\dot{v}\ddot{v}}{1\cdot 2\cdot 3\ \underset{.}{z}^3} + \&c.$$

Introducendo una notazione più usuale e distinguendo fra le variabili e i loro valori non è difficile dare alla (15) una forma più agevolmente intelligibile. Siano a questo proposito x e y due quantità variabili di cui la prima cresca in modo uniforme relativamente a un parametro esterno che identifichiamo con il tempo, siano inoltre..., $x_0, x_1, x_2, \ldots$ e..., $y_0, y_1, y_2, \ldots$ i valori successivi assunti da queste variabili, in modo tale che quando x assume il valore x_k, y assume il valore y_k ($k = \ldots, 0, 1, 2, \ldots$). Se la differenza $x_1 - x_0$ è posta uguale a Δx, avremo, per ogni k ($k = \ldots, 0, 1, 2, \ldots$), $x_k = x_0 + k\Delta x$. Indicato con n un numero intero[55] positivo, si ponga inoltre, $(n-k)\Delta x = \xi_k$ ($k = \ldots, 0, 1, 2, \ldots$) e si indichino come usuale le differenze finite dei diversi ordini: $|y_1 - y_0| = \Delta y_0$, $||y_2 - y_1| - \Delta y_0| = |\Delta y_1 - \Delta y_0| = \Delta^2 y_0$, &c.. L'identità asserita dal teorema III è allora la seguente:

$$(16)\qquad y_n = y_0 + \frac{\xi_0}{\Delta x}\Delta y_0 + \frac{\xi_0\xi_1}{2!\,\Delta x^2}\Delta^2 y_0 + \frac{\xi_0\xi_1\xi_2}{3!\,\Delta x^3}\Delta^3 y_0 + \&c.$$

Considerando x_0 e y_0 come dei valori generici, introducendo la notazione funzionale e esplicitando il carattere finito della (16) abbiamo allora:

$$(17)\qquad y(x+n\Delta x) = y(x) + \binom{n}{1}\Delta y(x) + \binom{n}{2}\Delta^2 y(x) + \binom{n}{3}\Delta^3 y(x) + \ldots + \Delta^n y(x)$$

che agli occhi di molti storici[56] ha giustificato l'identificazione della (15) come una "versione migliorata" della formula di interpolazione di Newton-Gre-

[53]Cfr. Taylor (1715), pp. 21-3.

[54]Cfr. *ivi*, p. 21. Nella notazione di Taylor le lettere sottopuntate indicano gli incrementi finiti di ordine successivo delle variabili considerate. Indicato con $\underset{.}{x}$ l'incremento di x, $\underset{..}{x}$ indicherà l'incremento di $\underset{.}{x}$, $\underset{...}{x}$ quello di $\underset{..}{x}$ e così via.

[55]Tale restrizione è ovvia dalla dimostrazione di Taylor.

[56]Cfr. a esempio Jones (1976).

gory.[57] La forma che Taylor assegna al suo risultato sembra tuttavia giustificare un'interpretazione diversa, la quale insista, più che sulla corrispondenza formale fra la (2) e la (17), sulla differenza fra i problemi a cui esse sembrano rispondere. Se Newton vede infatti nella (1) una formula d'interpolazione che conduce alla determinazione di una curva parabolica, ovvero di una funzione *polinomiale* di cui non si conoscano che n punti di passaggio, Taylor legge la (15) come la forma generale di un valore incrementato di una funzione *qualsiasi* già assegnata.[58]

Ciò è perfettamente chiaro dall'analisi della dimostrazione che questi propone, la quale non consiste che nel riconoscimento dell'identità fra la legge di formazione del coefficiente binomiale di ordine k relativo all'esponente n e la legge di formazione del coefficiente della differenza finita $\Delta^k y_0$ nel polinomio che esprime il valore di y_n in funzione degli incrementi di ordine $n, n-1, \ldots, 1$, considerati a partire dal valore y_0. Non è infatti difficile rendersi conto che la la legge di introduzione dei simboli $v, \grave{v}, \ddot{v}$, &c. contenuta nell'enunciato del teorema III comporta le identità successive: $v/\dot{z} = n$, $v\grave{v}/\dot{z}^2 = n(n-1)$, $v\grave{v}\ddot{v}/\dot{z}^3 = n(n-1)(n-1)$. [59]

Dopo aver considerato (nel corollario I) il caso del tutto analogo al precedente determinato dalla sostituzione $n = -m$, Taylor scrive, senza alcuna ulteriore giustificazione:

> Coroll. II: Si pro Incrementis evanescentibus scribantur fluxiones ipsis proportionales, factis jam omnibus $\ddot{v}, \dot{v}, v, \underset{\cdot}{v}, \underset{\cdot\cdot}{v}$, &c.[60] æqualibus quo tempore z uniformiter fluendo fit $z+v$ fiet x,
>
> $$(18)\ x + \dot{x}\frac{v}{1\dot{z}} + \ddot{x}\frac{v^2}{1{\cdot}2\ \dot{z}^2} + \dddot{x}\frac{v^3}{1{\cdot}2{\cdot}3\ \dot{z}^3} + \&c.$$
>
> vel mutato signo ipsius v, quo tempore z decrescendo fit $z - v$, x decrescendo fiet[61]

[57]Ponendo infatti nella (2) $x = v + n\,\Delta v$ e $h = \Delta v$ questa si trasforma nella (17) per la semplice sostituzione $x = v$.

[58]Le due sostituzioni indicate nella precedente nota (57) manifestano chiaramente la differenza informale fra le due formule, facendo coincidere l'ordinata generica XY (figura 1) della curva polinomiale cercata con una delle distanze note Q_kP_k (k = 1, 2, &c.)

[59]Si osservi che una tale dimostrazione è in quanto tale del tutto indipendente non solo dal carattere particolare della funzione $y = y(x)$, ma anche dalla considerazione di un legame funzionale qualsiasi fra y e x. Le successive potenze di $\dot{z}$ non entrano infatti nella (15) che per permettere una semplificazione con il fattore non numerico dei prodotti v, $v\grave{v}$, $v\grave{v}\ddot{v}$, &c.. Un modo tanto barocco per rappresentare i numeratori dei coefficienti binomiali non è così che un artificio atto a permettere un agevole passaggio dalla (15) alla (18) [cfr. *sotto*], che è con tutta evidenza lo scopo finale della costruzione di Taylor.

[60]Taylor si riferisce qui, utilizzando una notazione introdotta in precedenza ai successivi valori della "quantità" v, che secondo la notazione utilizzata in precedenza vanno indicati con i simboli $\xi_2=(n-2)\Delta x$, $\xi_1=(n-1)\Delta x$, $\xi_0 = n\,\Delta x$, $\xi_{-1}=(n+1)\Delta x$, $\xi_{-2}=(n+2)\Delta x$, &c..

[61]Cfr. Taylor (1715), p. 23.

$$(19)\ x - \dot{x}\,\frac{v}{1\dot{z}} + \ddot{x}\,\frac{v^2}{1{\cdot}2\ \dot{z}^2} - \dddot{x}\,\frac{v^3}{1{\cdot}2{\cdot}3\ \dot{z}^3} + \&c.$$

Il testo di Taylor pone all'interprete almeno due problemi di non facile soluzione. Il primo riguarda l'interpretazione del risultato asserito dal corollario precedente; il secondo è invece relativo alla ricostruzione dell'argomento che permette il passaggio dalla (15) alla (18). La prima questione può essere a sua volta separata in due problemi distinti, il primo riguarda la determinazione dei *relata* che il corollario associa fra loro, il secondo l'interpretazione della relazione che esso esprime o, detto in altri termini, le condizioni presupposte per la validità dell'identità.

Per quanto riguarda la prima di queste questioni, sembrano aperte due possibilità, le quali derivano dall'equiparazione fra le flussioni $\dot{x}$, $\ddot{x}$, $\dddot{x}$, &c. e $\dot{z}$, $\ddot{z}$, $\dddot{z}$, &c. e i differenziali di ordine successivo rispettivamente della variabile dipendente e di quella indipendente.[62] Se sostituiamo infatti nel risultato fi-

[62] L. Feigenbaum ha lungamente discusso nel suo articolo [cfr. Feigenbaum (1985), pp. 22-29] sull'opportunità di intendere nel testo di Taylor le flussioni come differenziali o come derivate, concludendo a favore della prima di queste alternative. Scegliendo la seconda strada abbiamo a me pare sei possibili traduzioni del risultato di Taylor: tre nel caso in cui manteniamo nel risultato finale l'identità $v = n\dot{z}$ utilizzata nel corso della dimostrazione e tre nel caso in cui rendiamo tale risultato indipendente da questa identità e consideriamo v come un incremento qualsiasi. Consideriamo innazittutto la prima alternativa. In primo luogo, potremmo intendere le flussioni k-esime di x e z come le derivate di ordine k rispettivamente della variabile dipendente rispetto alla variabile indipendente e di questa rispetto a se stessa. La (18) si trasforma allora nella serie $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^k}{k!}\left(\frac{d^k y}{dx^k}\right)$ (dove $\left(\frac{d^k y}{dx^k}\right)$ indica la derivata k-esima di y rispetto a x) che è equiparata al valore $y(x+n)$ della "quantità" y. In secondo luogo potremmo intendere le flussioni k-esime di x e z come le derivate di ordine k rispettivamente della variabile dipendente rispetto alla variabile indipendente e di questa variabile rispetto al tempo. La (18) si trasforma allora nella stessa serie precedente che è equiparata al valore $y\,(x+n\frac{dx}{dt})$ della "quantità" y. Da ultimo possiamo intendere le flussioni tanto di x che di z come delle derivate rispetto al tempo. La (18) si trasforma allora nella serie $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{n^k}{k!}\left(\frac{d^k y}{dt^k}\right)$ che è equiparata allo stesso valore precedente della "quantità" y. In tutti i tre casi si ha così un esito insoddisfacente che rende peraltro inspiegabile la presenza contemporanea nella (18) delle successive potenze di $v = n\dot{z}$ e di $\dot{z}$. Assumiamo ora la seconda alternativa e associamola alle stesse interpretazioni delle flussioni considerate qui sopra. La (18) si trasformerà allora rispettivamente nelle serie $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\xi^k}{k!}\left(\frac{d^k y}{dx^k}\right)$, $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\xi^k}{k!}\frac{d^k y}{dx^{2k}}dt^k$ e $\sum_{k=0}^{\infty}\frac{\xi^k}{k!}\frac{d^k y}{dx^k}$ (dove $\frac{d^k y}{dx^k}$ indica il rapporto fra il differenziale di ordine k di y e la potenza k-esima del differenziale primo di x) le quali sarebbero tutte equiparate ala valore $y(x+\xi)$ della "quantità" y [scrivo qui ξ in luogo di ξ_0]. Mentre la seconda interpretazione conduce a un esito evidentemente insoddisfacente, la prima e le terza conducono a esiti operativamente equivalenti fra loro. In particolare la terza interpretazione conduce

nale l'incremento v (che ho qui sopra indicato con ξ_0) con il valore che esso assume qualora sia stata compiuta la sostituzione degli incrementi finiti con le flussioni, abbiamo, essendo in generale, per ogni n (finito), $ndx = dx$:

$$(20) \qquad y(x + dx) = y(x) + dy(x) + \frac{d^2y(x)}{2!} + \frac{d^3y(x)}{3!} + \&c$$

Al contrario se ci permettiamo di svincolare il risultato finale dal percorso argomentativo che ha condotto a esso e consideriamo v come una quantità qualsiasi, tanto infinitamente piccola che finita,[63] abbiamo (scrivendo ξ per il valore generico ξ_0):

$$(21) \qquad y(x + \xi) = y(x) + \frac{dy(x)}{dx}\xi + \frac{d^2y(x)}{dx^2}\frac{\xi^2}{2!} + \frac{d^3y(x)}{dx^3}\frac{\xi^3}{3!} + \&c.$$

Mentre nel primo caso il risultato di Taylor si riduce a una rappresentazione della gerarchia differenziale, la quale applicando il principio di omissione si trasforma nell'identità triviale $dy = dy$, nel secondo esso esprime (nel caso non banale in cui l'incremento ξ sia assunto come finito) l'identità fra una differenza finita e una serie intera i cui termini sono tutti finiti.

III. 2. *b*. β. *Quale argomento per la giustificazione del corollario?*

Nel suo studio su B. Taylor, L. Feigenbaum ha messo assai bene in luce che uno scopo non secondario della *Methodus Incrementorum* è quello di fornire "a stronger and more consistent basis for the Newtonian fluxional calculus".[64] Ecco come questi si esprime nella prefazione al suo trattato:

> Newton [...] rationes ultimas partium evanescentium et primas nascentium introduxit, et in his rationibus Analysin suam fundavit. Sumptis itaque rationibus primis Incrementorum nascentium vel ultimis evanescentium, accomodantur omnes conclusiones Methodi Incrementorum ad Methodum Fluxionum, incrementis jam evanescentibus, et integralibus in fluente conversis. Et hoc pacto vitatur omnis consideratio quantitatum infinitè (seu, ut aliqui loqui ament, indefinité) parvarum. Nam in Methodo Fluxionum, ut conclusiones sint veræ et omnino accurate, partes seu incrementa concipienda sunt non ut perexigua, seu

esattamente allo stesso esito indicato nella (21) [cfr. *sotto*]; l' equivalenza operativa (sotto opportune condizioni) fra l'interpretazioni delle flussioni come differenziali o come derivate rispetto a un parametro comune è d'altra parte evidente [mi permetto di rinviare a questo proposito a Panza (1989), pp. 155-6].

[63] La considerazione di v come una quantità finita corrisponde come è chiaro all'assunzione di prolungabilità di un risultato accertato relativamente a un intervallo infinitamente piccolo centrato su x_0 a un intervallo finito (anche se non necessariamente coincidente con R). Come vedremo, questa mossa sarà la chiave dell'argomento dimostrativo di Lagrange nel 1772 [cfr. il prossimo capitolo III.4., sez.*b*].

[64] Cfr. Feigenbaum (1985), p. 10.

infinitè parva, sed ut revera nulla. [...] Facilioris tamen conceptûs gratiâ possunt pro Fluxionibus sumi augmenta illa nascentia, quæ Newtunus momenta vocat, atque designat liberâ *o* Fluxionibus appositâ. Et in hoc modo concipiendi facilius cernitur relatio inter Methodum hanc Incrementorum et Methodum Fluxionum.[65]

Ciò tuttavia non chiarisce quale argomento deve essere sottinteso nel passaggio dal teorema III al suo corollario II: si tratta dell'introduzione di quantità attualmente infinitesime o si tratta piuttosto di un passaggio al limite? Per quanto tali strategie argomentative siano spesso confuse fra loro nella tradizione newtoniana, senza giungere a differenziarsi in modo essenziale (grazie a una teoria non infinitesimalista dei limiti), la questione sembra in questo caso di un qualche interesse. Differenti risposte sembrano infatti comportare non solo diverse scelte fra la lettura proposta dalla (20) e quella proposta dalla (21), ma anche diverse interpretazioni della relazione che il corollario istituisce fra i due membri di queste identità.

Nelle due edizioni del terzo volume del suo *Trattato*, Lacroix reinterpreta la dimostrazione di Taylor in due modi diversi, la prima volta facendo ricorso alla sostituzioni di quantità finite con quantità infinitamente piccole, la seconda volta richiamandosi a un passaggio al limite.[66] Nel primo caso egli scrive la (17) sotto la forma

$$(22) \qquad y(x + n\Delta x) = y(x) + n\Delta x \frac{\Delta y(x)}{\Delta x} + \frac{n(n-1)}{2!} \frac{\Delta x^2 \, \Delta^2 y(x)}{\Delta x^2} + \&c.$$

e pone Δx infinitamente piccolo e n infinitamente grande, in modo da poter considerare $n\Delta x = \xi$ come un incremento finito e poter operare le sostituzioni $n\Delta x = (n-1)\Delta x = (n-2)\Delta x = \&c.$ e $\Delta^k y(x)/\Delta x^k = d^k y(x)/dx^k$, che producono immediatamente la (21) nella quale ξ deve essere comunque inteso come un incremento finito. Nel secondo caso egli converte $x + n\,\Delta x$ in w, scrivendo la (17) sotto la forma:

$$(23) \qquad y(w) = y(x) + (w-x) \frac{\Delta y(x)}{\Delta x} + \frac{(w-x)(w-x-\Delta x)}{2!} \frac{\Delta^2 y(x)}{\Delta x^2} + \&c.$$

che calcolandone il limite per $\Delta x \to 0$ (considerando w come indipendente da Δx) conduce all'identità:

$$(24) \qquad y(w) = y(x) + \frac{dy(x)}{dx}(w-x) + \frac{d^2 y(x)}{dx^2} \frac{(w-x)^2}{2!} + \&c.$$

[65]Cfr. Taylor (1715), *Prefazione*.

[66]Cfr. rispettivamente Lacroix (1800), p. 9 e (1810-19), vol. III, pp. 60-61.

che Lacroix trasforma ancora nella (21) sostituendo ξ a w-x.

La prima di queste dimostrazioni sembra richiamarsi a quella fornita da Euler nel 1736,[67] mentre la seconda è assai simile a quella presentata da Stirling nel 1730.[68] Quest'ultimo intende tuttavia la stessa (24) come l'enunciato del "teorema" di Taylor - che egli sembra quindi interpretare come l'esibizione di uno sviluppo in serie intera per una funzione qualsiasi. L'adattamento del percorso argomentativo di Stirling al caso di Taylor richiede, d'altra parte, non solo una trasformazione della (15) in una formula di interpolazione[69] su cui applicare il passaggio al limite, ma anche una successiva trasformazione dell'identità risultante in una identità che esprima, come richiesto dal testo di quest'ultimo, il valore incrementato di una funzione data. Assegnare un tale percorso allo stesso Taylor significa così intendere il ragionamento di questi in modo inutilmente tortuoso, nascondendo dietro un procedimento formalmente ineccepibile una evidente differenza fra due interpretazioni intese del medesimo risultato.

Secondo L. Feigenbaum la dimostrazione di Euler è al contrario "virtualmente" la stessa già prospettata da Taylor, il quale, nel suo "audace" passaggio dalla (15) alla (18), presupporrebbe "senza la minima esitazione" che ξ sia il limite di $n\Delta x$ ($\Delta x \to 0$, $n \to \infty$) e $d^k y(x)/dx^k$ (o più precisamente $\dot{x}/\dot{z}$) quello di $\Delta^k y(x)/\Delta x^k$. Se il testo di Euler non sembra accordarsi con una tale interpretazione, assumendo piuttosto delle vere e proprie identità infinitarie, $\Delta x = dx$ e n = "*numerus infinite magnus*", ciò che è più importante sottolineare è che quest'ultima identità è introdotta come una condizione che rende *possibile* l'equiparazione del prodotto $n\Delta x$ a una quantità finita: "sit jam ad nostrum infinitum n numerus infinite magnus, quo ndx quantitatem finitam significare queant".[70] Ma che cosa vuol dire che il prodotto fra un infinito e un infinitamente piccolo dello stesso ordine *può* essere una quantità finita? Dal punto di vista infinitesimalista di origine leibniziana al quale

[67] Cfr. Euler (1736b), pp.10-1, ma anche (1755), pp. 333-35.

[68] Cfr. Stirling (1730), pp. 98-102. Se nella figura 1 poniamo $Q_1X = \omega$ e Q_kQ_{k+1} $[=h] = \Delta v$ (k = 1, 2, ...) abbiamo sostituendo nella (2):

$$y(x) = y(v) + \omega \frac{\Delta y(v)}{\Delta v} + \frac{\omega(\omega-\Delta v)}{2!}\frac{\Delta^2 y(v)}{\Delta v^2} + \dots + \frac{\omega(\omega-\Delta v)\dots(\omega-[n-1]\Delta v)}{(n-1)!}\frac{\Delta^{n-1} y(v)}{\Delta v^{n-1}}$$

da cui, se Δv *diviene* "nihil", si trae:

$$y(x) = y(v) + \frac{dy(v)}{dv}(x-v) + \frac{d^2y(v)}{dv^2}\frac{(v-x)^2}{2!} + \&c.$$

che è del tutto analoga alla (24) e che Stirling presenta in quanto tale come il "teorema" di Taylor.

[69] Si tratta, come è chiaro dalla precedente nota (68), della formula d'interpolazione di Gregory-Newton, a cui Lacroix converte formalmente la (15).

[70] Cfr. Euler (1736b), pp. 11. Nelle *Institutiones* Euler scrive analogamente [cfr. Euler (1755), p. 335]:

> [...] cum igitur sumpto n numero infinite magno etiam dx sit infinite parvum, productum ndx quantitatem finitam exprimere possint.

Euler sembra qui riferirsi il prodotto $n\Delta x = \xi$ *deve* essere una quantità finita e, in particolare, una quantità costante. Alla stessa conclusione si giunge d'altra parte pensando ξ come un limite; è infatti chiaro che, qualsiasi sia la nozione di limite che vogliamo utilizzare e qualsiasi sia la funzione F il limite di $F(n, \Delta x)$ per n che tende a infinito e Δx che tende a zero non può che essere una quantità attualmente indipendente da n e Δx. Inteso in accordo con la dimostrazione di Euler il corollario di Taylor sembra così esprimere in serie intera la differenza finita $_{\xi}\Delta y(x)$.

Ma ciò detto veniamo all'originale dimostrazione di Euler. Trattando dx e dy come usuali differenze finite, egli assume che per ogni n (finito e naturale) valga l'identità

$$y(x+ndx) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} d^k y(x) \tag{25}$$

Assumendo n come infinitamente grande e uguale al rapporto ξ/dx egli trasforma *poi* il termine generico di questa serie nel prodotto $\frac{n^k}{k!} d^k y(x) = \frac{\xi^k}{k!} \frac{d^k y(x)}{dx^k}$ e assume l'identità fra la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^k}{k!} \frac{d^k y(x)}{dx^k}$ e la trasformata $y(x+\xi)$ della funzione $y\,(x+n\Delta x)$. L'identità chiave $\xi = n\Delta x$ svolge quindi il ruolo di trasformare una somma finita di differenziali in una serie intera di una variabile indipendente ξ, i cui coefficienti sono dati dai successivi rapporti differenziali. Si tratta, a quanto io sappia, del primo tentativo compiuto in un contesto infinitesimalista di esplicita derivazione leibniziana di connettere la forza dimostrativa del passaggio agli infinitesimi con lo scopo di raggiungere un risultato riferito a una differenza *finita*. L'attenzione di Euler è tuttavia completamente dedicata alla ricerca dell'artificio formale per raggiungere questo traguardo e egli non affianca alle sue trasformazioni alcuna considerazione relativa alla legittimità del passaggio successivo dalla trasformazione del termine generico della *somma finita* dei differenziali all'identificazione della *serie* $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^k}{k!} \frac{d^k y(x)}{dx^k}$ con la trasformata $y(x+\xi)$ della funzione $y(x+n\Delta x)$. E' chiaro tuttavia che se la (21) è intesa come un'identità numerica, la validità di una tale inferenza richiede il verificarsi di due condizioni esterne al procedimento formale euleriano: i) che $y(x)$ sia una funzione C^{∞}; ii) che la serie $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\xi^k}{k!} \frac{d^k y(x)}{dx^k}$ converga a $y(x+\xi)$ (per $\xi \neq 0$), ovvero che le trasformazioni a destra e a sinistra del segno di eguaglianza nella (25) conservino l'identità. Se l'orizzonte delle funzioni a cui Euler si riferisce rende la condizione (i) non problematica (posto che x sia intesa come una quantità generica[71]), la condizione (ii) pone una questione che tanto Taylor che Euler erano perfettamente attrezzati per scorgere (almeno se ci limitiamo alla generica richiesta di convergenza). Tuttavia né l'uno, né l'altro esplicitano i limiti di validità del loro risultato.

III. 2. *b*. γ. *Condizioni di validità del risultato di Taylor*

Se ξ é considerata come come una quantità costante relativamente a x (ovvero come una variabile indipendente da x), il risultato di Taylor e Euler sembra dirci che, data ξ, la (21) vale per ogni x. Ma che cosa indica esattamente la clausola: "data ξ"? In primo luogo si può prospettare la traduzione seguente:

[*] Per ogni funzione $y = y(x)$, esiste un δ (finito) tale che se $|\xi| < |\delta|$ allora la (21) vale per ogni x (compreso nell'intervallo di definizione e di infinita differenziabilità della funzione).

Tuttavia né la dimostrazione di Euler, né quella (implicita) di Taylor, sembrano tali da poter fornire una determinazione di δ. ξ è infatti fissato qui *a priori* tanto rispetto a x che a $y(x)$. Una traduzione più soddisfacente dovrebbe così essere la seguente:

[**] Esiste un δ (finito) tale che, per ogni funzione $y = y(x)$, e per ogni x (compreso nell'intervallo di definizione e di infinita differenziabilità della funzione) se $|\xi| < |\delta|$ allora vale la (21).

Come abbiamo visto, Newton aveva dato d'altra parte il "teorema" di Taylor sotto una forma che può essere considerata analoga alla seguente

[***] Per ogni funzione $y = y(x)$, e per ogni x (compreso nell'intervallo di definizione e di infinita differenziabilità della funzione), esiste un δ tale che se $|\xi| < |\delta|$ allora vale la (21).

Se la differenza fra [*], [**] e [***] risulta agli occhi di un matematico moderno non solo perfettamente chiara, ma del tutto essenziale, è assai difficile pensare che Taylor e Euler fossero nelle condizioni di poter cogliere con la stessa precisione la natura logica di tale differenza, esprimendo le condizioni di passaggio dalla [***] alla [*] e alla [**]. E' tuttavia certo che anche agli occhi di un matematico del XVIII secolo la [***] avrebbe dovuto presentarsi come più "ricca" tanto della [*] che della [**]: essa non solo è verificata in tutti i casi in cui lo sono la [*] e la [**] e in altri casi ancora, ma - ciò

[71] Cfr. il precedente paragrafo II.2.v.. Tornerò più dettagliatamente sulla questione nel prossimo capitolo III.6., *sez. a*..

che è forse più rilevante - essa fa dipendere questa maggiore estensione dall'esplicita espressione della variazione del raggio dell'intervallo di stabilità delle proprietà polinomiali della funzione, intendendo la differenza $_{\xi}\Delta y(x)$ come una funzione di x *e* di ξ che può essere sviluppata in serie di Taylor se e solo se $|\xi| < |\delta|$ con $\delta = \delta(x)$.

Questo a parte, è chiaro che tanto la dimostrazione di Euler che quella di Taylor sembrano presupporre, quale che sia la loro natura particolare, l'esistenza, per ogni funzione $y(x)$ e, per ogni x, di un intervallo di stabilità delle caratteristiche polinomiali della funzione riferite al punto x. Ora, è chiaro che una simile presupposizione è del tutto indipendente dalla legittimità delle sostituzioni impiegate nel corso della dimostrazione e non è in nessun modo garantita dalle ipotesi "metafisiche" a cui esse si richiamano (sia che si voglia leggere questa in termini di infinitamente piccoli attuali, sia che la si voglia leggere nei termini di un passaggio al limite). Le condizioni di validità del risultato così stabilito sono quindi tali che la loro determinazione non sembra poter derivare semplicemente da un'analisi di questa dimostrazione. Così benché Taylor e Euler si richiamino nel corso del loro percorso argomentativo alle stesse ipotesi fondazionali del *calcolo*, facendo intervenire concetti come "infinitamente piccolo" o "limite", essi non traggono da ciò alcun vantaggio reale rispetto alla dimostrazione di Newton che si limita al contrario a applicare una trasformazione algoritmica. Al contrario, mascherando la presupposizione iniziale, che questi rende invece manifesta assumendo *a priori* l'identità generica $y(x) = A_0 + A_1x + A_2x^2 +$ &c., essi sembrano confondere le acque. Se per evitare questa conclusione è sufficiente intendere le dimostrazioni di Taylor e Euler come la semplice esibizione di una regola formale di associazione di una serie intera a una funzione incrementata, è evidente come una simile lettura potrebbe forse risultare accettabile solo nel secondo caso; per quanto riguarda Taylor, la sola interpretazione possibile sembra quella che considera il suo risultato come sottomesso a certe condizioni implicite di validità, che egli non sembra in grado di precisare in modo opportuno.

III. 2. *b*. δ. *Breve riepilogo: il contrasto fra le interpretazioni intese*

Comunque si voglia intendere la dimostrazione di Taylor, sembra certo dalle considerazioni precedenti che la sola interpretazione soddisfacente dell'identità a cui essa perviene è quella fornita dalla (21), la quale legge il teorema come l'esibizione di uno sviluppo in serie intera di una differenza finita, tratto per generalizzazione infinitaria di una formula alle differenze finite (essenzialmente diversa da una formula d'interpolazione).

Il confronto fra l'argomento di Taylor e quelli di Newton e Stirling mostra così tre differenti maniere di intendere lo stesso risultato formale.

In primo luogo è possibile pervenire a questo a partire dall'assunzione della forma generica di uno sviluppo in serie per ogni funzione assegnata e applicando reiterativamente l'algoritmo del *calcolo*. In questo caso il teorema assume la forma di un'identità analoga alla (24) le cui condizioni di validità dipendono da quelle dell'assunzione iniziale. Per quanto Newton sembri leggere il proprio risultato in senso inverso, questo pare allora immediatamente interpretabile come l'esibizione della forma generale dello sviluppo in serie intera per una funzione qualsiasi e può assumere un ruolo tanto algoritmico che fondazionale: nel primo caso esso *determina* una funzione, nel secondo la *esprime*.

In secondo luogo si può pervenire a tale risultato a partire da una formula d'interpolazione - quella di Newton-Gregory a esempio - applicando opportune trasformazioni che esprimano un passaggio a un contesto infinitario (o, se si preferisce, un passaggio al limite). La forma assunta dal teorema è anche in tal caso quella espressa dalla (24), per quanto ora le condizioni di validità di questa identità debbano essere cercate al di fuori dalle presupposizioni esplicite introdotte nella dimostrazione.

In terzo luogo è possibile giungere al medesimo risultato formale seguendo il percorso seguito da Taylor. In tal caso il teorema asserisce allora un'identità di forma analoga alla (21), presentandosi come l'espressione in serie intera di una differenza finita, e le sue condizioni di validità restano, come nel caso precedente, esterne alle presupposizioni esplicite introdotte nella dimostrazione.

A questi percorsi argomentativi realmente seguiti sembra possibile affiancarne un altro, il quale perviene più che a un esplicito risultato formale, a una equiparazione informale, che, tuttavia, non solo conduce a una congettura matematica, ma permette, *a posteriori*, di reinterpretare un risultato eventualmente già raggiunto, fornendone una sorta di esplicazione "metafisica". Intesa una funzione (fluente) $y = y(x)$ come l'ordinata di una curva qualsiasi, la quale è generata nel tempo dal movimento del punto di incontro fra due rette perpendicolari che traslano sullo stesso piano - in modo che si abbia in generale $x = x(t)$ e $y = y(t)$ - siano $\dot{x} = \dot{x}(t)$ e $\dot{y} = \dot{y}(t)$ le velocità istantanee (flussioni) di tali movimenti di traslazione, di cui il primo sia assunto come uniforme. Considerato un intervallo temporale finito $\vartheta = t_1 - t_0$, siano rispettivamente x_0, x_1, y_0 e y_1 i valori assunti dall'ascissa e dall'ordinata della curva in questione negli istanti $t = t_0$ e $t = t_1$. La differenza $|y_0 - y_1| = |y(x_0) - y(x_1)|$ sarà allora determinata dallo spazio rettilineo coperto nel tempo ϑ da un punto della retta che trasla non uniformemente, scelto in modo che nell'istante t_1 esso coincida con il punto di intersezione fra le due rette. Questo spazio sarà a sua volta determinato tanto dalla velocità iniziale $\dot{y}(t_0)$ di tale traslazione che dalle sue successive variazioni intercorse durante il tempo ϑ. Considerando una prima approssimazione possiamo allora scrivere, ponendo per semplicità $x_1 - x_0 = \xi$: $y(x_1) - y(x_0) = y(x_0 + \xi) - y(x_0) = \dot{y}(t_0)\vartheta + R_1$. L'uniformità del primo movimento di traslazione permette d'altra parte di trarre l'identità $\vartheta = \xi/\dot{x}(t_0)$. Sostituendo si ha e quindi: $y(x_0 + \xi) = y(x_0) + \frac{\dot{y}(t_0)}{\dot{x}(t_0)}\xi + R_1$. Indicando ora rispettivamente con $\ddot{y}(t_0)$, $\dddot{y}(t_0)$, &c. l'accelerazione istantanea del movimento di traslazione non uniforme, la sua variazione, la variazione di tale variazione, &c. è d'altra parte ovvio concludere che R_1 potrà essere a sua volta determinato come una somma infinita i cui termini successivi siano rispettivamente proporzionali a $\frac{\ddot{y}(t_0)}{[\dot{x}(t_0)]^2}\xi^2$, $\frac{\dddot{y}(t_0)}{[\dot{x}(t_0)]^3}\xi^3$, &c.. Ponendo genericamente x in luogo di x_0 e $\dot{x}$ in luogo di $\dot{x}(t_0)$ si avrà allora:

$$(26)\quad y(x+\xi) = y(x) + \frac{\dot{y}(x)}{\dot{x}}\xi + A_1\frac{\ddot{y}(x)}{\dot{x}^2}\xi^2 + A_2\frac{\dddot{y}(x)}{\dot{x}^3}\xi^3 + \&c.$$

che esprime una differenza finita per mezzo di una generica serie intera, i cui coefficienti sono delle funzioni lineari dei successivi rapporti flussionali. L'identità asserita dal "teorema" di Taylor potrà allora interpretarsi come un'adeguata determinazione di tale serie. Proprio questa sembra essere l'interpretazione fornita da Maclaurin nel suo *Treatise of fluxions*.

III. 2. *c*.
IL "TEOREMA" DI TAYLOR NEL *TREATISE OF FLUXIONS* DI COLIN MACLAURIN: UNA VERSIONE GEOMETRICA.[72]

III. 2. *c*. α. *Le proposizioni XX e XIV del Treatise: il teorema di inversione e l'interpretazione geometrica delle flussioni*

Il "teorema" di Taylor è certamente uno dei risultati centrali intorno ai quali Colin Maclaurin organizza, nel primo libro del suo *Treatise of Fluxions*,[73] la propria riformulazione geometrica della teoria newtoniana delle flussioni. Esso non è tuttavia enunciato, in termini generali, che nel corso di un breve commento annesso al corollario IV della proposizione XX, sotto la forma di un'ovvia generalizzazione dei risultati contenuti nello stesso corollario IV e nel precedente corollario III.

Data la figura 3, in cui i segmenti ET e *e*Z sono rispettivamente tangenti alle curve AEH e F*eh* nei punti E e *e*, la proposizione XX può riformularsi nei termini delle due seguenti implicazioni:[74]

i) se il rettangolo DGKE ha area uguale al trapezoide AD*e*F, allora il segmento ET è parallelo al segmento DL;
ii) se i segmenti D*e* e KT sono uguali fra loro, allora il rettangolo DGKE ha area uguale al trapezoide AD*e*F.

Siccome se ET è parallelo a DL, allora D*e* = KT, il teorema afferma che D*e* = KT se e solo il rettangolo DGKE ha area uguale al trapezoide AD*e*F.

---

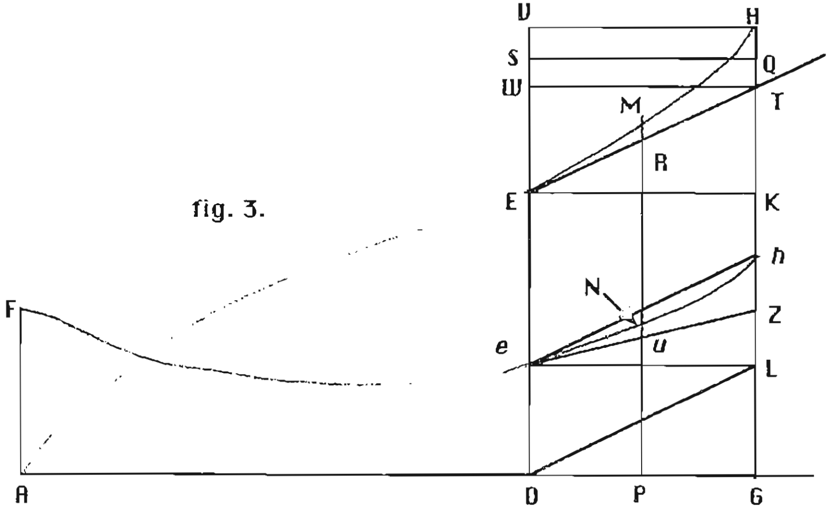
[72] Mi permetto qui di riprendere con qualche lieve modifica alcuni brani contenuti nei paragrafi 8, 9 e 11 del capitolo 4 del mio (1989).

[73] Cfr. Maclaurin (1742). Per una valutazione di ordine generale della proposta di Maclaurin cfr. Guicciardini (1984). Mi sia consentito di rinviare altresì al capitolo 4 di Panza (1989), in particolare ai paragrafi 6-8.

[74] Cfr. Maclaurin (1742), pp. 219-26.

La dimostrazione di Maclaurin si fonda, per il primo verso, su un semplice passaggio alle flussioni e, per il secondo, sul passaggio inverso alle fluenti. Se consideriamo infatti DG come la flussione dell'ascissa AD delle curve F*eh* e AEH, il teorema enunciato da Maclaurin nella precedente proposizione XIV[75] ci dice che KT è la flussione di DE, mentre un teorema analogo ci permette di interpretare il rettangolo DGL*e* come la flussione (dell'area) del trapezoide AD*e*F e il rettangolo KTWE come la flussione (dell'area) del rettangolo DGKE. L'antecedente della (i) implica quindi, passando alle flussioni, l'eguaglianza fra le aree di KTWE e di GL*e*D, da cui, essendo DG uguale e parallelo a EK si deduce che DL è parallelo (e uguale) a ET. Reciprocamente, se D*e* = KT, allora anche i due rettangoli GL*e*D e KTWE sono per costruzione uguali e quindi, passando alle fluenti, si deduce il conseguente di (ii).

fig. 3.



La dimostrazione evidenzia il contenuto analitico del risultato, che non è altro che una versione geometrica del teorema di inversione. Ponendo infatti AD = x, DE = $z(x)$ e DG = $\dot{x}$, si ha KT = $\dot{z}$ e le relazioni flussionali indicate da Maclaurin si possono quindi facilmente riscrivere in termini analitici. Se l'ordinata D*e* è *sempre* uguale all'intercetta KT, la curva F*e*H è il grafico della flussione prima dell'ordinata $z(x)$ = DE e se si pone D*e* = $y(x)$ si ha, allora, riscrivendo il teorema in un linguaggio oggi usuale (e assumendo la costante d'integrazione uguale a zero):

$$(26) \qquad y(x) = z'(x)dx \quad \text{se e solo se} \quad z(x)dx = \int y(x)dx$$

Per comprendere tanto la dimostrazione del teorema, che il significato

[75]Cfr. *sotto*.

essenziale del suo enunciato, è così necessario ritornare brevemente alle ipotesi fondazionali di Maclaurin e, in particolare, alla sua interpretazione della nozione di flussione. Mentre

> in the common geometry - egli scrive - we suppose the magnitudes to be already formed, and compare them or their parts, immediately, or by the intervention of others of the same kind, to which they have a relation that is already known [...] [,] in the doctrine which we propose to explain and demostrate in this treatise, we have recourse to the genesis of quantities, and either deduce their relations by comparing the powers which are conceived to generate them"[76]

Tali "potenze" sono identificate con il movimento,[77] la cui considerazione permette di misurare porzioni di spazio tramite porzioni di tempo o, viceversa, porzioni di tempo tramite porzioni di spazio. Infatti:

> The parts of space are permanent; but being described successively by motion, the space may be conceived to flow as the time. The time is ever perishing; but an image or representation of it is preserved and presented to us at once in the space described by the motion."[78]

Essendo il tempo concepito come un flusso uniforme, è naturale considerarlo come la misura comune di tutti i cambiamenti. D'altra parte, quando in un movimento lo spazio cresce in proporzione costante con il tempo, allora tale movimento è esso stesso uniforme e la sua velocità è misurata dallo spazio descritto in un qualsiasi tempo dato. Se, viceversa, il movimento non è uniforme, la sua velocità (istantanea) non può che essere misurata relativamente a un movimento uniforme, il quale mantiene con il tempo una relazione privilegiata. Si tratta quindi di trovare un movimento uniforme la cui velocità costante corrisponda alla velocità istantanea del movimento non uniforme in questione. Ecco la soluzione di Maclaurin:

> In these cases [...] the velocity at any term of the time is accurately measured by the space that would be described in a given time, if the motion was to be continued uniformely from that term."[79]

Se le precedenti parole fossero considerate come una *definizione* della nozione meccanica di velocità istantanea, non si potrebbe fare a meno di rilevare in esse una patente circolarità, la quale si riverserebbe così sull'intera impostazione del *Treatise*: la determinazione del movimento virtuale adeguato a permettere la misurazione sembra richiedere che tale misurazione sia *già* stata compiuta. Dal punto di vista di Maclaurin tuttavia non è una definizione di tal genere a servire, quanto piuttosto una determinazione dei rapporti operativi fra la *misura* della velocità istantanea di un movimento non uniforme (che come concetto autonomo non sembra essere esplicitamente definito) e la *misura* della velocità media di un movimento uniforme che

---

[76]Cfr. *ivi*, p. 52.

[77]"The power by which magnitudes are conceived to be generated in geometry, is motion." [Cfr. *ivi*.]

[78]Cfr. *ivi*, p. 53.

[79]Cfr. *ivi*.

possa essere operativamente associato al primo. Ciò che Maclaurin *definisce* non è così che la *misura* della velocità istantanea di un movimento non uniforme relativamente a un adeguato movimento uniforme, che dovrà essere determinato *indipendentemente* da questa definizione. Si tratta così di dimostrare che *nessun* segmento differente da un certo segmento, geometricamente determinabile in modo indipendente dalla teoria (il quale misura la velocità media di un certo movimento uniforme), possa misurare la velocità istantanea del movimento non uniforme, ovvero, se vogliamo esprimerci "più filosoficamente", si tratta di fornire un criterio di "equivelocità" istantanea il quale non dipenda dalla misura, ovvero che non sia banalmente costituito dal confronto fra le misure *già* determinate delle due velocità nell'istante. Ora, per quanto la flussione di una certa quantità sia in senso stretto definita come la velocità istantanea con la quale quest'ultima è generata[80] - e non come la misura di questa velocità - è evidente che qualora si assuma come parametro un comune intervallo temporale al quale si stabilisce di riferirsi in ogni circostanza, la conoscenza della misura di una flussione è del tutto sufficiente a dare luogo a una adeguata teoria geometrica. Il problema è allora quello di determinare, per ogni data quantità che fluisce non uniformemente, un segmento (finito) che ne *misuri* la flussione. Proprio questo è il contenuto della proposizione XIV del *Treatise*, il cui enunciato (opportunamente semplificato) può riformularsi, come segue:[81]

> Data la figura 4, se *t*ET è la tangente alla curva FES in E, le flussioni dell'ascissa AD, dell'ordinata DE e della curva FE saranno rispettivamente *misurate* dai segmenti DG, IT e ET.

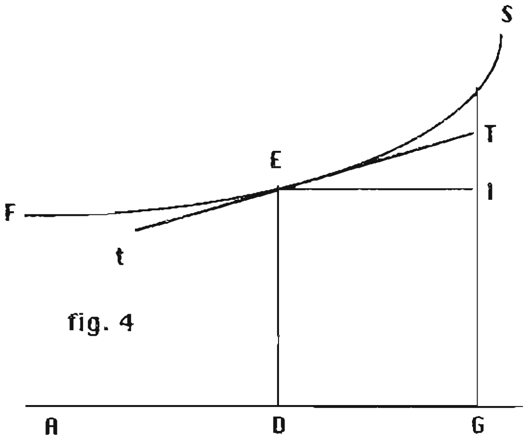


fig. 4

Assunta l'uniformità del movimento che descrive la base AD (ovvero, assunta come costante la flussione dell'ascissa), la prima proposizione contenuta in tale teorema non fa che tradurre in termini spaziali il parametro

[80] Cfr. *ivi*, p. 57.
[81] Cfr. *ivi*, p. 181.

temporale considerato, fissando arbitrariamente lo spazio percorso da tale movimento nel tempo dato. Si tratta quindi di dimostrare l'*implicazione* seguente: "se DG è la misura della flussione dell'ascissa AD, allora IT e ET misurano rispettivamente le flussioni dell'ordinata DE e della curva FE". Non mi soffermerò sui dettagli della dimostrazione di Maclaurin, la quale procede per assurdo a partire dalla definizione classica di tangente a una curva in un punto P come la retta passante per P e tale che fra essa e la curva non passa nessun altra retta. Mi basta aver indicato il percorso argomentativo che conduce Maclaurin a identificare le flussioni (ma più rigorosamente si dovrebbe dire: "le loro misure") con dei segmenti finiti geometricamente determinabili relativamente a un parametro.

III. 2. *c*. β. *I corollari I-IV della proposizione XX del Treatise e la loro dimostrazione: una riformulazione geometrica del "teorema" di Taylor*

Sulla base di questa precisazione torniamo allora alla proposizione XX e in particolare ai suoi quattro corollari. Ecco come i primi tre possono venir riformulati (il riferimento è ancora alla figura 3):

Se D*e* = KT e se l'arco *eh* è monotono crescente,[82] allora:

Cor. I: se l'arco *eh* è convesso, allora[83] $\frac{1}{2}\mathrm{LZ} < \mathrm{TH} < \frac{1}{2}\mathrm{L}h$;

---

[82] Per ragioni di semplicità non considererò qui che il caso di una flussione positiva di AD, ovvero mi limiterò al comportamento della funzione in un intervallo destro di x, $[x, x+\varepsilon]$. Maclaurin considera, in verità, anche il caso di una flussione negativa, dando analoghi risultati relativamente all'intervallo sinistro di x, $[x+\varepsilon, x]$. Egli presuppone quindi che prendendo δ abbastanza piccolo $(0<\varepsilon<\delta)$ sia sempre possibile, per ogni curva (ovvero per ogni funzione continua), rispettare la condizione di monotonia su $(x-\delta, x+\delta)$. Questa presupposizione è, come si sa, equivalente alla presupposizione di derivabilità di ogni funzione (continua). Se si assume che la stessa proprietà sia rispettata anche dalle curve che esprimono le flussioni successive dell'ordinata della curva assegnata si trae così la conclusione che ogni funzione (continua) è di classe C^{∞}. Il primo controesempio conosciuto alla derivabilità di ogni funzione continua fu, d'altra parte, dato solo da Bolzano, nella sua *Functionenlehere* (rimasta peraltro lungamente inedita [cfr. ora Bolzano (1930-48), vol. I]) e non sortì significative conseguenze matematiche che dopo essere stato riscoperto da Weierstrass. Se la condizione di monotonia crescente è, d'altra parte, rispettata solo da alcune curve, gli enunciati e le dimostrazioni di Maclaurin sono banalmente adattabili al caso di monotonia decrescente.

[83] Essendo DG costante, è chiaro che (se D*e* è *sempre* uguale a KT in $[x, x+\dot{x}]$), allora l'area del trapezoide AG*h*F è uguale a quella del rettangolo DGHV [in simboli moderni: $y(v) = z'(v)dx \Rightarrow \int y(v)dx = z(v)dx$ [+C] $(v = x+dx)$]. Essendo l'area del trapezoide AD*e*F uguale a quella del rettangolo DGKE, da ciò segue che il rettangolo EKHV ha area uguale al trapezoide DG*he* e, essendo i rettangoli DGL*e* e EKTV uguali fra loro, da ciò segue che il trapezoide *e*L*h* ha area uguale al rettangolo WTHV, ovvero:

$$T h \cdot \mathrm{DG} = \text{Area (trap. } e\text{LH)} \begin{cases} < \text{Area (triang. } e\text{LH)} = \frac{1}{2}\,\mathrm{DG}\cdot\mathrm{L}h \text{ ; quindi: } \mathrm{TH} < \frac{1}{2}\,\mathrm{L}h \\ > \text{Area (triang. } e\text{LZ)} = \frac{1}{2}\,\mathrm{DG}\cdot\mathrm{LZ} \text{ ; quindi: } \mathrm{TH} < \frac{1}{2}\,\mathrm{LZ} \end{cases}$$

Cor. II: se l'arco *eh* è concavo, allora[84] $\frac{1}{2}\mathrm{L}h < \mathrm{TH} < \frac{1}{2}\mathrm{LZ}$;

Cor. III: se l'arco *eh* e il segmento *eh* coincidono fra loro (ovvero, se EH è un arco di parabola), allora $\mathrm{TH} = \frac{1}{2}\mathrm{LZ} = \frac{1}{2}\mathrm{L}h$.

Il corollario III equivale al "teorema" di Taylor per le funzioni paraboliche. Maclaurin esprime questo fatto osservando che da esso segue che, mentre l'ascissa di una curva con flussione rettilinea riceve l'incremento DG, l'ordinata corrispondente riceve un incremento uguale alla somma dei segmenti che *misurano* rispettivamente la sua flussione prima e la metà della sua flussione seconda.[85] Se la funzione non è parabolica, ovvero se l'arco e il segmento *eh* non coincidono, KT é invece maggiore o minore della somma di questi segmenti. In particolare:

Cor. IV: se l'arco *eh* è un arco di parabola, l'incremento KH può essere diviso in tre parti, di cui, se la prima (KT) è presa uguale a D*e* e la seconda (TQ) è presa uguale alla metà di LZ, la terza è uguale a un terzo di Z*h*.

Detto in altri termini: nel caso in cui la flussione prima dell'ordinata della curva AEH descrive una parabola (ovvero, la curva AEH è una cubica), l'incremento KT è uguale alla somma di tre segmenti che *misurano* rispettivamente la flussione prima dell'ordinata, la metà della sua flussione seconda, un sesto della sua flussione terza.[86]

Un modo molto semplice per dimostrare il corollario IV è di utilizzare il risultato di Archimede a proposito dell'area di un segmento parabolico. Da tale risultato si può infatti concludere che l'area del trapezoide *eZh* è uguale a $\frac{1}{3}\mathrm{DG}{\cdot}\mathrm{Z}h$ e dunque - essendo[87] $\mathrm{D}e{\cdot}\mathrm{DG} = \mathrm{KT}{\cdot}\mathrm{DG}$, $\mathrm{TQ}{\cdot}\mathrm{DG} = \frac{1}{2}\mathrm{LZ}{\cdot}\mathrm{DG}$ e Area (trap. DG*he*) = KH·DG - che il prodotto $\frac{1}{3}\mathrm{DG}{\cdot}\mathrm{Z}h$ e è uguale all'altro prodotto QH·DG, da cui segue, ovviamente: $\mathrm{QH} = \frac{1}{3}\mathrm{Z}h$. Ma Z*h* è la differenza fra l'incremento (relativo a DG) dell'ordinata di una parabola e il segmento che misura la flussione prima di tale ordinata e é quindi uguale, per il corollario III, alla metà del segmento che misura la flussione seconda dell'ordinata D*e*; QH è quindi uguale a un sesto del segmento che misura la flussione terza dell'ordinata DE della curva AEH.

Essendo il risultato di Archimede dimostrabile tramite il metodo d'e-

[84] La dimostrazione è analoga alla precedente.

[85] Vale a dire: se $z(x) = ax^2 + bx + c$, allora $z(x+\dot{x}) = z(x) + \dot{z}(x) + \frac{1}{2}\ddot{z}(x)$.

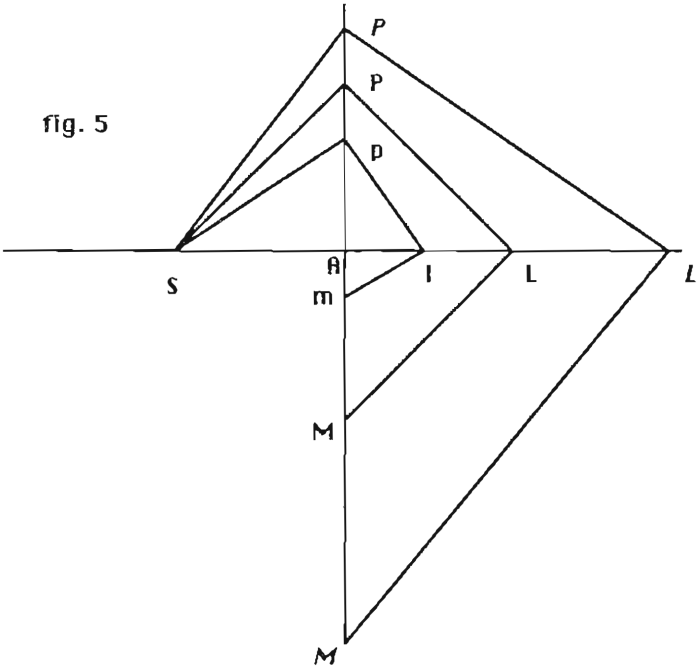
[86] Vale a dire: se $z(x) = ax^3 + bc^2 + cx + d$, allora $z(x+\dot{x}) = z(x) + \dot{z}(x) + \frac{1}{2}\ddot{z}(x) + \frac{1}{3}\dddot{z}(x)$.

[87] Cfr. la precedente nota 83.

saustione, la prova precedente è, in sé, del tutto soddisfacente. Essa non può tuttavia venir ripetuta nel caso in cui l'arco *eh* non sia un arco di parabola, ovvero non fornisce un metodo generale di dimostrazione del "teorema" di Taylor per funzioni polinomiali di grado qualunque. Un tale metodo è, al contrario, fornito dalla proposizione VIII del *Treatise* che permette di trarre l'eguaglianza Area (trap. $eZh) = \frac{1}{3} Zh \cdot \mathrm{DG}$ come un risultato relativo alla teoria delle proporzioni continue. Secondo tale proposizione, se la successione {AS, AP, AL, ..., AN, &c.} è una successione geometrica (e AS è costante), allora $\frac{\mathrm{fl(AN)}}{\mathrm{fl(AP)}} = n\frac{\mathrm{AN}}{\mathrm{AP}}$, dove n è il numero dei termini che precedono AN nella successione.

La dimostrazione di Maclaurin di tale proposizione procede per assurdo e si riferisce alla figura 5, in cui le quantità AS, AP, AL, &c. hanno l'interpretazione geometrica seguente: AS è costante, AP varia uniformemente (ovvero, considerando tempi di variazioni uguali, pP = PP = costante), Al, AL, AL sono le proiezioni sull'ipotenusa dei cateti dei triangoli rettangoli lpS, LPS, LPS; Am, AM, AM sono le proiezioni sull'ipotenusa dei cateti dei triangoli rettangoli mlp, MLP, MLP; e così via.

fig. 5



Il passaggio dalla proposizione VII al corollario IV è assai semplice. Essendo *eh* un arco di parabola si ha: uN: Zh = $(\mathrm{DP})^2$: $(\mathrm{DG})^2$. Si supponga che P vari uniformemente su DG (figura 3) e che X e Y siano tali che {DG, DP, X, Y} sia una successione geometrica. Dalla proposizione VIII si trae: $\frac{\text{fl}(Y)}{\text{fl}(DP)} = \frac{3Y}{DP}$, vale a dire (essendo i termini di una successione geometrica in proporzione continua): $\frac{\text{fl}(Y)}{3\text{fl}(DP)} = \frac{Y}{DP} = \frac{(DP)^2}{(DG)^2} = \frac{uN}{Zh}$, e quindi, $uN \cdot \text{fl}(DP) = \frac{1}{3}[\text{fl}(Y) \cdot Zh]$, ovvero (passando alle fluenti): Area (trap. euN) $= \frac{1}{3} Zh \cdot Y = \frac{1}{3} DP \cdot uN$ Siccome il punto P varia uniformemente, da ciò segue: Area (trap. eZh) $= \frac{1}{3} Zh \cdot DG$, da cui il corollario IV deriva molto semplicemente.

Dimostrato il corollario IV Maclaurin scrive:

> In the same manner it is shewn, that the area ERM is equal to one fourth part of the rectangle contained by RM and DP; and the continuation of these theorems is obvious from the same eight proposition. From which it follows that when the fluxions of all orders of the ordinate DE increase, we approximate continually to the value of KH, the increment of the ordinate that is generated in the same time the base acquires the augment DG, by adding continually together the right line that measures the first fluxion of DE while DG measures the fluxions of the base, 1/2 of that which measures the second fluxions of the ordinate, 1/6 of that which measures its third fluxion, 1/24 of that which measures the fourth fluxion, and so on, the denominators of those fractions being the products of the numbers 1, 2, 3, 4, 5, &c. in their natural order."[88]

Per quanto Maclaurin non espliciti in nessun modo le ragioni che rendono ai suoi occhi possibile una tale generalizzazione, sembra chiaro che egli intenda qui avvalersi implicitamente della possibilità di interpretare ogni curva, in un opportuno intervallo finito, come una curva di genere parabolico di grado eventualmente infinito. Se questo è concesso, la generalizzazione del procedimento dimostrativo che egli presenta nel caso di curve paraboliche di terzo grado dipende dalla possibilità di determinare in termini generali la forma di un'identità geometrica che svolga nel caso di una curva polinomiale di ordine k (k = 4, 5, 6,...) il ruolo che per $k = 3$ è giocato dall'identità $\frac{(DP)^2}{(DG)^2} = \frac{uN}{Zh}$. La dichiarazione di Maclaurin non è tuttavia accompagnata da alcuna indicazione relativa al procedimento che occorre seguire per giungere a questo scopo e non sembra riposare che sull'analogia fra il percorso argomentativo relativo al caso $k = 3$ e il procedimento analitico per differenziazioni successive di Newton e Stirling - il quale si applica, senza alcuna difficoltà, a polinomi di grado qualsiasi, finito o infinito,[89] e che d'altra parte lo

---

[88]Cfr. Maclaurin (1742), pp. 223-4.

[89]Assunto l'algoritmo per la differenziazione delle funzioni algebriche che deriva d'altra parte dalla stessa proposizione VIII - la dimostrazione di Maclaurin può essere d'altra parte perfettamente tradotta in termini analitici. In effetti se si considera la curva Feh come la traccia di un'ordinata espressa dalla funzione $y(z) = Az^2 + Bz + C$ e si pone AF = $y(0)$, AD = z e DG = $\dot{z}$ (ovvero se si considera la curva AEH come la traccia di

stesso Maclaurin ripresenterà in termini del tutto immutati nel secondo libro del suo trattato.[90]

III. 2. c. γ. *Il "teorema" di Maclaurin: la ritraduzione analitica del risultato della proposizione XX*

La tortuosità della traduzione geometrica di una tale dimostrazione non impedisce di apprezzare la straordinaria limpidezza che il "teorema" assume nel nuovo contesto. L'interpretazione delle flussioni come velocità istantanee misurate da segmenti finiti, i quali possono operativamente sostituirsi a esse, permette di esprimere nel modo più esplicito il carattere finito della differenza di cui il teorema fornisce uno sviluppo in serie intera. Così nonostante l'ovvia corrispondenza fra l'enunciato di Maclaurin e la (20) - in cui i differenziali successivi siano opportunamente sostituiti dalle corrispondenti flussioni - una tale identità perde il suo carattere infinitesimalista presentandosi come il risultato della suddivisione di una differenza totale nei suoi componenti parziali. La dimostrazione evidenzia d'altra parte la dipendenza del risultato raggiunto dall'esistenza, per ogni curva assegnata, di un intervallo finito di stabilità delle sue caratteristiche polinomiali, nel quale essa possa venir interpretata come una curva di genere parabolico (a coefficienti costanti). Esprimendo in termini espliciti le condizioni di validità cui Maclaurin sembra implicitamente riferire il proprio risultato, esso sembra dunque riformulabile nei termini seguenti:

---

un'ordinata espressa dalla funzione $\int y(z) = \frac{1}{dz}\left(\frac{1}{3}Az^3 + \frac{1}{2}Bz^2 + Cz + D\right)$ [a proposito dell'uso del simbolo $\int y(z)$ cfr. la prossima nota (113)] l'identità Area (trap. eZh) $= \frac{1}{3}Zh{\cdot}DG$ equivale alla relazione

$$\text{Area (trap. } eZh) = \frac{1}{3}\{[(A(x+\dot{x})^2 + B(x+\dot{x}) + C] - [(2Ax+B)(x+\dot{x})-Ax^2+C]\}\dot{x} = \frac{1}{3}A\dot{x}^3$$

posto che $\eta(z) = (2Ax+B)z - Ax^2 + C$ sia la funzione che esprime la tangente a $y(z)$ nel punto $z = x$. Lo stesso risultato può anche essere tratto, per mezzo di un procedimento più vicino a quello di Maclaurin esprimendo analiticamente la differenza delle aree del trapezoide DG*he* e del trapezio DGZ*e*:

$$\text{Area (trap. } eZh) = \int_x^{x+\dot{x}} (Az^2+Bz+C)dz - \int_x^{x+\dot{x}} [(2Ax+B)z+Ax^2+C]dz] = \frac{1}{3}A\dot{x}^3$$

Per mostrare la derivabilità dell'algoritmo per le funzioni algebriche dalla proposizione VIII, basta applicare d'altra parte, tale proposizione alla successione geometrica $\{k_n x^n\}$, traendo l'identità $\frac{\text{fl}(k_n x^n)}{\text{fl}(k_1 x)} = \frac{n k_n x^n}{k_1 x}$ da cui è ovvio trarre che se $\text{fl}(k_1 x) = k_1 \dot{x}$, allora $\text{fl}(k_n x^n) = n k_n x^{n-1}$.

[90]Cfr. *sotto*.

[****] Per ogni curva di ordinata $y = y(x)$, esiste un δ (finito) tale che se $|\dot{x}| < |\delta|$ allora per ogni x (compreso nell'intervallo di definizione e di infinita differenziabilità dell'ordinata), vale l'identità (geometrica):

$$(27)\ \mathrm{y}\ (\mathrm{x}+\dot{\mathrm{x}}) = \mathrm{y}\ (\mathrm{x}) + \dot{\mathrm{y}}(\mathrm{x}) + \frac{1}{2!}\ddot{\mathrm{y}} + \frac{1}{3!}\dddot{\mathrm{y}} + \&\mathrm{c}.$$

Questa stessa identità è d'altra parte dimostrata da Maclaurin in termini assolutamente espliciti, per il caso $x = 0$, nel secondo libro del *Treatise*.

Se nel primo libro la teoria delle flussioni era stata presentata come una estensione della geometria classica e riferita quindi a relazioni fra entità geometriche in generazione, il secondo libro assume come proprio oggetto le variabili in quanto tali - o, come lo stesso Maclaurin si esprime, "[the] quantities considered abstractly, or as represented by general characters in algebra"[91]. Queste possono infatti considerarsi, esse stesse, come dotate di una propria velocità di variazione costante o variabile, in modo che la flussione di una variabile possa essere direttamente intesa, non come la velocità istantanea del movimento che tale variabile rappresenta, ma come la velocità istantanea della variazione della variabile stessa:

> by the *fluxions* of quantities we shall therefore now understand *any measures of their respective rates of increase or decrease, while they vary (or flow) together*.[92]

Nonostante una simile impostazione esplicitamente analitica, Maclaurin non abbandona tuttavia l'ideale dimostrativo classico, cercando una giustificazione dell'algoritmo del *calcolo* all'interno della teoria delle differenze finite, opportunamente corredata da un metodo generale di riduzione all'assurdo, che permette di determinare le quantità finite che esprimono le velocità istantanee. Non entrerò qui nel merito delle derivazioni proposte da Maclaurin,[93] passando subito alla sua dimostrazione del "teorema" di Taylor che egli presenta - in accordo con l'impostazione di Newton- come uno dei risultati fondamentali che permettono di esprimere una "fluente" (ovvero la soluzione di un'equazione differenziale) per mezzo di una "serie convergente", qualora essa non possa essere "accuratamente rappresentata in termini algebrici".[94]

Sia $y = y(x)$ una quantità che possa essere espressa[95] tramite una

---

[91]Cfr. *ivi*, p. 575.

[92]Cfr. *ivi*, p. 579.

[93]Mi sia consentito rimandare per questo a Panza (1989), pp. 235-8.

[94]Cfr. *ivi*, p. 604.

[95]Si noti che qui Maclaurin non sembra presupporre questa esprimibilità, ma porla piuttosto come condizione. Ecco come egli si esprime [cfr. *ivi*, p. 610]:

> Suppose that y is any quantity that can be expressed by a series of this form $A + Bx + Cx^2 + Dx^3$ + &c. where A, B, C, &c. represent invariable coefficients as usual, any of which may be supposed to vanish.

Sembra d'altra parte chiaro dal contesto complessivo dell'opera che la forma ipotetica si serie della forma A + Bx + Cx^2 + &c., con A, B, C, &c. dei coefficienti costanti rispetto a x. Sia, inoltre, E = $y(0)$, $\dot{E} = \dot{y}(0)$, $\ddot{E} = \ddot{y}(0)$, &c. e si supponga che x fluisca uniformemente. E' chiaro che per $x = 0$ si avrà y = A e quindi A = E. Per trovare B si consideri la flussione prima e si divida per $\dot{x}$. Da $\frac{\dot{y}}{\dot{x}} = B + 2Cx +$ &c., ponendo $x = 0$, si trae infatti $B = \frac{\dot{E}}{\dot{x}}$. Reiterando il procedimento, che come si vede è esattamente quello prospettato da Newton nel 1692, si avrà allora:[96]

$$(28) \qquad y(x) = E + \frac{\dot{E}x}{\dot{x}} + \frac{\ddot{E}x^2}{2!\dot{x}^2} + \&c.$$

Anche se analiticamente perspicua, la dimostrazione newtoniana non sembra a Maclaurin sufficiente a esprimere l'interesse e il significato profondo del teorema, che egli reinterpreta subito in termini geometrici, mostrandone la corrispondenza al risultato tratto nei corollari della proposizione XX del primo libro. Si consideri a questo proposito la figura 6 e si pongano BP = x, BD = $y(0)$ = E. Lo sviluppo precedente ci dà il valore di PM = $y(x)$ espresso in una serie (intera),

> not only in such cases as were described in the preceeding articles, but likewise when the relation of y and z is determined by an affected equation, and in many cases when their relation is determined by a fluxional equation.[97]

Sostituendo x con $\dot{x}$, si trae d'altra parte:

$$(29) \qquad y(\dot{x}) = E + \dot{E} + \frac{\ddot{E}}{2!} + \&c.$$

che lo stesso Maclaurin riconosce come il risultato raggiunto nel primo libro.

---

riferisce qui, non alla sviluppabilità *tout-court* in serie intera, quanto alla sviluppabilità in una serie intera centrata sullo zero.

[96]Presentata la (28) Maclaurin scrive [cfr. *ivi*]:

> This proposition may be likewise deduced from the binomial theorem.

Egli non aggiunge tuttavia alcuna indicazione su come una tale dimostrazione possa essere redatta. Dovranno passare quasi cinquant'anni perché Arbogast fornisca, nel suo manoscritto del 1789 [cfr. Arbogast (1789)] la deduzione a cui Maclaurin sembra far qui allusione [per i dettagli dell'argomento di Arbogast e per una valutazione generale del suo manoscritto mi sia consentito il rinvio a Panza (1985)].

[97]Cfr. *ivi*, p. 611. Maclaurin aggiunge fra parentesi [cfr. la precedente nota (92)]:

> some particular cases being excepted, as when any of the coefficients E, $\frac{\dot{E}}{\dot{x}}$, $\frac{\ddot{E}}{\dot{x}^2}$, &c. become infinite.

Si confronti una tale limitazione della (28) con le limitazioni indicate da Lagrange per la sviluppabilità in serie intera di una funzione qualsiasi nel suo intervallo di definizione [cfr. il prossimo capitolo III.6., *sez. b.*].

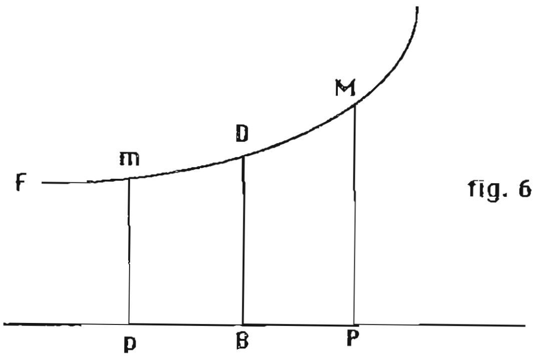


fig. 6

Per quanto differenti fra di loro le dimostrazioni considerate fin qui forniscono senza eccezioni un'interpretazione non infinitesimalista del "teorema" di Taylor. Benché i coefficienti della la serie che esso esibisce siano infatti costituiti dai rapporti flussionali dei vari ordini o, come nel caso di Maclaurin, dalle flussioni stesse, e, per quanto a esso di possa giungere per mezzo di un passaggio alle differenze infinitamente piccole a partire da una formula alle differenze finite, il risultato finale non è che che l'espressione in una serie intera a termini finiti di una quantità anch'essa finita. Nella prossima sezione mostrerò che se, lasciando la Gran Bretagna e la "tradizione" newtoniana, dirigiamo la nostra attenzione verso i matematici continentali e la "tradizione" leibniziana, siamo condotti a conclusioni del tutto differenti e per certi aspetti opposte.

III. 2. *d*.
IL TEOREMA DI BERNOULLI: UNA VERSIONE INTEGRALE DEL "TEOREMA" DI TAYLOR.

III. 2. *d*. α. *Premessa: le difficoltà di un'interpretazione infinitesimalista del "teorema" di Taylor*

Nella sua *Histoire des Mathématiques* [98] Jean Montucla presenta il "teorema" di Taylor nei termini seguenti:

> [...] si dy, ddy, d^3y, &c. sont les différentielles successives de l'ordonnée y répondante à l'abscisse x, et qu'on suppose x coître d'une quantité infiniment petite, alors l'ordonnée correspondante à l'abscisse $x+dx$ sera

[98] Cfr. Montucla (1799-1802), vol. III, p. 121 [correggo qui un evidente errore di stampa].

$$(30) \qquad [y(x+dx) =]\ y + dy + \frac{ddy}{2} + \frac{d^3y}{2 \cdot 3} + \frac{d^4y}{2 \cdot 3 \cdot 4} + \&c.$$

Come si vede Montucla sceglie quindi la forma (20) e presenta il "teorema" come un'identità fra una differenza infinitamente piccola e una serie a termini infinitesimali costituiti da differenziali di ordine crescente. Essendo peraltro esplicito il riferimento alla concettualizzazione leibniziana del calcolo, la (30) non sembra suscettibile di diverse interpretazioni.

Ora, la stessa fondazione del calcolo che deriva da una tale concettualizzazione verte, nei contesti più semplici, sull'equiparazione fra l'arco infinitesimo di una curva e la sua tangente, ovvero fra la differenza infinitesima di una funzione[99] e il suo differenziale primo. Se il passaggio a contesti più complessi, ovvero la considerazione di problemi di ordine superiore al primo, richiede una considerazione esplicita della differenza fra una curva e una retta anche su intervalli infinitesimali, la "metafisica" leibniziana non sembra essere nelle condizioni di risolvere l'ambiguità comportata da simili procedimenti, i quali vertono sul trattamento algebrico di entità altrove considerate come nulle. La riuscita delle applicazioni del *calcolo* dipende infatti in questo contesto dalla capacità di distinguere fra ambiti diversi, accettando volta a volta omissioni limitate a infinitesimali di ordine differente, senza potersi riferire per questo né a una regola generale di carattere formale, né a un principio informale chiaramente formulato: l' "arte del *calcolo*" consiste così nel saper scegliere, in ogni occasione particolare, le omissioni opportune.

In questo quadro un'identità come la (30) assume uno statuto del tutto particolare. In primo luogo essa può intendersi come una "base" genericamente determinata per differenti omissioni che nei vari casi la riducono a diverse identità troncate a un ordine finito. In secondo luogo essa può venire interpretata come una rappresentazione algoritmica della composizione qualitativa del continuo, la quale esprime l'infinita gerarchia differenziale. In terzo luogo essa può venir letta come un'identità implicitamente riferita all'ordine *n* e che dovrebbe quindi essere riscritta quindi in termini più precisi (utilizzando la notazione di de Morgan[100]) nei termini seguenti:

$$(31) \qquad y(x+dx) - y(x) \overset{n}{=} dy(x) + \frac{d^2y(x)}{2!} + \frac{d^3y(x)}{3!} + \dots + \frac{d^ny(x)}{n!}$$

In tutti e tre questi casi essa non dà alcuna informazione sul comportamento di una funzione su un intervallo finito qualsiasi e non può quindi essere intesa come l'esibizione di uno sviluppo per una funzione qualsiasi al di fuori di un intorno infinitesimale di x. La serie di Taylor non sembra quindi interpretabile, come nel contesto della "tradizione" newtoniana, come la rappresentazione in forma polinomiale di una funzione qualsiasi.

[99] Il riferimento implicito è ovviamente a funzioni continue.

[100] Cfr. de Morgan (1866), pp. 184-9. Sull'analisi di de Morgan del "segno" (e del concetto) di "eguaglianza" cfr. Giorello (1985), cap. VI.

E' assai difficile capire perché Montucla abbia scelto di presentare il "teorema" di Taylor sotto una tale forma. Egli non fornisce d'altra parte alcuna ricostruzione della sua storia, mostrando relativamente a esso un certo imbarazzo che ancora alla fine del secolo sembra persistere per chi non abbia completamente reciso i legami con la "tradizione" leibniziana. Nessuna delle identità che ho fino a qui considerato come espressioni di un tale "teorema" trova d'altra parte posto né negli scritti di Leibniz, né in quelli dei suoi più stretti collaboratori o seguaci. Al contrario, in questi lavori abbondano le citazioni e le dimostrazioni del cosiddetto "teorema di Bernoulli", che, nelle sue varie versioni, si dimostra assai facilmente equivalente al "teorema" di Taylor, ma è che generalmente presentato sotto una veste del tutto diversa, come un'identità fra una forma integrale e una serie generalmente non intera. Benché fin dal 1730 Stirling[101] avesse mostrato la derivabilità del "teorema" di Bernoulli da quello di Taylor, nei testi matematici del XVIII secolo non sono d'altra parte rintracciabili, a quanto io sappia, dimostrazioni dell'implicazione inversa. L. Feigenbaum[102] ha cercato - riferendosi per questo anche a numerosi studi precedenti - di remder conto delle ragioni della mancata comprensione dell'equivalenza fra i due risultati. Per quanto concordi con la maggior parte delle sue analisi e delle sue conclusioni, io cercherò qui di avanzare degli argomenti in parte differenti, i quali insistono principalmente sulla difficoltà d'interpretazione del "teorema" di Taylor nella "tradizione" leibniziana.

III. 2. *d. β. La prima dimostrazione del teorema di Bernoulli*

Nel numero dell'aprile 1693 degli *Acta Eruditorum* Leibniz[103] presenta - come ho ricordato nel precedente paragrafo II.1.δ. - un "metodo generale" di sviluppo in serie, che egli applica a qualche semplice esempio e che corrisponde in realtà, in termini assai semplificati, al procedimento già formulato da Newton nel *De Methodis* e esposto da Wallis nell'*excerptum* del *De Quadratura*, pubblicato a Londra nello stesso anno.[104] Per quanto le serie che egli ottiene per logaritmo, esponenziale e seno corrispondano, a meno delle costanti di integrazione (che sembrano del tutto dimenticate), agli sviluppi in serie di Taylor di queste funzioni, Leibniz non generalizza né il suo metodo né i suoi risultati e non perviene così a nulla di simile ai corollari III e IV della proposizione XII del *De quadratura*.

Il problema di fornire una generalizzazione tanto del metodo che dei risultati di Leibniz è invece affrontato, nel corso dell'anno successivo, da Johann I Bernoulli, che dedica alla questione un breve articolo, anch'esso apparso sugli *Acta Eruditorum*.[105] Il risultato a cui egli perviene è tuttavia si-

---

[101]Cfr. Stirling (1730), pp. 102-3.

[102]Cfr. Feigenbaum (1985), pp. 100 e segg..

[103]Cfr. Leibniz (1693).

[104]Cfr. il precedente paragrafo III.2.*a.γ*..

[105]Cfr. Bernoulli (1694). Lo stesso risultato è peraltro enunciato in una lettera a Leibniz del 2 Settembre dello stesso anno [cfr. Leibniz-Bernoulli (1745), V, vol. I, pp. 13-16 o

gnificativamente differente da quello di Newton.

Lo scopo di Bernoulli è quello di fornire la forma generale di una serie, la quale permetta di esprimere direttamente la quadratura di ogni curva, senza presupporre la conoscenza delle sue proprietà differenziali. Sia a questo proposito y una "quantitatem quomodocunque formatam ex indeterminatis et constantibus", allora "elementum spatii curvæ, vel quodvis aliud explicari potest per ydx",[106] e il problema della quadratura di una curva qualsiasi può essere ridotto a quello dell'integrazione di ydx. Per cercare la serie che esprime in generale questo integrale, Bernoulli parte, seguendo un procedimento all'epoca piuttosto usuale,[107] da un'equazione identica di natura infinitaria:.

$$\text{(32)} \qquad ydx = ydx + xdy - xdy - \frac{x^2 d^2 y}{2!\, dx} + \frac{x^2 d^2 y}{2!\, dx} + \frac{x^3 d^3 y}{3!\, dx^2} - \frac{x^3 d^3 y}{3!\, dx^2} + \&c.$$

da cui integrando i termini della serie due a due egli trae:[108]

$$\text{(32a)} \qquad \int ydx = \int [ydx + xdy] - \int \left[xdy + \frac{x^2 d^2 y}{2!\, dx} \right] + \int \left[\frac{x^2 d^2 y}{2!\, dx} + \frac{x^3 d^3 y}{3!\, dx^2} \right] - \&c.$$

La serie si trasforma allora in una serie di integrali esatti[109] e è quindi ovvio concludere:

$$\text{(33)} \qquad \int ydx = xy - \frac{x^2}{2!} \frac{dy}{dx} + \frac{x^3}{3!} \frac{d^2 y}{dx^2} - \&c.$$

Gerhardt (1849-63), vol. III, p.143-52.].

[106]Cfr. Bernoulli (1694), p. 438 e Leibniz-Bernoulli (1745), vol. I, pp. 15-16. Per quanto i termini con i quali Bernoulli qualifica la "quantità" y corrispondono a quelli che egli stesso utilizzerà nel 1718 per definire una funzione, un'impostazione genuinamente funzionale sembra, come vedremo, restare estranea alla vicenda matematica che ricostruirò nella presente sezione.

[107]Per un'altro esempio cfr. la dimostrazione analitica da parte di Grandi del teorema che fornisce la somma di una serie geometrica qualsiasi [cfr. il precedente paragrafo III.1.γ.].

[108]Si noti che il passaggio dalla (32) alla (33) richiede un riordinamento della serie assegnata, il quale fa perdere a essa il carattere di un'infinita somma di zeri e è quindi possibile solo sotto delle condizioni che garantiscano la convergenza della serie trasformata La situazione è da questo punto di vista simile a quella in cui si troverà Grandi qualche anno dopo, nel corso della sua dimostrazione richiamata nella precedente nota 107. Per ulteriori commenti su questo punto rimando quindi al precedente paragrafo III.1.γ.. Per quanto riguarda poi la legittimità dell'integrazione termine a termine, oggi sappiamo che essa dipende dalla convergenza uniforme della serie a cui è applicata.

[109]Cfr. la prossima nota (113).

ciò che risolve il problema iniziale. Interpretata in termini funzionali, la (33) fornisce, come si può facilmente constatare, lo sviluppo che ho presentato sotto varie forme e in notazione moderna nel precedente paragrafo II.2-B.ε.. Per trarre la (26)(i) di tale paragrafo (estesa al caso infinitario) basta infatti prendere $y = y(x)$, $dy/dx = y'(x)$ e aggiungere la costante di integrazione, mentre per avere la (24)(iv) è sufficiente, dopo aver applicato le stesse sostituzioni, considerare l'integrale come definito fra 0 e x. Né la prima, né la seconda trasformazione mi paiono tuttavia compatibili con l'interpretazione di tale formula che sembra emergere dal testo di Bernoulli, il quale sembra fornire il proprio teorema[110] entro un contesto concettuale del tutto differente da quello presupposto nel paragrafo citato. Il ragionamento che conduce questi alla (33) pare infatti potersi ricostruire nei termini seguenti. Considerata una curva AM qualsiasi, di ordinata y (figura 7), la sua area può essere pensata come la somma degli elementi infinitamente piccoli ydx, per la determinazione dei quali il differenziale dx può ben essere considerato come costante. L'integrale $\int ydx$ non indica che questa somma, la quale risponde, secondo i principi del nuovo *calcolo* leibniziano, all'algoritmo inverso delle tangenti e soddisfa quindi la relazione differenziale $\frac{d\int ydx}{dx}\left[=\frac{dx\ d\int y}{dx}\right]=y$. In questa relazione - e quindi nella stessa (32) - il simbolo[111] $\int ydx$ non indica l'antiderivata riferita alla variabile x della funzione $y = y(x)$, ma piuttosto l'antidifferenziale del prodotto ydx fra le due quantità[112] y e dx, la seconda delle quali è presa come costante - ciò che conduce alla posizione $\int ydx = dx\int y$.[113]

---

[110] Utilizzerò qui il termine "teorema di Bernoulli" per riferirmi alla (33) e ai risultati che nel corso del dibattito ricostruito nella presente sezione sono stati considerati come analoghi a essa, piuttosto che ai risultati, solo formalmente equivalenti, presentati nel precedente paragrafo II.2-B.ε.. L'assenza di una identica appellazione fra quelle usualmente utilizzate dai matematici moderni mi permetterà di evitare le virgolette.

[111] In verità, Bernoulli non fa alcun uso nella sua memoria (come d'altronde nelle stesse *Lectiones mathematicæ*) del simbolo "∫" - che solo più tardi diverrà usuale fra i matemetici leibniziani - scrivendo piuttosto: "integr. ydx = [...]".

[112] Si noti che la dimostrazione di Bernoulli procede del tutto indipendentemente da ogni legame (tanto funzionale che semplicemente algoritmico) fra y e dx.

[113] Per chiarire questo punto, si consideri l'identità che fornisce il secondo termine della serie involta nella (33), $\int\left[xdy+\frac{x^2}{2}\frac{d^2y}{dx}\right]=\frac{x^2}{2}\frac{dy}{dx}$: essa è giustificata dalla seguente identità inversa, in cui dx è preso come una costante e il differenziale è calcolato secondo la regola del prodotto:

$$d\left(\frac{x^2}{2}\frac{dy}{dx}\right)=\frac{2xdx}{2}\frac{dy}{dx}+\frac{x^2}{2}\frac{d^2y}{dx}=xdy+\frac{x^2}{2}\frac{d^2y}{dx}$$

I seguenti esempi (in cui il simbolo di integrazione è impiegato *à la* Bernoulli) chiariranno la situazione:

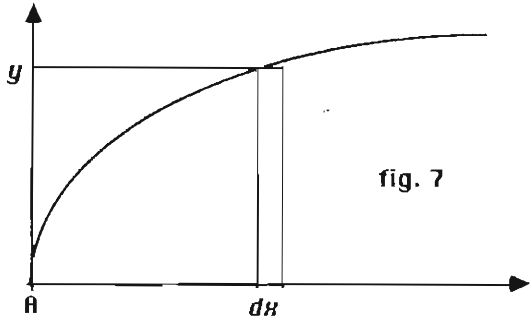


fig. 7

A partire dalla sua formula generale, Bernoulli deduce poi gli stessi sviluppi tratti da Leibniz nella memoria dell'anno precedente. Il modo in cui egli giunge a tale risultato è tuttavia sintomatico. Consideriamo a esempio la serie logaritmica.[114] Posto $t = a \log(a+z)$ si ha, passando ai differenziali, $dt = \frac{adz}{a+z}$ e quindi: $\frac{t}{a} = \int \frac{dz}{a+z}$. L'integranda si trasforma allora nel prodotto ydx per le semplici posizioni $y = \frac{1}{a+z}$ e $x = z$, da cui segue: $dx = dz$. Sostituendo nella (33) è così facile trarre:

$$\int z^2 dx = \frac{1}{3}\frac{z^3}{dz}dx \; ; \; \int f'(z)dx = \frac{f(z)}{dz}dx \; ;$$

$$\int x^2\, dx = \frac{1}{3}x^3 \; ; \; \int f'(x)\, dx = f(x)$$

$$\int z^2 = \frac{1}{3}\frac{z^3}{dz} \; ; \; \int f'(z) = \frac{f(z)}{dz}$$

Non è difficile osservare che se $y = y(x)$ l'integrale di Bernoulli di ydx corrisponde algoritmicamente alla primitiva, anche se il simbolo $\int ydx$ che lo esprime non indica in generale la primitiva di $y = y(x)$ considerata relativamente a x, ma piuttosto l'antidifferenziale del prodotto ydx (dx costante). Analogamente il simbolo $\frac{d^n y}{dx^{n-1}}$ non indica la derivata $(n-1)$-esima di dx, ma il differenziale n-esimo di $\frac{y}{dx^{n-1}}$ (dx costante).

[114]Per il procedimento di Leibniz cfr. il precedente paragrafo II.1.δ..

$$(34)\qquad \frac{t}{a} = \log(a+z) = \int \frac{1}{a+z}dz = \frac{z}{a+z} + \frac{z^2}{2!}\,\frac{\frac{dz}{(a+z)^2}}{dz} + \frac{z^3}{3!}\,\frac{\frac{2dz^2}{(a+z)^3}}{dz^2} + \&c.$$

$$= \frac{z}{a+z} + \frac{z^2}{2(a+z)^2} + \frac{z^3}{3(a+z)^3} + \&c.$$

Le tre seguenti osservazioni mi sembrano immediate di fronte alla presentazione di un tale procedimento: i) benché aggiungendo la costante di integrazione, che Bernoulli continua a dimenticare, lo sviluppo fornito dalla (34) sia formalmente equivalente allo sviluppo della funzione $v = \log(a+z)$ nella propria serie di Taylor centrata sul punto $z = 0$,[115] esso ne è essenzialmente differente, non presentandosi, in quanto tale, come uno sviluppo in serie intera;[116] ii) il metodo di Bernoulli non permette di calcolare la costante di integrazione che *a posteriori*, ponendo $z = 0$ nell'identità risultante, mentre il metodo di Leibniz (e Newton) permette di farlo *a priori*, ponendo $z = 0$ nell'identità generica $v = \log(a+z) = A + Bz + Cz^2 + \&c.$; iii) la (33) non determina univocamente la (34).

A sostegno di quest'ultima osservazione basta considerare la semplice posizione $z = x+\eta$ (η costante) la quale, continuando a verificare l'identità $dz = dx$, conduce per ogni η, secondo il procedimento di Bernoulli, alla nuova identità infinitaria:[117]

$$(35)\qquad \frac{t}{a} = \log(a+z) = \int \frac{1}{a+z}dz = = \frac{z-\eta}{a+z} + \frac{(z-\eta)^2}{2(a+z)^2} + \frac{(z-\eta)^3}{3(a+z)^3} + \&c.$$

Ciò significa che l'integrale di Bernoulli (e Leibniz), inteso come somma infi-

[115] Per rendersi conto di una tale equivalenza basta o sviluppare le successive potenze negative del binomio $(a+z)$ presenti in (34) e ordinare la serie risultante secondo le potenze di z o, più semplicemente, osservare che per $z \to 0$ i termini generali della (34) e della (6) del paragrafo II.1.δ. sono fra loro asintotici.

[116] Ciò rende assai problematica la determinazione delle condizione di validità del risultato di Bernoulli, il quale oltre a presentare il proprio teorema senza l'esplicita indicazione di alcuna limitazione, non sembra potersi implicitamente riferire alle condizioni di convergenza di una serie intera.

[117] Per fornire un altro esempio basta prendere $y = \frac{dz}{a+z}$ e $dx = 1$. Il procedimento di Bernoulli conduce allora, per ogni v variabile, all'identità:

$$\frac{t}{a} = \log(a+z) = \int \frac{1}{a+z}dz = \frac{dz}{a+z}\left(\frac{v}{dv} + C\right) - \frac{d^2z(a+z) - dz^2}{2(a+z)^2}\left(\frac{v}{dv} + C\right)^2 + \&c.$$

E' chiaro che il solo modo per bloccare in termini generali simili conseguenze indesiderate del teorema di Bernoulli è di esplicitare il legame funzionale che deve sussistere fra y e x.

nita di superfici con una dimensione infinitamente piccola, non fornisce un algoritmo univoco: l' "arte del *calcolo*" consiste allora, non solo nel saper scegliere le omissioni opportune, ma anche le opportune sostituzioni.

Il modo più semplice per passare dalla (33) al "teorema" di Taylor consiste nell'intendere l'integrale come un integrale definito e nel sostituire f'(v) a y, scegliendo v in modo che $dv = dx$. Per avere il "teorema" di Taylor sotto la forma (4) del precedente paragrafo II.2-B.α. basta porre $\int y dx = \int_{a-z}^{0} f'(x+z)dx$. Per questa sostituzione si ha infatti:

$$\int_{a-z}^{0} f'(x+z)dx = [f'(x+z)x]_{a-z}^{0} - \left[f''(x+z)\frac{x^2}{2!}\right]_{a-z}^{0} + \&c. \tag{36}$$

ovvero:

$$f(z) = f(a) - f'(a)(a-z) + f''(a)\frac{(a-z)^2}{2!} + \&c.$$

Per avere direttamente la (11) del precedente paragrafo II.2-B.γ. basta porre invece $x = w - \xi$ e $\int y dx = \int_{0}^{\xi} f'(z+w)dw$. Sostituendo nella (33) si ha allora:

$$\int_{0}^{\xi} f'(z+w)dw = [f'(z+w)\ (w-\xi)]_{0}^{\xi} - \left[f''(z+w)\ \frac{(w-\xi)^2}{2!}\right]_{0}^{\xi} + \&c. \tag{37}$$

ovvero:

$$f'(z+x) = f(z) + f'(z)\xi + f''(z)\frac{\xi^2}{2!} + \&c.$$

In entrambi i casi le sostituzioni analitiche non sono per nulla ovvie e l'interpretazione dell'integrale come un integrale definito fra limiti opportuni lo è ancora meno. Per immaginare tali trasformazioni occorre intendere x come la variabile indipendente della funzione $y = y(x)$ e, dando a questa variabile i valori z_1 e z_2, intendere $\int_{z_1}^{z_2} y(x)dx$ come una funzione di z_1 e z_2 (ovvero di z, se i valori z_1 e z_2 sono espressi in funzione di una sola variabile z). Se la mia analisi della dimostrazione di Bernoulli è corretta, se ne deve trarre che un'ulteriore dimostrazione dell'implicazione dalla (33) al "teorema" di Taylor avrebbe richiesto una radicale trasformazione del punto di vista che essa sembra sottendere. A conclusioni dello stesso tipo sono d'altra parte giunti numerosi storici,[118] e fra questi lo stesso Pringsheim,[119] il quale tuttavia, scrivendo la (33) direttamente sotto la forma

$$(38) \qquad \int_0^x \varphi(x)\, dx = \varphi(x)x - \varphi'(x)\frac{x^2}{2!} + \varphi''(x)\frac{x^3}{3!} - \&c.$$

non può che limitarsi a sottolineare l'ingegnosità analitica delle sostituzioni precedenti (o di altre analoghe).[120]

III. 2. *d. γ. Alcune lettere fra Leibniz e Bernoulli: ulteriori dimostrazioni del teorema*

Rispondendo con tre mesi di ritardo alla lettera con quale Johann Bernoulli gli aveva comunicato il proprio risultato,[121] Leibniz[122] non si limita a prenderne atto, ma afferma di esserne già a conoscenza, avendolo egli stesso dimostrato qualche anno prima riflettendo - ispirato in questo dai lavori di Pascal - sulle proprietà delle differenze finite.[123] Ecco come Leibniz, per l'occasione, ricostruisce la propria dimostrazione.

[118]Per gli opportuni riferimenti cfr. Feigenbaum (1985), pp. 96 e segg..

[119]Cfr. Pringsheim (1900).

[120]Si osservi che la traduzione della (33) nella (38) non richiede solo l'interpretazione di y come una funzione di x, ma anche l'interpretazione dei successivi rapporti differenziali come derivate. Ora, se dal punto di vista algoritmico la posizione $y = y(x)$ rende del tutto irrilevante la distinzione fra rapporti differenziali e derivate, l'analisi precedente dovrebbe mostrare che una tale trasposizione è del tutto ingiustificata relativamente al punto di vista di Bernoulli. Le considerazioni della precedente nota (113) rendono d'altra parte manifesta la possibilità di immaginare contesti in cui tale distinzione corrisponde alla distinzione fra diverse procedure algoritmiche.

[121]Cfr. la precedente nota (105).

[122]La lettera di Leibniz a Bernoulli, datata 6-16 dicembre 1694, è in Leibniz-Bernoulli (1745), VI, vol. I, pp. 18-24 e in Gerhardt (1849-63), vol. III, pp. 152-7. In questa stessa lettera Leibniz applica il metodo del *Supplementum Geometriæ* a nuovi esempi fornendo differenti serie esponenziali e logaritmiche.

[123]Sulle riflessioni di Leibniz a proposito delle proprietà delle differenze finiti e sulla loro relazione con la scoperta del *calcolo*, cfr. Bos (1974), pp.12-35.

Considerata la successione decrescente $\{a_n\}_1^\infty$, l'identità infinitaria $a_1 = a_1 - a_2 + a_2 - a_3 + a_3$ - &c. permette di trarre agevolmente l'espressione del primo termine di tale successione in funzione delle successive differenze prime: $a_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \Delta a_k$ (dove $\Delta a_k = [a_k - a_{k+1}]$ (k = 1, 2, 3, &c.)). Definendo d'altra parte le differenze di ordine superiore in termini ricorsivi,[124] $\Delta^n a_k = [\Delta^{n-1} a_k - \Delta^{n-1} a_{k+1}]$ è ovvio trarre, per successive reiterazioni, l'identità generale $\Delta a_k = \sum_{n=0}^{k-1} (-)^n \binom{k-1}{n} \Delta^{n+1} a_1$ (k = 1, 2, 3, ...), da cui, sostituendo nella serie precedente, si trae:

$$
(39) \qquad a_1 = \begin{cases} \Delta a_1 \\ + \Delta a_1 - \Delta^2 a_1 \\ + \Delta a_1 - 2\,\Delta^2 a_1 + \Delta^3 a_1 \\ + \Delta a_1 - 3\,\Delta^2 a_1 + 3\,\Delta^3 a_1 - \Delta^4 a_1 \\ + \Delta a_1 - 4\,\Delta^2 a_1 + 6\,\Delta^3 a_1 - 4\,\Delta^4 a_1 + \Delta^5 a_1 \\ + \&c. \end{cases}
$$

Posto ora $a_1 = y$ e prese le differenze come infinitamente piccole, sia dx una "quantità costante infinitamente piccola, presa come unità".[125] Essendo

$$
(40) \qquad \begin{aligned} 1 + 1 + 1 + 1 + \&c. &= x \left[= \int dx \right] \\ 1 + 2 + 3 + 4 + \&c. &= \int x = \frac{1}{2!}\, x^2 \\ 1 + 3 + 6 + 10 + \&c. &= \int\!\!\int x = \frac{1}{3!}\, x^3 \end{aligned}
$$

---

124 Leibniz sembra intendere tanto la successione originaria che quelle formate dalle sue differenze dei vari ordini come decrescenti.

125 La traduzione è letterale [cfr.Gerhardt (1849-63), vol. III, p. 156]:
Ipsa autem quantitas constans pro unitate sumpta sit *dx* infinite parva.

$$1 + 4 + 10 + 20 + \&c. = \int\!\!\int\!\!\int x = \frac{1}{4!} x^4$$

&c.

dalla (39) segue (ricordando che $dx = 1$):

(41) $$y = x \frac{dy}{dx} - \frac{1}{2!} x^2 \frac{d^2y}{dx^2} + \frac{1}{3!} x^3 \frac{d^3y}{dx^3} - \&c.$$

da cui Leibniz trae la (33) sostituendo $\int y$ a y e moltiplicando per dx.

Secondo Bourbaki[126] la (41) è qui tratta dalla (39) per mezzo di un passaggio al limite e può essere scritta sotto la forma:

(42) $$y = \sum_{k=1}^{\infty} (-)^{k-1} \frac{d^k y}{dx^k} \frac{x^k}{k!}$$

> [...] où y est une fonction s'annullant pour $x = 0$, et les $\frac{d^k y}{dx^k}$ sont ses dérivées pour la valeur x de la variable.

Essa è inoltre "equivalente" alla "formula" di Bernoulli e "très voisine de la série de Taylor".[127] L. Feigenbaum[128] sembra sostanzialmente accettare questo punto di vista, salvo aggiungere alla (41) il termine $y(0)$ e identificarla con lo sviluppo di Taylor sotto la forma (21) per la posizione $\xi = -x$, anche se - egli aggiunge - non è per nulla certo che "Leibniz really appreciated the value of his discovering".[129]

Se accettiamo una tale interpretazione dobbiamo concluderne che, consapevole o meno del rilievo del suo risultato, Leibniz fosse giunto al "teorema" di Taylor almeno fin dal 1694 (e probabilmente anche prima) e che conoscesse la possibilità di derivare da questo lo stesso teorema di Bernoulli. Io credo tuttavia che una tale interpretazione della dimostrazione di Leibniz non solo sia illegittima, ma lo sia per ragioni essenziali, la considerazione delle quali mi pare debba condurci a una conclusione radicalmente diversa.

---

[126]Cfr. Bourbaki (1960), p. 237.

[127]Cfr. *ivi*, pp. 237-38. Bourbaki non precisa in termini matematici la propria nozione di "molto vicina", restando a questa indicazione per lo meno approssimativa. Egli pensa inoltre che la dimostrazione di Taylor del 1715 comporti "le raisonnement même de Leibniz, par passage à la limite à partir du calcul des différences".

[128]Cfr. Feigenbaum (1985), pp. 84-7.

[129]Cfr. *ivi*, p. 87.

In primo luogo io non vedo alcun passaggio al limite, salvo che non si voglia intendere con questo termine la semplice sostituzione delle differenze finite con delle differenze infinitamente piccole. Compiuta questa sostituzione la dimostrazione di Leibniz riposa d'altra parte sulle identità (40), che mi pare divengano comprensibili solo intendendo un integrale $\int \alpha$ come una somma infinita di quantità genericamente indicate con la variabile α.[130] Assunta questa interpretazione le identità (40) possono infatti scriversi esplicitamente nel modo seguente:

$$\text{i)}\quad dz + dz + dz + dz + \&c. = 1 + 1 + 1 + 1 + \&c. = \int dz = z \qquad [dz = 1]$$

$$\text{ii)}\quad \left.\begin{array}{ll} [z=] & dz + dz + dz + dz + dz + \&c. \\ [z=] & \quad dz + dz + dz + dz + \&c. \\ [z=] & \qquad dz + dz + dz + \&c. \\ [z=] & \qquad\quad dz + \&c. \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} dz + 2dz + 3dz + 4dz + \&c. = \\ \quad = 1 + 2 + 3 + 4 + \&c. = \\ \quad = \int z = \dfrac{1}{2}\dfrac{z^2}{dz} = \dfrac{1}{2} z^2 \qquad [dz = 1] \end{array}\right.$$

&c.

(43)

$$\text{iii)}\quad \left.\begin{array}{ll} \left[\int z=\right] & 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + \&c. \\ \left[\int z=\right] & \quad 1 + 2 + 3 + 4 + \&c. \\ \left[\int z=\right] & \qquad 1 + 2 + 3 + \&c. \\ \left[\int z=\right] & \qquad\quad 1 + 2 + \&c. \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} 1 + 3 + 6 + 10 + \&c. = \\ \quad = \iint z = \dfrac{1}{3!}\dfrac{z^3}{dz^2} = \dfrac{1}{3!} z^3 \qquad [dz = 1] \end{array}\right.$$

&c.

L'assenza delle costanti di integrazione - ovvero la posizione del tutto

[130] Si noti che a rigore la dimostrazione di Leibniz richiede l'integrazione successiva di dx, x, x^2, &c. - e non di dx, xdx, x^2dx, &c. o ydx - i cui risultati dipendono dalla posizione $dx = 1$.

arbitraria $A_0 = 0$ (con A_k il coefficiente di $\frac{1}{k!}x^k\frac{d^k y}{dx^k}$ in (41)) - dipende allora dalla nozione stessa di integrale. Se si intende un integrale indefinito come una somma infinita, la necessità dell'introduzione di una costante di integrazione resta infatti del tutto inconcepibile. In luogo di cercare le ragioni profonde di quello che appare ai nostri occhi come un errore più volte ripetuto tanto da Leibniz che da Bernoulli, molti interpreti hanno seguito Pringsheim e risolto la difficoltà sostituendo l'integrale indefinito $\int y dx$ di Bernoulli e Leibniz con il nostro integrale definito $\int_0^x \varphi(x)dx$, in modo da esprime implicitamente il termine di ordine zero della serie di Bernoulli, senza aggiungere a essa alcuna costante. Questa interpretazione è tuttavia *ad hoc*. Se può esprimere la ricerca bernoulliana di un'area, essa appare non solo del tutto ingiustificata a fronte della dimostrazione leibniziana, ma anche incapace di render conto dell'esplicita esibizione, da parte di Leibniz e Bernoulli, di formule come la (6) del paragrafo II.1.δ. o la stessa (34), che, anche (e soprattutto) a fronte di un tale artificio, restano essenzialmente scorrette.[131]

La questione della costante di integrazione è tuttavia di un interesse minore qualora la si confronti all'altra questione che sorge dalla affrettata traduzione di Pringsheim e dalla lettura della (41) come una versione del "teorema" di Taylor o comunque come una "formula" a esso "molto vicina". Mi riferisco ovviamente all'equiparazione di y con una generica funzione di x.[132] Per mettere in discussione una tale interpretazione basta osservare che la dimostrazione di Leibniz non solo non richiede in alcun modo la presupposizione di un legame funzionale fra y e x, ma procede introducendo le quantità y e x in modo del tutto indipendente e non sfruttando che il carattere infinitamente piccolo dell'unità dx.

In ultimo luogo, se è pur vero che, posta la sostituzione $\xi = -x$, la (21) implica la (41) (in cui si assuma $y = y(x)$), è anche del tutto chiaro che tale trasformazione fa perdere al "teorema" di Taylor il carattere di un'identità, il

---

[131] D'altra parte anche aggiungendo alla (41) un'opportuna costante C, sostituendo $\int y$ a y e moltiplicando per dx, essa si trasforma nell'identità

$$dx\int y = Cdx + xy - \frac{1}{2!}x^2\frac{dy}{dx} + \frac{1}{3!}\frac{d^2y}{dx^2} - \&c.$$

che, omettendo l'addendo infinitamente piccolo Cdx, si trasforma ancora nella (33) [si noti che prendendo y finito, l'integrale $\int y$ è infinto e quindi il prodotto $dx\int y$ è finito e a fronte di esso Cdx può quindi essere omesso].

[132] Si osservi che Bourbaki sembra su questo punto glissare, qualificando y genericamente come una "funzione" e prendendo x come un valore della variabile [quale?] di questa funzione [cfr. la citazione di cui alla precedente nota 126].

cui secondo membro è costituito da una serie intera. Così se accettiamo l'idea che il contenuto essenziale di questo "teorema" consista nel fatto che esso fornisce la forma generale dello sviluppo in serie intera di una funzione qualsiasi, dobbiamo anche concludere che la differenza informale fra esso e la (41) è tanto grande da non poter essere colmata dall'esibizione *a posteriori* di un procedimento formale che conduce dall'uno all'altra.

Per quanto egli avesse dichiarato di esserne già a conoscenza, il risultato di Bernoulli deve avere provocato in Leibniz un particolare interesse se poco più di due mesi più tardi egli ritornò sul problema che questi aveva sollevato. Credendo di aver trovato un opportuno sviluppo in serie per un integrale della forma $\int x^n d^m y\ (dx = 1)$, egli ne fece l'oggetto di una nuova lettera indirizzata allo stesso Bernoulli.[133] Benché l'evidente erroneità della dimostrazione proposta da Leibniz lo conduca in realtà a un risultato scorretto, l'idea essenziale del procedimento è perfettamente chiara e non servono che banali correzioni locali per dare a esso una forma e un esito convenienti. Si tratta in sostanza di costruire la serie termine a termine, reiterando indefinitamente una (scorretta) integrazione per parti, la quale permette di trarre l'identità di partenza

$$(44)\qquad \int x^n d^m y = x^n d^m y - n\int x^{n-1} d^{m-1} y\, dx$$

che sembra rispondere alla posizione erronea

$$(45)\qquad \int u dv = udv - \int vdu$$

Reiterando la (44) (e sbagliandosi anche nella differenziazione di x^{α}), Leibniz trae successivamente le identità:

$$\text{i)}\quad n\int x^{n-1} d^{m-1} y\, dx = ndx\int x^{n-1} d^{m-1} y =$$

$$= ndx\left(x^{n-1} d^{m-1} y - n\int x^{n-2} d^{m-2} y\, dx\right)$$

(46)

[133] La lettera, datata 28 Febbraio 1695, è in Gerhardt (1849-63), vol. III, pp. 164-69 e in Leibniz-Bernoulli (1745), VIII, vol. I, pp. 32-38.

$$\text{ii)}\quad n^2 dx \int x^{n-2} d^{m-2} y\, dx = n^2 dx^2 \int x^{n-2} d^{m-2} y =$$

$$= n^2 dx^2 \left(x^{n-2} d^{m-2} y - n \int x^{n-3} d^{m-3} y\, dx \right)$$

&c.

che, prese insieme alla (44) e sostituite reiterativamente l'una nell'altra, forniscono il seguente sviluppo:

$$(47)\qquad \int x^n d^m y = x^n d^m y - nx^{n-1} d^{m-1} y\, dx + n^2 x^{n-2} d^{m-2} y\, dx^2 - \&c. \qquad [dx = 1]$$

I banali errori di Leibniz non potevano certo passare inosservati agli occhi di un matematico di professione come Johann I Bernoulli, il quale rispondendo alla lettera di questi, corregge opportunamente la dimostrazione fornendo il nuovo risultato:[134]

$$(48)\qquad \int x^n d^m y = x^n d^{m-1} y - nx^{n-1} d^{m-2} y\, dx + n(n-1) x^{n-2} d^{m-3} y\, dx^2 - \&c.$$

$$[d^2 x = 0]$$

La (scorretta) dimostrazione della (47) non contiene solo l'idea di costruire uno sviluppo per integrazioni per parti reiterate.[135] Non presuppo-

[134]La nuova lettera di Bernoulli, datata 20-30 Aprile 1695, è in Gerhardt (1849-63), vol. III, p. 169-74 e in Leibniz-Bernoulli (1745), IX, vol. I, pp. 38-45 [la data è indicata solo da Gerhardt]. Ecco come questi si esprime a proposito degli errori di Leibniz [cfr. Gerhardt (1849-63), vol. III, pp. 170-71]:

> Cum Tua mihi sit carior sanitas quam mea, ei hac vice rebus mathematicis non ero molestus: id saltem monebo, quod in Tuis ultimis annotavi. Egregia sunt quæ ex ratione mea seriem generalem indagandi deduxisti; mihi sufficit, si inventa mea, utut tenuia, magnis viris occasionem dederint ad majora. Interim in calculo Tuo lapsus reperio, quem haud dubie præcipitanter commiseris, quique facit ut series pro $\int x^n d^m y$ sit longe alia et notabilior, quam ipse putaveris.

La dimostrazione di Bernoulli è d'altra parte del tutto analoga a quella di Leibniz, pur utilizzando, a differenza di questa, le posizione corrette $\int u dv = uv - \int v du$ e $d(x^\alpha) = \alpha x^{\alpha-1} dx$.

[135]Una tale idea avrà nel corso del XVIII secolo una certa fortuna e sarà a esempio la

nendo alcun termine alla possibilità di reiterare le integrazioni condotte secondo lo schema indicato nella (44), Leibniz opera infatti implicitamente con differenziali a esponente negativo che, come egli stesso osserva commentando la propria dimostrazione, si convertono in corrispondenti integrali a esponente positivo, secondo la semplice identità $d^{-k}y = \int^k y(d^0 y = \int^0 y = y$ e $\int^k y = \int\int^{k-1} y)$. Se questa stessa osservazione contiene *in nuce* l'idea di un calcolo formale degli operatori, tale idea si presenta assai più chiaramente in una nuova lettera[136] che Leibniz scrive a Bernoulli nel maggio del 1695, nella quale egli rileva per la prima volta l'analogia che vige fra i differenziali di un prodotto e le potenze di una somma. E' proprio a partire dalla considerazione di questa analogia che Bernoulli giunge a formulare, in una nuova lettera scritta nel corso del mese successivo,[137] una regola formale di integrazione che, applicata all'integrale generico $\int ydx$, fornisce tanto la (33) che un caso particolare della (48). Ecco come egli si esprime:

> Videtur [...] quantitatem propositam differentialem cujusvis gradus summari posse, eam primo differentiando, et dein sumendo tertiam proportionalem hujus novæ quantitatis differentialis ad differentialem propositam consideratim interim d, d^2, d^3, d^4, &c. tanquam quantitatibus algebraicis et non ut literis tantummodo caracteristicis. Sic, ex. gr. tertia proportionalis d^3 ad dd erit d, et d^4 ad d^3 erit dd et ita de aliis.[138]

Per quanto la dichiarazione di Bernoulli sia in se stessa del tutto insufficiente a chiarire la procedura algoritmica che questi intende proporre, la considerazione degli esempi con cui egli la illustra permette di comprenderne perfettamente il meccanismo formale. Il primo di questi esempi è costituito dalla ricerca dell'integrale della "quantità differenziale" $yd^3x + dyd^2x$. Assumiamo che la proporzione $d[\Theta]$: $\Theta = \Theta$: X, che caratterizza il terzo proporzionale X fra il differenziale di una data "quantità differenziale" Θ e questa stessa quantità, sia definita relativamente a due operazioni converse riferite a differenziali della stessa quantità e differenti dalla moltiplicazione e dalla divisione ordinarie (fra differenziali) - che dirò per semplicità "*moltiplicazione formale*" e "*divisione formale*" e che, seguendo Bernoulli, indicherò rispettivamente come sono usulamente indicate la moltiplicazione e la divisione

---

base della dimostrazione del "teorema" di Taylor proposta da d'Alembert nel 1754 [cfr. il prossimo paragrafo III.4.*c*.β.]. Essa permette, come è chiaro, di pervenire allo sviluppo cercato senza presupporne esplicitamente la forma alla maniera di Newton e fornendone direttamente l'espressione del resto.

[136] Si tratta della lettera del 6-16 Maggio 1695, in Gerhardt (1849-63), vol. III, pp. 174-79 e in Leibniz-Bernoulli (1745), X, vol. I, pp. 46-51. La relazione fra il "teorema" di Taylor (e quello di Bernoulli) e una tale analogia (che diverrà nota nel XVIII secolo come l' "analogia di Leibniz") sarà scorta e abbondantemente sfruttata da Lagrange e Laplace nel corso degli anni settanta del XVIII secolo [cfr. il prossimo capitolo III.4.].

[137] La lettera è del 8-18 Giugno 1695 e è in Gerhardt (1849-63), vol. III, pp. 179-90 e in Leibniz-Bernoulli (1745), XI, vol. I, pp. 52-64.

[138] Cfr. Gerhardt (1849-63), vol. III, pp. 179-80. Per una giustificazione e una esplicazione di questa regola cfr. Feigenbaum (1985), pp. 87 e segg..

ordinarie - le quali siano a sua volta definite dalle identità $d^k\zeta\ d^h\zeta = d^{k+h}\zeta$ e $d^k\zeta/d^h\zeta = d^{k-h}\zeta$ (con $\zeta = d^0 z$).[139] Per introdurre una comoda terminologia, che - come la precedente - non è ovviamente di Bernoulli, dirò allora che X è il *terzo proporzionale formale* fra $d[\Theta]$ e Θ. Posto $\Theta = y\ d^3x + d\ y\ d^2x$ non è certo difficile trarre l'identità formale: $X = \dfrac{d^0y\ d^6x\ +2d^1y\ d^5x\ + d^2y\ d^4x}{d^0y\ d^4x\ +2d^1y\ d^3x\ + d^2y\ d^2x}$. Dividendo formalmente ognuno degli addendi del numeratore di questa frazione per l'addendo di posto corrispondente del denominatore si ottiene il comune quoziente formale $d^0y\ d^2x = yd^2x$ che, come si può facilmente constatare, corrisponde all'antidifferenziale della quantità assegnata. Se analizziamo questo esempio[140] ci accorgiamo che il procedimento di Bernoulli conduce al banale risultato di fornire l'antidifferenziale di un differenziale esatto. Sia ora $d[A]$ un qualsiasi differenziale esatto; è ovvio che l'integrale $\int d[A] = A$ di questa quantità corrisponde al rapporto formale $d[A]/d[A] = d^0A = A$, di modo che non abbiamo alcuna difficoltà a trarre l'identità formale $A = \dfrac{d[A]\ d[A]}{d[A]\ d[A]}$. In base alla definizione, moltiplicare formalmente un differenziale qualsiasi di una data quantità ζ per il differenziale primo di questa stessa quantità equivale tuttavia a passare al differenziale di ordine immediatamente superiore ($d^k\zeta d\zeta = d^{k+1}\zeta$); il numeratore e il denominatore del precedente rapporto formale possono così essere intesi in due modi diversi, il primo come il quadrato formale di $d\ [A]$, il secondo come il suo differenziale. Il terzo proporzionale fra $d[d[A]]$ e $d[A]$ è dunque uguale, nella nostra algebra particolare, alla quantità A, ovvero all'integrale della quantità assegnata $d[A]$. Assumiamo ora che la quantità A abbia la forma $d^k\zeta\ d^h\eta$ (in cui la moltiplicazione fra differenziali di quantità diverse è quella usuale). Il rapporto $\dfrac{d[A]\ d[A]}{d[A]\ d[A]}$ si trasformerà nel rapporto $\dfrac{d[d^k\zeta\ d^h\eta]\ d[d^k\zeta\ d^h\eta]}{d[d[d^k\zeta\ d^h\eta]]}$ che, svolgendo le operazioni, si trasformerà a sua volta nel nuovo rapporto $\dfrac{d^{2(k+1)}\zeta\ d^{2h}\eta\ +\ 2d^{2k+1}\zeta\ d^{2h+1}\eta\ +\ d^{2k}\zeta\ d^{2(h+1)}\eta}{d^{k+2}\zeta\ d^h\eta\ +\ 2d^{k+1}\zeta\ d^{h+1}\eta\ +\ d^k\zeta\ d^{h+2}\eta}$, il quoziente formale comune dei cui addendi di posto corrispondente, è proprio uguale a $d^k\zeta\ d^h\eta$. L'affidabilità della regola di Bernoulli per la determinazione dell'integrale di differenziali esatti della forma considerata può così essere facilmente dimostrata.[141] Ma quale interesse matematico può avere una regola algoritmica che permette di trovare l'integrale di un differenziale esatto di forma così sem-

---

[139] I simbol "+" e "-" hanno qui il loro significato algebrico usuale.

[140] Non faccio qui che riformulare e estemdere alcune illuminanti osservazioni di L. Feigenbaum.

[141] La dimostrazione può essere generalizzata (insieme alla regola) in riferimento a differenziali esatti di forma qualsiasi.

plice? La risposta di Bernoulli è implicita nel suo secondo esempio. Data la "quantità differenziale" $yd^3x + 2dyd^2x$ (che non è ovviamente un differenziale esatto), egli procede esattamente come nel caso precedente giungendo a esprimere il terzo proporzionale formale associato a questa quantità nei termini del rapporto $\dfrac{\overset{0}{d}y\,\overset{6}{d}x + 4\overset{1}{d}y\,\overset{5}{d}x + 4\overset{2}{d}y\,\overset{4}{d}x}{\overset{0}{d}y\,\overset{4}{d}x + 3\overset{1}{d}y\,\overset{3}{d}x + 2\overset{2}{d}y\,\overset{2}{d}x}$ che non possiede, come è chiaro, alcun quoziente comune. Applicando a tale frazione un procedimento di divisione continua del tutto analogo a quello di Mercator,[142] ma rispondente all'operazione di devisione formale fra diffrenziali della stessa quantità, non è tutttavia difficile convertirla in una serie che Bernoulli identifica, senza nessuna ulteriore giustificazione, con lo sviluppo in serie dell'integrale della quantità assegnata.

> Video me - egli scrive - hic inter scribendum, et quidem ex insperato, incidisse in methodum universalem summandi vel per vel citra seriem, quantitatem differerentialem cujuscunque gradus [...].[143]

Bernoulli aspetterà tuttavia il mese successivo e una nuova lettera a Leibniz[144] per applicare il suo "metodo universale" alla ricerca dello sviluppo in serie dell'integrale generico $\int ydx$ - dove dx è considerato come un differenziale costante - e riottenere così non solo la (33), ma - ordinando diversamente la serie sviluppo del terzo proporzionale formale - anche la (48) (in cui si sia posto $n = m = 1$ e x e y siano stati invertiti). Indicando con $X_{0,1}$ il terzo proporzionale formale associato all'integranda ydx, la dimostrazione di Bernoulli può essere ricostruita come segue:[145]

$$\text{i)}\quad X_{0,1} = \begin{cases} \dfrac{\overset{0}{d}y\,\overset{2}{d}x}{\overset{0}{d}y\,\overset{2}{d}x + \overset{1}{d}y\,\overset{1}{d}x} \\ \dfrac{\overset{0}{d}y\,\overset{2}{d}x}{\overset{1}{d}y\,\overset{1}{d}x + \overset{0}{d}y\,\overset{2}{d}x} \end{cases}$$

---

[142] Per il cosiddetto "metodo di Mercator" cfr. il precedente paragrafo II.2.κ..

[143] Cfr. Gerhardt (1849-63), vol. III, p. 181.

[144] Si tratta della lettera del 17 luglio 1695, in Gerhardt (1849-63), vol. III, pp. 197-205 e in Leibniz-Bernoulli (1765), XIV, vol. I, pp. 74-82 [la data è indicata solo da Gerhardt].

[145] Le differenti formule scritte entro la stessa parentesi grafa indicano i due differenti esiti possibili dello stesso procedimento. Per questa riformulazione cfr. anche Feigenbaum (1985), p. 88, la quale tuttavia - a differenza di quanto faccia Bernoulli - connette secondo il segno di eguaglianza anche il primo membro della (ii) e il secondo membro della (i). E' evidente che in tal modo sorge la questione relativa alo statuto di una tale identità che, nel caso generale, non sembra derivare né dalla definizione di terzo proporzionale formale, né dall'usuale determinazione algoritmica dell'integrale.

$$(49)\quad \text{ii)}\quad \int y\,dx = \begin{cases} d^0y\, d^0x - d^1y\, d^{-1}x + d^2y\, d^{-2}x - \&c. \\ d^{-1}y\, d^1x - d^{-2}y\, d^2x + d^{-3}y\, d^3x - \&c. \end{cases}$$

$$\text{iii)}\quad = \begin{cases} xy - dy\int x + d^2y\int^2 x - \&c. \\ dx\int y - d^2x\int^2 y + d^3x\int^3 y - \&c. \end{cases}$$

$$\text{iv)}\quad = \begin{cases} xy - dy\,\dfrac{x^2}{2!\,dx} + d^2y\,\dfrac{x^3}{3!\,dx^2} - \&c. \quad [d^2x = 0] \\ dx\,\dfrac{y^2}{2!\,dy} - d^2x\,\dfrac{y^3}{3!\,dy^2} + d^3x\,\dfrac{y^4}{4!\,dy^3} - \&c. \quad [d^2y = 0] \end{cases}$$

Consideriamo le regole algoritmiche che presiedono alle successive inferenze che danno luogo a una tale dimostrazione. La regola che giustifica la (i) dipende, come abbiamo visto, dalla definizione stessa di terzo proporzionale formale e non richiede quindi alcuna giustificazione. Ugualmente tali da non richiedere alcuna ulteriore giustificazione sono le regole che conducono da (ii) a (iii) e da (iii) a (iv), derivando infatti entrambe direttamente dall'identificazione algoritmica dell'integrale con l'antidifferenziale[146] (e da una semplice convenzione notazionale). Diversa è invece la situazione per la regola che conduce, nel caso generale (ovvero anche qualora l'integranda non sia un differenziale esatto) dalla (i) alla (ii). Se essa può infatti venir informalmente giustificata richiamandosi a due analogie - a quella intuitiva fra l'integrale e la somma algebrica e fra il differenziale e la differenza finita e a quella algoritmica fra il differenziale di un prodotto e la potenza di una somma[147] - l'argomento più forte di cui Bernoulli sembra disporre per asse-

[146]Si noti che - come ho implicitamente ammesso fin qui - questa identificazione non è per nulla contraddittoria con l'interpretazione dell'integrale come una somma infinita di quantità infinitamente piccole. Il teorema di inversione consiste infatti nell'identificazione dell'algoritmo capace di determinare questa somma con l'algoritmo differenziale inverso. L'interpretazione dell'integrale come somma si oppone all'interpretazione di questo come primitiva di una funzione, e non alla sua identificazione algoritmica con l'antidifferenziale di una qualsiasi quantità data. Le ricostruzioni presentate fin qui dei procedimenti algoritmici di Leibniz e Bernoulli dovrebbero d'altra parte aver mostrato che l'identificazione algoritmica dell'integrale con l'antidifferenziale è totale, salvo che relativamente alle costanti di integrazione, che non sono mai considerate. Se questa identificazione corrispondesse alla definizione dell'integrale, questa esclusione sarebbe del tutto incomprensibile.

[147]Si osservi che l'idea di equiparare, sotto opportune condizioni (che la scoperta dell' "analogia di Leibniz" sembra suggerire) l'integrale di una data quantità a una sorta di terzo proporzionale fra il differenziale di questa quantità e la quantità stessa, discende abbastanza naturalmente dall'interpretazione di questo come una somma e del differenziale come una differenza. Una tale interpretazione suggerisce infatti un'analogia fra la proporzione algebrica $na : a = a : \frac{a}{n}$ e la relazione che sussiste fra un integrale $\int x$, la quantità x e il differenziale dx.

rire la legittimità di tale regola (e quindi l'idoneità del suo metodo) è che, applicata alla (i), essa conduce a uno sviluppo che si mostra formalmente equivalente a altri sviluppi già dimostrati per altra via: la dimostrazione stessa è dunque giustificata dalla sua conclusione.

Una tale circostanza non è, a dire il vero, così stravagante come forse può a prima vista sembrare e è anzi assolutamente tipica di una situazione nella quale ciò che è in gioco è la ricerca di una regola algoritmica, piuttosto che di un risultato che deve essere tratto secondo procedimenti in se stessi *già* noti. Lo scandalo che essa può provocare non dipende infatti che da una inadeguata interpretazione della dimostrazione, la quale non deve essere letta come un tentativo (fallito) di giustificare la conclusione, ma come l'esibizione della potenza deduttiva di un algoritmo congetturalmente accettato. Piuttosto che fornire un risultato, tale dimostrazione pone quindi un problema matematico, il quale consiste nel cercare per essa una giustificazione *a priori* o, più in generale, nell'individuare le ragioni che permettono opportune trasposizioni dimostrative dell' "analogia di Leibniz" fra i differenziali di un prodotto e le potenze di una somma. Con gli strumenti matematici a disposizione di Leibniz e Bernoulli un tale problema non poteva tuttavia che essere indicato, lasciando ai matematici futuri il compito di cercarne una soluzione. Il problema, che Leibniz proporrà pubblicamente solo nel 1710 in una nota memoria apparsa sul primo numero delle *Miscellanea Berolinensia,*[148] non verrà d'altra parte affrontato che molti decenni più tardi da Lagrange e Laplace,[149] i quali non pervennero che a una soluzione parziale, lasciando a Servois il merito di una risposta più soddisfacente, la quale dovrà così attendere, per essere formulata, il secondo decennio del XIX secolo[150] e gli albori della nuova algebra ottocentesca.[151]

Per quel che riguarda la vicenda che costituisce l'oggetto del presente capitolo non sarà a questo proposito necessario che ricordare che qualche mese più tardi Leibniz tornò sull'argomento in una nuova lettera a Johann I Bernoulli,[152] insistendo ancora sulla relazione intercorrente fra la (33) e l'analogia fra la potenza di una somma e il differenziale di un prodotto.

> Quoniam, ut scis, potentiis analogæ sunt diffrentiæ - egli scrive -, hinc ex serie pro potentiis duxi seriem pro differentiis, hoc modo:

---

[148]Cfr. Leibniz (1710).

[149]Cfr. il prossimo capitolo III.4..

[150]Cfr. Servois (1814-15a) e (1814-15b).

[151]Per quanto possa essere forte la tentazione di leggere la regola di integrazione di Bernoulli nei termini della definizione di un'operazione sull'insieme degli elementi differenziali - e quindi della edificazione di un algebra diversa da quella usuale (ciò che condurrebbe a riconoscere a questi il merito di aver preconizzato una possibile generalizzazione del concetto di algebra) - mi pare che basti una semplice considerazione del contesto in cui essa è inserita per consigliare una interpretazione molto più prudente, che la legge semplicemente come una regola formale rispondente a un algoritmo particolare e limitata a un'applicazione locale.

[152]La lettera è del 20-30 Ottobre 1695 e è in Gerhardt (1849-63), vol. III, pp. 217-22 e in Leibniz- Bernoulli (1765), XVIII, vol. 1, pp. 94-100.

$$(50)\qquad (z+y)^m = z^m y^0 + \frac{m}{1} z^{m-1} y^1 + \frac{m\,(m-1)}{1.2} z^{m-2} y^2 + \&c.$$

Ergo fit

$$(51)\qquad d^m[zy] = d^m z\, d^0 y + \frac{m}{1} d^{m-1} z\, d^1 y + \frac{m(m-1)}{1.2} d^{m-2} z\, d^2 y + \&c.$$

Ubi vertendo d in $\int$, ut sit $d^m = \int^n$, posito $n = -m$ [e ponendo $z = dx$], fiet

$$(52)\ \int^n [dx\ y] = \int^{n-1}[x]\ d^0 y - \frac{n}{1} \int^n [x]\ d^1 y + \frac{n(n+1)}{1.2} \int^{n+1}[x]\ d^2 y - \frac{n(n+1)(n+2)}{1.2.3} \int^{n+2}[x]\ d^3 y + \&c.$$

ubi, posito dx costante, summæ singulatim iniri possunt, et quidem finite, si n integer.[153]

Se n è posto uguale a uno e gli integrali successivi sono calcolati come antidifferenziali, la (52) si converte immediatamente nella (33), di cui Leibniz presenta quindi una nuova dimostrazione. Se n è invece preso come un intero negativo e posto uguale a $-m$ (e dx è preso come costante) la (52) si converte nell'ovvia identità finitaria $d^m\,[dx\ y] = dx\ d^m y$ e perde tutto il suo interesse. Perché la dimostrazione di Leibniz non risulti vuota occorre quindi che n sia positivo e quindi m sia negativo. A questa condizione e per $z = dx$ la (51) si trasforma ovviamente nella stessa (52) (con n senz'altro positivo) e non può quindi essere intesa che come una conseguenza della (50) dovuta a un'estensione dell'analogia rilevata nel caso di esponenti positivi anche al caso di esponenti negativi. Nonostante ciò che può sembrare a prima vista,[154] la dimostrazione di Leibniz richiede quindi il ricorso a un argomento informale consistente nella generalizzazione dell'analogia fra differenziali (a esponente positivo) di un prodotto e potenze (positive) di una somma. Si tratta così di un'altra esibizione della potenza deduttiva di una regola di inferenza solo congetturalmente accettata e tale da richiedere, essa stessa, una dimostrazione *a priori*.

III. 2. *d*. δ. *Qualche considerazione generale sui risultati di Leibniz e Bernoulli*

Le osservazioni con le quali ho fino a qui accompagnato la presentazione dei risultati di Leibniz e Bernoulli e delle loro dimostrazioni dovrebbero bastare per argomentare contro l'opportunità di un'interpretazione di questi che individui in essi - come in quelli di Newton- un'anticipazione del "teorema" di Taylor. Se dalla considerazione delle (possibili[155]) equivalenze

[153]Cfr. Gerhardt (1849-63), vol. III, pp. 221-22. Le "somme" sono chiaramente gli integrali che, per n intero (come è sottinteso che sia) e dx costante, sono convertibili in forme finite.

[154]Si osservi che se m è positivo, la (51) è un'identità differenziale finita perfettamente nota e banalmente dimostrabile senza alcun richiamo all'analogia di Leibniz.

[155]Si noti che l'equivalenza formale fra la (33) o la (41) e il "teorema" di Taylor, in una sua qualche forma, dipende essa stessa da un'interpretazione di queste formule, che privilegi una possibile lettura dei simboli e permetta quindi l'impiego di certe regole di trasformazione.

formali passiamo infatti a quella del contenuto concettuale che è assegnato alla struttura formale che esprime questi risultati, dobbiamo, io credo, concludere che né Leibniz, né Bernoulli abbiamo dimostrato o anche solo preconizzato qualcosa di significativamente assimilabile a tale "teorema", così come esso sembra essere stato inteso da Newton, da Taylor o da Stirling. In nessun luogo sembra infatti emergere nelle loro dimostrazioni la presupposizione esplicita di un legame funzionale fra la due quantità x e y o ancor meno la considerazione di $\int y dx$ come un'integrale definito e considerato come una funzione dei suoi limiti. Il teorema di Bernoulli non sembra quindi presentarsi come l'espressione in serie (*intera*) di una funzione qualsiasi (o di una differenza fra due valori qualsiasi di tale funzione), ma come l'espressione in serie (*non intera*[156]) dell'integrale (inteso come somma) di un prodotto infinitamente piccolo. L'intero percorso argomentativo seguito da Bernoulli in occasione della penultima dimostrazione considerata (quella formalmente rappresentata dalla (49)) è a questo proposito del tutto sintomatico. La stessa considerazione (implicita) di differenziali esatti o non esatti è infatti un indice inequivocabile di un'interpretazione dell'integranda ydx come un prodotto fra due variabili separate (o, se vogliamo utilizzare il moderno linguaggio funzionale, come una funzione a *due* variabili indipendenti).[157]

Ciò detto, vorrei in questo paragrafo sostenere una tesi ancora più radicale. Il punto di vista matematico che traspare dalle precedenti dimostrazioni sembra infatti tale che il teorema di Taylor risulta in esso intelligibile solo qualora è interpretato in termini che lo rendono estraneo al contesto problematico che questo punto di vista delinea.

Subito dopo aver presentato, nella sua breve memoria del 1694, il proprio teorema sotto la forma (33) Johann Bernoulli scrive:

> [...] quæ [la (33) appunto] si in quocunque casu applicetur, evenescent semper dy, d^2y, d^3y, &c. ut et dx, dx^2, dx^3, &c. quia earum relatio in dato casu datur in quantitatibus algebraicis; et sic tota series constabit terminis pure algebriacis.[158]

E ancora più chiaramente nella sua lettera a Leibniz del 2 settembre 1964:

> [...] quæ [ancora la (33)] si applicetur in proposito quodam exemplo, destruentur dy, d^2y, d^3y, &c. per dx, dx^2, dx^3, &c. totaque series consistent terminis pure al-

---

[156]Cfr. Reiff (1889).

[157]Ciò non implica naturalmente che il procedimento di Bernoulli non possa venir formalmente applicato anche alla ricerca dell'integrale del differenziale di una funzione qualsiasi $y = y(x)$ [proprio questa possibilità permette d'altra parte a un matematico non coevo di leggere la prima delle identità (49)(iv) come equivalente al "teorema" di Taylor]. Il punto è che in un caso come questo la costruzione della serie dipende da un trattamento separato delle variabili $y = y(x)$ e dx, trattamento che se sembra nascondere una notevole potenzialità algoritmica, resta essenzialmente diverso da quello prospettato da Newton e Taylor nella ricerca degli sviluppi di $y(x)$ e di $y(x+\xi) - y(x)$.

[158]Cfr. Bernoulli (1694), p. 438.

gebraicis.[159]

e in quella del 17 luglio 1695:

> [...] ubi [il riferimento è ora alla seconda serie della (49)(iv)] pariter in applicatione dx, d^2x, d^3x, &c. destruuntur per dy, dy^2, dy^3, &c. ita ut proveniant quantitates pure algebricæ; quæ series per additionem et substractionem reperitur.[160]

L'insistenza con cui Bernoulli sottolinea il carattere non infinitesimale ("algebrico") dei termini delle serie cui il suo teorema equipara la quantità finita $\int ydx$ (una somma infinita di quantità infinitamente piccole) è a mio parere sintomatica di un'esigenza di intelligibilità del risultato di manipolazioni formali che, in quanto tali, non rispondono che alle leggi interne di un algoritmo. Lungi dall'operare su simboli vuoti - che assumono un significato solo relativamente a esso - questo è infatti pensato come l'espressione matematica delle leggi di relazione che vigono fra le quantità effettive che questi simboli rappresentano: l'algoritmo del *calcolo* non è (a differenza che per Newton) che l'algoritmo delle differenze infinitesime e delle loro somme.

Attribuita tale interpretazione ai simboli differenziali, siamo ovviamente in una situazione assai difficile per assegnare la medesima intelligibilità a identità come la (20) o la (21) - in cui si ponga $\xi = dx$ - i cui termini sono quantità infinitesimali di ordine crescente e di somma uguale a una quantità infinitesimale del primo ordine. Questa non è tuttavia che una parte della questione. Se infatti nella (21) ξ è preso come un incremento finito, l'acquisto di intelligibilità si accompagna a una perdita di interesse: indipendentemente da un programma matematico che (come quello di Newton) fonda la prospettiva di un'estensione dell'analisi sulla possibilità rappresentative concesse dagli sviluppi in serie intera e nel contesto di una teoria delle differenze infinitamente piccole (e delle loro somme), quale rilievo possiamo infatti assegnare a un risultato che esprime nei termini di una serie di tal tipo la differenza finita dell'ordinata di una curva generica?[161]

---

[159] Cfr. Gerhardt (1849-63), vol. III, p. 150.

[160] Cfr. *ivi*, 200.

[161] La stessa osservazione può ovviamente ripetersi relativamente al "teorema" di Taylor inteso sotto la forma (24) come espressione dello sviluppo in serie intera di una funzione qualsiasi. A questo proposito mi pare significativo l'esempio di J. Hermann. e della sua dimostrazione del teorema di Bernoulli nel corso della quale si sembra nasconde un risultato analogo al "teorema" di Taylor, al quale questi non sembra assegnare alcun interesse matematico. Il problema del paragrafo IX dell'appendice della *Phoronomia* [cfr. Hermann (1716), pp. 389-93] è esattamente quello del lemma V del terzo libro dei *Principia*: trovare una curva di genere parabolico passante per un numero qualunque di punti dati. Siano P_1, P_2, ..., P_n questi punti, i quali siano presi in modo tale che le differenze Q_1Q_2, Q_2Q_3,... $Q_{n-1}Q_n$ determinate dalla loro proiezioni su di un asse comune siano fra loro uguali. Posti $Q_1X = x$, $Q_1P_1 = z$ e $Q_k Q_{k+1} = h$ ($k = 1, 2, ..., n-1$) e indicate come usuale le differenze dei vari ordini riferite alla successione delle ordinate $Q_1P_1 = z$, Q_2P_2, Q_3P_3, ..., $Q_n P_n$, la soluzione prospettata da Hermann consiste nella seguente formula:

$$\ldots z) \frac{}{h} x - \frac{\Delta^2(z)}{2!\,h^2}(x^2-hx) - \frac{\Delta^3(z)}{3!\,h^3}(x^3-3hx^2+2h^2x) - \ldots - \frac{\Delta^{n-1}(z)}{(n-1)!\,h^{n-1}}(x^{n-1} - \ldots - (n-2)!\,h^{n-2}x)$$

soffermerò qui sulla dimostrazione che questi propone, e che si vale dell'ausilio mplice modello meccanico, spostando piuttosto l'attenzione sulle conseguenza trae dal proprio risultato.

si h sunt indefinite parvæ - egli scrive [cfr. *ivi*, p. 393] -, erunt singulæ $h = dx$, æ $\Delta(z)$, $\Delta^2(z)$, $\Delta^3(z)$, &c. [la notazione è naturalmente mia] hoc casu fient dz, $+d^3z$, $-d^4z$, &c. et in præcedenti serie membra omnia, quæ h continuent, evane- totaque series abibit in

$$zx - \frac{1}{2}Gx^2 - \frac{1}{3}Hx^3 - \frac{1}{4}Ix^4 - \&c. = \text{areæ } Q_1P_1YX,$$

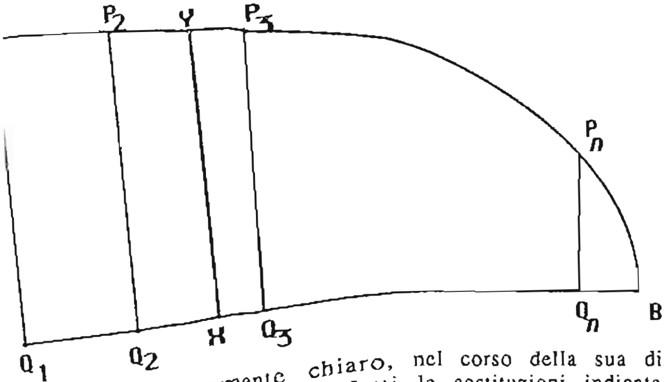
sunt

$$G = \frac{dz}{dx},\ H = -\frac{d^2z}{2\,dx},\ I = \frac{d^3z}{2.3\ dx^3},\ \&c.$$

o

$$\text{Area } Q_1P_1YX = zx - \frac{x^2dz}{2\ dx} + \frac{x^3d^2z}{2.3\ dx^2} - \frac{x^4d^3z}{2.3.4\ dx^3} + \&c.$$

est ipsissima serie universalis pro quadraturis, quam Celeb. Joh. Bernoulli in is Lips. 1694 exibuit, quamque haud dubie ex alio fundamento elicuit.



me risulta perfettamente chiaro, nel corso della sua dimostrazione Hermann nascon- un passaggio. Operando infatti le sostituzioni indicate, la sua formula d'interpola- one si trasforma nell'identità:

$$XY = z - \frac{dz}{dx}x + \frac{d^2z}{dx^2}x^2 - \frac{d^3z}{dx^3}x^3 + \&c.$$

ie dà l'area Q_1P_1YX solo dopo aver moltiplicato entrambi i membri per dx e aver opera- un'integrazione termine a termine (secondo l'algoritmo indicato nella precedente ota 113) [si noti che tanto z che i suoi successivi differenziali sono riferiti a un'ordina- a assegnata e vanno quindi intesi come costanti]. Se in questa formula, la quale espri- ne l'ordinata generica di una curva qualsiasi di cui si conosca un'ordinata $Q_1P_1 = z$, si one ora $x = w-v$, $XY = y(x+v) = y(w)$ e $z = y(v)$ e si uniformano i segni dei differenziali si trae (essendo allora $dx = dw$):

Proprio qui si situa io credo quella differenza fondamentale fra approccio newtoniano e quello leibniziano che separa fra loro due risultati he ogni leggiamo come banalmente equivalenti. Da una parte l'attenzione lla forma analitica che esprime una quantità, intesa come oggetto precipuo i un'indagine di ordine generale, spinge alla ricerca di regole di trasforma- ione di tale forma, le quali garantiscano la determinazione di una rete di elazioni operazionali che prefigurano una vera e propria teoria delle funzio- i; dall'altra l'attenzione al contenuto specifico dei problemi spinge alla ri- erca di un algoritmo, inteso come una collezione di regole applicabili a uantità qualsiasi, generalmente rappresentate più che da forme analitiche, la simboli che ne esprimono la peculiare natura individuale, facendo astra- ione da eventuali legami che possono volta a volta venir determinati. La ge- eralità è così concepita come un obiettivo da raggiungere tramite strade liverse, da una parte tramite la ricerca e lo studio di forme analitiche tipi- he, dall'altra tramite la determinazione di regole riferite a simboli atomici olta a volta sostituibili con opportune strutture analitiche. La distanza che epara il "teorema" di Taylor da quello di Bernoulli è la stessa distanza che epara questi due programmi, concettualmente tanto diversi, quanto tali da ervenire a esiti oggettivi spesso corrispondenti.

II. 2. *d. ε. Il teorema IV della* <u>*Methodus incrementorum*</u> *di Brook Taylor: una versione flussionista del teorema di Bernoulli*

La proposizione XI, teorema IV, della *Methodus incrementorum* di aylor[162] è la seguente:

Prop. XI, Teor. IV: Ipsius $\dot{r}s$ fluens potest per ateratrum ex seriebus

(53) $\boxed{\dot{r}s} = rs - \acute{r}\dot{s} + \bar{r}\ddot{s} - \bar{\bar{r}}\dddot{s} + \&c.$

vel

(54) $\boxed{\dot{r}s} = \dot{r}\acute{s} - \bar{r}\bar{\acute{s}} + \ddot{\bar{r}}\bar{\bar{s}} - \&c.$

La pubblicazione del trattato di Taylor fu seguita da una lunga polemi- innescata da accuse di plagio rivolte al matematico inglese da parte di

$$y(w) = y(v) + \frac{dy(v)}{dw}(w-v) + \frac{d^2y(v)}{dw^2}(w-v)^2 + \frac{d^3y(v)}{dw^3}(w-v)^3 + \&c.$$

e, come si vede, corrisponde alla (24). Fu solo il newtoniano Stirling [cfr. Stirling 730), p. 102] che, partendo da un punto di vista del tutto differente da quello di rmann, riconobbe nel procedimento di questi una dimostrazione nascosta dello stesso orema" di Taylor, mostrando quindi il disinteresse dei matematici dell'ambiente bniziano per un risultato che esprimesse lo sviluppo in serie intera di una funzione alsiasi.

[2]Cfr. Taylor (1715), pp. 38 e segg..

Johann I Bernoulli.[163] Nella lettera pubblica che chiuse tale polemica - alla quale Taylor non fece seguire alcuna risposta - J. Burchardt, un allievo di Bernoulli,[164] si riferì per la prima volta anche al teorema IV, dichiarandone l'identità con il teorema di Bernoulli e estendendo quindi a esso l'accusa di plagio. Del tutto estraneo alla vicenda fu invece il corollario 2 del teorema III della *Methodus incrementorum*, il quale d'altra parte è nel testo di Taylor del tutto indipendente dal teorema IV[165] e che, come abbiamo visto, restava, dal punto di vista di Bernoulli, assai difficilmente assimilabile ai risultati che questi aveva raggiunto. L'argomento di Burchardt è assai semplice e consiste nell'identificare rispettivamente $\dot{r}$ e $\dot{s}$ con dx e dy, $\acute{r}$ e $\acute{s}$ con $\int x$ e $\int y$ e $\boxed{\dot{r}s}$ con $\int ydx$. E' evidente che per queste sostituzioni la (53) e la (54) si trasformano nelle (49)(iii), da cui seguono banalmente le (49)(iv) e, quindi, il teorema di Bernoulli. Secondo Burchardt neppure la dimostrazione di Taylor è esente dal plagio, corrispondendo perfettamente a quella fornita da A. de Moivre nelle *Animadversiones in D. G. Cheynæi*.[166] Tale dimostrazione è a sua volta corrispondente a quella data dallo stesso Bernoulli nella sua lettera del 20-3 Aprile 1695, correggendo quella proposta da Leibniz nel febbraio dello stesso anno. Per calcolare l'integrale generico $\int y\dot{x}$ de Moivre pone $\int y\dot{x} = yx - p$, da cui passando alle flussioni è facile trarre $y\dot{x} = y\dot{x} + x\dot{y} - \dot{p}$, e quindi: $p = \int x\dot{y}$, che come si vede non è altro che la regola d'integrazione per parti. Reiterando indefinitamente lo stesso procedimento (ovvero ponendo, per ogni k (k = 1, 2, ...), $\int \overset{(k)}{y} x^k = \overset{(k)}{y} \frac{x^{k+1}}{(k+1)\dot{x}} - \frac{1}{(k+1)\dot{x}} \int \overset{(k+1)}{y} x^{k+1}$) de Moivre giunge quindi al teorema di Bernoulli sotto la forma:

$$(55) \qquad \int y\dot{x} = yx - \frac{x^2}{2!}\frac{\dot{y}}{\dot{x}} + \frac{x^3}{3!}\frac{\ddot{y}}{\dot{x}^2} - \&c.$$

L. Feigenbaum ha attirato l'attenzione degli studiosi su alcune note manoscritte di Taylor, dalle quali sembra risultare non solo che questi fosse a

[163] Il primo atto di tale polemica fu una recensione della *Methodus incrementorum*, apparsa anonima sugli *Acta Eruditorum* nel luglio 1716 [cfr. Johann I Bernoulli (1716)]. Essa continuò fra repliche e controrepliche fino al 1721. I documenti relativi a questa polemica (tutti salvo il primo) sono pubblicati nel vol. II dell'*Opera Omnia* di Bernoulli [cfr. Johann I Bernoulli (1742), vol. II, pp. 534-84].

[164] Cfr. Burchardt (1721).

[165] Non è per nulla certo che lo stesso Taylor abbia compreso i legami esistenti fra i suoi due risultati. Ciò che è sicuro è che egli non fece mai alcuna menzione di essi. Per uno studio molto accurato della questione, condotta alla luce di numerose lettere e note manoscritte di Taylor, cfr. Feigenbaum (1985), pp. 96 e segg..

[166] Cfr. de Moivre (1704), pp. 68-9.

conoscenza del teorema di Bernoulli, ma anche che avesse dedicato a questo non poche riflessioni. In particolare questi fa menzione di tale teorema in una lettera a Keill, datata 11 settembre 1712:

> Suppose - egli scrive - ABPC [figura 8] to be a Curve whose absciss A*p* = *x*, *bp* = *v* & the ordinate P*p* = *y*. Then the fluxi[on] of the Area will be $y\dot{x} = y\dot{v}$. Whence by Bernoulli's Theorem, (making $v = bc$, & $y = Cc$) the area[167]

$$(56)\ bBCc = yv - \frac{\dot{y}v^2}{2} + \frac{\ddot{y}v^3}{2.3} - \frac{\dddot{y}v^4}{2.3.4} + \&c.$$

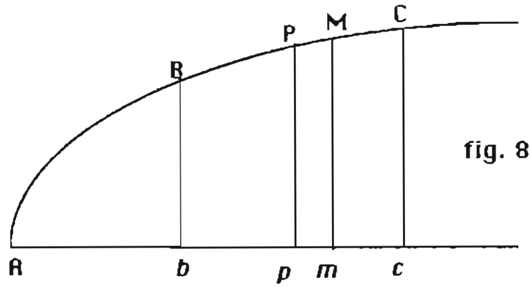


fig. 8

La dimostrazione di Taylor può essere ricostruita nei termini che seguono. Siano $Ap = z$ e $pP = v(z)$ l'ascissa e l'ordinata generica della curva ABC e sia $Ac = a$ un valore di z e $v(a) = cC$ l'ordinata corrispondente. Supponiamo che l'area B*bc*C sia generata dal movimento dell'ordinata *m*M da *b*B a *c*C e sia $bc = x$. Sia ancora $y(t)$ una funzione associata a $v(z)$, tale che $y(0) = v(Ab) = v(a\text{-}x)$ e $y(x) = v(a)$. Se t varia come z e è posto $\dot{t} = \dot{z} = 1$, si ha, per il teorema di Bernoulli:

$$(57)\qquad \mathrm{Area}(BbcC) = \int \mathrm{Fl}(\mathrm{Area}[BbcC]) = \int_0^x y(t)\dot{t} =$$

$$= y(x)x - \frac{\dot{y}(a)x^2}{2!} + \frac{\ddot{y}(a)x^3}{3!} - \&c.$$

e quindi:

$$(58)\qquad \mathrm{Area}(BbcC)\ [= \int_{a-x}^{a} v(z)\dot{z}] = v(a)x - \frac{\dot{v}(a)x^2}{2!} + \frac{\ddot{v}(a)x^3}{3!} - \&c.$$

Se la mia ricostruzione è corretta la (56) è una conseguenza del teore-

167 La citazione è tratta da Feigenbaum (1985), p. 107. L'ordinata generica *m* M non è indicata da Taylor.

ma di Bernoulli, il quale sembra inteso da Taylor sotto la forma (57), in modo del tutto differente da come lo avevano inteso lo stesso Bernoulli e Leibniz. Questa differenza è stata ben caratterizzata da Feigenbaum, le cui osservazioni possono venir riformulate (modificandole leggermente) nei termini che seguono:[168] i)Taylor interpreta tale teorema come un'espressione in serie dell'integrale definito da 0 a x del differenziale $y(t)dt$ di una funzione di t che deve essere determinata - ovvero, in termini newtoniani, come l'espressione in serie dell'anti-flussione della flussione dell'area generata da un'ordinata $y = y(t)$ che trasla da $t = 0$ a $t = x$;[169] ii) egli ne trae un teorema che fornisce l'espressione in *serie intera* dell'integrale definito fra due limiti qualsiasi a-x e a di un prodotto $z \cdot v(z)dt$, posto che $dz = dt$ e $dt = 1$.[170]

Se la lettera a Keill sembra attestare così una decisiva influenza sulle ricerche di Taylor del risultato raggiunto da Bernoulli nel 1694, essa mostra anche alcune della ragioni che rendono infondata l'accusa di Burchardt. A queste ragioni se ne possono d'altra parte accompagnare altre, le quali hanno condotto L. Feigenbaum a leggere il teorema IV della *Methodus incrementorum* come una generalizzazione del teorema di Bernoulli. Gli argomenti con

[168]Cfr. *ivi*, p. 107. Feigenbaum sembra considerare la (56) direttamente come la versione di Taylor del teorema di Bernoulli, piuttosto che come una sua conseguenza tratta assegnando a esso una forma analoga alla (57).

[169]Si osservi che dal punto di vista newtoniano l'anti-flussione di $y(x)\dot{x}$ è direttamente interpretata in termini geometrici come l'espressione analitica dell'area generata dall'ordinata $y(x)$ di una curva qualsiasi, senza che vi sia alcuna necessità di riferirsi per questo alla nozione intuitiva di somma infinita di elementi infinitesimi di uno spazio bidimensionale [cfr. a questo proposito il precedente paragrafo II.1.θ; mi sia consentito di rinviare anche al paragrafo 5 del terzo capitolo di Panza (1979)].

[170]Si osservi che sostituendo $v'(z)$ a $v(z)$ (e ponendo $\dot{x} = 1$) la (58) si trasforma nell'identità:

$$v(a) - v(a\text{-}x) = v'(a)x - \frac{v''(a)x^2}{2!} + \frac{v'''(a)x^3}{3!} - \&c.$$

da cui ponendo ancora $x = -\xi$ e $a = z$ è ovvio derivare il teorema di Taylor nella forma (21):

$$v(z+\xi) = v(z) + v'(z)\xi + \frac{v''(z)\xi^2}{2!} + \frac{v'''(z)\xi^3}{3!} + \&c.$$

Per avere lo stesso teorema sotto la forma (24) basta d'altra parte porre a-$x = z$, traendo banalmente:

$$v(z) = v(a) + v'(a)(z-a) + \frac{v''(a)(z-a)^2}{2!} + \frac{v'''(a)(z-a)^3}{3!} + \&c.$$

Se da (58) è così facile derivare il "teorema" di Taylor, il passaggio dal teorema di Bernoulli, nella sua forma (33), alla (58) non è per nulla banale e richiede una reinterpretazione funzionale di questo nel quadro di una teoria che assegni un particolare privilegio agli sviluppi in serie intera. Pur avendo compiuto quest'ultimo passaggio Taylor non sembra mostrare d'altra parte particolare attenzione per le conseguenze della (56) e in particolare per la possibilità di trarre da essa un teorema analogo a quello enunciato nel corollario 2 della proposizione VII della *Methodus incrementorum*, il quale sembra scaturire, nelle ricerche di questi, da un percorso del tutto indipendente da quello che lo condusse invece al teorema IV dello stesso trattato [cfr. Feigenbaum (1985), pp. 96 e segg.].

cui ella ha sostenuto una tale conclusione[171] sembrano a me perfettamente convincenti e non farò qui che riformularli per ragioni di completezza. Nell'introduzione del suo trattato Taylor introduce il simbolo $\boxed{\alpha}$ per desi-gna–re la fluente della quantità composta α. $\boxed{\dot{r}s}$ non può dunque essere inteso come l'integrale di una funzione $s = s(r)$ relativamente a r, ma deve piuttosto considerarsi come algoritmicamente analogo all'antidifferenziale del prodotto $s\dot{r}$, che non è a sua volta interpretabile come il differenziale di una funzione $F(r)$, tale che $dF(r)/dr = s = s(r)$. Se ciò sembra avvicinare i punti di vista di Taylor e Bernoulli, ciò che li distingue in modo essenziale è l'interpretazione delle variabili s e r individualmente prese. Queste designano infatti, nel trattato di Taylor, non delle semplici variabili indipendenti, ma delle funzioni di una variabile comune t, relativamente alla quale deve essere compiuta l'operazione di passaggio alle fluenti. La dimostrazione della (53) - che sembra effettivamente corrispondere, in termini algoritmici, a quella di de Moivre - deve quindi essere riformulata nei termini che seguono. Sia

$$(59) \qquad \boxed{\dot{r}s} = rs + p \qquad \left[= \int s(t)\cdot dr(t) = s(t)\cdot r(t) + p\right]$$

e quindi, passando alle flussioni:

$$(60) \qquad \dot{r}s = \dot{r}s + \dot{s}r + \dot{p} \qquad [= s(t)\cdot dr(t) = s(t)\cdot dr(t) + r(t)\cdot ds(t) + dp]$$

$$\dot{p} = -\dot{s}r \qquad [= dp = -r(t)\cdot ds(t)]$$

$$p = -\boxed{\dot{s}r} \qquad \left[= p = -\int r(t)\cdot ds(t)\right]$$

quindi:

$$(61) \qquad \boxed{\dot{r}s} = rs - \boxed{\dot{s}r} \qquad \left[= \int s(t)\cdot dr(t) = r(t)\cdot s(t) - \int r(t)\cdot ds(t)\right]$$

Se si pone d'altra parte:

$$(62) \qquad \boxed{\dot{s}r} = \acute{r}\dot{s} + q \qquad \left[= \int r(t)\cdot ds(t) = ds(t)\int r(t) + q\right]$$

si trae:

[171]Cfr. *ivi*, pp. 117-25.

$$(63) \qquad \dot{s}r = r\dot{s} + \ddot{s}\acute{r} + \dot{q} \qquad \left[= r(t)\cdot ds(t) = r(t)\cdot ds(t) + d^2s(t) \int r(t) + dq \right]$$

$$\dot{q} = -\ddot{s}\acute{r} \qquad \left[= dq = -\, d^2s(t) \int r(t) \right]$$

$$q = -\, \boxed{\ddot{s}\acute{r}} \qquad \left[= q = - \int [d^2s(t)\cdot r(t)] \right]$$

quindi:

$$(64) \quad \boxed{\dot{r}s} = rs - \acute{r}\dot{s} + \boxed{\ddot{s}\acute{r}} \qquad \left[= \int s(t)\cdot dr(t) = s(t)\cdot r(t) - ds(t) \int r(t) + \int [d^2s(t)\cdot r(t)] \right]$$

Reiterando indefinitamente il medesimo procedimento si ha allora:

$$(65) \qquad \boxed{\dot{r}s} = rs - \acute{r}\dot{s} + \acute{\acute{r}}\ddot{s} - \acute{\acute{\acute{r}}}\dddot{s} + \&c.$$

$$\left[\begin{aligned} \int s(t)dr(t) &= s(t)\cdot r(t) - ds(t) \int r(t) + d^2s(t) \iint r(t) - \&c. \\ &= s(t)\cdot r(t) - \frac{1}{2!}\,[r(t)]^2 \cdot \frac{ds(t)}{dr(t)} + \frac{1}{3!}\,[r(t)]^3 \cdot \frac{d^2s(t)}{[dr(t)]^2} - \&c. \end{aligned} \right]$$

La dimostrazione della (54) è ovviamente analoga.

Nella sua dimostrazione Taylor non fa alcun riferimento ai limiti di integrazione né aggiunge alcuna costante. Tuttavia fra le osservazioni che la seguono possiamo ritrovare la seguente:

> [...] potest etiam series per hoc Theorema inventa dupliciter accomodari ad conditionem Problematis, hoc est ad datum unum valorem fluentis quæsita respondentem dato valore variabilis cognitæ.[172]

Il primo di questi metodi consiste nell'aggiungere una costante C alla serie (65), il cui valore deve essere determinato relativamente alle "condizioni del problema", il secondo invece nel correggere opportunamente tutte le fluenti che questa serie contiene aggiungendo a esse le opportune costanti. Il primo metodo è del tutto naturale se la serie è utilizzata per esprimere in

[172] Cfr. Taylor (1715), p. 39.

serie una funzione di t (sottomessa a alcune condizioni) il cui differenziale è uguale a $s(t)\cdot dr(t)$; il secondo è del tutto naturale se il problema consiste nella ricerca di un area compresa fra due limiti dati. Quale che sia il metodo che si voglia utilizzare per "conciliare il teorema con le condizioni del problema", è chiaro che dal punto di vista di Taylor una serie come la (35) corrisponde a un'integrazione da η a z, mentre una serie come la (34) corrisponde a un'integrazione fra 0 e z. L'ambiguità di Bernoulli è quindi risolta.

Ora, se si considerano gli integrali involti in (65) come integrali definiti fra 0 e $r(t) = t$, tale identità assume la forma:

$$(66) \qquad \int_0^t s(t)\cdot dt = s(t)t - \frac{1}{2!}\frac{ds(t)}{dt}t^2 + \frac{1}{3!}\frac{d^2s(t)}{dt^2}t^3 - \&c.$$

che corrisponde la teorema di Bernoulli, così come Taylor lo aveva interpretato nella sua lettera a Keill. A differenza di quest'ultimo il teorema IV della *Methodus incrementorum* fornisce tuttavia lo sviluppo in serie di l'integrale del prodotto fra due funzioni qualsiasi $s(t)$ e $dr(t) = z(t)$ e non richiede quindi che il differenziale $dr(t)$ sia assunto come costante: data una funzione qualsiasi $y = y(x)$ esso permette così di esprimerne in serie intera l'integrale definito fra limiti qualsiasi, per mezzo del semplice ricorso a sostituzioni opportune.[173] La maggiore generalità del risultato di Taylor rispetto a quello di Bernoulli[174] (così come il suo carattere non ambiguo) sembra così essenzialmente connessa all'introduzione di un nuovo punto di vista funzionale.

Il modo in cui Taylor interpreta il proprio risultato gli permette di associarlo a un metodo generale di soluzione per serie delle equazioni differenziali.

> Quando hoc Theorema - egli scrive - est applicandum ad casum particularem, eligendo est fluxio aliqua $\dot{z}$, et in computandis fluentibus $\acute{r}$, $\acute{\acute{r}}$, $\bar{r}$, &c. vel $\acute{s}$, $\acute{\acute{s}}$, $\bar{s}$, &c. eum primùm comparuerit fluens aliqua, ea ducendo erit in $\dot{z}$, et producti fluens sumenda erit pro proximâ fluenta quæsitâ. Item in computandis fluxionibus $\dot{r}$, $\ddot{r}$, $\dddot{r}$, &c. vel $\dot{s}$, $\ddot{s}$, $\dddot{s}$, &c. quotiens colligitur fluxio aliqua erit ea applicanda ad $\dot{z}$, et quotiens fluxio similiter applicata ad $\dot{z}$ sumenda erit pro fluxione proxime qæsitâ. Hæc autem fluxio $\dot{z}$ ita sumenda est ut termini sint quam fieri potest simplicissimi.[175]

Il procedimento prospettato da Taylor verte chiaramente sulla possibilità di porre la (65) sotto la forma seguente (in cui $z = z(t)$ è intesa come una funzione arbitraria di t):[176]

---

[173]Cfr. *sotto*.

[174]Questo aumento di generalità è sottolineato dallo stesso Taylor in un'altra lettera a Keill datata 11 settembre 1712 [cfr. Feigenbaum (1985), p. 122].

[175]Cfr. Taylor (1715), p. 39.

[176]Per ovvie ragioni di semplicità non esplicito nella formule che seguono la dipendenza funzionale di r, s, e z da t, che pure deve essere assunta come sottintesa. La (67) può essere dimostrata direttamente come la (65) moltiplicando e dividendo per dz a ogni

$$(67)\int sdr = sr - \int \frac{ds}{dz} rdz + d\left(\frac{ds}{dz}\right)\frac{1}{dz}\int (dz \int rdz) - d\left(d\left(\frac{ds}{dz}\right)\frac{1}{dz}\right)\frac{1}{dz}\int (dz \int (dz \int rdz)) + \&c.$$

L'esempio che questi presenta consiste nella ricerca dello sviluppo in serie dell'integrale $\int sdr$ associato all'equazione differenziale $sds = -rdr$, di cui una soluzione banale è chiaramente data dalle funzioni $s = s(t) = \sin t$ e $r = \cos t$. Si tratta quindi di esprimere in serie l'integrale indefinito $-\int \sin^2 t\, dt$. Ponendo $dz = rdr$, si avrà ovviamente:

$$(68)\quad \begin{aligned} &\frac{ds}{dz} = \frac{rdr}{srdr} = -\frac{1}{s} \\ &d\left(\frac{ds}{dz}\right)\frac{1}{dz} = d\left(-\frac{1}{s}\right)\frac{1}{dz} = -\frac{ds}{s^2\, s\, ds} = -\frac{1}{s^3} \\ &d\left(d\left(\frac{ds}{dz}\right)\frac{1}{dz}\right)\frac{1}{dz} = d\left(-\frac{1}{s^3}\right)\frac{1}{dz} = -\frac{3s^2\, ds}{s^6\, s\, ds} = -\frac{1}{s^5} \\ &\&c. \end{aligned}$$

e

---

passo dell'integrazione per parti reiterata:

i) $sdr = sr + p$

ii) $p = -\int rds = \int \frac{ds}{dz}\, r\, dz = -\frac{ds}{dz}\int r\, dz + q$

iii) $q = \int \left(d\left(\frac{ds}{dz}\right)\int rdz\right) = \int \left(d\left(\frac{ds}{dz}\right)\frac{1}{dz}dz \int r\, dz\right) = d\left(\frac{ds}{dz}\right)\frac{1}{dz}\int (dz \int r\, dz) + u$

iv) $u = -\int \left(d\left(d\left(\frac{ds}{dz}\right)\frac{1}{dz}\right)\int (dz\, r\, dz)\right) = -\int \left(d\left(d\left(\frac{ds}{dz}\right)\frac{1}{dz}\right)\frac{1}{dz}\, dz \int (dz\, r\, dz)\right) =$

$= -d\left(d\left(\frac{ds}{dz}\right)\frac{1}{dz}\right)\frac{1}{dz}\int (dz \int (dz \int r\, dz)) + v$

&c.

$$\int r dz = \int r^2 dr = \frac{1}{3} r^2$$

(69) $$\int (dz \int r\, dz) = \int dz \frac{1}{3} r^3 = \frac{1}{3} \int r^4 dr = \frac{1}{3.5} r^5$$

$$\int (dz \int (dz \int r dz) = \int dz \frac{1}{3.5} r^5 = \frac{1}{3.5} \int r^6 dr = \frac{1}{3.5.7} r^7$$

&c.

e quindi:

(70)
$$\int s dr = C + sr + \frac{r^3}{3s} - \frac{r^5}{3.5s^3} + \frac{r^7}{3.5.7s^5} - \&c.$$

$$\left[- \int \sin^2 t\, dt = C + \sin t \cdot \cos t + \frac{\cos^3 t}{3 \sin t} - \frac{\cos^5 t}{3.5 \sin^3 t} + \frac{\cos^7 t}{3.5.7 \sin^5 t} - \&c. \right]$$

Se l'integrale di sdr é preso da 0 a r (come si dovrebbe fare per ottenere la serie di Bernoulli), l'integrale di $-\sin^2 t\, dt$ risulta definito fra i limiti $\pi/2$ e arc cos t e la (70) può essere trasformata in una serie intera che esprime la funzione $y = y(x) = \int_{\pi/2}^{\arc \cos x} \sin^2 t\, dt$.[177]

[177]Per facili calcoli si ha infatti:

$$\int_{\pi/2}^{\arc\cos x} \sin^2 t\, dt = \left[- \sin t \left(\cos t + \frac{\cos^3 t}{3 \sin^2 t} - \frac{\cos^5 t}{3.5 \sin^4 t} + \frac{\cos^7 t}{3.5.7.\ \sin^6 t} - \&c. \right)\right]_{\pi/2}^{\arc \cos x}$$

$$= \left[-\sqrt{1-\cos^2 t} \left(\cos t + \frac{\cos^3 t}{3(1-\cos^2 t)} - \frac{\cos^5 t}{3.5(1-\cos^2 t)^2} + \frac{\cos^7 t}{3.5.7(1-\cos^2 t)^3} - \&c. \right)\right]_{\pi/2}^{\arc \cos x}$$

$$= - \sqrt{1-x^2} \left(x^2 + \frac{x^3}{3(1-x^2)} - \frac{x^5}{3.5(1-x^2)^2} + \frac{x^7}{3.5.7(1-x^2)^3} - \&c. \right),$$

III. 2. *d. ζ. Alcune ulteriori dimostrazioni del teorema di Bernoulli come conseguenza del "teorema" di Taylor: Stirling, Euler, Maclaurin*

Per quanto la polemica di Bernoulli non prese mai in considerazione il corollario 2 del teorema III della *Methodus incrementorum*, una volta che si sia accettato un punto di vista funzionale simile a quello di Taylor non sembra difficile rendersi conto della possibilità di passare deduttivamente tanto dal teorema IV a tale corollario, che da questo al teorema IV, mostrando quindi l'equivalenza formale fra i due risultati. La sola ragione plausibile la quale possa spiegare l'assenza di entrambe queste deduzioni nel trattato di Taylor sembra essere così la differenza fra i contesti problematici che condussero questi alla scoperta dei due teoremi e fra i loro rispettivi campi di applicazione.

La prima dimostrazione del teorema di Bernoulli, la quale utilizzi come lemma un risultato analogo al "teorema" di Taylor, fu presentata nel 1716 da Hermann nell'appendice alla *Phoronomia*.[178] Questi tuttavia non esplicita in nessun modo il suo percorso argomentativo e vi è anzi da dubitare che egli stesso fosse consapevole d'aver utilizzato come lemma (peraltro implicito) un risultato presentato autonomamente l'anno prima come uno dei teoremi fondamentali della *Methodus incrementorum*. Una dimostrazione assai simile a quella di Hermann, ma a differenza di questa perfettamente esplicita in tutti i suoi passaggi, fu presentata da Stirling nel 1730.[179] Dimostrato il teorema di Taylor, egli considera una curva qualsiasi *bc* (figura 9) riferita a un asse AD su cui siano presi i segmenti AB = z e AC = x; data l'ordinata Bb = $y(z)$, si tratta di esprimere in funzione di essa l'ordinata incognita Cc = $y(x)$. Posto $\dot{x}$ = 1, Il teorema di Taylor fornisce allora l'identità:

$$(71)\ y(x) = y(z) + \dot{y}(z)(x-z) + \frac{\ddot{y}(z)}{2!}(x-z)^2 + \&c.$$

ovvero, esprimendo la differenza $y(x) - y(z)$ in forma integrale:

$$(72)\ \int_z^x \dot{y}(x) = \dot{y}(z)(x-z) + \frac{\ddot{y}(z)}{2!}(x-z)^2 + \&c.$$

$$= \left[-1 + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{8}x^4 + \frac{1}{16}x^6 + \&c.\right]\left[x^2 + \frac{1}{3}(x^3 + x^5 + x^7 + \&c.) - \frac{1}{3.5}(x^5 + 2x^7 + 3x^9 + \&c.) + + \frac{1}{3.5.7}(x^7 + 3x^9 + 6x^{11} + \&c.) - \&c\right]$$

$$= -x^2 - \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{2}x^4 - \frac{1}{10}x^5 + \frac{1}{8}x^6 - \&c.$$

[178]Cfr. la precedente nota 161.

[179]Cfr. la precedente nota (101).

e sostituendo (x) a $\dot{y}(x)$:

$$(73)\quad \text{Area}(BCcb) = \int_z^x y(x)\dot{x} = y(z)(x-z) + \frac{\dot{y}(z)}{2!}(x-z)^2 + \&c.$$

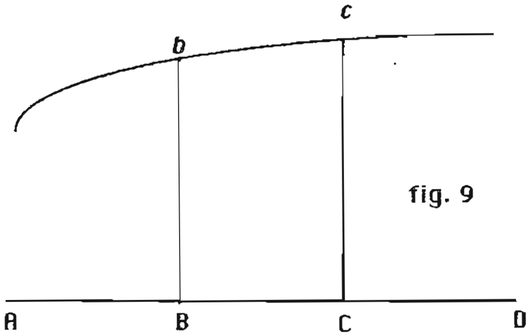


fig. 9

Se il teorema di Taylor è d'altra parte utilizzato per esprimere l'ordinata conosciuta $y(z)$ in funzione dell'ordinata incognita $y(x)$, lo stesso procedimento ci conduce all'identità:

$$(74)\quad \text{Area}(BCcb) = \int_z^x y(x)\dot{x} = y(x)(x-z) - \frac{\dot{y}(x)}{2!}(x-z)^2 + \&c.$$

che Stirling riconosce come il teorema di Bernoulli. Come si può facilmente constatare il passaggio dal "teorema" di Taylor rende assolutamente banale la trasformazione della (73) nella (74) e viceversa - invertendo il procedimento di Stirling - della (74) nella (73), e mostra quindi la possibilità di tradurre il teorema di Bernoulli nei termini di uno sviluppo in serie intera. E' tuttavia significativo che Stirling non riconosca tale teorema che nella seconda di queste formule, sottolineando così implicitamente una delle principali differenze fra esso e il "teorema" di Taylor.

Una nuova dimostrazione del teorema di Bernoulli come conseguenza del "teorema" di Taylor é fornita qualche anno più tardi da Euler.[180] Dato quest'ultimo teorema sotto la forma (21) (in cui $\xi = ndx$ con n infinito), egli pone $\xi = -x$ e assume $y(0) = 0$, traendo:

$$(75)\qquad y(x) = \frac{dy(x)}{dx}x - \frac{d^2y(x)}{2!\,dx^2}x^2 + \&c.$$

[180]Cfr. Euler (1736b).

che se $y(x)$ è presa uguale all'integrale $\displaystyle\int_0^x v(x)\,dx$ (ciò che soddisfa la condizione supposta) si trasforma banalmente nell'identità:

$$(76)\qquad \int_0^x v(x)\,dx = v(x)\,x - \frac{dv(x)}{2!\,dx}x^2 + \frac{d^2v(x)}{3!\,dx}x^3 - \&c.$$

che, come si vede, non è altro che una versione funzionale della (33).

L'ultima dimostrazione che intendo considerare è quella presentata da Maclaurin nel secondo libro del suo *Traetise of Fluxions*. Data la (28) egli trae, moltiplicando per $\dot{x}$, ponendo BP = x e PM = $y(x)$ e passando alle fluenti:

$$(77)\ \text{Area (BPMD)} = \text{Fluente } [y(x)\dot{x}] = \text{Ex} + \frac{\dot{\text{E}}x^2}{2!\dot{x}} + \frac{\ddot{\text{E}}x^3}{3!\dot{x}^2} + \&c.$$

$$\left(\int_0^x y(x)\,dx = x(0)x + \frac{\dot{x}(0)x^2}{2!\dot{x}} + \frac{\ddot{x}(0)x^3}{3!\dot{x}^2} + \&c.\right)$$

che, benché Maclaurin qualifichi come il teorema di Bernoulli, differisce da questo in modo essenziale, presentandosi sotto la forma di uno sviluppo in serie intera.[181]

---

[181] Cfr. la (24)(iii) del precedente paragrafo II.2-B.ε..

Achevé d'imprimer sur les Presses de l'Université de Nantes

Dépôt légal : 2ème trimestre 1992

N°24 - 1988 - *Vulgariser les sciences (1919-1939). Acteurs, projets, enjeux,* publié avec le concours de la Cité des Sciences et de l'Industrie. 109 p.

Ce Cahier contient les exposés de la Première Journée sur l'histoire de la diffusion et de la vulgarisation des sciences et des techniques (26 mars 1985, Cité des Sciences et de l'Industrie) : B. Bensaude-Vincent, C. Blondel, *Introduction* et *Deux stratégies divergentes de vulgarisation scientifique : Georges Claude et Paul Langevin* ; S. Poirot-Delpech, *L'Encyclopédie Française* ; A. Petit, *La diffusion des sciences comme souci philosophique : Bergson* ; P. Ory, *Front populaire et vulgarisation scientifique* ; J. Eidelman, *Politique de la science ou politique de l'Esprit ? Genèse du Palais de la Découverte* ; D. Pestre, *Les revues de vulgarisation scientifique en France, 1918-1940 : un panorama* ; D. Jacobi, C. Condé, *Un survol du contenu de* La Science et la Vie *entre 1913 et 1932* ; M. J. Nye, T. Shinn, *Postface*.

N°25 - 1988 - Jacques Gapaillard, *Le mouvement de la Terre. La détection de sa rotation par la chute des corps.* 179 p.

Cette étude retrace d'abord l'historique de l'idée d'une Terre en mouvement et souligne les problèmes posés par la démonstration de ce mouvement. Ce dernier étant conçu comme absolu, une difficulté apparaît quand on prend conscience du caractère essentiellement relatif de tout mouvement. L'aspect théorique de la détection de la rotation diurne de la Terre au moyen de la chute libre est ensuite examiné en détail. Cet examen permet en particulier d'expliquer une correction de Hooke à la conclusion de Newton, et met en lumière une faute de Gauss, commise après lui par beaucoup d'auteurs, et consistant à tirer des conséquences trop précises d'un calcul comportant des approximations.

N°26 - 1988 - Michel Saillard, *Histoire de la spectroscopie. De la théorie de la lumière et des couleurs de I. Newton (1672) à la découverte de l'effet Zeeman (1897).* 172 p.

Après les apports fondamentaux de Newton, cette étude relate en détail les difficultés rencontrées par les physiciens confrontés à des phénomènes lumineux inattendus. A travers une succession de théories spectroscopiques sans cesse remises en cause par des faits nouveaux, la fécondité des recherches qui aboutiront aux idées de Planck, est principalement marquée, pour la période étudiée, par la naissance de la spectrochimie et de l'astrophysique grâce aux travaux de Kirchhoff.

N° 27 - 1989 - *Les amateurs de sciences et de techniques.* Sous la direction de Yves Cohen et Jean-Marc Drouin. 190 p.

Ce cahier contient l'essentiel des communications présentées à la journée sur "Les amateurs de science", qui s'est tenue à la Cité des Sciences et de l'Industrie le 26 mai 1986. A travers des domaines aussi variés que, par exemple, les mathématiques, l'informatique, la T.S.F., l'astronomie et l'entomologie, ces articles soulignent le rôle joué par les amateurs dans le développement des sciences et des techniques, tout en s'efforçant de définir les différents types d'amateurs et

(Homoptera : Coccoidea). Essai d'entomologie historique. 178 p.

L'ouvrage, illustré de nombreuses reproductions de gravures anciennes et de huit planches en couleur, est le remarquable résultat du travail d'une historienne qui est aussi naturaliste. Elle a commenté et rassemblé les textes européens, arabes, persans et chinois qui décrivent la récolte et la préparation des insectes qui, surtout au Moyen Age, ont donné les plus beaux rouges (du cramoisi tiré de la cochenille d'Arménie ou kirmiz, au vermeil du kermès des teinturiers, en passant par le czerwiec de la cochenille de Pologne).

N° 29 - 1990 - *Le moteur hydraulique en France au XIX siècle : concepteurs, inventeurs et constructeurs.* B Belhoste, J.F. Belhoste, S. Benoît, C. Cartier, G. Dufresne, G. Emptoz, C. Fontanon, L. Lemaître. Avant-propos de Louis Bergeron. 317p.

Ce sont les moteurs hydrauliques, dans leur matérialité et en dépit de la rareté des exemplaires conservés, qui suscitent dans cet ouvrage un éventail d'interrogations régressives à partir desquelles sont reconstruites toute une économie et toute une société d'acteurs solidaires de cette économie. Ce livre est au croisement de l'histoire des techniques et de l'histoire des sciences : il inaugure une nouvelle façon de parler des techniques.

N° 30 - 1990 - François Russo, *L'explication des mouvements des planètes, des Grecs à Kepler.* 273 p.

Cet ouvrage porte essentiellement sur la constitution et le développement de l'explication des mouvements des "planètes" par des cercles et des épicycles, théorie imaginée par Apollonius (IIIe s. av. J.-C.) sous une forme plutôt qualitative, puis mettant en jeu des modèles et des calculs géométriques avec Hipparque (IIe s. av. J.-C.), et surtout avec Ptolémée (IIe s. ap. J.-C.). Par la suite cette théorie ne sera substantiellement modifiée ni par les astronomes arabes (IXe-XVe s.), ni par les astronomes occidentaux (XIIIe-XVIe s.) y compris Copernic. Kepler lui-même y adhère un certain temps avant de l'abandonner définitivement pour lui substituer la loi des aires et les trajectoires elliptiques (Astronomia nova, 1609). En raison de son intérêt et de son unité, cette histoire méritait d'être retracée dans une vue d'ensemble et d'être rendue accessible à un public nettement plus large que celui des spécialistes de l'astronomie ancienne.

N° 31 - 1990 - *Les archives du Palais de la Découverte.* 120 p.

Inauguré lors de l'Exposition Internationale de 1937, le Palais de la Découverte a été confirmé dans un statut de musée permanent par un décret de 1938. A l'occasion de son cinquantenaire il a été décidé d'éditer l'inventaire de ses archives historiques couvrant la période 1924-1975, publication destinée aux conservateurs, bibliothécaires et muséologues, aussi bien qu'à tous ceux qui, chercheurs ou curieux, s'intéressent à l'histoire et à la sociologie des sciences.

Charles Hermite fut un très grand mathématicien français. On peut même le considérer comme le père de l'analyse mathématique moderne. On lui doit de nombreux travaux sur les fonctions elliptiques, la théorie des nombres dans laquelle il introduisit l'usage de variables continues, les fractions continues et les approximants de Padé-Hermite, l'interpolation et les polynômes orthogonaux. C'est lui encore qui donna la première démonstration de la transcendance du nombre *e*, base des logarithmes népériens, ouvrant ainsi la voie à celle de π, ce qui montrait l'impossibilité de la quadrature du cercle. Hermite eut aussi une grande influence sur les mathématiques de son temps par ses conseils et sa volumineuse correspondance. Sa vie dans le cadre de son époque, son œuvre et sa pensée sont retracées ici ainsi que l'homme, d'après les opinions de ses contemporains.

N° 33 - 1991 - Giovanna Cleonice Cifoletti, ***La méthode de Fermat : son statut et sa diffusion.*** 243 p.

Ce travail est une étude sur la méthode de Fermat pour le maximum et le minimum. Fermat, qui en fait n'explique que quelques procédures, déclare fonder sa méthode d'une part, sur l'observation de Pappus à propos des extrema et, d'autre part, sur la *syncrisis* ou comparaison entre équations quadratiques. L'étude analyse les transformations subies par la méthode dans le *Cursus mathematicus* de Pierre Hérigone, et aussi chez Van Schooten et Huygens. En conclusion la méthode est comparée avec l'approche des questions d'extrema par une théorie contemporaine qui se réclame de Fermat, la géométrie différentielle synthétique.

N° 34 - 1991 - Hélène Gispert, ***La France mathématique : la Société Mathématique de France (1872-1914).*** 424 p.

Créée au lendemain de la guerre de 1870, la Société Mathématique de France voit le jour dans une période charnière du développement des mathématiques et du système d'enseignement supérieur français. Après une période de stagnation, les mathématiques françaises reviennent au premier plan et sont, au début du XXe siècle, parmi les plus créatrices du monde. Au moyen de l'étude de la Société Mathématique de France l'auteur analyse cette renaissance des mathématiques françaises en prenant en compte toutes les composantes de l'activité mathématique de ces années. Cinq études sur des points particuliers de l'histoire des mathématiques complètent cette histoire du milieu mathématique français entre deux guerres. Ouvrage d'histoire des sciences en liaison vivante avec l'histoire de la société, ce livre s'adresse également aux historiens, aux sociologues, aux mathématiciens, aux philosophes.

N° 35 - 1991 - Jean Gouillard, ***Histoire des Entomologistes français.*** 222 p.

La présente Histoire des Entomologistes français 1750-1950, écrite pour le 150e anniversaire de la Société Entomologique de France, est destinée à combler une lacune dans la littérature spécialisée, alors que des travaux similaires avaient été réalisés par les Anglo-Saxons. La borne de 1950 est approximative et elle permet néanmoins de mentionner des entomologistes vivants. Les différentes branches de cette science ont été abordées, y compris les Arachnides et les Myriapodes qui appartenaient autrefois à l'Entomologie. Ce dictionnaire quasiment exhaustif des entomologistes français fournit, après une brève biographie de chaque auteur, une

N° 36 - 1991 - Paul Acloque, *L'aberration stellaire.* 258 p.

La variation annuelle, détectée par Bradley, de la direction apparente de l'étoile *Gamma Draconis*, ne pouvait relever d'un effet de parallaxe. En 1729 Bradley donna finalement une interprétation correcte de ce nouveau phénomène d'*aberration* en l'expliquant par la composition de la vitesse de l'observateur entraîné par la révolution annuelle de la Terre, avec celle de la lumière provenant de l'étoile. Toutefois cette interprétation souleva des difficultés théoriques. A travers les discussions suscitées par des expériences variées, depuis la lunette à eau de Boscovich jusqu'au troublant résultat de Michelson et Morley, cette étude montre combien le phénomène d'aberration a joué un rôle stimulant dans la science du XIX^{e} siècle en préparant l'avénement de la théorie de la relativité.

N° 37 - 1991 - Jozef Hurwic, *La radioactivité : découverte et premiers travaux.*
147 p.

L'ouvrage présente les démarches scientifiques qui ont abouti à la découverte de la radioactivité par Henri Becquerel et les travaux fondamentaux dans ce domaine de Marie et Pierre Curie, Kasimir Fajans et autres. La présente étude envisage l'influence des conditions techniques de l'expérience, examine la nécessité d'une idée conductrice qui, même fausse, peut donner des résultats scientifiques valables, analyse l'enchaînement des diverses recherches, indique l'importance de l'imagination et de l'intuition, envisage le rôle du hasard, etc. Des textes originaux, souvent difficilement accesssibles aujourd'hui encore, sont reproduits et servent de base à l'étude épistémologique.

ISSN : 0221 - 3664

CAHIERS D'HISTOIRE & DE PHILOSOPHIE DES SCIENCES

nouvelle série

N° 33 - 1990
Giovanna Cleonice Cifoletti
La méthode de Fermat :
son statut et sa diffusion

N° 34 - 1991
Hélène Gispert
La France mathématique :
La Société mathématique de France
(1870-1914)

N° 35 - 1991
Jean Gouillard
Histoire des entomologistes français

N° 36 - 1991
Paul Acloque
L'aberration stellaire

N° 37 - 1991
Jozef Hurwic
La radioactivité : découverte
et premier travaux

Diffusion Belin
8, rue Férou - 75006 Paris
Prix : 75 F

amalric

N° 38 - 1992

CAHIERS D'HISTOIRE & DE PHILOSOPHIE DES SCIENCES

N° 39 - 1992

CAHIERS D'HISTOIRE & DE PHILOSOPHIE DES SCIENCES

nouvelle série

Marco Panza

La forma della quantità
La forme de la quantité

TOME II

SOCIÉTÉ FRANÇAISE DES SCIENCES ET DES SCIENCES ET DES TECHNIQUES

N° 39 - 1992
CAHIERS D'HISTOIRE & DE PHILOSOPHIE DES SCIENCES

Cahiers d'Histoire et de Philosophie des Sciences

Nouvelle série

Une publication régulière de la
Société Française d'Histoire des Sciences et des Techniques

Directeur : Jean Dhombres

Secrétaire de rédaction : Jacques Gapaillard

ahiers diffusés par BELIN
rue Férou
5278 PARIS CEDEX 06
él. 1-46-34-21-42

Marco PANZA
Assistant en histoire et philosophie des sciences à l'université de Genève

LA FORMA DELLA QUANTITÀ

Analisi algebrica e analisi superiore: il problema dell'unità della matematica nel secolo dell'illuminismo

* * *

LA FORME DE LA QUANTITÉ

Analyse algébrique et analyse supérieure: le problème de l'unité des mathématiques dans le siècle des lumières

TOME II

LA FORMA DELLA QUANTITA

·

ANALISI ALGEBRICA E ANALISI SUPERIORE: IL PROBLEMA DELL'UNITA DELLA MATEMATICA NEL SECOLO DELL'ILLUMINISMO

LA FORME DE LA QUANTITE

·

ANALYSE ALGEBRIQUE ET ANALYSE SUPERIEURE: LE PROBLEME DE L'UNITE DES MATHEMATIQUES AU SIECLE DES LUMIERES

MARCO PANZA

Assistant en histoire et philosophie des sciences,
Université de Genève

Tome II
(Partie III, chapitres 3-7, références et bibliographie)

III. 3.
IL PRIMO TOMO DELL'*INTRODUCTIO IN ANALYSIN INFINITORUM* DI EULER: IL PROGRAMMA DELL'ANALISI ALGEBRICA (1748)

III. 3. *a*.
L'ANALISI COME TEORIA DELLE FUNZIONI (PREFAZIONE E CAPITOLI I E V)

III. 3. *a*. *α*. *Premessa*

Fra le numerose differenze che separano fra di loro gli approcci matematici di Newton e Leibniz, quella forse di ordine più generale riguarda la concezione stessa della matematica come disciplina: da una parte l'ideale newtoniano di una matematica intesa come un corpo unitario e organico di conoscenze, la cui base è costituita dalla soluzione di un insieme di problemi classici, tanto geometrici che algebrici, opportunamente riformulati all'interno di un rinnovato quadro concettuale; dall'altra il punto di vista leibniziano che intende il calcolo differenziale come una nuova teoria separata dal corpo della matematica classica e distinta da esso, tanto per i suoi metodi che per i problemi che affronta. Se la grande attività dei Bernoulli sembra perfettamente inquadrarsi nella concezione leibniziana, quest'ultima non sembra trovare una conferma negli sviluppi stessi della matematica continentale a partire almeno dalla metà del secolo. Al contrario è l'ispirazione newtoniana che sembra gradualmente imporsi, fino a prendere la forma di una vera e propria esigenza scientifica, il cui strumento chiave, sul piano delle tecniche operazionali, si rivela ben presto costituito da una generalizzazione del metodo dei coefficienti indeterminati. Una teoria generale delle serie, e in particolare delle serie intere (concepite come polinomi di grado infinito), prende gradualmente il proprio posto nel cuore della matematica illuminista. Sia pure generalmente riformulato entro un linguaggio leibniziano, è così il programma di unificazione, fondato su una generalizzazione dell'analisi, che Newton aveva preconizzato nel *De Methodis*, che sembra lentamente realizzarsi attraverso le ricerche e i risultati dei matematici continentali della seconda metà del secolo. La forma che esso assume è d'altra parte, sempre più marcatamente, non solo quella di una autonomizzazione dell'analisi, che da strumento risolutivo universale si trasforma in una teoria onnicomprensiva, nella quale i vecchi problemi vengono reinterpretati in quanto applicazioni particolari, ma, ancora più radicalmente, quella di un progetto di *algebrizzazione*, che evidenzia, nel corso stesso della sua graduale realizzazione, i propri limiti intrinseci, le proprie difficoltà: ingabbiare l'infinito entro gli stretti confini dell'algebra[1] appare come un'impresa disperata che dovrà infine essere abbandonata. L'eleganza e l'arditezza di numerose costruzioni, così come la profondità delle relazioni matematiche che esse esibiscono e la limpidezza delle deduzioni relative a un'insieme di regole che restano ancora oggi del tutto inalterate, fanno tuttavia di numerosi risultati raggiunti nel corso di un tale tentativo delle pietre angolari delle stesse teorie ottocentesche, delle conoscenza acquisite che il cambio di orientamento compiuto all'inizio del XIX secolo non ha minimamente scalfito e che la storia ha consegnato intatte ai matematici odierni.

L'*Introductio in Analysin infinitorum*, pubblicata in due tomi da Euler nel 1748[2] gioca all'interno di una tale vicenda un ruolo assolutamente centrale: da una parte come prima organica presentazione della nuova analisi algebrica,[3] dall'altra come uno straordinario concentrato di risultati che fornirono la base per le ricerche matematiche dei decenni successivi e che costituiscono ancora oggi il cuore di diverse teorie matematiche.

Come è chiaro fin dalla dalla prefazione, Euler intende fornire nel primo tomo del suo trattato gli strumenti matematici necessari per riformulare in termini perfettamente analitici il calcolo differenziale e integrale, non assegnando a esso che la sua "giusta" estensione,[4] come componente "non algebrico" dell'analisi. Nel secondo tomo egli applica alcuni dei risultati così ottenuti allo studio delle curve algebriche, espresse da equazioni intere in due variabili (di cui una reale e l'altra reale o complessa), mostrando come la loro teoria possa essere ampiamente sviluppata anche senza l'ausilio del *calcolo*. E' d'altra parte dalla stessa soluzione di problemi di natura algebrica che sorge, secondo Euler, "l'idea dell'infinito":

> Non solum [...] - egli scrive - operam dedi, ut eas res, quas Analysis infinitorum absolute requirit, uberius atque distinctius exponerem, quam vulgo fieri solet; sed etiam satis multas quæstiones enodavi, quibus Lectores sensim & quasi præter expectationem ideam infiniti sibi familiarem reddent.[5]

L'insieme dei sei volumi dell'*Introductio* e delle *Institutiones*[6] devono allora essere considerati come un'impresa unitaria, la quale conferisce all'analisi (algebrica e superiore) una nuova struttura autonoma e una vastissima

---

[1] E' evidentemente il termine "algebra", nel suo senso più generale, che deve essere chiarito. Spero che le analisi contenute nel presente capitolo e nei prossimi conducano fra gli altri a questo risultato.

[2] Cfr. Euler (1748). L'influenza esercitata da questa opera è testimoniata dalle sue due traduzioni francesi apparse nel corso del XVIII secolo [cfr. Euler (1786) e (1796)]

[3] In Euler non sembra ancora manifestarsi, per la verità - come sarà il caso di Lagrange - alcuna esigenza esplicita di una riduzione dell'intera analisi - e in particolare del *calcolo* - all'algebra (delle serie intere). Piuttosto lo scopo dell'*Introductio* è quello di assegnare la massima estensione possibile all'*analisi algebrica*, intesa come un sottoinsieme dell'analisi, caratterizzato da una totale indipendenza dai principi, dall'algoritmo e dai risultati del *calcolo*. E' in questo senso che essa fornisce la base insostituibile e per molti versi l'ispirazione dello stesso programma lagrangiano.

[4] Cfr. la precedente nota (3).

[5] Cfr. Euler (1748), t. I, pp. VII-VII.

[6] Cfr. Euler (1755) e (1768-70).

estensione, tale da far pensare che l'obiettivo di un'unificazione matematica fosse in gran parte stato raggiunto. Se infatti Euler non affronta nel primo tomo dell'*Introductio* che alcuni problemi classici dell'analisi ordinaria, in particolare quelli che possiedono una diretta applicazione (o se si preferisce un prolungamento) nell'analisi superiore, il suo approccio è così generale che la riduzione di tutta l'analisi ordinaria (in particolare della teoria delle equazioni algebriche) ai principi che egli vi espone può essere considerata come una sorta di esercizio per il lettore.

Ma, per cogliere la reale portata dell'unificazione proposta da Euler dobbiamo guardare al di là della semplice struttura unitaria dell'impresa. Nel primo tomo dell'*Introductio* egli non affronta alcun problema separatamente dagli altri; al contrario le questioni e le teorie si incrociamo applicandosi le une alle altre in una rete che stupisce per la fittezza della sua trama, oltre che per la sua estensione. Così a esempio, il carattere di funzione limitata del coseno permette di utilizzare certe relazioni trigonometriche per esprimere in forma opportuna i fattori trinomi di una funzione intera e studiare quindi le radici immaginarie delle equazioni algebriche fino a fornire le radici di un qualsiasi numero reale. Oppure, per non citare che un altro esempio, la legge di combinazione dei coefficienti di certi prodotti infiniti si mostra tale da rappresentare in termini generali il processo di formazione per addizione dei numeri interi, in modo da permettere una felice applicazione alla teoria dei numeri di numerosi risultati relativi alle serie ricorrenti. Gli esempi possono certamente venir moltiplicati, ma forse più di ogni altra cosa, vale la seguente citazione tratta dalla prefazione a dare un'idea dell'ampiezza dei legami esibiti da Euler nei diciotto capitoli del suo trattato:

> In primo igitur Libro, cum universa Analysis infinitorum circa quantitates variabiles earumque Functiones versetur, hoc argumentum de Functionibus inprimis fusius exposui; atque Functionum tam transformationem quam resolutionem et evolutionem per series infinitas demostravi. Complures enumeravi Functionum species, quarum in Analysi sublimiori præcipue ratio est habenda. Primum eas distinxi in algebraicas et transcendentes [...]. Evolutio autem per series infinitas ad utrumque genus æque pertinet, atque etiam ad Functiones transcendentes summa cum utilitate applicari solet; at quantopere doctrina de seriebus infinitis Analysin sublimiorem amplificaverit, nemo est qui ignoret. Nonnulla igitur adjunxi Capita, quibus plurium serierum infinitarum proprietates, atque summas sum scrutatus [...]. Hujusmodi series sunt, quarum summæ exprimuntur, vel per Logarithmos, vel Arcus circulares [...]. Postquam autem a potestatibus ad quantitates exponentiales essem progressus [...]; ex earum conversione maxime naturalem ac fœcundam Logarithmorum ideam sum adeptus [...]. Simili modo in contemplatione Arcum circularium sum versatus; quod quantitatum genus, etsi a Logarithmis maxime est diversum, tamen tam arcto vinculo est connexum, ut dum alterum imaginarium fieri videatur, in alterum transeat. [...] ex Sinu vel Cosinu cujusque Arcus expressi Sinum Cosinumque Arcus minimi et quasi evanescentis, quo ipso ad series infinitas sum deductus [...]. [...] quemadmodum Logarithmi peculiarem Algorithmum requirunt [...], ita quantitates circulares ad certam quoque Algorithmi normam perduxi; ut in calculo æqua commode ac Logarithmi et ipsæ quantitates algebricæ tractari possent. [...] Maximum autem hæc investigatio attulit adjumentum ad Functiones fractas in factores reales resolvendas; quod argumentum, cum in Calculo integrali sit prorsus necessarium, diligentius enucleavi. Series postmodum infinitas, quæ ex hujusmodi Functionum evolutione nascuntur, et quæ recurrentium nomine innotuerunt, examini subjeci; ubi ca-

> cum tam summas quam terminos generales, aliasque insignes proprietas exhibui: et quoniam ad hæc resolutio in factores manuduxit, ita vicissim, quemadmodum producta ex pluribus, imo etiam infinitis, factoribus conflata per multiplicationem in series explicentur, perdendi. Quod negotium non solum ad cognitionem innubcrabilium serierum viam aperuit, sed quia hoc modo series in producta ex infinitis factoribus constantia resolvere licebat, satis commodas inveni expressiones numericas, quarum ope Logarithmi Sinuum, Cosinuum, et Tangentium facillime supputari possunt. Præterea quoque ex eodem fonte solutiones plurium quæstionum, quæ circa partitionem numerorum proponi possunt, derivavi [...].[7]

Per quanto il testo di Euler contenga ben più di questo, una tale citazione dovrebbe servire a indicare lo spirito "strutturale" che (ottant'anni prima delle scoperte di Galois) sembra informare la matematica euleriana. Così se, da una parte, il quadro dell'unificazione proposta da Euler assume l'algebra come propria cornice ideale, dall'altra, lo scopo di questi non sembra essere la mera costruzione di un linguaggio simbolico abbastanza ricco e potente per esprimere deduttivamente l'intera conoscenza matematica. Al contrario, l'analisi euleriana è solo localmente deduttiva e i legami che essa esprime sembrano irriducibili a regole di un semplice gioco simbolico. D'altra parte lo scopo di Euler non è quello di ridimostrare un insieme di risultati già noti, tanto che egli non dedica i propri sforzi a provare tutti i risultati che utilizza o a giustificare in termini formali tutte le sue conclusioni. E' così - per non citare che l'esempio più eclatante - che nell'*Introductio* trovano posto numerosissimi richiami e applicazioni del teorema generalizzato del binomio, senza che Euler si dia pena di fornire di questo alcuna dimostrazione. Questo è forse l'indizio più evidente che porta l'interprete a abbandonare assai presto la convinzione di poter leggere tale trattato come un semplice manuale di analisi. Esso è piuttosto - nella stessa intenzione del suo autore - un testo avanzato, il cui oggetto si rivela, alla lunga, la stessa struttura architettonica della conoscenza matematica.

III. 3. *a*. β. *La funzione come oggetto dell'analisi*

La principale novità dell'*Introductio* risulta già chiaramente dal titolo del primo capitolo: "De functionibus in genere". Gli oggetti dell'analisi sono le *funzioni*. Un tale punto di vista non era mai stato espresso in termini tanto chiari prima del 1748, ma sopratutto esso non aveva mai dato luogo a una trattazione organica che traducesse questa idea in un edificio matematico.

Una discussione generale del concetto euleriano di funzione è stata già condotta nel precedente capitolo II.2. e non ritornerò qui su di essa che per insistere su alcuni punti cruciali. La prima questione è la seguente. Ciò che segna la differenza profonda fra l'impostazione di Euler e quella tipica dei matematici della tradizione leibniziana - di cui questi raccoglie l'eredità - non è relativa a una semplice scelta espositiva, la quale privilegia una certa organizzazione della materia rispetto a un'altra. Piuttosto è la natura stessa dell'oggetto a cui la teoria si riferisce che cambia in modo essenziale. L'analisi

[7] Cfr. Euler (1748), t. I, pp. VIII-X.

non si presenta più come un insieme di metodi per lo studio di oggetti *esterni* (dotati di particolari caratteristiche) o come un linguaggio opportuno per fornirne una rappresentazione, ma come una teoria che determina dall'*interno* il proprio oggetto. Questo è d'altra parte lo scopo dichiarato del primo capitolo dell'*Introductio*, nel quale Euler fornisce una esplicita determinazione della nozione di funzione e presenta e discute le principali caratteristiche che una funzione può condividere. Per quanto esplicita (e esplicitamente tale da caratterizzare una funzione come un opportuno oggetto matematico[8]), tale determinazione non è tuttavia priva di un'ambiguità, la quale sembra indicare la permanenza di uno iato fra il concetto cui Euler si riferisce e la caratterizzazione formale che tende a tradurlo in un oggetto non concettuale. Cercherò di mostrare per mezzo di un'analisi del testo che l'*idea* euleriana di funzione corrisponde in termini generali a quella di soluzione di un'equazione e è concepita come perfettamente corrispondente all'*idea* di quantità astratta, o che dir si voglia (per usare un linguaggio aristotelico), di quantità in quanto tale.

Secondo J. Dhombres,

> [...] dans son *Introductio in analysin infinitorum*, Euler plaçait le concept de fonction comme un des piliers de l'analyse et cette discipline, au fond, prenait pour but la détermination des fonctions au moyen d'équations, comme les équations différentielles, les équations aux dérivées partielles ou encore les équations que nous qualifions de fonctionnelles aujourd'hui. [...] au milieu du XVIII siècle - egli continua - nous constatons la présence d'un concept moteur - celui de fonction - et la validité d'une méthode - la méthode fonctionnelle.[9] Simultanément, nous percevons des réflexes anciens restreignant subrepticement l'idée générale de fonction en la réduisant à un comportement polynomial [...]. La généralité nécessaire du concept de fonction s'oppose à la restriction non moins nécessaire des fonctions concernées.[10]

Tale giudizio coglie, io credo, il cuore della questione, ma necessita, almeno in relazione all'*Introductio*, di essere precisato e in qualche modo radicalizzato. In primo luogo, le equazioni differenziali e alle derivate parziali non compaiono mai nel trattato di Euler come oggetto di indagine; le sole equazioni a cui questi rivolge la propria attenzione sono quelle algebriche. Queste sono tuttavia intese - almeno in senso lato - come equazioni funzionali, ovvero come rappresentazioni implicite di funzioni. In secondo luogo, io credo che dietro le procedure dimostrative di Euler si possa ritrovare la convinzione che una funzione *è* la soluzione di un'equazione (ovvero il corrispettivo esplicito di una rappresentazione implicita, eventualmente sottintesa). In terzo luogo, la restrizione del dominio delle funzioni alle quali ci si riferisce sembra a me più che una limitazione del metodo, una sua essenziale presupposizione: è proprio la nozione euleriana di funzione (che ai nostri occhi appare come ristretta) che caratterizza positivamente tale metodo.

In questo quadro le funzioni dette trascendenti sembrano corrisponde-

---

[8]Cfr. il precedente capitolo I.2..

[9]Cfr. il precedente paragrafo II.2.μ..

[10]Cfr. Dhombres (1987b), pp. 179-81.

re tanto a degli strumenti analitici - che (abbreviando scritture infinite) esprimono operazioni *standard* ormai divenute classiche e interpretabili, in quanto tali, come un dato della nuova analisi - che alla soluzione di equazioni di genere differente, le quali sorgono dall'introduzione di operatori sulle funzioni, come è il caso della differenziazione. L'*Introductio* appare allora coinvolta in una difficoltà più profonda, indipendente dalle condizioni di applicabilità (e legittimità) del metodo funzionale e relativa al suo stesso progetto architettonico, al programma di edificazione di un'analisi algebrica, preliminare all'impiego del *calcolo*, ma nel contempo completa e generalizzata rispetto all'analisi classica di Viète e Descartes.[11] O la nozione di funzione è infatti ristretta a oggetti matematici concepibili come soluzioni di equazioni di natura puramente algebrica - ma allora l'analisi algebrica deve scartare dal proprio orizzonte problematico esponenziali, logaritmi e seni, ritornando a una situazione molto simile a quella della discriminazione cartesiana fra curve geometriche e meccaniche - o si introducono surrettiziamente in essa nuovi oggetti, indipendentemente dalla loro connessione originaria con la nozione chiave di equazione, introducendo quindi nello stesso tempo, oltre a una evidente discrasia e disunità, anche un elemento ineliminabile di arbitrarietà (il caso delle funzioni circolari è da questo punto di vista il più evidente[12]); o infine si abbandona il progetto originario e ci si concede la possibilità di un passaggio alle equazioni differenziali per introdurre le funzioni trascendenti. Come è chiaro la via indicata da Newton era stata la terza; egli aveva scorto proprio nella possibilità di introdurre una nuova operazione analitica come la quadratura la via per rompere la separazione cartesiana, dando all'analisi quell'estensione che Descartes aveva ad essa negato.[13] La

---

[11]Per il riferimento a Viète cfr. *ivi*, p. 180.

[12]Cfr. il prossimo paragrafo III.3.*c*.α..

[13]Ho affrontato il problema nella sezione II del capitolo 3 di Panza (1989). Si osservi che se Newton era giunto a una caratterizzazione analitica delle funzioni trascendenti tramite un'identificazione geometrica, pensando il logaritmo come l'area di un'iperbole o il seno come l'ordinata di un quarto di cerchio, egli aveva anche mostrato come fosse possibile pervenire a una rappresentazione in serie di tali entità per mezzo di un procedimento operazionale che facese ricorso al solo algoritmo differenziale ristretto alle funzioni algebriche. Anche continunando a pensare quindi la differenziazione come un algoritmo particolare (piuttosto che come un operatore formale riferito a entità astratte non caratterizzate che per certe loro proprietà operazionali) era quindi possibile pervenire a un'introduzione delle principali funzioni trascendenti come polinomi di grado infinito, piuttosto che come rappresentazioni analitiche di entità essenzialmente geometriche. Tali polinomi potevano infatti essere caratterizzati come l'espressione polinomiale della soluzione di opportune equazioni differenziali, tratta secondo il metodo presentato nel precedente paragrafo III.2.*a*.γ.. Se un simile approccio avrebbe potuto evitare il ricorso esplicito a nozioni di ordine geometrico, lasciando all'analisi tutta la propria autonomia senza limitarne l'estensione, esso avrebbe tuttavia comportato almeno due difficoltà. La prima di tali difficoltà concerne le funzioni logaritmica e esponenziale e verte sulla divergenza delle serie corrispondenti fuori da un intervallo limitato. La seconda riguarda invece le funzioni circolari: se tali funzioni sono "recuperate" all'interno della nuova analisi come soluzioni di certe equazioni differenziali, come é possibile giustificare il loro ruolo di oggetti particolari, nei confronti della infinità delle altre funzioni trascendenti che è sempre possibile introdurre seguendo il medesimo percorso, senza richiamarsi, almeno surrettiziamente, a qualche intuizione o nozione geometrica?

via scelta da Euler sembra invece la seconda: egli tratta in generale le funzioni come soluzioni di equazioni, ma caratterizza le funzioni trascendenti elementari - evidentemente assunte come oggetti dati, consegnati alla nuova analisi dalla storia stessa della matematica - del tutto indipendente dal riferimento a un'equazione: per mezzo di un'estensione arbitrariamente condizionata e largamente intuitiva dell'operazione algebrica di potenza, nel caso di esponenziale e logaritmo, e tramite un ricorso alle proprietà del cerchio, nel caso delle funzioni trigonometriche (le quali perdono così, nei fatti, il loro carattere di oggetto interno all'analisi, per trasformarsi in rappresentazioni di entità originariamente intese in termini geometrici). E' allora il concetto stesso di funzione che si presenta come ambiguo, rispondendo a esigenze e a intuizioni diverse, la cui unificazione è compiuta soltanto *a posteriori*: date le funzioni elementari, una funzione può essere intesa (e quindi trattata operativamente) come una composizione finita di funzioni elementari. Il corpo dell'analisi algebrica si presenta come unitario, ma alla sua base permane un'ambiguità che riguarda l'originaria natura dei suoi oggetti elementari e che Euler non sembra in grado di chiarire.

III. 3. *a.γ. Variabili e funzioni: i primi cinque paragrafi dell'Introductio*

Una "quantità" è detta *costante* se essa "mantiene sempre lo stesso valore, ovvero se è "*perpetuo determinata*" da questo. Un numero è dunque in quanto tale una quantità costante, ovvero la rappresentazione diretta di un valore. Al contrario una "quantità" è detta variabile se essa può assumere *ogni* valore:

> Quantitas variabilis est quantitas indeterminata seu universalis, quæ omnes omnino valores determinatos in se complectitur.

Ovvero essa è il "genus, sub quo omnes quantitates determinatæ continentur" e è a sua volta determinata per mezzo dell'assegnazione di un valore particolare qualsiasi.[14]

Una variabile è così una sorta di rappresentazione formale generale della quantità in quanto tale (e non in quanto quantità determinata).[15] Il suo concetto corrisponde quindi a un'esigenza di generalità, intesa come esigenza di indagine della proprietà che fa di certi oggetti non degli oggetti particolari, ma degli oggetti che partecipano a un *genus*. Per assegnare a sua volta a tale indagine un oggetto che sia a essa specifico, trasformandone gli esiti in una scienza di tale oggetto, occorre allora separare fra la proprietà così individuata e ogni altra proprietà, la quale caratterizza altrimenti un oggetto qualsiasi che cade sotto quel *genus*; si tratta quindi di costruire un nuovo oggetto che è una quantità senza essere alcuna quantità particolare e che partecipa quindi a un ordine ontologico superiore a quello a cui partecipano

[14]Cfr. Euler (1748), t. I, p. 4.

[15]Per una discussione più dettagliata della nozione di quantità nell'analisi euleriana cfr. il precedente capitolo II.2..

le quantità particolari.

La nozione di generalità che sembra qui all'opera - la quale sembra caratterizzarsi come un passaggio a un ordine superiore - ha un'evidente derivazione aristotelica. In una pagina di straordinaria lucidità J. Chevalier ha così caratterizzato la differenza fra i punti di vista platonico e aristotelico relativamente alla concezione della scienza:

> En écartant le devenir sensible de la science, Platon s'est interdit à jamais d'établir entre le devenir et l'être, objet de la science, une liaison nécessaire; Aristote en l'y faisant rentrer dépasse le dualisme du principe et du fait, du διότι et de l' ὅτι: le particulier, que la démonstration a pour bout de ramener au principe générale, contient ce principe en puissance et lui est lié par un rapport d'inhérence logique, de telle sorte qu'ils sont perçus spontanément l'un dans l'autre, et qu'on peut passer par simple *analyse* (au sens aristotelicien) du tout à ses éléments.[16]

Ma il "divenire sensibile" cui si riferisce la fisica aristotelica non sembra riconducibile a una somma di movimenti accidentali di ognuno dei quali resta vero ciò che è vero del movimento necessario. Esso é piuttosto *il* movimento continuo (e necessario) innescato dal primo motore, di cui nessun movimento particolare può essere concepito come un esempio particolare. La generalità (e la necessità) della scienza della natura - che per Aristotele è scienza del movimento - corrisponde così non alla verità dei suoi "teoremi" relativamente a ogni movimento, ma alla capacità di pervenire a quel movimento cui ogni movimento particolare partecipa senza poterne essere un esempio, proprio in quanto particolare.

Un simile punto di vista sembra ritrovarsi strutturalmente inalterato nell'analisi settecentesca, in cui le variabili corrispondono a una sorta di schemi universali che esibiscono proprietà necessarie, il cui carattere essenziale consiste in una assoluta indeterminatezza, la quale viene meno in ogni oggetto particolare (a esempio in un numero) che può venir sussunto sotto di essi.[17] Ciò non solo impedisce ogni genere di limitazione, ma conduce a pensare una variabile come suscettibile in ogni circostanza di una determinazione qualsiasi; la limitazione delle determinazioni possibili si presenta infatti, essa stessa, come una restrizione, la quale si configura come una perdita di generalità, un passaggio dalla pura rappresentazione del *genus* a una sua manifestazione particolare:

> Quantitas [...] variabilis in se complectitur omnes prorsus numeros, tam affirmativos quam negativos, tam integros quam fractos, tam rationales quam irrationales et transcendentes. Quinetiam cyphra[18] et numeri imaginarii a significatu quantitatis variabilis non excluduntur.[19]

---

[16]Cfr. Chevalier (1914), pp. 102-03.

[17]Cfr. il precedente paragrafo II.2.v..

[18]L'etimologia del termine tardo-latino "cyphra" (o semplicemente "cifra") è assai complessa e la stessa derivazione araba non è per nulla certa [cfr. a esempio la voce "Cifræ" del *Glossarium mediæ et Infimæ latinitatis*, F. Didot, Paris 1840-46]. E' tuttavia chiaro che Euler, utilizzando una singolare metonimia si riferisca qui allo zero [cfr. a questo proposito anche Euler (1755), cap. III].

[19]Cfr. Euler (1755), vol. I, p. 4.

E' evidente che una tale estensione della nozione di variabile non corrisponde all'edificazione di un'analisi complessa. Si può perfino dubitare che Euler avesse compreso la possibilità di una rappresentazione geometrica dei numeri complessi e avesse colto le implicazioni di un'estensione della stessa nozione di funzione al campo complesso (perdita dell'ordine totale, bidimensionalizzazione degli intervalli di variazione, relativizzazione dell'integrale, &c.). Ciò che egli vuole garantire è semplicemente la chiusura del dominio delle quantità relativamente alla costruzione di un'equazione algebrica qualsiasi e quindi la possibilità di pensare una quantità come la soluzione di un'equazione, assegnando a una tale nozione un immediato corrispettivo oggettivo. Tuttavia, se l'equazione è funzionale, i suoi coefficienti possono essere pensati come delle funzioni qualsiasi di una variabile di cui l'incognita è a sua volta una funzione; ma per rimanere nel dominio delle equazioni algebriche occorre considerare tali coefficienti come quantità reali e limitare quindi implicitamente il raggio di variazione della variabile indipendente. Ecco allora l'esempio di una contraddizione fra la generalità delle nozioni euleriane e i vincoli cui esse devono implicitamente sottoporsi per divenire effettivamente operanti. Una contraddizione che non è d'altra parte che un aspetto di un'ulteriore difficoltà intrinseca dello stesso progetto euleriano. Se da una parte infatti l'esigenza "filosofica" di generalità è incompatibile con ogni restrizione della possibilità di determinazione delle variabili, la quale si prefigurerebbe tra l'altro come un intervento esterno non riconducibile agli ideali dell'algebra, dall'altra la preoccupazione di rispettare il quadro della matematica classica, fornendone una riunificazione su nuove basi, richiede che questa restrizione venga (almeno provvisoriamente) presupposta di fatto.

E' in un tale quadro, segnato da un'esigenza di generalità che si accompagna a ambiguità inevitabili, che prende corpo la nozione euleriana di funzione, la quale non è certamente riconducibile alla secca formulazione che Euler sceglie per introdurla:

> Functio quantitas variabilis, est expressio analytica quomodocunque composita ex illa quantitate variabili, et numeris seu quantitatibus constantibus.[20]

Per quanto generale (e anzi proprio per questo), una tale definizione appare nell'economia dell'*Introductio* tutt'altro che esaustiva. Più che alla sua lettera è infatti alla sua interpretazione intesa che Euler sembra costantemente richiamarsi per giustificare le proprie generalizzazioni, fra cui la più sorprendente agli occhi di un lettore moderno è senza dubbio la prima:

> Functio ergo quantitatis variabilis ipsa erit quantitas variabilis.[21]

---

[20] Cfr. *ivi*. Per il confronto fra questa e altre definizioni del termine "funzione" cfr. il precedente paragrafo I.2.η..

[21] Cfr. *ivi*.

Se pensiamo una "quantità variabile" come una quantità in quanto tale, assolutamente non determinata, questo significa che ogni funzione $f(z)$ è secondo Euler una funzione suriettiva[22] da $\mathbf{C}$ a $\mathbf{C}$, ovvero che per ogni funzione $y = f(z)$ e per ogni valore complesso y^* esiste un valore complesso z^* tale che $y^* = f(x^*)$. Ecco d'altra parte come questi giustifica la propria generalizzazione:

> Cum enim loco quantitatis variabilis omnes valores determinatos subsistere liceat - egli scrive -, hinc Functio innumerabiles valores determinatos inducet; neque ullus valor determinatus excipietur, quem Functio inducere nequeat, cum quantitas variabilis quoque valores imaginarios involvat. Sic etsi hæc Functio $\sqrt{9-zz}$ numeris realibus loco z substituendis, nunquam valorem ternario majorem recipere potest; tamen ipsi z valores imaginarios tribuendo, ut $5\sqrt{-1}$, nullus assignari poterit valor determinatus quin ex formula $\sqrt{9-zz}$ elici queat.[23]

Ora, per trovare il valore che occorre assegnare a z perché la funzione $f(z) = \sqrt{9-z^2}$ assuma il valore complesso α, occorre risolvere l'equazione *a coefficienti complessi* $z^2 - \beta = 0$, in cui si ponga $\beta = 9 - \alpha^2$. Questo genere di equazioni non è tuttavia per nulla considerato nell'*Introductio* e lo stesso valore scelto come esempio, $z = 5\sqrt{-1}$ fornisce chiaramente una radice di tale equazione per β reale (e uguale a -25); allo stesso modo sembra chiaro come Euler si riferisca implicitamente a valori *reali* di $f(z)$ *superiori* a 3. Il suo esempio non ci mostra allora che il caso di una funzione *algebrica*, la cui suriettività non è banale, relativamente agli strumenti formulati nell'*Introductio*, che qualora essa venga considerata come un'applicazione da $\mathbf{C}$ a $\mathbf{R}$. Per quanto l'introduzione in $\mathbf{C}$ dei valori $+\infty$ e $-\infty$ possa evitare controesempi immediati come quelli dati dalle funzioni $y = 1/z$ e $y = e^z$ per il valore $y = 0$, la generalizzazione euleriana appare così assolutamente ingiustificata.

D'altra parte la stessa pratica matematica di Euler, e in generale dei matematici settecenteschi, sembra suggerire una diversa interpretazione del termine "quantità variabile", la quale, senza negare né le precedenti considerazioni, né la possibilità di intendere ogni[24] funzione come una variabile, non conduce direttamente a una simile conclusione. Tale termine sembra infatti generalmente utilizzato nel XVII e XVIII secolo assegnando a esso due significati distinti, per riferirsi da una parte a variabili indipendenti - le quali costituiscono gli oggetti originari dell'analisi e non sono in quanto tali che delle trasposizioni della nozione di quantità assolutamente non determinata - e dall'altra a variabili dipendenti - le quali, pur restando delle quantità astratte, non possono intendersi come assolutamente non determinate. Ora, per quanto la determinazione non sia qui che relativa a una quantità assolutamente non determinata, si può immaginare la possibilità che la stessa legge di dipendenza, che si esprime analiticamente per mezzo di una forma simbolica che indica un insieme di operazioni connesse fra loro, possa essere tale

[22]Si ricordi che un'applicazione $f: X \rightarrow Y$ è detta suriettiva se per ogni $y \in Y$ esiste almeno un $x \in X$ tale che $f(x) = y$.
[23]Cfr. Euler (1748), t. I, p. 4-5.
[24]Cfr. *sotto*.

da comportare una parziale determinazione della variabile dipendente anche a fronte di una assoluta indeterminatezza della variabile indipendente. Assumere questa possibilità non sembra in alcun modo contraddittorio con l'originaria esigenza di generalità che conduce semplicemente a negare la possibilità di ogni limitazione non espressa (implicitamente) per mezzo dell'assegnazione a una variabile di una determinata forma analitica.

Se vediamo le cose sotto questo punto di vista, la generalizzazione di Euler - rinforzata in modo inequivocabile nel corso della sua giustificazione: "neque ullus valor determinatus excipietur, quem functio induere nequeat, cum quantitas variabilis quoque valor imaginarios involvat" - non consiste che nel negare *a priori* una tale possibilità, o detto in altri termini, nell'affermare che le note limitazioni operazionali relative al campo reale vengono meno relativamente al campo complesso. Ora, indipendentemente dalle ragioni intuitive che possono aver condotto Euler a questa conclusione,[25] ciò che mi preme sottolineare qui è che essa svolge nell'*Introductio* un ruolo del tutto marginale. L'implicita restrizione a **R**, la quale sembra venir meno solo localmente, impone infatti di considerare funzioni limitate o non definite in certi intervalli, le quali sembrano autodeterminare il proprio insieme di arrivo risultando così automaticamente suriettive (e continue) rispetto a esso.[26] Alla asserita generalità della nozione di variabile (indipendente) non fa così riscontro una effettiva estensione a **C** del dominio e del codominio di tutte le funzioni considerate; al contrario questa estensione non sembra che intervenire localmente e è sempre governata, più che da una teoria consapevole del campo complesso, da una straordinaria capacità intuitiva che permette volta a volta di trarre conclusioni sostanzialmente corrette (anche se spesso formalmente imprecise).

Una tale restrizione - insieme negata e richiesta dallo stesso programma dell'*Introductio* - non sembra tuttavia giungere in Euler (e in generale nel Settecento) a permettere l'intervento di una limitazione esterna (che non sia quella implicita di **C** a **R**) del dominio di una funzione, come parte integrante della sua caratterizzazione. Così, proprio in quanto espressione analitica, una funzione non potrà mai assumere una forma analoga alla seguente:

[25] E' evidente che nella (implicita) giustificazione intuitiva di una tale conclusione gioca in modo essenziale l'asserita analogia polinomiale di tutte le funzioni. Data una funzione $f(z)$, la sua sviluppabilità in serie intera permette di tradurre l'equazione $f(z) = \eta$ (con η un valore complesso) in un'equazione (a coefficienti complessi) della forma $(A-\eta) + Bz + Cz^2 +$ &c. $= 0$, che si può immaginare - generalizzando al caso infinitario il teorema di d'Alembert-Gauss (o un suo analogo intuitivo) - come dotata di almeno una radice in **C**. Naturalmente la difficoltà essenziale di un tale ragionamento, che Euler sembra non scorgere, è che - anche qualora ci si limiti a funzioni analitiche - nulla ci assicura che almeno una delle radici di una tale equazione cada nell'intervallo di convergenza (alla funzione) della serie sviluppo. Si ricordi che il cosiddetto teorema di d'Alembert-Gauss afferma che il corpo complesso è algebricamente chiuso, ovvero che tutti i polinomi (di grado superiore a zero) a una variabile e a coefficienti complessi possiedono almeno una radice in **C** (ovvero un numero di radici uguale al grado del polinomio, eventualmente coincidenti fra loro).

[26] Cfr. il precedente paragrafo II.2.v..

$$(1) \qquad y = \begin{cases} f(z) & \text{se } z \in A \\ g(z) & \text{se } z \in B \end{cases}$$

dove f(z) e g(z) indicano a loro volta delle funzioni qualsiasi di z. Le specificazioni esplicite $z \in A$ e $z \in B$ sembrano infatti corrispondere a illegittime limitazioni di generalità incompatibili con l'ideale "algebrico" che informa il programma euleriano. Per la stessa ragione, nessuna scrittura analitica che esprima una relazione la cui uscita risulti, per ragioni operazionali, indipendente dall'entrata, può a sua volta essere intesa come una funzione:

> Occurrunt autem nonnunquam Functiones tantum apparentes, quæ, utcunque quantitas variabilis varietur, tamen usque eumdem valorem retinent, ut z^0; 1^z; $\frac{aa-az}{a-z}$, quæ, etsi speciem functionis mentiuntur, tamen revera sunt quantitates constantes.[27]

III. 3. *a. δ. La classificazione delle funzioni*

In quanto espressioni analitiche le funzioni possono essere classificate relativamente alle operazioni che esse indicano, ovvero in base alla loro *forma* analitica. Fra tali operazioni Euler cita: l'addizione, la sottrazione, la moltiplicazione, l'elevamento a potenza, l'estrazione di radice, le risoluzione delle equazioni (algebriche) - che danno luogo alle *funzioni algebriche* - l'esponenziale, il logaritmo e "innumerevoli altre fornite dal calcolo integrale" - le quali, eventualmente connesse alle stesse operazioni algebriche, danno luogo alle *funzioni trascendenti*.[28] Spesso, egli continua, le funzioni algebriche non possono venir rappresentate esplicitamente, come sarebbe il caso della funzione $y = f(z)$ la quale fosse "espressa per mezzo dell'equazione":

$$(2) \qquad y^5 - az^2y^3 + bz^4y^2 - cz^3y + 1 = 0$$

---

[27]Cfr. *ivi*, t. I, p. 5.

[28]Cfr. *ivi*:

> Pendet ergo ab Operationibus quibus quantitates inter se componi et permisceri possunt; quæ Operationes sunt Additio et Subtractio; Multiplicatio et Divisio; Evectio ad Potestates et radicum extractio, quo etiam Resolutio Æquationum est referenda. Præter has Operationes, quæ algebricæ vocari solent, dantur complures aliæ transcendentes, ut Exponentiales, Logarithmicæ, atque innumerabiles aliæ, quas Calculus integralis suppeditat.[...]
>
> Funtiones dividuntur in Algebraïcas et Transcendentes; illæ sunt, quæ componuntur per operationes algebraïcas solas; hæ vero in quibus operationes transcendentes insunt.

L'elenco di Euler stupisce tanto per la considerazione della soluzione delle equazioni (algebriche) come un'operazione algebrica fra le altre, che per l'assenza di un riferimento esplicito alle operazioni trigonometriche. Nel primo caso gioca ovviamente la speranza di una generalizzazione possibile delle formule risolutive per radicali delle equazioni di grado inferiore al quinto, la quale potrebbe dar luogo a un'operazione (composta) autonomamente considerabile; nel secondo gioca lo statuto ambiguo fra analisi e geometria delle entità trigonometriche.

Infatti,

> Quanquam [...] hæc æquatio resolvi nequit; tamen constat y æquari expressioni cuipiam ex variabili z et constantibus compositæ ac propterea fore y Functionem quandam ipsius z.[29]

Per quanto Euler non giustifichi in nessun modo tale conclusione, è evidente che essa rinvia da una parte al teorema fondamentale dell'algebra - su cui egli tornerà solo nel capitolo IX del suo trattato - e dall'altra alla convinzione che le radici di ogni equazione algebrica siano esse stesse esprimibili algebricamente,[30] ciò che non solo non era ancora stato provato nel 1748, ma che, come sappiamo grazie alle dimostrazioni di Abel e Ruffini,[31] è falso. Non sono tuttavia questi i punti su cui mi preme insistere. Piuttosto ciò che vorrei sottolineare è che qui la funzione non è semplicemente intesa come un'espressione analitica in quanto tale, ma come ciò che può essere rappresentato per mezzo di un'espressione analitica, ovvero come un'espressione analitica in quanto rappresentazione di una quantità (astratta), concepita come soluzione di un'equazione. Così la definizione generale, con il suo riferimento alla *forma*, sembra non corrispondere che a una descrizione e si fonda quindi non su una convenzione, ma su una doppia presupposizione, la quale asserisce che una *quantità* non è che un termine di un'equazione e che ogni equazione è tale che i suoi *relata* possano venire esplicitamente rappresentati, gli uni relativamente agli altri, per mezzo di una espressione analitica (finita) del genere considerato. L'analisi ha così guadagnato un oggetto interno assai agile da trattare, ma solo al prezzo di un presupposto che peserà nel corso del suo sviluppo, fornendo la base di un'ambiguità costante la quale permetterà di affiancare a numerosi risultati tratti per mezzo di una derivazione oggettiva, altre generalizzazioni fondate sulla considerazione del concetto che è a questo correlato.[32]

Distinte dalle funzioni trascendenti, le funzioni algebriche possono a loro volta distinguersi in razionali e irrazionali e le prime in intere e frazionarie.[33] Una funzione può d'altra essere tanto *uniforme* che *multiforme*:

> Functio autem uniformis est, quæ si quantitati variabili z valor determinatus quicumque tribuatur, ipsa quoque unicum valorem determinatum obtineat. Functio autem Multiformis est, quæ pro unoquoque valore determinato in locum varibilis z substituto, plures valores determinatos exhibet.[34]

---

[29]Cfr. *ivi*, pp. 5-6.

[30]Cfr. Euler (1732-3) e (1762-3).

[31]Cfr. Ruffini (1799) e (1813) e Abel (1824) e (1826).

[32]Si noti che la questione è ulteriormente complicata dal fatto che per la nozione di equazione sono stati proposti differenti referenti oggettivi - i quali corrispondono ognuno a un'equazione di *tipo* diverso - senza che siano mai stati stabiliti in generale i canoni relativi alla possibile introduzione di equazioni di nuovo tipo [cfr. su questo punto il precedente paragrafo II.2.λ.].

[33]Le distinzioni di Euler corrispondono da questo punto di vista a quelle odierne.

[34]Cfr. Euler (1748), t. 1, p. 7. Cfr. su questo punto anche il precedente paragrafo II.2.λ..

Per quanto come esempi di funzioni multiformi Euler citi successivamente le funzioni radicali e l'arco sino, è chiaro che il suo referente privilegiato é costituito da funzioni algebriche implicitamente rappresentate per mezzo di equazioni di grado superiore a uno. Tale esempio è tanto privilegiato, che nel presentarlo egli fornisce una nuova definizione:

> Erit ergo Z Functio multiformis ipsius z, quæ, pro quovis valore ipsius z, tot exhibet valores quot numerus *n* continet unitates; si Z definiatur per hanc æquationem[35]
>
> (3) $Z^n - PZ^{n-1} + QZ^{n-2} - RZ^{n-3} + SZ^{n-4} - \&c. = 0$

E' chiaro che nella prima definizione l'oggetto funzione è direttamente costituito dall'espressione analitica, che, per *z* indeterminato, mantiene la propria forma unica, pur indicando differenti valori per ogni opportuna sostituzione di *z*; è il caso a esempio della funzione $f(z) = \sqrt{r}$, che pur essendo una forma univoca indica due diversi valori (per ogni *z diverso da zero*).[36] Nella seconda definizione al contrario l'oggetto funzione è la quantità Z che per ogni determinazione di *z* riceve (o almeno può ricevere) più di una forma: la forma che resta inalterata è piuttosto quella dell'equazione, di cui la funzione è una soluzione.

Questo a parte, ciò che forse è ancora più interessante per comprendere l'interpretazione intesa assegnata da Euler alla propria definizione è la specificazione che egli inserisce, apparentemente in modo del tutto arbitrario, nel paragrafo 15:

> Si Z ejusmodi fuerit Functio multiformis ipsius z ut perpetuo nonnisi unicum valorem exhibeat realem; tum Z Functionem uniformem ipsius *z* mentietur, ac plerumque loco Functionis uniformis usurpari poterit.
>
> Ejusmodi Funtiones erunt $\sqrt[3]{P}$, $\sqrt[5]{P}$, $\sqrt[7]{P}$, &c. quippe quæ perpetuo nonnisi unicum valorem realem præbent, reliquis omnibus existentibus imaginaris, dummodo P

---

[35]Cfr. *ivi*, p. 9. I coefficienti P, Q, R, &c. indicano qui delle funzioni uniformi di z. Lo stesso singolare passaggio da una definizione all'altra è compiuto da Euler relativamente alle funzioni biformi. Ecco come egli si esprime [cfr. *ivi*, p. 8]:

> Functio biformis ipsius *z* est ejusmodi Functio, quæ pro quovis ipsius *z* valore determinato, geminum valorem præbeat.
>
> [...] Generatim vero Z erit Functio biformis ipsius z, si determinetur per æquationem quadraticam
>
> $$Z^2 - PZ + Q = 0$$
>
> si quidem P et Q fuerint Functiones uniformes ipsius z.

Se pensiamo una funzione "multiforme" come alla soluzione di un'equazione di grado superiore a uno diventa immediatamente evidente la ragione dello slittamento terminologico realizzato da Euler, che utilizza un costrutto verbale che esprime una pluralità di forme per riferirsi a una pluralità di valori. Le differenti radici di un'equazione si presentano infatti come differenti valori espressi relativamente ai coefficienti per mezzo di differenti forme.

[36]E' evidente che Euler si riferisce qui a un radicale come espressione dell'operazione inversa all'elevamento a potenza, piuttosto che come simbolo numerico, in modo che l'identità $y = \sqrt{4}$ contiene, a esempio, tanto il valore 2 che il valore -2.

> fuerit Functio uniformis impsius z. Hanc ob rem hujusmodi expressio $P^{m/n}$, quotiens n fuerit numerus impar, Functionibus uniformibus annumerari poterit; sive m fuerit numerus par sive impar.[37]

Se la funzione P è qui intesa chiaramente non solo come uniforme, ma anche come una funzione a valori reali,[38] ciò che è ancora più evidente, e anzi del tutto esplicito nella dichiarazione di Euler, è la restrizione al campo reale della distinzione fra uniformità e multiformità. Così la (3) non esprime un'equazione multiforme che qualora i coefficienti siano tali da assegnare a Z, una pluralità di valori *reali*.[39] La distinzione in questione mostra allora la sua natura intuitiva, presentandosi come una trasposizioni analitica della distinzione fra curve semplici e curve ramificate,[40] la quale male si accorda con l'esigenza di generalità indicata solo qualche pagina prima, costituendo un ulteriore esempio dell'ambiguità strutturale che accompagna il progetto dell'*Introductio*.

Tale ambiguità si manifesta d'altra parte ancora più chiaramente nel paragrafo successivo, in cui Euler, non richiamandosi tanto all'affermata suriettività di tutte le funzioni, ma al loro carattere di soluzione di un'equazione a due variabili, afferma, senza alcuna precisazione relativa al dominio di invertibilità, che se y è funzione di z, allora z è una funzione di y.

> Si fuerit y Functio quæcunque ipsius z - egli scrive -; tum vicissim z erit Functio ipsius y.
> Cum enim y sit Functio ipsius z, sive uniformis sive multiformis; dabitur æquatio, qua y per z et constantes quantitates definitur. Ex eadem vero æquatione vicissim z per y et constantes definiri poterit [...].[41]

L'argomento di Euler è chiaramente cogente solo relativamente a equazioni algebriche,[42] le quali non definiscono, dal suo punto di vista, che delle funzioni algebriche. Per quanto la conclusione cui esso conduce possa così essere estesa a funzioni di ogni sorta (previa adeguate specificazioni relative alle condizioni di invertibilità[43]), esso mostra bene come sia l'interpretazione intesa a svolgere il ruolo di referente essenziale.

Tratta in ogni modo tale ulteriore conseguenza, Euler conclude il primo

[37] Cfr. *ivi*, pp. 9-10.

[38] Ugualmente sembra potersi dire per le funzioni P, Q, R, &c. involte nella (3) la quale sembra implicitamente intesa come un'equazione a coefficienti reali.

[39] Euler sembra per la verità riferirsi a funzioni polindrome in C che tuttavia, per ogni valore reale della variabile indipendente, non possiedono in R che un solo valore reale. Così, a esempio, una funzione $Z = Z(z)$ determinata dall'equazione $Z^3 + zZ + z = 0$ sembra debba considerarsi globalmente come triforme, pur possedendo due radici complesse e una sola reale per z reale e minore di -4/27 o maggiore di zero, tre radici reali coincidenti per $z = 0$, tre radici reali distinte per z reale e compreso fra -4/27 e zero e tre radici reali di cui due coincidenti per $z = -4/27$ (cfr. su questo punto anche *ivi*, t. II, parr. 17-22, pp. 10-3).

[40] Cfr. la precedente nota (39).

[41] Cfr. *ivi*, p. 10.

[42] L'esempio di Euler è d'altra parte costituito dall'equazione algebrica $y^3 = ayz - bz^2$.

[43] E' evidente che se ogni funzione è intesa, senza restrizioni implicite, come un'applicazione suriettiva da C a C, allora tali condizioni diventano del tutto inessenziali.

capitolo del suo trattato introducendo le nozioni di funzioni pari e dispari e indicandone le principali proprietà reciproche. Il riferimento implicito sembra essere anche in questo caso costituito da funzioni ristrette al campo reale[44] e pensate come espressioni analitiche di determinate classi di curve. Sarà d'altra parte solo nel secondo tomo che questi si riferirà a una tale distinzione, non utilizzandola che nel contesto della propria teoria delle curve algebriche.

III. 3. *a. ε. Funzioni a più variabili*

Le definizioni e le distinzioni precedenti sono tutte facilmente generalizzabili al caso di un maggior numero di variabili,[45] fra loro indipendenti. Se le variabili *x*, *y*, *z*, &c. sono infatti tali che "la determinazione di una non limita in alcun modo il significato delle altre", allora una "qualsiasi espressione composta da queste quantità" è a sua volta una funzione di esse. La determinazione di una delle variabili che compongono una tale funzione lascia così a questa il carattere di "quantità variabile",[46] ovvero di funzione delle variabili restanti. Le determinazioni possibili di una funzione a più variabili costituiscono quindi una gerarchia di infiniti ognuno maggiore del precedente:

> Cum igitur una quantitas variabilis infinitis modis determinari possit, Functio duarum variabilium, quia pro quavis determinatione unius infinitas determinationes suscipere potest, omnino infinities infinitas determinationes admittet. Atque in Functione trium variabilium numerus determinationum erit adhuc infinities maior; sicque porro crescet pro pluribus variabilibus.[47]

Le funzioni a più variabili possono d'altra parte distinguersi, come quelle a una variabile, in funzioni algebriche e trascendenti, anche se una tale classificazione deve essere intesa come relativizzata. Una funzione f(*x*, *y*, *z*, &c.) potrà così essere algebrica rispetto a *x* se tale variabile non costituisce in essa che l'argomento di operazioni algebriche e trascendente rispetto a *y* se alcune delle operazioni riferite a *y* sono invece trascendenti. L'uniformità è per contro anche in questo caso una caratteristica assoluta di una funzione: una funzione a più variabili è infatti detta uniforme se, in ogni

[44] Il seguente passaggio è particolarmente significativo [cfr; *ivi*, p. 11]:

Quin etiam, cum $z^{m/n}$ mentiatur Functionem ipsius *z* uniformem, si *n* sit numerus impar, perspicuum est $z^{m/n}$ fore Functionem parem ipsius *z*, si *m* fuerit numerus par, *n* vero numerus impar.

[45] Cfr. *ivi*, t. I, cap. V, pp. 60-9.

[46] Lo slittamento fra "espressione" e "quantità" è ovviamente di Euler [cfr. *ivi*, t. I, p. 60-1].

[47] Cfr. *ivi*, t. I, pp. 61. L'intuizione di infiniti successivamente maggiori gli uni gli altri, assai diffusa nei secoli XVII e XVIII non deve a mio parere interpretarsi come una sorta di preconizzazione della distinzione cantoriana fra infiniti di ordini successivi e, in particolare, fra l'infinito numerabile e i successivi infiniti piucchenumerabili. E' proprio la distinzione essenziale comportata dalla numerabilità dell'infinito catoriano del primo ordine e dalla piucchenumerabilità dei restanti che pare a me del tutto estranea all'orizzonte concettuale dei matematici di sei e settecento.

modo siano state determinate tutte le sue variabili,[48] non riceve che un solo valore, mentre è detta multiforme nel caso contrario. Così come nel caso di funzioni a una sola variabile, Euler traspone tale definizione al caso di funzioni implicite, asserendo che V è una funzione n-forme di x, y, z, &c. se essa risponde all'equazione di n-esimo grado:

(3) $V^n - \Phi V^{n-1} + \Psi Z^{n-2} - ... + \Omega = 0$

i cui coefficienti $\Phi, \Psi, ..., \Omega$ sono a loro volta delle funzioni uniformi delle stesse variabili x, y, z, &c..

Così come un'equazione a due variabili $F(z, y) = 0$ fornisce una funzione a una variabile $y = y(x)$, un'equazione a n variabili $F(x_1, x_2, ..., x_n) = 0$ fornisce una funzione a n-1 variabili. Viceversa, data una funzione (esplicita) a n variabili è sempre possibile trarre da essa una funzione (implicita) a n-1 variabili ponendola semplicemente uguale a zero.

Peculiare alle funzioni (algebriche) a più variabili è da ultimo la distinzione in funzioni omogenee e eterogenee:

> Funtio homogenea est per quam ubique idem regnat variabilium numerus dimensionum: Functio autem heterogenea est, in qua diversi occurrunt dimensionum numeri.[49]

Così una funzione intera sarà omogenea - e di dimensione n - se la somma degli esponenti delle diverse variabili che compongono ognuno dei suoi termini è ovunque la stessa - e è uguale a n - mentre una funzione frazionaria lo sarà qualora il suo numeratore e il suo denominatore siano a loro volta delle funzioni (intere) omogenee - la dimensione di una tale funzione sarà allora data dalla differenza fra la dimensione del numeratore e quella del denominatore. Se Φ è infine una funzione omogenea (intera o frazionaria) di dimensione n, allora la radice $\sqrt[m]{\Phi}$ sarà a sua volta una funzione irrazionale omogenea di dimensione n/m.

III. 3. *b*.
TRASFORMAZIONE E SVILUPPO DELLE FUNZIONI ALGEBRICHE (CAPITOLI II-V)

III. 3. *b*. α. *Transformatio functionum*

Intesa una funzione come una quantità rappresentata da una forma analitica, o come una forma analitica che rappresenta una quantità, un preliminare essenziale di una teoria generale delle funzioni è costituito da un

[48] Euler non fa alcun riferimento a una relativizzazione dell'uniformità a opportune regioni del dominio della funzione; questa resta per lui una proprietà globale delle funzioni [cfr. la precedente nota (39)].

[49] Cfr. *ivi*, t. 1, p. 63.

metodo (o almeno da un insieme di metodi) di trasformazione delle forme. Ecco come lo stesso Euler si esprime

> [...] omnis transformatio [di una funzione] consistit in alio modo eandem Functionem exprimendi, quemadmodum ex Algebra constat eandem quantitatem per plures diversas formas exprimi posse.[50]

La trasformazione di una funzione non è quindi, nel linguaggio di questi, che il passaggio, generalmente indicato per mezzo di un'identità, dalla forma assegnata (ovvero dalla funzione stessa o dalla forma che la rappresenta) a una forma differente ma appartenente a una classe di equivalenza cui appartiene la forma data. La legittimità di una trasformazione (ovvero l'asseribilità dell'identità che la esprime) dipende allora dalla caratterizzazione della classe di equivalenza a cui appartiene la forma trasformata. Se è del tutto evidente che dal punto di vista di Euler tale classe di equivalenza debba essere tale da contenere solo forme che rappresentano una stessa quantità, è altrettanto chiaro che una teoria analitica delle trasformazioni formali debba fornire, essa stessa, dei criteri di conservazione della rappresentatività riferiti a forme. Tali criteri non sono tuttavia puramente convenzionali, ma dipendono da una determinata interpretazione dei simboli operazionali, la quale è implicitamente data con essi e intesa come univoca. I criteri forniti da Euler sono allora ovvi: i) ogni forma assegnata può essere in primo luogo trasformata in ognuna delle forme finite che sorgono da essa eseguendo o esplicitando finitariamente le operazioni che essa esprime (o introducendo in essa nuovi componenti finiti identicamente eliminabili secondo le regole operazionali accettate); ii) data una forma, essa può in secondo luogo venir trasformata in ognuna delle forme che sorgono da essa per mezzo dell'applicazione di una successione di sostituzioni. Nel primo caso la forma di partenza e quella di arrivo non solo rappresentano la stessa quantità, ma contengono le medesime variabili: se la funzione è una forma che rappresenta una quantità y relativamente a altre quantità x, z, &c., essa è trasformata in una nuova funzione che rappresenta la stessa quantità y relativamente alle stesse quantità x, z, &c.; se la funzione è una quantità y rappresentata da una certa forma relativamente alle quantità x, z, &c., tale forma è trasformata in una nuova forma che rappresenta la stessa quantità y relativamente alle stesse quantità x, z, &c.. Nel secondo caso la forma di partenza e quella di arrivo rappresentano la stessa quantità ma contengono variabili differenti: o esse rappresentano la stessa quantità relativamente a quantità diverse fra cui sussistono delle relazioni indicate dalle sostituzioni introdotte (le quali assumono a loro volta l'aspetto di identità fra forme analitiche che sono assunte come rappresentazioni della medesima quantità) o esse rappresentano la stessa quantità relativamente alle stesse quantità rappresentate da forme diverse.

---

[50]Cfr. *ivi*, t. 1, pp. 15-6. E' evidente che Euler intende qui una funzione prima come una forma (egli parla di trasformazione di funzioni) e poi come una quantità (egli afferma che la stessa funzione è esprimibile in forme diverse). Una tale ambiguità accompagnerà d'altra parte tutto il trattato e non sarà quindi il caso di sottolinearla ulteriormente.

Come è chiaro le due classi di equivalenza così stabilite relativamente a una forma assegnata differiscono fra di loro in termini essenziali. Per capire questa differenza è sufficiente riflettere sul significato del termine "forma", ovvero sul concetto di forma. E' evidente in primo luogo che, assegnato un oggetto qualsiasi, non esiste alcun criterio universale atto a qualificare quale insieme delle sue infinite proprietà costituisca la sua *forma* e quale invece sia da essa indipendente. Ogni volta che si introduce la nozione di forma di un oggetto (distinguendo questa dall'oggetto stesso) ci si riferisce quindi, almeno implicitamente, a un criterio di selezione non universale. Il concetto di forma di un oggetto dato è così un concetto che indica un posto vuoto, che dovrà essere riempito da contenuti selezionati in base a un criterio che, in quanto tale, non fa parte di tale concetto. La situazione è molto simile qualora, invece di interrogarci sulla forma di un oggetto già dato, ci poniamo il problema di costruire un oggetto, il quale possa essere inteso in sé stesso come una forma. E' evidente che se vogliamo fare in modo che tale forma possa venir assegnata (essa e non una simile) a differenti oggetti, dobbiamo pensare il concetto del nostro oggetto come uno schema vuoto che non viene riempito, senza cessare di essere unicamente una forma, che tramite entità di cui non vengono considerate (almeno implicitamente) che certe proprietà, calando un velo (epistemologico) su altre.[51] Proprio questo è il caso di ogni oggetto indicato come una "forma analitica". Esso non è materialmente che un insieme di segni su alcune delle cui proprietà viene implicitamente calato un velo. Ora, se spero che le considerazioni contenute nel precedente paragrafo I.2.γ. e i contesti in cui ho finora usato il termine "forma (analitica)" siano sufficienti per indicare quali proprietà di un tale insieme di simboli debbano restare allo scoperto perché si possa dar luogo a una *forma analitica*, nel senso in cui ho inteso tale termine fin qui, questo non significa che non si possano operare delle alienazioni diverse, conducendo così alla costruzione di un oggetto matematico (almeno parzialmente) diverso. La distinzione operata da Euler fra due differenti generi di *transformatio functionum* sembra suggerire proprio questa possibilità. Si tratta in sostanza di relativizzare l'oggetto `forma analitica´ non solo relativamente alla successione delle operazioni matematiche indicata dalla sequenza di segni che ne costituisce materialmente ogni esemplare, ma anche alle regole di trasformazione del primo tipo, in modo da intendere a esempio le due scritture $(x + y)(x - y)$ e $(x^2 - y^2)$ come due occorrenze diverse della stessa forma analitica, ovvero come due scritture fra cui vigono (rispetto al concetto di forma analitica) gli stessi rapporti che vigono fra le due scritture $(x + y)$ e $(x + y)$. Benché questa nozione di forma analitica - che potremmo indicare parlando di *forme analitiche in senso forte*, come contrapposte a *forme analitiche in senso debole* - non sembra esere quella di Euler - il quale, parlando di "forma" sembra riferirsi proprio a "forme

[51] Ciò significa che in un' "ontologia pura" (se mi è concesso questo termine) non possono trovar posto oggetti che corrispondono a una forma, ma solo forme (relativamente caratterizzate) di certi oggetti, ovvero, in altri termini, che non è possibile un' "ontologia pura" di oggetti ideali (o astratti) e che è quindi vano cercarla. Il mio modo di vedere non differisce qui in modo sostanziale da quello di J. S. Mill [cfr. Mill (1843), libro II, cap. V, par. 1].

analitiche in senso debole" - essa può venire intesa come un referente possibile della sua stessa nozione di funzione. Subito dopo aver indicato le due differenti maniere in cui si può operare una trasformazione di "una funzione in un'altra forma", egli scrive infatti:

> Quod si eadem quantitas variabilis servatur, Functio propre mutari non potest.[52]

In tal modo una funzione sarebbe una forma in senso forte, ovvero una forma che indica non una successione di operazioni su certe quantità rappresentate da simboli atomici, ma l'appartenenza di questa successione a una classe di equivalenza definita in base alle proprietà di queste stesse operazioni. In tal modo solo le trasformazioni del secondo tipo, in cui le nuove variabili indipendenti rappresentano quantità diverse rispetto alle quantità rappresentate dalle variabili involte dalla forma data (intesa in senso debole), condurrebbero da una funzione a un'altra, comportando una differenza reputata essenziale nelle modalità di rappresentazione della quantità in questione. Se questa lettura permetterebbe di risolvere in molti casi l'ambiguità legata all'uso del termine funzione, essa sembra contraddetta da numerosi altri passaggi e risulta quindi, a una più attenta analisi del testo, inopportuna. Quelle ambiguità che essa risolverebbe appaiono infatti costitutive del concetto euleriano di funzione, al pari delle altre che rimarrebbero invece inalterate. Ciò non significa che la distinzione precedente sia storicamente irrilevante. Al contrario essa sembra indicare uno degli slittamenti principali operati da Lagrange, il quale - accettando in modo globalmente esplicito (salvo ricadere localmente nell'ambiguità in alcune circostanze) l'identificazione fra una funzione e una forma - sembra riferirsi proprio a forme in senso forte. Fatta questa precisazione è tuttavia a Euler che occorre tornare.

Per quanto la precedente ricostruzione della nozione euleriana di "*transformatio functionum*" sia riferita a funzioni qualsiasi, nei capitoli II e III del primo tomo dell'*Introductio*, essa non è riferita che a funzioni *algebriche* a *una variabile* e non mette capo quindi che a metodi di trasformazione relativi a funzioni di tal sorta. Essa non è d'altra parte ripresa successivamente che in termini impliciti, in modo che nessuna organica trattazione è dedicata nell'*Introductio* ai metodi di trasformazione delle funzioni trascendenti o a più variabili.[53]

---

[52]Cfr. *ivi*, t. I, p. 15.

[53]Le relazioni di trasformabilità formale fra funzioni di tal tipo, come a esempio quella che garantisce l'esprimibilità delle funzioni circolari in termini di esponenziali immaginari, sembrano d'altra parte assumere nell'interpretazione di Euler uno statuto diverso e non precisamente determinato [cfr. la prossima sezione III.3.*c*.]. Una eccezione è costituita dalla generalizzazione per funzioni omogenee a due variabili dei risultati relativi alla risoluzione di una funzione intera in fattori semplici [cfr. il prossimo paragrafo III.3.*b*.β.].

III. 3. *b*. β. *Trasformazione per risoluzione delle funzioni algebriche*

Il secondo capitolo del primo tomo dell'*Introductio* è completamente dedicato alle trasformazioni senza sostituzioni - ovvero alle "trasformazioni per risoluzione", delle funzioni algebriche a una variabile, e in particolare alla risoluzione delle funzioni intere in fattori (considerando come date le radici dell'equazione corrispondente) e a quella delle funzioni frazionarie in somma di funzioni semplici.

Considerando come nota la nozione di fattore di una funzione intera, Euler incomincia la sua esposizione introducendo una ulteriore classificazione. Un fattore è detto *semplice* (o *primo*) se è a sua volta costituito da una funzione intera di primo grado, esso è *doppio* se la funzione intera che lo costituisce è di secondo grado, *triplo* se essa è di terzo grado, e così via. Nessun accenno è fatto alla possibilità di determinare fattori non interi di una funzione intera; un fattore di una funzione intera è implicitamente assunto come una funzione intera. Un fattore m-uplo è così costituito a sua volta da m fattori semplici e dunque una funzione intera di grado n - che indicherò d'ora in poi in termini generali per mezzo della notazione[54] ${}_n\mathrm{F}(z)$ - può essere risolta in n fattori semplici.[55] Assumendo inoltre che se $z = a_k$ ($1 \leq k \leq n$, $k \in \mathrm{N}$) è una radice dell'equazione ${}_n\mathrm{F}(z) = 0$, allora $(z - a_k)$ è un divisore di ${}_n\mathrm{F}(z)$, Euler conclude che ogni fattore semplice di tale funzione è riducibile alla forma $(z - a_k)$, ovvero alle forme $(1 - z/a_k)$ o $(a_k/\mathrm{K}, z/\mathrm{K})$, con $1/\mathrm{K}$ un fattore costante comune a ogni fattore semplice. I fattori semplici di ogni funzione intera assegnata possono quindi essere trovati risolvendo l'equazione corrispondente. Dalla relazione fra i fattori di ${}_n\mathrm{F}(z)$ e le radici dell'equazione ${}_n\mathrm{F}(z) = 0$ Euler trae inoltre che i fattori semplici di una funzione intera possono essere tanto reali che immaginari e che gli eventuali fattori immaginari sono sempre in numero pari (e naturalmente tali che il loro prodotto è reale).[56] Euler non fornisce una vera e propria dimostrazione neppure della possibilità di associare a due a due i fattori immaginari di ogni funzione intera in modo che il prodotto dei fattori di ogni coppia sia un fattore (doppio) reale. Fornita la dimostrazione triviale per il caso di una funzione ${}_n\mathrm{F}(z)$ che possieda solo due fattori immaginari, egli si limita a scrivere:

> Quanquam autem eundem demonstrandi modum ad altiores potestates extendere non licet, tamen extra dubium videtur esse positum eandem proprietatem in quotcunque Factores imaginarios competere [...]. Quod quamvis non summo rigore sit demonstratum, tamen ejus veritas in sequentibus magis corroborabitur.[57]

---

[54]Tale notazione non è ovviamente di Euler che indica generalmente con Z una funzione di z, specificando volta a volta le sue caratteristiche particolari.

[55]Euler assume qui, come è chiaro, lo stesso teorema fondamentale dell'algebra [cfr. *ivi*, p. 17]:

> Hinc Functio ipsius z integra, in qua exponens summæ potestatis ipsius z est = n, continebit n Factores simplices.

[56]E' chiaro che i coefficienti di una funzione intera sono qui pensati come valori reali.

[57]Cfr. *ivi*, p. 19.

Il primo teorema che possa dirsi effettivamente dimostrato nell'*Introductio* per mezzo di un argomento autonomo è quello che asserisce l'esistenza di almeno un fattore semplice reale per ogni funzione intera di grado dispari. La prova presentata da Euler è doppiamente significativa, da una parte per l'impiego "algebrico" di un numero infinito, dall'altra per la potenza che essa esibisce dell'interpretazione funzionale delle equazioni algebriche. Essa si vale di un lemma in cui il lettore moderno non avrà difficoltà a riconoscere un analogo, per funzioni intere, del cosiddetto teorema di Bolzano-Weierstrass:

Lemma: Se F(z) è una funzione intera e a e b sono due valori reali (e distinti) di z, allora F(a) = A e F(b) = B saranno a loro volta due valori reali della funzione, tali che per ogni C compreso fra A e B esisterà un valore c a sua volta compreso fra a e b tale che F(c) = C.[58]

En effetti, argomenta Euler, essendo F(z) intera, essa è anche uniforme e dunque per ogni z reale, F(z) avrà un solo valore reale,[59] e quindi:

> cum [...] F(z), priore casu $z = a$, nanciscatur valorem A, posteriore casu $z = b$, autem, valorem B; ab A ad B transire non poterit, nisi per omnes valores medios transuendo.[60]

Così se le equazioni F(z) - A = 0 e F(z) - B = 0 hanno rispettivamente le radici reali $z = a$ e $z = b$, allora per ogni C compreso fra A e B anche l'equazione F(z) - C = 0 avrà una radice reale compresa fra a e b, ciò che conclude la dimostrazione del lemma. Ora, se $F(z) = {}_{2n+1}F(z)$ è una funzione intera di grado dispari uguale a $2n+1$, essa avrà la forma generica:

$$(5) \qquad {}_{2n+1}F(z) = z^{2n+1} + Az^{2n} + Bz^{2n-1} + \ldots + Nz + M$$

e la posizione $z = \pm\infty$ condurrà, per omissione dei termini di grado inferiore al primo, alle identità ${}_{2n+1}F(+\infty) = \infty^{2n+1} = \infty$ e ${}_{2n+1}F(-\infty) = -\infty^{2n+1} = -\infty$. Le equazioni ${}_{2n+1}F(z) - \infty = 0$ e ${}_{2n+1}F(z) + \infty = 0$ avranno così rispettivamente le radici *reali* $z = +\infty$ e $z = -\infty$. Se C è un numero reale qualunque (compreso fra $-\infty$ e ∞) l'equazione ${}_{2n+1}F(z) + C = 0$ avrà così, secondo il lemma, una radice reale compresa a sua volta fra $-\infty$ e $+\infty$. Ponendo C = 0 si avrà allora il teorema seguente:

---

[58] Cfr. *ivi*, t. 1, p. 20:

> Si Functio integra Z, posito $z = a$ induat valorem A et posito $z = b$ induat valorem B; tum, loco z valores medios inter a et b ponendo Functio Z quosvis valores medios inter A et B accipere potest.

La natura reale di a e b e quindi di A e B è esplicita nella dimostrazione. Sembra allora evidente che anche c e C debbano essere intesi come valori reali.

[59] Cfr. la precedente nota (56).

[60] Cfr. *ivi*.

Teorema: Se ${}_{2n+1}F(z)$ è una funzione intera di grado $2n+1$ (n = 0, 1, 2, &c.) allora essa ha almeno un fattore reale (ovvero l'equazione ${}_{2n+1}F(z) = 0$ ha una radice reale).

Al di là del carattere del tutto intuitivo della prova, ciò che è estremamente interessante a mio avviso è la connessione che essa realizza fra due teorie originariamente separate, mostrando il potere di unificazione matematica della nuova interpretazione funzionale. Proprio l'esibizione di questa connessione sembra d'altra parte essere l'obiettivo di Euler. Dopo aver assunto come noto che una funzione intera di grado k (k = 1, 2, &c.) possiede k fattori semplici e che se una funzione intera ha dei fattori semplici immaginari allora questi sono in numero pari, egli avrebbe infatti potuto derivare il proprio teorema come un ovvio corollario delle proprie assunzioni. La dimostrazione non sembra così avere altro scopo che quello di fornire un'interpretazione di un risultato noto in un nuovo contesto. Dato il teorema è d'altra parte facile derivare che ogni funzione intera di grado dispari ha un numero dispari di fattori semplici reali, mentre ogni funzione intera di grado pari o non ne ha nessuno o ne ha un numero pari.[61] Assumendo quindi che una funzione intera di grado k ha k fattori semplici, dal teorema segue che se essa ha dei fattori immaginari, questi sono in numero pari.[62] La dimostrazione del teorema fornisce quindi una base per dimostrare alcuni fra i risultati che erano stati assunti e indica quindi implicitamente la possibilità di una differente organizzazione interna della teoria.

Dal lemma segue inoltre che una funzione intera di grado pari ${}_{2n}F(z)$ in cui il coefficiente di z^0 sia negativa ha almeno due fattori semplici reali. In effetti avendo tale funzione la forma generica

$$(6) \qquad {}_{2n}F(z) = z^{2n} + Az^{2n-1} + Bz^{2n-2} + \ldots + Nz - M \qquad [M > 0]$$

ponendo in essa $z = \pm\infty$ e $z = 0$ si avrà rispettivamente: ${}_{2n}F(\infty) = \infty$, ${}_{2n}F(-\infty) = +\infty$ e ${}_{2n}F(0) = -M$ e essendo $C = 0$ compreso fra $+\infty$ e $-M$ segue che l'equazione ${}_{2n}F(z) = 0$ ha una radice reale compresa fra 0 e $+\infty$ e un'altra compresa fra $-\infty$ e 0.

Tali risultati possono d'altra parte venire facilmente estensi al caso di funzioni intere omogenee a due variabili.[63] In effetti se ${}_nF(y, z)$ é una tale funzione di dimensione n, la posizione $y = uz$ la trasforma[64] nel prodotto

[61] Se una funzione intera di grado dispari ha infatti due fattori semplici reali, il quoziente fra essa e questi fattori sarà una nuova funzione di grado dispari, la quale avrà almeno un fattore semplice reale che sarà a sua volta un fattore della funzione originaria. Analogamente se una funzione intera di grado pari ha un fattore semplice reale, allora il quoziente fra essa e questo fattore è una funzione intera di grado dispari che avrà quindi almeno un fattore semplice reale, il quale sarà anche un fattore della funzione data.

[62] Euler non enuncia esplicitamente questa conseguenza del suo risultato.

[63] Cfr. *ivi*, t. 1, pp. 65-7. Come sarà facile capire dalle considerazioni che seguono tale generalizzazione non è invece possibile nel caso di funzioni a tre o più variabili.

[64] Si tratta qui ovviamente di una trasformazione del secondo tipo.

$z^n[_{n}\text{-}\Phi(u)]$, in cui $_{n}\text{-}\Phi(u)$ è una funzione intera della sola variabile u di grado uguale o minore a n. Risolvendo tale funzione in fattori semplici si avrà allora:

$$(7)\quad \begin{aligned} {}_nF(y,z) &= z^n\,[p_1 + q_1u][p_2 + q_2u]\ \dots\ [p_{n-v} + q_{n-v}u] \\ &= [p_1z + q_1y][p_2z + q_2y]\ \dots\ [p_{n-v}z + q_{n-v}y] \end{aligned} \qquad [0 \le v \le n-1,\ v \in \mathbf{N}]$$

ciò che giustifica l'asserita estendibilità.

Passando ora alle funzioni frazionarie, sia ${}_{n/m}F(z) = \dfrac{{}_nF(z)}{{}_mF(z)}$ una tale funzione e siano ${}_nF(z)$ e ${}_mF(z)$ rispettivamente due funzioni intere di grado n e m. Si tratta di risolvere questa funzione in una somma di funzioni a loro volta frazionarie i cui denominatori siano dei fattori di ${}_mF(z)$. Trovati questi fattori occorre quindi determinare i numeratori corrispondenti. E' innanzitutto chiaro che se $0<m\le n$, dividendo fra di loro le due funzioni intere ${}_nF(z)$ e ${}_mF(z)$ (ordinate secondo le potenze decrescenti di z) secondo il metodo di Mercator[65] e arrestandosi all'ultimo termine del quoziente con esponente non negativo di z, si ottiene un'identità della forma:[66]

$$(8)\quad {}_{n/m}F(z) = {}_{n-m}F(z) + {}_{m-v/m}F(z) \qquad [1 \le v \le m,\ v \in \mathbf{N}]$$

Data una funzione frazionaria qualsiasi ${}_{\alpha/\beta}F(z)$ $(\alpha, \beta \in \mathbf{N})$, essa sarà detta *genuina* se $\alpha < \beta$, mentre nel caso contrario sarà detta *spuria*. La (8) ci dice allora che ogni funzione frazionaria spuria è risolvibile nella somma di una funzione intera e di una funzione frazionaria *genuina*. Il problema si ridurrà allora a quello della risoluzione in frazioni opportune di una qualsiasi funzione frazionaria *genuina*. Assumendo allora che $\alpha < \beta$ si ponga in generale l'identità:

$$(9)\quad {}_{\alpha/\beta}F(z) = \frac{{}_\alpha F(z)}{{}_\beta F(z)} = \sum_{k=1}^{\lambda} \frac{\varphi_k(z)}{\psi_k(z)} \qquad [\lambda \le \beta,\ \lambda \in \mathbf{N}]$$

in cui le $\psi_k(z)$ $(k = 1, 2, \dots, \lambda)$ sono dei fattori di un grado qualunque, ma differenti e primi fra loro, di ${}_\beta F(z)$ e le $\varphi_k(z)$ sono delle funzioni intere che devono essere determinate, il cui grado è posto minore di un'unità rispetto a quello delle corrispondenti $\psi_k(z)$. Per giungere a questa determinazione, una volta che siano state individuate le $\psi_k(z)$, basta scrivere le $\varphi_k(z)$ in forma ge-

---

[65] Cfr. il precedente paragrafo II.2.κ. e in particolare la nota (83).

[66] E' evidente che se ${}_nF(z)$ e ${}_mF(z)$ sono polinomi completi di grado n e m (ovvero nessuno dei loro coefficienti è nullo), allora v sarà certamente uguale a 1.

nerica e applicare il metodo generale dei coefficienti indeterminati.[67] Se le $\psi_k(z)$ sono dei fattori semplici di ${}_\beta F(z)$, un tale procedimento ci permette di risolvere tale funzione in una somma di frazioni di forma $\dfrac{A}{p+qz}$, in cui A è un fattore semplice di ${}_\beta F(z)$. E' possibile tuttavia determinare immediatamente la costante A_μ corrispondente al fattore $p_\mu+q_\mu z$ $(1\leq\mu\leq\beta,\ \mu\in\mathbb{N})$ osservando che:

$$(10)\qquad \frac{{}_\alpha F(z)}{{}_\beta F(z)}=\frac{A_\mu}{p_\mu+q_\mu z}+\frac{{}_{\beta\text{-}2}F(z)}{{}_{\beta\text{-}1}F(z)}\qquad [(p_\mu+q_\mu z)({}_{\beta\text{-}1}F(z))={}_\beta F(z)]$$

ovvero:

$$(11)\qquad {}_{\beta\text{-}2}F(z)=\frac{{}_\alpha F(z)-(A_\mu)({}_{\beta\text{-}1}F(z))}{p_\mu+q_\mu z}$$

Essendo ${}_{\beta\text{-}2}F(z)$ una funzione intera, dalla (11) segue che $p_\mu+q_\mu z$ è un fattore di ${}_\alpha F(z)$ - A_μ $[{}_{\beta\text{-}1}F(z)]$ e è quindi ovvio trarre:

$$(12)\qquad {}_\alpha F(p_\mu/q_\mu)-A_\mu\,[{}_{\beta\text{-}1}F(p_\mu/q_\mu)]=0$$

ovvero:

$$A_\mu=\frac{{}_\alpha F(p_\mu/q_\mu)}{{}_{\beta\text{-}1}F(p_\mu/q_\mu)}$$

La condizione che richiede che i fattori $\psi_k(z)$ di ${}_\beta F(z)$ siano differenti e primi fra loro è ovviamente necessaria per rendere possibile l'applicazione del metodo dei coefficienti indeterminati, ovvero per rendere determinato il sistema algebrico risultante da tale applicazione. Se ${}_\beta F(z)$ contiene così s fattori uguali (s = 2, 3,..., β) i risultati precedenti non sono validi. Sia allora $(p_\mu+q_\mu z)^s$ $(1\leq\mu\leq\beta\text{-}1;\ 2\leq s\leq\beta,\ s\in\mathbb{N})$ un fattore di ordine s di ${}_\beta F(z)$ e si ponga:

$$(13)\qquad {}_{\alpha/\beta}F(z)=\frac{{}_\alpha F(z)}{{}_\beta F(z)}=\frac{{}_{s\text{-}1}F(z)}{(p_\mu+q_\mu z)^s}+\sum_{k=1}^{\lambda}\frac{\varphi_k(z)}{\psi_k(z)}\qquad [\lambda\leq\beta\text{-}s]$$

Se le funzioni intere $\psi_k(z)$ sono fattori differenti e primi fra loro di ${}_\beta F(z)$ il metodo precedente permette di determinare tanto ${}_{s\text{-}1}F(z)$ che le $\varphi_k(z)$. Per giungere a risolvere ogni funzione frazionaria genuina ${}_{\alpha/\beta}F(z)$ in una somma

[67] E' evidente che in un tale contesto tale metodo si riduce a una sequenza finita di banali inferenze algebriche e non richiede quindi alcuna presupposizione infinitaria.

di frazioni parziali a numeratore costante è così sufficiente trovare un metodo di risoluzione in frazioni di questo tipo per la funzione frazionaria generica $\frac{{}_rF(z)}{(p - qz)^s}$ ($r<s$, $r \in \mathbb{N}$), in cui ${}_rF(z)$ è una funzione intera generica di grado r. Non è difficile rendersi conto, manipolando opportunamente la forma generica di ${}_rF(z)$, che il metodo dei coefficienti indeterminati fornisce un sistema algebrico non a sua volta indeterminato, le cui radici siano i coefficienti cercati, solo ponendo l'identità generica:

$$\text{(14)} \qquad \frac{{}_rF(z)}{(p - qz)^s} = \frac{A_1}{(p + qz)} + \frac{A_2}{(p + qz)^2} + \ldots + \frac{A_{s-1}}{(p + qz)^{s-1}} + \frac{A_s}{(p + qz)^s}$$

Le costanti A_k ($k = 1, 2, \ldots, s$) possono allora venire facilmente determinate tramite formule analoghe alla (8), che Euler costruisce per i valori 2, 3 e 4 dell'indice, lasciando al lettore la facile generalizzazione.

III. 3. *b*. *γ*. *Trasformazione per sostituzione delle funzioni algebriche*

Nel terzo capitolo del primo tomo dell'*Introductio* Euler presenta alcuni metodi *standard* i quali permettono, attraverso opportune sostituzioni: *i*) di eliminare le radici di una funzione irrazionale, ovvero di trasformarla in una funzione razionale di una nuova variabile; ii) di esprimere in forma esplicita la radice $y = y(z)$ di un'equazione algebrica $F(y, z) = 0$ non risolubile per mezzo dei metodi conosciuti sotto la forma di una funzione $y = y(x)$ di una nuova variabile x, che sia in una relazione opportuna con z. E' del tutto chiaro che in entrambi i casi è possibile parlare di una trasformazione della stessa funzione, solo a condizione che questa sia intesa come una quantità, in caso contrario si dovrà parlare piuttosto di trasformazione, *salva repræsentatione quantitatis* di una funzione in un altra. A seconda dell'attitudine che si vorrà prendere si dovrà allora leggere il simbolo atomico y, che Euler identifica tanto con la forma di partenza $y = \Phi(z)$ che con la forma d'arrivo $y = \Psi(x)$, o come un simbolo atomico per una funzione o come un simbolo per la quantità rappresentata dalla funzione, interpretando in entrambi i casi le identità in questione come delle equivalenze per posizione.[68]

Relativamente al punto (i) Euler si limita a presentare delle opportune sostituzioni che permettono il passaggio da una funzione irrazionale $y = G(z)$ appartenente a certe classi particolari a una funzione razionale $y = F(x)$ tale che $z = z(x)$ sia a sua volta una funzione razionale. Egli considera in particolare le funzioni irrazionali delle seguenti forme: $y = (a+bz)^{m/n}$, $y = \left[\frac{a+bz}{p+qz}\right]^{m/n}$ e $y = \sqrt{ax^2 + bx + c}$.

[68] Cfr. il precedente paragrafo, II.2.ζ..

Anche il problema prospettato nel punto (ii) è risolto da Euler solo in alcuni casi particolari. Assunta l'equazione di forma particolare

$$ay^{\alpha} + bz^{\beta} + cy^{\gamma}z^{\delta} = 0 \qquad [\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbf{N}] \tag{15}$$

egli pone $y = x^{\mu}z^{\nu}$ (dove μ è un numero arbitrario diverso da zero) e mostra come determinare convenientemente ν in funzione degli esponenti α, β, γ, δ allo scopo di esprimere z e y come delle funzioni irrazionali esplicite di x.[69] Generalizzando tali risultati egli mostra poi che la posizione $y = xz^{\lambda/\mu}$ permette di esprimere in due modi diversi z e y come funzioni irrazionali esplicite di x, anche qualora sia data un'equazione della forma:

$$\begin{aligned}&Az^{\frac{\alpha\mu+\nu}{\lambda}} + By^{m}z^{\frac{\alpha\mu-m\mu+\nu}{\lambda}} + Cy^{n}z^{\frac{\alpha\mu-n\mu+\nu}{\lambda}} + \&c. = \\ &\qquad = ay^{\alpha} + by^{\beta}z^{\frac{\alpha\mu-\beta\mu}{\lambda}} + cy^{\gamma}z^{\frac{\alpha\mu-\gamma\mu}{\lambda}} + \&c.\end{aligned} \tag{16}$$

$$[\alpha, \beta, \gamma, \&c.; m, n, \&c.; \lambda, \mu, \nu \in \mathbf{N}]$$

E' chiaro che ponendo $\lambda = \mu$ la (16) è la forma generica di un'equazione a due variabili z e y in cui la somma degli esponenti di z e y in ogni termine è costantemente uguale a uno fra due differenti valori razionali qualsiasi $\frac{\alpha\lambda+\nu}{\lambda}$ e α. Euler mostra inoltre, attraverso una serie di esempi, che se $\lambda = \mu = 1$ (ovvero se gli esponenti della (16) sono costantemente dei numeri interi positivi e $y = xz$), allora le funzioni che esprimono z e y relativamente a x sono razionali.

III. 3. *b*. δ. *Funzioni e serie intere*

> Cum Functiones fractæ atque irrationales ipsius z non in forma integra $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 +$ &c. continentur, ita ut terminorum numerus sit finitus, quæri solent hujusmodi expressiones in infinitum excurrentes, quæ valorem cujusvis Functionis sive fractæ sive irrationalis exhibeant. Quin etiam natura functionum transcendentium melius intelligi censetur, si per ejusmodi formam, etsi infinitam, exprimantur. Cum enim natura Functionis integræ optime perspiciatur, si secundum diversas potestates ipsius z explicetur, atque adeo ad formam $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 +$ &c. reducatur, ita eadem forma aptissima videtur ad reliquarum Functionum omnium indolem menti repræsentandam, etiamsi terminorum numerus sit revera infinitus.[70]

[69] Euler mostra in particolare come questa condizione sia rispettata dalle posizioni: $\nu = \frac{\beta}{\alpha}$, $\nu = \frac{\beta-\delta}{\gamma}$ e $\nu = \frac{\delta}{\alpha-\gamma}$.

[70] Cfr. *ivi*, t. 1, p. 46.

E' così che Euler apre il quarto capitolo del primo tomo dell'*Introductio*. L'idea che ogni funzione, o meglio ogni quantità analiticamente rappresentata, possa venire convertita in una serie intera e studiata sotto una tale forma è, come è noto, uno dei nuclei essenziali del programma matematico di Newton. Dopo Newton la *pratica* dello sviluppo in serie si era largamente diffusa, assumendo un ruolo centrale tanto nell'analisi ordinaria[71] che in quella superiore.[72] A dispetto di una tale centralità e della varietà delle procedure di sviluppo che ritroviamo nei testi matematici dell'epoca, la sola dimostrazione che fosse allora disponibile e che potesse venir letta come una prova della generale convertibilità di *ogni* funzione in una serie (intera) era la dimostrazione di Taylor-Euler per il cosiddetto "teorema" di Taylor.[73] La natura di tale dimostrazione e dello stesso teorema cui essa dava luogo era tuttavia tale da rendere una sua collocazione fra i fondamenti dell'analisi del tutto contraddittoria con il progetto euleriano di edificazione di un'analisi algebrica indipendente dal *calcolo*. Per poter fornire la base effettiva dell'intero edificio dell'analisi, come Euler sembra prospettare nel brano citato, l'assunzione della sviluppabilità di *ogni* funzione in una serie intera doveva quindi trovare, almeno formalmente, un'altra giustificazione. Pensata ogni funzione come una composizione finita di un numero non solo finito ma ristretto di funzione elementari, una tale assunzione poteva essere basata sull'esibizione concreta degli sviluppi di tali funzioni elementari e delle procedure atte a una loro successiva composizione, in modo da trasporre la garanzia di generale sviluppabilità in una garanzia di effettiva costruibilità dello sviluppo assegnabile a *ogni* funzione. Proprio questo sembra il programma di Euler:

> Perspicuum autem est nullam Functionem non integram ipsius z per numerum hujusmodi terminorum $A + Bz + Cz^2 + \&c.$ finitum exponi posse; eo ipso enim Functio foret integra; num vero per hujusmodi terminorum seriem infinitam exhiberi possit, si quis dubitet, hoc dubium per ipsam evolutionem cujsque Functionis tolletur.[74]

Un simile argomento costruttivo sembra tuttavia risultare cogente, e significativamente differente da quello basato sul richiamo a un risultato generale

[71] Cfr. per qualche esempio il precedente capitolo III.1..

[72] Cfr. il precedente cap. III.2..

[73] Cfr. la precedente sezione III.2.*b*.. La dimostrazione classica di Newton-Stirling-Maclaurin [cfr. anche le sezioni III.2.*a* e III.2.*c*.] utilizzava infatti come ipotesi di partenza proprio da sviluppabilità di ogni funzione in una generica serie intera.

[74] Cfr. *ivi*, t. 1, pp. 46-7. Euler continua [cfr. *ivi*]:

> Quo autem hæc explicatio latius pateat, præter potestates ipsius z exponentes integros affirmativos habentes, admitti debent potestates quæcunque. Sic dubium erit nullum quin omnis Functio ipsius z in hujusmodi expressionem infinitam transmutari possit: $Az^\alpha + Bz^\beta + Cz^\gamma + Dz^\delta + \&c.$ denotantibus exponentibus $\alpha, \beta, \gamma, \delta$, &c. numeros quoscunque.

Tuttavia egli non utilizza mai nel suo trattato l'ipotesi di una sviluppabilità in una serie a esponenti qualsiasi. Al contrario proprio questo sarà il punto di partenza di Lagrange per dimostrare, indipendentemente dall'impiego del *calcolo* e in termini generali, la sviluppabilità in serie intera di ogni funzione [cfr. il prossimo capitolo III.6., *sez. b.*].

come il "teorema" di Taylor, solo a due condizioni: che la determinazione dello sviluppo delle funzioni elementari e degli esiti della loro combinazione non dipenda a sua volta dalla presupposizione dell'ipotesi di sviluppabilità di *ogni* funzione; che la costruzione realizzata in ogni caso particolare sia del tutto indipendente dall'impiego del *calcolo*. Se il rispetto della seconda condizione (tanto nelle ipotesi esplicite che in quelle nascoste) appare indubitabile nei procedimenti prospettati da Euler, la questione è molto più controversa per ciò che riguarda la prima condizione. A grandi linee l'argomento complessivo che questi utilizza sembra potersi formulare come segue. Ogni funzione algebrica può essere intesa come una composizione algebrica finita di funzioni intere (il cui sviluppo in serie intera, a termini nulli dopo un dato ordine, corrisponde alla funzione stessa). Ogni operazione algebrica fra polinomi può ridursi all'applicazione a essi dello sviluppo binomiale a coefficienti razionali e alla somma o alla moltiplicazione termine a termine dei polinomi (eventualmente infiniti) che ne scaturiscono o alla eventuale riapplicazione ad essi dello stesso sviluppo binomiale.[75] Data ogni funzione algebrica, essa è quindi sempre riducibile a una serie intera per mezzo di un tale procedimento (il quale dipende in modo essenziale dalla generalizzazione a esponenti razionali e a polinomi infiniti della regola del binomio). Quest'ultimo può tuttavia essere in molte circostanze semplificato attraverso un'applicazione di quello che nel precedente paragrafo II.2.κ. ho indicato come metodo di sviluppo per determinazione dei coefficienti e che proprio nell'*Introductio* sembra trovare una organica e continuata applicazione. Se una tale procedura richiede la presupposizione della forma dello sviluppo (e non evita che in casi particolari il ricorso alla regole generalizzata del binomio[76]), essa può considerare questa presupposizione come un'ipotesi confermata *a posteriori* dal carattere determinato del sistema infinito che fornisce la determinazione dei coefficienti e ha il considerevole vantaggio di rendere, per certe classi di funzioni, assai semplice l'individuazione della regola ricorsiva di formazione di tali coefficienti, in modo che questi possano in ogni caso particolare essere determinati senza ricorrere a una ripetizione della procedura. Per quanto riguarda le funzioni trascendenti elementari (logaritmo, esponenziale, seno e coseno[77]), opportune considerazioni relative alla loro natura particolare permettono una loro riduzione in forme algebriche (a argomenti infiniti o immaginari) e una successiva applicazione della regola del binomio alla determinazione del loro sviluppo. L'algebra di queste funzioni, estesa al caso di polinomi infiniti, permetterà poi di passare dagli sviluppi elementari allo sviluppo di ogni funzione trascendente composta.

Per quanto Euler non espliciti tale possibilità - pensando evidentemen-

---

[75] Naturalmente questo non è il caso di funzioni della variabile z che presentino come fattore un termine come z^ζ con ζ un numero non naturale qualsiasi. In tal caso tuttavia è sufficiente introdurre una traslazione sviluppando la funzione data in una serie intera di $x = z-a$ [cfr. il precedente paragrafo II.2.κ. e l'appendice 2.II-A.].

[76] Uno di questi casi è proprio quello delle funzioni frazionarie che presenterò nel prossimo paragrafo III.3.ε..

[77] Stranamente (ma forse non troppo) Euler considera tanto il seno che il coseno come funzioni elementari (riconducibili peraltro a funzioni esponenziali a argomenti immaginari) senza soffermarsi mai sulle funzioni circolari inverse.

te ogni funzione presentata in forma implicita come una funzione esplicita ancora incognita - è del tutto evidente che il metodo di sviluppo per determinazione dei coefficienti è generalmente applicabile anche alla conversione in serie intera delle radici di ogni equazione algebrica assegnata. Ogni funzione euleriana sembra così associabile (previa un'eventuale traslazione) a uno sviluppo in serie intera effettivamente costruibile per mezzo di procedimenti *standard*.

Resta allora da capire che tipo di relazione si instauri fra una funzione (qualsiasi) e il proprio sviluppo. Euler non introduce mai nel suo trattato alcuna limitazione alla validità dei propri risultati e limita le considerazioni relative alla convergenza a serie numeriche particolari o comunque a serie utilizzate allo scopo di fornire approssimazioni numeriche (di cui egli cerca assai spesso di accelerare la convergenza). Benché, come i tutti i matematici del secolo, egli utilizzi assai liberamente il segno di eguaglianza, in contesti che sembrano assegnare a questo significati assai differenziati fra loro, sembra tuttavia vigere nell'*Introductio* una sorta di regola di prudenza, che conduce a impiegare con una certa parsimonia scritture come la seguente:[78]

(17) $F(z) = A + Bz + Cz^2 + \&c.$

in cui la serie al secondo membro indica lo sviluppo della funzione F(z). Molto più spesso Euler esprime la relazione fra una funzione e il suo sviluppo o in termini espliciti - affermando che la serie in questione "sorge" da tale funzione o che quest'ultima "dà" la serie, o utilizzando altre formulazioni analoghe - o passando per l'intermediario di un simbolo atomico, scrivendo successivamente $X = F(z)$ e $X = A + Bz + Cz^2 + \&c.$. L'associazione di un simbolo atomico o funzionale a una serie per mezzo di un'identità non sembra d'altra parte corrispondere in nessun modo all'asserzione della convergenza di questa, ovvero all'affermazione che essa rappresenta una quantità finita. Al contrario Euler si permette deduzioni come la seguente. Essendo

(18) $\log(1-x)^{-1} = -\log(1-x) = x + \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} + \&c.$

segue, ponendo $x = 1$,

(19) $\log(\infty) = \infty = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \&c.$

[78]Questo non è tuttavia il caso di altri testi e in particolare della memoria del 1754-55 [cfr. il precedente paragrafo II.2-A.β.], la quale giustifica al contrario in termini generali l'impiego dell'eguaglianza per indicare la relazione fra una funzione e il proprio sviluppo. Nella mia ricostruzione userò al contrario assai spesso la forma (13) che ricorre peraltro in numerose occasioni anche nell'*Introductio*.

ovvero: la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ diverge.

Per quanto assolutamente inaccettabile per un matematico moderno una tale deduzione è a mio parere significativa e per molti versi sintomatica. Alla mancanza di esplicite limitazione di ordine generale dei risultati, si affianca infatti, nell'*Introductio*, un impiego degli sviluppi infiniti raramente inopportuno, il quale sembra corrispondere, anche in casi assai delicati come il precedente, a una lucida intuizione capace di discriminare fra contesti in cui un tale impiego conduce a risultati corretti e contesti in cui esso condurrebbe a conclusioni errate. Se questa capacità d'intuizione è senza dubbio la caratteristica peculiare di un grande matematico, essa non sembra totalmente estranea a una riflessione di ordine generale sul problema della convergenza, la quale semplicemente non si esprime secondo le forme che sono oggi abituali. Nel precedente paragrafo II.2.κ. ho cercato di ricostruire i termini generali di questa riflessione, fornendo una interpretazione per la relazione che lega, dal punto di vista euleriano, una funzione al proprio sviluppo. Non ritornerò sull'argomento che per indicare la mia convinzione che quelle considerazioni forniscano una strumentazione adeguata alla comprensione delle procedure dell'*Introductio* e siano giustificate, fra l'altro, dalle analisi testuali che costituiscono il presente capitolo.

III. 3. *b. ε. Sviluppo in serie intera delle funzioni frazionarie*

Il quarto capitolo del primo tomo dell'*Introductio* può essere distinto in due parti, la prima dedicata agli sviluppi in serie intera delle funzioni frazionarie, la seconda agli sviluppi in serie intera delle funzioni irrazionali. Il problema affrontato nella prima parte può essere a sua volta separato in due sottoproblemi, il primo riferito alle funzioni frazionarie il cui denominatore presenta un coefficiente finito per il termine di ordine zero, il secondo a quelle in cui tale coefficiente è invece nullo. In entrambi i casi la trattazione può naturalmente essere limitata a funzioni frazionarie genuine, essendo sempre possibile risolvere una funzione frazionaria spuria nella somma di una funzione intera e di una funzione frazionaria genuina. Fra i differenti metodi con cui la ricerca dello sviluppo in serie intera di una tale funzione può essere condotta, Euler sceglie d'altra parte il metodo di sviluppo per determinazione dei coefficienti, il quale permette di evidenziare assai semplicemente il carattere ricorrente della serie sviluppo.

Data la funzione frazionaria genuina di forma generica:

$$(20) \qquad {}_{n-1/n}F(z) = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_{n-1} z^{n-1}}{\alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \alpha_n z^n} \qquad [\alpha_n \neq 0]$$

in cui il coefficiente α_0 sia assunto come diverso da zero, la si ponga uguale a una serie intera generica $K_0 + K_1 z + K_2 z^2 +$ &c.. Moltiplicando per il denominatore si avrà allora:

$$
\begin{aligned}
(21) \qquad & a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_{n-1} z^{n-1} = \\
& = \left[\alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots + \alpha_n z^n\right]\left[K_0 + K_1 z + K_2 z^2 + \&c.\right]
\end{aligned}
$$

e quindi, equiparando i coefficienti delle successive potenze di z:

$$
(22) \qquad
\begin{aligned}
& a_0 = \alpha_0 K_0 \\
& a_1 = \alpha_1 K_0 + \alpha_0 K_1 \\
& a_2 = \alpha_2 K_0 + \alpha_1 K_1 + \alpha_2 K_2 \\
& \ldots \\
& a_{n-1} = \alpha_{n-1} K_0 + \alpha_{n-2} K_1 + \alpha_{n-3} K_2 + \ldots + \alpha_0 K_{n-1} \\
& 0 = \alpha_n K_0 + \alpha_{n-1} K_1 + \alpha_{n-2} K_2 + \ldots + \alpha_1 K_{n-1} + \alpha_0 K_n \\
& 0 = \alpha_n K_1 + \alpha_{n-1} K_2 + \alpha_{n-2} K_3 + \ldots + \alpha_1 K_n + \alpha_0 K_{n+1} \\
& 0 = \alpha_n K_2 + \alpha_{n-1} K_3 + \alpha_{n-2} K_4 + \ldots + \alpha_1 K_{n+1} + \alpha_0 K_{n+2} \\
& \&c.
\end{aligned}
$$

E' molto facile capire che se $\mu > n-1$ il coefficiente K_μ della serie sviluppo è determinato dall'equazione:

$$
(23) \qquad 0 = \alpha_n K_{\mu-n} + \alpha_{n-1} K_{\mu-n+1} + \alpha_{n-2} K_{\mu-n+2} + \ldots + \alpha_0 K_\mu
$$

in modo che se si determinano i coefficienti incogniti $K_0, K_1, \ldots, K_{n-1}$ in funzione dei coefficienti noti $a_0, a_1, \ldots a_{n-1}$ e $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$, secondo le prime n equazioni della (22), i coefficienti successivi verranno determinati in funzione dei coefficienti precedenti e dei coefficienti noti $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ secondo la semplice legge ricorsiva:

$$
(24) \qquad K_\mu = \frac{1}{\alpha_0}\left[- \alpha_n K_{\mu-n} - \alpha_{n-1} K_{\mu-n+1} - \ldots - \alpha_1 K_{\mu-1}\right]
$$

L'analisi delle equazioni che costituiscono il sistema (22) rende d'altra parte evidente come tale formula possa essere semplicemente adattata alla determinazione degli stessi coefficienti $K_0, K_1, \ldots, K_{n-1}$, ponendo in essa $K_r = 0$ $(r<0)$ e aggiungendo rispettivamente alla somma fra parentesi quadre i termini $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$. I coefficienti della serie sviluppo saranno allora determinati genericamente dalla legge ricorsiva (valida per ogni ν ($\nu \in \mathbf{N}$)):

$$(25)\qquad K_\nu = \frac{1}{\alpha_0} \left| a_\nu - \alpha_n K_{\nu-n} - \alpha_{n-1} K_{\nu-n+1} - \ldots - \alpha_2 K_{\nu-2} - \alpha_1 K_{\nu-1} \right|$$

$$[a_s = 0 \text{ se } s > n-1;\ K_r = 0 \text{ se } r < 0;\ s, r \in \mathbf{N}]$$

Seguendo de Moivre,[79] Euler chiama *ricorrente* una serie (intera) i cui coefficienti successivi rispondono a una legge come la (25) e *scala di relazione*[80] (*scala relationis*) la successione $\{-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_n\}$ che fornisce le costanti per cui vanno moltiplicati i coefficienti precedenti, in funzione dei quali è determinato il coefficiente generico di questa serie, indicandone implicitamente il numero. La (25) può d'altra parte essere semplificata - senza alcuna perdita di generalità - ponendo $\alpha_0 = 1$, in modo che la scala di relazione, la quale non dipende che dal denominatore della funzione assegnata, possa essa stessa fornire ogni coefficiente K_μ ($\mu = n, n+1, n+2$, &c.) della serie, in funzione degli n coefficienti che lo precedono. Per quanto Euler non lo espliciti, è chiaro che egli considera la (25)[81] come perfettamente adeguata a esprimere il coefficiente generico della serie risultante dalla divisione fra due serie intere. In questo caso, essendo n infinito, ogni coefficiente è dato in funzione di tutti i coefficienti che lo precedono, la scala di relazione è essa stessa infinita e il termine a_ν non è mai nullo.

La serie sviluppo $K_0 + K_1 z + K_2 z^2$ + &c. assume una forma particolare qualora il denominatore della funzione frazionaria assegnata sia una potenza (intera) di una funzione intera. Per capirlo è sufficiente considerare il caso di una funzione frazionaria il cui denominatore è dato dalla potenza n ($n = 2, 3, \ldots$) del binomio generico $1 + \alpha z$. Sviluppando tale denominatore secondo la formula binomiale (che per n naturale non esprime che un'identità algebrica finitaria[82]) e ripetendo la procedura precedente si ottiene senza alcuna diffi-

---

[79]Cfr. il prossimo paragrafo III.3.*d*. η..

[80]Euler introduce per la verità tale termine, solo nel capitolo XIII del primo tomo del suo trattato [cfr. Euler (1748), t. 1, p. 190], il quale è specificatamente dedicato alla teoria delle serie ricorrenti [cfr. il prossimo paragrafo III.3.*d*. η.].

[81]Come avviene assai spesso nell'*Introductio* - come nella maggioranza dei testi matematici dell'epoca - Euler non fornisce in verità la (25) sotto la sua forma generale riferita a un coefficiente generico. La scarsa diffusione di una notazione che facesse ricorso all'uso di indici, la quale è totalmente assente nell'*Introductio*, e il ricorso per gli stessi scopi alle prime lettere degli alfabeti latino e greco convenientemente ordinate, rende d'altra parte assai complessa la scrittura di formule generali anche matematicamente assai semplici, conducendo a preferire una loro esemplificazione riferita ai termini di posto più basso. Mi pare tuttavia che la scrittura della (25), o altre analoghe generalizzazioni delle formule di Euler, non siano che l'esplicitazione di risultati perfettamente presenti in forma implicita (o forse semplicemente diversa) nel testo originale, non comportando alcun travisamento di questo. Il concetto di termine (di posto) generico è infatti assolutamente chiaro a Euler, il quale non fa che pagare il prezzo nella sua esposizione (ma non nella sua teoria) di una notazione non abbastanza agile.

[82]E' sintomatico che Euler giustifichi il suo risultato per una via leggermente diversa.

coltà la formula

$$(26)\qquad K_\nu = \left[a_\nu - \binom{n}{1}\alpha K_{\nu-1} - \binom{n}{2}\alpha^2 K_{\nu-2} - \dots - \binom{n}{n}\alpha^n K_{\nu-n}\right]$$

$$[a_s = 0 \text{ se } s > n\text{-}1;\ K_r = 0 \text{ se } r < 0]$$

(in cui K_ν è il coefficiente di z^ν nella serie sviluppo e a_ν il coefficiente di z^ν nel numeratore della funzione assegnata che è posto di grado n-1), la quale specifica opportunamente la (25), adattandola al caso in questione. E' chiaro che se poniamo contemporaneamente $\alpha = -1$ e $z = 1$ il denominatore della funzione data si annulla; tuttavia cercando gli sviluppi per le potenze successive $n = 2$, $n = 3$, &c. e operando in essi, e non nella frazione data, le sostituzioni $\alpha = 1$ e $z = 1$, si ottengono formalmente le serie:

$$(27)\qquad \begin{aligned} &\text{i)}\ \sum_{\nu=0}^{\infty} K_\nu = a_0 + (a_1 + 2a_0) + \dots + [\nu\, a_1 + (\nu+1)a_0] + \&c. \\ &\text{ii)}\ \sum_{\nu=0}^{\infty} K_n = a_0 + (a_1 + 3a_0) + \dots + \left[\frac{(\nu-1)\nu}{2!} a_2 + \frac{\nu(\nu+1)}{2!} a_1 + \frac{(\nu+1)(\nu+2)}{2!} a_0\right] + \&c. \\ &\&c. \end{aligned}$$

La prima di queste serie corrisponde alla forma generale di una *serie aritmetica* (del primo ordine), la quale può essere definita come una serie numerica[83] ricorrente $\sum_{\nu=0}^{\infty} K_\nu$ tale che[84] $K_\nu = 2K_{\nu-1} - K_{\nu-2}$ ($\nu = 2, 3, \dots$; con $K_0 = a_0$ e $K_1 = 2a_0 + a_1$) e quindi tale che le differenze prime $K_\mu - K_{\mu-1}$ ($\mu = 1, 2, \dots$) sono costantemente uguali fra loro. La seconda serie corrisponde invece alla forma generale di una serie aritmetica del secondo ordine, la quale può essere a sua volta definita come una serie numerica ricorrente $\sum_{\nu=0}^{\infty} K_\nu$ tale che $K_\nu = 3K_{\nu-1} - 3K_{\nu-2} + K_{\nu-3}$ ($\nu = 3, 4, \dots$; con $K_0 = a_0$, $K_1 = 3a_0 + a_1$ e $K_2 = 6a_0 + 3a_1 + a_2$) e quindi tale che le differenze seconde $K_\mu - 2K_{\mu-1} + K_{\mu-2}$ ($\mu = 2, 3, \dots$) sono costantemente uguali fra loro. E' facile rendersi conto di come una tale successione di serie può allora essere continuata. Ecco il commento di Euler:

---

utilizzando lo sviluppo binomiale per un esponente intero negativo. Per quanto sia assolutamente chiaro che questo non sia per nulla necessario, ciò indica il carattere di risultato *già* dato che egli assegna al "teorema" del binomio.

[83]Si noti che qui la serie è tale che la legge di ricorrenza si applica direttamente ai suoi termini, piuttosto che ai loro coefficienti. Per quanto Euler non espliciti questa differenza (che nel caso di una serie intera appare peraltro irrilevante [cfr. la definizione di de Moivre citata nella prossima nota (175)]), è chiaro che essa individua in generale due tipi distinti di serie ricorrenti.

[84]Cfr. la (26).

> Hoc modo ostenduntur omnes progressiones algebraicas[85] cujuscunque ordinis, quæ tandem ad differentias constantes deducunt, esse Series recurrentes, quarum lex definiatur ex denominatore $(1-z)^n$, existente n numero majore quam is, qui ordinem progressionis indicat.[86]

La teoria degli sviluppi delle funzioni frazionarie in una serie intera corrisponde quindi alla teoria generale delle serie ricorrenti, di cui la teoria delle serie a differenze costanti non è che un'applicazione particolare. Considerando i risultati esposti nel precedente paragrafo β relativamente alla trasformazione per risoluzione delle funzioni frazionarie, non è allora difficile individuare i legami fra questa teoria e la stessa teoria delle equazioni algebriche. La trama di una matematica unitaria comincia così a tessersi fin dai primi capitoli dell'*Introductio*, i quali, più che per i risultati che raggiungono, appaiono straordinariamente nuovi per la rete di connessioni che essi esibiscono.

Consideriamo ora il caso di funzioni frazionarie (genuine) $y = {}_{n-1/n}F(z)$ il cui denominatore abbia almeno un fattore uguale a z. E' chiaro che ponendo nella (20) $\alpha_0 = 0$, la (24) e la (25) perdono di senso, ovvero, esprimendo lo stesso impedimento in altri termini, le prime n equazioni del sistema (22) si trasformano nelle identità impossibili $a_0 = a_1 = ... = a_{n-1} = 0$, mostrando così (almeno dal punto di vista di Euler) che non esiste alcuna serie intera della forma $K_0 + K_1z + K_2z^2 + \&c.$, la quale sviluppi la funzione assegnata. In termini moderni ciò significa evidentemente che tale funzione non è sviluppabile in una serie intera centrata sullo zero, non essendo in tal punto definita alcuna delle sue derivate. Una tale traduzione è tuttavia direttamente trasparente solo se si interpreta uno sviluppo in serie intera di una funzione come uno sviluppo di Taylor, ciò che Euler vuole appunto evitare. Si tratta così di trovare un procedura *algebrica* capace di esprimere non solo l'impedimento in questione, ma anche di mostrarne il carattere locale. Per questo basta porre ancora nella (20) $z = \xi+x$, e identificare tale funzione con uno sviluppo indeterminato della forma $H_0 + H_1\xi + H_2\xi^2 + \&c.$. Ripetendo il procedimento precedente si avrà allora:

$$(28)\quad \begin{aligned} &a_0 + a_1(\xi+x) + ... + a_{n-1}(\xi+x)^{n-1} = \\ &\qquad = \left[\alpha_1(\xi+x) + ... + \alpha_n(\xi+x)^n\right]\left[H_0 + H_1\xi + H_2\xi^2 + \&c.\right] \end{aligned}$$

Confrontando fra loro i coefficienti delle potenze successive di ξ e ponendo per semplicità:

[85] In linguaggio moderno si tratta piuttosto di "serie aritmetiche".

[86] Cfr. *ivi*, t.I, p. 52.

$$A_0 = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_{n-1}x^{n-1}$$

$$A_1 = a_1 + 2a_2x + 3a_3x^2 + ... + (n-1)a_{n-1}x^{n-2}$$

$$A_2 = a_2 + 3a_3x + 6a_4x^2 + ... + \frac{(n-1)(n-2)}{2!}a_{n-1}x^{n-3}$$

&c.

(29)

$$B_0 = \alpha_1x + \alpha_2x^2 + \alpha_3x^3 + ... + \alpha_nx^n$$

$$B_1 = \alpha_1 + 2\alpha_2x + 3\alpha_3x^2 + ... + n\alpha_nx^{n-1}$$

$$B_2 = \alpha_2 + 3\alpha_3x + 6\alpha_4x^2 + ... + \frac{n(n-1)}{2!}\alpha_nx^{n-2}$$

&c.

è facile trarre:

$$H_0 = \frac{A_0}{B_0} = {}_{n-1/n}F(x)$$

(30) $$H_1 = \frac{A_1 - B_1H_0}{B_0} \quad [= {}_{n-1/n}F'(x)]$$

$$H_2 = \frac{A_2 - B_2H_0 - B_1H_1}{B_0}\left[= \frac{1}{2}\,{}_{n-1/n}F''(x)\right]$$

&c.

ciò che permette di trarre lo sviluppo della funzione assegnata in serie intera di $\xi = (z-x)$ e mostra quindi la possibilità di trovare un'adeguato sviluppo per mezzo di una semplice traslazione arbitraria. Euler non procede tuttavia in questo modo, ponendo semplicemente:[87]

[87]Euler scrive per la verità:

$$\frac{a + bz + cz^2 + \&c.}{z(1 - \alpha z - \beta z^2 - \&c.)} = \frac{A}{z} + B + Cz + Dz^2 + \&c.$$

Mentre il cambio di segno del denominatore non comporta alcuna difficoltà e non fa che rendere positivi tutti i termini della (32) [cfr. *sotto*], l'ambiguità relativa al grado del numeratore e del denominatore permette a Euler di non precisare che se $a_{n-1} \neq 0$ è necessario ridurre la funzione frazionaria *spuria*, che risulta dividendo per z, nella somma di una funzione intera e di una funzione frazionaria genuina. La stessa ambiguità sembra d'altra parte indicare la possibilità di una generalizzazione del procedimento al caso di polinomi a grado infinito.

$$(31)\qquad \frac{a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-2} z^{n-2}}{\alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots + \alpha_n z^n} = \frac{1}{z}\left[\frac{a_0 + a_1 z + \ldots + a_{n-2} z^{n-2}}{\alpha_1 + \alpha_2 z + \ldots + \alpha_n z^{n-1}}\right] = $$
$$= \frac{W_0}{z} + W_1 + W_2 z + W_3 z^2 + \&c.$$

da cui secondo la (25) segue banalmente:[88]

$$(32)\qquad W_n = \frac{1}{\alpha_1}\left[a_\nu - \alpha_n W_{\nu-n+1} - \alpha_{n-1} W_{\nu-n+2} - \ldots - \alpha_3 W_{\nu-2} - \alpha_2 W_{\nu-1}\right]$$
$$[a_s = 0 \text{ se } s > n\text{-}2;\quad W_r = 0 \text{ se } r > 0]$$

ciò che, se da un lato gli permette di esprimere direttamente la legge di ricorrenza, lo conduce dall'altro a rinunciare al carattere di serie intera dello sviluppo e non mostra quindi la natura locale dell'impedimento incontrato. La possibilità di introdurre sostituzioni è d'altra parte indicata da Euler per mezzo di qualche esempio particolare che egli introduce con l'osservazione seguente:

> Quoniam per substitutionem loco z alia variabilis x in Functionem fractam introduci, hocque pacto Functio fracta quævis in innumerabiles formas diversas transmutari potest: hoc modo eadem Functio fracta infinitis modis per Series recurrentes explicari poterit.[89]

Più che alla possibilità di sviluppare in serie intere le stesse funzioni frazionarie, il cui denominatore abbia un fattore uguale a z^m $(m<n,\ m \in \mathbb{N})$,[90] Euler sembra tuttavia pensare qui alla possibilità di variare gli intervalli e le velocità di convergenza della serie sviluppo. I suoi esempi sono a questo proposito significativi. Data la funzione $y = \dfrac{1+z}{1-z-z^2}$, che secondo (25) si converte nella serie intera $y = 1 + 2z + 3z^2 + 5z^3 + 8z^4 + \&c.$, egli pone infatti prima $z = 1/x$[91] - trasformando la funzione data nella nuova funzione $F(x) = -x\left(\dfrac{1+x}{1+x+x^2}\right)$, la quale fornisce, sempre secondo la (25), lo sviluppo $y = -x -x^3$

---

[88]Lo stesso procedimento può ovviamente essere riapplicato anche nel caso in cui il denominatore abbia un fattore z^m $(m<n,\ m \in \mathbb{N})$, essendo sufficiente per questo cercare i coefficienti di una serie della forma $\dfrac{w_0}{z^m} + \dfrac{w_1}{z^{m-1}} + \ldots + \dfrac{W_{m-1}}{z} + W_m + W_{m+1}z + \&c.$.

[89]Cfr. *ivi*, t. 1, p. 54.

[90]Cfr. la precedente nota (88).

[91]Cfr. il precedente paragrafo II.2-A.α. e in particolare la risposta di Laplace alla obiezione di Viguergne.

$+x^4 - 2x^5 + \&c.$ - e poi $z = \dfrac{1-x}{1+x}$, ottenendo la trasformata $G(x) = \dfrac{-2-2x}{1-4x-x^2}$ che fornisce, ancora secondo la (25), l'ulteriore sviluppo: $y = -2 - 10x - 42x^2 - 178x^3 - 754x^4 - \&c.$.

III. 3. *b*. ζ. *Sviluppo in serie intera delle funzioni irrazionali*

Il metodo di sviluppo per determinazione dei coefficienti richiede la possibilità di disporre di una procedura adeguata a ridurre l'identità postulata $F(z) = A + Bz + Cz^2 + \&c.$ in una identità infinitaria fra due polinomi eventualmente infiniti. Mentre se $F(z)$ è una funzione trascendente ciò richiede necessariamente il ricorso a procedure non algebriche - o almeno l'assunzione dello sviluppo binomiale per esponenti qualsiasi (anche non razionali)[92] - se $F(z)$ è essa stessa una funzione algebrica, la regola del binomio ristretta a esponenti naturali, ma eventualmente applicata a polinomi infiniti, è in generale sufficiente a garantire una tale trasformazione e a permettere quindi una applicazione del metodo. Tuttavia se tale regola è assunta come generalmente valida anche nel caso di esponenti razionali, il procedimento risulta assai più rapido e agile.[93] Questa generalizzazione può d'altra parte essere essa stessa dimostrata - in quanto procedura di sviluppo - per mezzo di un ricorso allo stesso metodo di sviluppo per determinazione dei coefficienti e con l'ausilio della sola versione ristretta della regola binomiale. Se *n* e *m* sono infatti degli esponenti naturali si potrà procedere come segue:

$$(1+\alpha z)^{-n} = \frac{1}{(1+az)^n} = K_0 + K_1 z + K_2 z^2 + \&c.$$

e quindi, secondo la (26):

$$K_0 = 1$$

(33)
$$K_1 = -n\alpha$$

$$K_2 = \frac{n(n+1)}{2!}\alpha^2 = \frac{-n(-n-1)}{2!}\alpha^2$$

$$K_3 = \frac{-n^3 - 3n^2 - 2n}{3!}\alpha^3 = \frac{-n(-n-1)(-n-2)}{3!}\alpha^3$$

&c.

e

[92] Cfr. la prossima sezione III.3.*c*..

[93] Cfr. la precedente nota (82).

$$(1+\alpha z)^{n/m} = K_0 + K_1 z + K_2 z^2 + \&c.$$

ovvero:

$$(33_{bis}) \quad (1+\alpha z)^n = \left(K_0 + K_1 z + K_2 z^2 + \&c.\right)^m$$

$$1 + \binom{n}{1}\alpha z + \binom{n}{2}\alpha^2 z^2 + \&c. =$$

$$= K_0^m + \binom{m}{1}K_0^{m-1}K_1 z + \left[\binom{m}{1}K_0^{m-1}K_2 + \binom{m}{2}K_0^{m-2}K_1^2\right]z^2 + \&c.$$

e quindi equiparando i coefficienti delle successive potenze di z:

$$K_0 = 1$$

$$K_1 = \frac{n}{m}\alpha$$

$$(33_{ter}) \quad K_2 = \frac{1}{m}\left[\binom{n}{2} - \binom{m}{2}\frac{n^2}{m^2}\right]\alpha^2 = \frac{n}{m}\left(\frac{n}{m} - 1\right)\frac{\alpha^2}{2!}$$

&c.

Non è quindi per nulla sorprendente che Euler consideri lo sviluppo delle funzioni irrazionali come un'applicazione dello sviluppo binomiale per esponenti razionali qualsiasi e che fornisca quest'ultimo senza alcuna dimostrazione esplicita. Lo sviluppo in serie intera delle funzioni frazionarie svolge il ruolo di archetipo per il metodo di sviluppo per determinazione dei coefficienti. Presentato tale esempio, egli non fa che considerare implicitamente il teorema del binomio come il risultato di una semplice applicazione particolare di tale metodo e lo applica immediatamente alla soluzione di un ulteriore problema.

Euler non fa d'altra parte che mostrare come un'opportuna analisi dello sviluppo binomiale della funzione irrazionale $G(z) = [1 + {}_nF(z)]^{\rho}$ - con ρ un numero razionale qualsiasi e ${}_nF(z) = \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots + \alpha_n z^n$ una funzione intera di grado n con un fattore uguale a z - permetta di individuare la legge di ricorrenza che governa tale sviluppo. Ponendo per questo $\rho = \sigma - 1$ e equiparando la funzione data a una arbitraria serie intera si avrà infatti:

$$(33_{quater}) \quad [1 + {}_nF(z)]^{\sigma-1} = \sum_{k=0}^{\infty}\binom{\sigma-1}{k}\left[\alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots + \alpha_n z^n\right]^k$$

$$= V_0 + V_1 z + V_2 z^2 + \&c.$$

da cui, considerando successivamente i casi corrispondenti alle posizioni $n =$

1, $n = 2$ e $n = 3$ e generalizzando il risultato,[94] egli ottiene:

$$V_n = \frac{\sigma - \nu}{\nu} \alpha_1 V_{\nu-1} + \frac{2\sigma - \nu}{\nu} \alpha_2 V_{n-2} + \ldots + \frac{\nu\,\sigma - \nu}{\nu} \alpha_\nu V_{n-\nu} \tag{34}$$

$$[n>0,\ n \in \mathbb{N};\ V_0 = 1]$$

Anche in questo caso la notazione euleriana è in realtà ambigua. La ${}_nF(z)$ è infatti indicata senza alcun riferimento al suo ultimo termine per mezzo della scrittura $Az + Bz^2 + Cz^3$ + &c., ciò che sembra indicare la convinzione euleriana di una facile estendibilità della (34) al caso infinitario.

III. 3. *c*.
COSTRUZIONE E SVILUPPO DELLE FUNZIONI TRASCENDENTI ELEMENTARI (CAPITOLI VI-VIII)

III. 3. *c*. α. *Premessa: l'ambigua natura delle funzioni trascendenti*

Nel precedente paragrafo III.3.*a*.β. ho già indicato in termini generali come la nozione euleriana di funzione trascendente sia inevitabilmente coinvolta entro il progetto dell'*Introductio* in un'ambiguità che deriva tanto dalla distinzione fra analisi algebrica e superiore che dallo stesso obiettivo di fornire una interpretazione genuinamente analitica di oggetti matematici già dati in quanto tali entro un differente quadro interpretativo. Se cerchiamo di guardare le cose un poco più in profondità, ci accorgiamo abbastanza presto che l'origine comune di entrambe le difficoltà verte sulla nozione stessa di quantità e sulla concezione della nuova analisi come una scienza generale della "quantità" astratta. Se pensiamo infatti la quantità in termini classici, come ciò che è numerabile e/o misurabile, ovvero come l'argomento di certe operazioni, e se facciamo di questa l'oggetto ultimo di una teoria matematica, siamo inevitabilmente condotti a assegnare un'assoluta centralità a questioni relative alle modalità rappresentative delle quantità. La maggiore novità del programma euleriano sembra proprio consistere nella proposta di trasformare un'insieme di strumenti operazionali già ampiamente noti e riferiti a

[94] A differenza che nei casi precedenti la regola di formazione dei coefficienti appare qui troppo complicata perché essa possa venir esibita *a priori* in termini generali, senza il ricorso a lunghe e noiose procedure algebriche. Euler preferisce così giungere alla (34) in via induttiva, rimandando a una più soddisfacente dimostrazione di natura differenziale [cfr *ivi*, t. 1, p. 60]:

> Interim hoc loco non licet rationem hujus progressionis legis a priori demonstrare, id quod per principia calculi differentialis demum commode fieri poterit; interea ergo sufficiet veritatem per applicationem ad omnis generis exempla comprobasse.

Benché nelle *Institutiones* Euler ritornerà sulla questione dichiarando di aver ritrovato in termini differenziali (e senza ricorrere a un procedimento induttivo) una formula analoga alla (34) [cfr. Euler (1755), p. 522], egli non esibirà in tale occasione che un risultato ristretto al caso $\sigma\text{-}1 = n \in \mathbb{Z}$.

quantità assegnate in uno strumento rappresentativo delle quantità stesse. Questo progetto non sembra tuttavia connettersi, come ho cercato di indicare nel corso del precedente capitolo II.2., né con una trasformazione della nozione generale di quantità, né con una nuova concettualizzazione della matematica, la quale ne individui l'oggetto nelle operazioni stesse, piuttosto che nel loro argomento. In questo quadro la separazione fra analisi algebrica e analisi superiore corrisponde allora alla separazione fra operazioni che permettono una rappresentazione diretta delle quantità e operazioni che non ne permettono che una rappresentazione indiretta.[95] Concettualizzata questa distinzione e intesa una *funzione* come una quantità analiticamente rappresentata, la medesima linea di separazione sembra naturalmente distinguere fra funzioni e operazioni su funzioni che non sono in quanto tali delle funzioni, non possedendo che una indiretta capacità rappresentativa. Una tale separazione, del tutto naturale dal punto di vista euleriano, impedisce tuttavia di far ricorso alle operazioni del secondo tipo, come quelle di differenziazione o integrazione per caratterizzare positivamente una funzione o, che dir si voglia, una classe di funzioni. Scelta un'unità di misura geometricamente rappresentata per mezzo di un segmento, le entità geometriche non algebriche generalmente trattate dai matematici pre-euleriani si trovano così in situazioni fra loro diverse a seconda se sia o meno disponibile per esse una rappresentazione operazionale diretta già nota. Nel primo caso esse possono infatti venire direttamente intese come funzioni, nel secondo esse sembrano piuttosto doversi concepire come il risultato di certe operazioni compiute sulle funzioni: l'area di un'iperbole è un esempio di un'entità del primo tipo, l'arco di un'ellisse lo è di un'entità del secondo tipo. Il progetto della nuova analisi si scontra allora con due difficoltà: la prima relativa alla possibilità di rendere del tutto autonome da ogni riferimento extra-analitico, senza far ricorso al calcolo differenziale e integrale[96] le *funzioni trascendenti* così individuate, la seconda relativa alla possibilità di garantire un essenziale unità per l'universo dei nuovi oggetti matematici senza essere costretti a inaccettabili rinunce o a limitazioni troppo drastiche delle capacità reinterpretative della nuova teoria.

Proprie queste difficoltà sono a me sembra la cifra dell'ambiguità euleriana relativamente alle *funzioni trascendenti*. I rapporti fra queste e il calcolo integrale sono l'oggetto di due sfuggenti dichiarazioni nell'*Introductio*, la prima nel capitolo I,[97] la seconda proprio all'inizio del capitolo VI, dedicato alle "quantità" esponenziali e logaritmiche. Ecco come Euler si esprime in questa seconda occasione:

> Quanquam notio Functionum transcendentium in calculo integrali demum perpendetur, tamen antequam eo perveniamus, quasdam species magis obvias, atque

---

[95] Cfr. il precedente paragrafo II.2.ι..

[96] Ancora più lontana dalle concezioni euleriane è naturalmente la possibilità di definire le funzioni trascendenti come limiti dei loro sviluppi. Questi ultimi non sono infatti pensabili che come sviluppi di funzioni *già* date [cfr. il precedente paragrafo II.2.κ.].

[97] Cfr. la precedente nota (28).

> ad plures investigationes aditum aperientes, evolvere conveniet.[98]

Come era già stato il caso nel primo capitolo, anche qui Euler lascia le cose nel vago. Che la "nozione" delle funzioni trascendenti debba "essere esaminata" per mezzo del calcolo integrale non significa infatti che una funzione trascendente *sia* una (quantità rappresentata da una) espressione analitica contente il riferimento a *operazioni* integrali (o differenziali), ovvero che si possa pensare a *funzioni* trascendenti non riconducibili a una composizione finita di operazioni elementari. Al contrario Euler sembra fondare il suo programma di un'analisi algebrica proprio sulla presupposizione di una tale riducibilità: le funzioni trascendenti elementari sono introdotte per mezzo di una estensione delle operazioni algebriche (retta da alcune indispensabili limitazioni arbitrarie) o di un riferimento geometrico nascosto; quelle non elementari sono richiamate per mezzo di una sfuggente allusione al calcolo integrale, la quale sembra sottintendere - se letta nell'intero quadro dell'*Introductio* - la possibilità di pervenire a esse per mezzo di una composizione finite delle funzioni elementari.

III. 3. *c*. β. *Esponenziali e logaritmi*

La prima funzione trascendente considerata da Euler è la funzione esponenziale $y = a^z$, la quale esprime "la natura" di tutte le "quantità esponenziali", ovvero delle "potenze il cui esponente è variabile",[99] e può quindi essere considerata come un loro archetipo. Se z è un numero intero la quantità a^z risulta univocamente determinata dalla determinazione di z e ugualmente avviene se z é posta uguale a 0, essendo in questo caso $a^z = a^0 = 1$. Al contrario se z è razionale, la sua determinazione non comporta una determinazione univoca di a^z, "cum radicum extractio semper valores multiformes producat".[100] Fra questi valori uno solo è tuttavia reale e positivo e questo può quindi essere facilmente individuato fra gli altri e scelto come valore della funzione $y = a^z$:

> Interim [...] hoc loco valores tantum primarii, reales scilicet atque affirmativi admitti solent [...]. Sic $a^{5/2}$ medium quendam tenebit locum inter a^2 et a^3, eritque ideo quantitas ejusdem generis; et quamvis valor $a^{5/2}$ sit æque $= -aa\sqrt{a}$, ac $= +aa\sqrt{a}$, tamen posterior tantum in censum venit.[101]

Se una tale restrizione può in ultima istanza essere ridotta a una mera convenzione notazionale, una simile strategia impedisce di pensare l'introduzione della funzione esponenziale come il risultato di una semplice estensione delle operazioni algebriche. Ciò nonostante una tale convenzione non è ancora sufficiente per poter considerare l'esponenziale $y = a^z$ come una

---

[98] Cfr. Euler (1748), t. 1, p. 69.
[99] Cfr. *ivi*, t. 1, pp. 69-70.
[100] Cfr. *ivi*, t. 1, p. 70.
[101] Cfr. *ivi*.

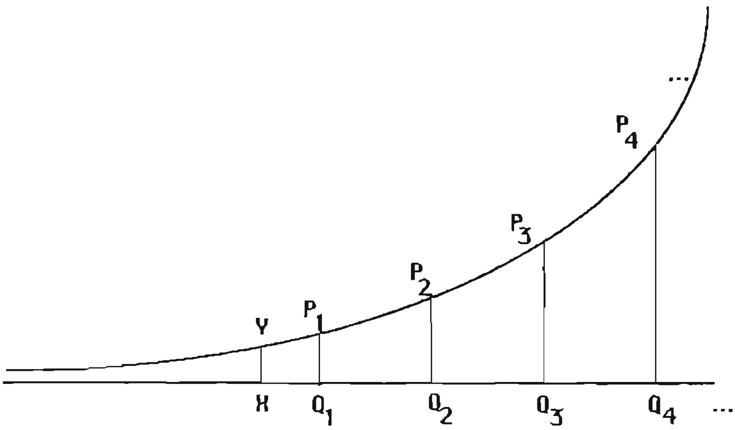
funzione uniforme. Se il dominio di una variabile (indipendente) è infatti identificato *a priori* con il campo complesso, per giungere a questa conclusione occorre da una parte assegnare un senso alla scrittura a^z anche nel casi in cui z assuma valori irrazionali o immaginari e dall'altra introdurre un criterio di selezione capace di scegliere uno solo fra i valori che questo senso assegna alla "quantità" a^z per ogni determinazione di z. Su questo punto Euler è per la verità assolutamente vago, limitandosi a un breve accenno al caso in cui z assuma valori irrazionali:

> Eodem modo res se habet, si Exponens z valores irrationales accipiat, quibus casibus cum difficile sit numerum valorum involutorum concipere, unicus tantum realis consideratur. Sic $a^{\sqrt{7}}$ erit valor determinatus intra limites a^2 et a^3 comprehensus.[102]

Pur nelle ambiguità che essa comporta, la strategia euleriana sembra perfettamente chiara. Assunta la successione..., a^{-2}, a^{-1}, a^0, a^1, a^2,... come una successione ordinata di valori appartenenti al codominio della funzione $y = a^z$ (a positivo e diverso da uno), Euler intende intuitivamente tale funzione come un'interpolazione polinomiale di questi valori riferita al campo reale, ovvero, in ultima istanza, come la trasposizione analitica dell'ordinata di una curva.[103] L'esclusione *a priori* di una definizione che identifichi una funzione

[102]Cfr. *ivi*, pp. 70-1.

[103]Data la formula di interpolazione di Newton-Gregory [cfr. la (1) del precedente paragrafo III.2.a.α.], riferita alla collezione infinita di punti P_1, P_2, P_3, &c. individuati dalle distanze $Q_1P_1 = 1$, $Q_2P_2 = a$, $Q_3P_3 = a^2$, &c. e $Q_1Q_2 = Q_2Q_3 = Q_3Q_4 =$ &c. $= 1$, nella quale siano presi: $p_1 = XQ_1 = z$, $p_2 = p_1(XQ_2) = z(z+1)$, $p_3 = p_2(XQ_3) = z(z+1)(z+2)$, &c. si avrà infatti:



$$XY = 1 + z(a-1) + \frac{z(z+1)}{2!}(a^2 - 2a + 1) + \frac{z(z+1)(z+2)}{3!}(a^3 - 3a^2 + 3a - 1) + \&c.$$

$$= 1 + z\left[(a-1) + \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} + \&c.\right] + \frac{z^2}{2!}\left[(a-1)^2 + (a-1)^3 + \frac{11}{12}(a-1)^4 + \&c.\right] + \&c.$$

ovvero:

con il limite di una serie data indipendentemente da essa gli impedisce tuttavia di trasporre direttamente una tale intuizione in termini oggettivi, obbligandolo all'introduzione di un arbitrario criterio di selezione riferito ai valori di $y = a^z$ per z razionale, accompagnato da un imprecisato principio di prolungamento con continuità, il quale fornisce un oggetto matematico tramite un'estensione formale delle leggi algebriche riferite alle potenze razionali. Ciò non è tuttavia ancora sufficiente. Per raggiungere lo scopo prefissato occorre infatti restringere la variazione di z al campo reale e giustificare la limitazione a valori (reali) positivi (e diversi da uno)[104] per la costante a. Per quanto riguarda il primo punto, la strategia di Euler è semplicemente il silenzio. Egli non affronta il problema in termini generali, salvo permettersi di manipolare formalmente gli esponenziali immaginari estendendo anche a essi le regole operative originariamente riferite alle potenze razionali. Forse ancora più sorprendente è tuttavia il modo in cui Euler affronta il secondo punto.

> Si [...] fuerit $a = 1$ - egli scrive -, semper erit $a^z = 1$, quicunque valores Exponenti z tribuatur [...].
> Si sit $a = 0$, ingens saltus in valoribus ipsius a^z deprehenditur, quamdiu enim fuerit z numerus affirmativus seu major nihilo, erit perpetuo $a^z = 0$: si sit $z = 0$, erit $a^0 = 1$; sin autem fuerit z numerus negativus, tum a^z obtinebit valorem infinite magnum. [...] Multo majores autem saltus occurrunt, si quantitas constans a habeat valorem negativum [...]; tum enim ponendis loco z numeris integris valores ipsius a^z alternatim erunt affirmativi et negativi [...]. Præterea vero si Exponenti z valores tribuantur fracti, Potestas a^z [...] mox reales mox Imaginarios induet valores [...].
> His igitur incommodis numerum negativorum loco a substituendorum commemoratis, statuamus a esse numerum affirmativum, et unitate quidem majorem, quia huc quoque illi casus, quibus a est numerus affirmativus unitate minor, facile reducuntur.[105]

Se queste parole possono essere intese come un argomento - introducendo a tal fine un legame inferenziale fra le premesse e la conclusione[106] - in esso non sembra in nessun modo intervenire, nemmeno indirettamente, la nozione di funzione come forma analitica. L'ambiguità fra forma e quantità si trasforma qui in una separazione incolmabile senza l'ausilio di un vero e proprio atto di forza. La stessa restrizione alle forme analitiche semplici, così come ogni altra limitazione sottostante a un criterio puramente sintattico, si mostra infatti insufficiente per garantire una corrispondenza estensionale fra

$$XY = 1 + z\left[(a-1) + \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} + \&c.\right] + \frac{z^2}{2!}\left[(a-1) + \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} + \&c.\right]^2 + \&c.$$

che corrisponde esattamente allo sviluppo in serie intera della funzione $y = a^z$.

[104] Per $a = 1$, la funzione $y = a^z$ si trasforma infatti in una costante e cessa quindi, dal punto di vista di Euler, di essere una funzione.

[105] Cfr. *ivi*, t. 1, pp. 71-2.

[106] Mi pare significativo che Euler eviti di rendere esplicito questo legame presentando la posizione $a > 1$ come una convenzione semplicemente successiva alle osservazioni relative alle conseguenze "inopportune" comportate da una posizione diversa.

forme (ben formate) e rappresentazioni (dirette) di una quantità. Il caso dell'esponenziale indica infatti la possibilità di costruire una forma analitica semplice, la cui capacità rappresentativa dipende da condizioni relative al significato degli stessi simboli atomici. La nozione classica di quantità, per quanto allargata da Euler, almeno il linea di principio, fino a riferirsi alle stesse "quantità complesse", impedisce di pensare come una quantità ciò che si presenta come una collezione di valori il cui ordine manifesta evidenti *discontinuità*. Se Euler non fornisce esplicitamente alcun criterio di continuità, sembra perfettamente chiaro che ciò che gli appare come insoddisfacente è infatti la discrasia (non meglio caratterizzata) fra l'ordine dei valori di z e l'ordine dei corrispondenti valori di a^z, la quale contrasta con l'intuitiva corrispondenza fra l'uniforme flusso del tempo e il crescere o decrescere di una "quantità" (relativamente a un'unità di misura intesa come fissa). E' proprio questa discrasia - che in termini moderni caratterizza una funzione *discontinua* - che egli vuole evitare postulando la positività di a[107].

Dietro una tale assunzione sembrano nascondersi così due violazioni di differente natura dei principi stessi dell'analisi euleriana. Se da una parte vi è qui infatti una evidente e ulteriore contravvenzione all'ideale di una assoluta indeterminatezza dei simboli analitici, dall'altra vi è il richiamo a un'intuizione essenzialmente extra-analitica. La continuità - aristotelicamente intesa come predicato essenziale di ciò che è uno[108] - è intesa come una caratteristica propria di ogni quantità (intesa come un *un* individuo). Ma che cosa significa che una quantità è *una*, che nel considerarla come un individuo fra gli altri non si sia compiuto un atto arbitrario? Se la difficoltà di fornire una risposta generale a una tale domanda sembra accompagnarsi, nel caso di quantità estese, a un sentimento originario capace in ogni caso particolare di compiere la distinzione, che cosa significa che è *una* una velocità o che è *uno* un peso? La matematica classica conosceva una risposta assai semplice a questa domanda, la quale verteva sulla riconducibilità di ogni quantità a un'estensione, sulla raffigurazione geometrica come rappresentazione privilegiata di *ogni* quantità. Ma se da quantità geometricamente rappresentate compiamo il passaggio verso quantità astratte rappresentate analiticamente, questa risposta non è più possibile, né è possibile associare l'idea di continuità di una quantità alla semplice corrispondenza a certe regole di buona formazione della forma che la rappresenta. La reinterpretazione geometrica della forma esponenziale mostra infatti che al rispetto di queste regole corrisponde un sentimento di discontinuità che Euler non sa esprimere se non servendosi di un'immagine spaziale, la quale rinvia, in ultima istanza, all'interpretazione di una quantità come un'estensione.[109]

---

107 Una funzione euleriana (in quanto quantità) è quindi *intrinsecamente* una funzione continua (nel nostro senso). Eventuali possibilità di costruire forme analitiche semplici che esprimono funzioni discontinue non fanno che mostrare la necessità di una precisazione ulteriore.

108 Mi permetto di rimandare a questo proposito al secondo capitolo di Panza (1989).

109 Ventitré anni prima Varignon aveva impiegato la stessa immagine (invero in se stessa del tutto classica e largamente utilizzata da Leibniz), per caratterizzare una *variabile* come una forma analitica e compiere la stessa esclusione euleriana:

Queste difficoltà messe a parte, le limitazioni introdotte - tanto esplicitamente ($a > 1$) che implicitamente ($a, z \in \mathbf{R}$) - permettono senza ulteriori difficoltà un agevole passaggio ai logaritmi:

> Quemadmodum autem, dato numero a, ex quovis valore ipsius z reperiri potest valor ipsius y, ita vicissim, dato valore quocunque affirmativo ipsius y, conveniens dabitur valor ipsius z, ut sit $a^z = y$; iste autem valor ipsius z, quatenus tanquam Functio ipsius y spectatur, vocari solet *Logarithmus* ipsius y.[110]

La base a di una funzione logaritmica $z = \log_a y$ è così una costante (reale) arbitraria, ma maggiore di uno, mentre l'argomento y (che i matematici settecenteschi indicavano generalmente come il "numero" del logaritmo) è una variabile a valori reali e positivi.[111]

Dalla definizione è d'altra parte chiaro che per ogni a (>1) e per ogni r si hanno le identità: $\log_a 1 = 0$, $\log_a a = 1$ e $\log_a a^r = r$, e le implicazioni: $y > 1 \Rightarrow \log_a y > 0$ e $y < 1 \Rightarrow \log_a y < 0$. L'algebra del logaritmo segue allora banalmente.[112] Ugualmente chiaro è inoltre che per ogni $y \neq a^q$ ($q \in \mathbf{Q}$), la quantità $\log_a y$ assume un valore irrazionale e (tranne che in certi casi particolari) non può quindi essere determinata che per approssimazione.[113] In molti casi il calcolo è tuttavia semplificato dalla semplice considerazione dei rapporti che intrattengono fra loro due logaritmi di base diversa ma di uguale argomento. Ponendo $\log_a y = \tau$ e $\log_b y = \vartheta$ si avrà infatti $y = a^\tau = b^\vartheta$ e quindi $a = b^{\vartheta/\tau}$, ovvero $\vartheta/\tau = \log_a b$: il rapporto fra due logaritmi dello stesso numero ma appartenenti a sistemi[114] diversi è costante. Ugualmente utile è osservare che il rapporto fra due logaritmi appartenenti allo stesso sistema è indipendente dalla base di quest'ultimo; posti infatti $\log_a y = \tau$ e $\log_a x = \theta$ si avrà $y = a^\tau$ e $z = a^\theta$ e quindi $y = z^{\tau/\theta}$, ovvero: $\tau/\theta = \log_x y$.

Toute quantité - egli aveva scritto [cfr Varignon (1725), p. 1] - qui gardant la même expression, augmente ou diminue continuellement (*non per saltum*), est appelée *variable*.

[L'implicita assunzione della possibilità di "quantità" che aumentano o diminuiscono "*per saltum*" sembra qui corrispondere a un *lapsus linguæ* cui non credo si debba dare soverchia importanza].

110 Cfr. Euler (1748), t. 1, p. 73.

111 Per quanto lo stesso percorso che conduce Euler all'introduzione del logaritmo richieda la positività del suo argomento, questi non sembra concepire alcuna difficoltà di principio nell'affermare (implicitamente) che il logaritmo di un numero negativo è immaginario [cfr. *ivi*]:

> [...] nonnisi numerorum affermativorum logarithmos realiter exhiberi posse.

112 Ponendo $\log_a y = \tau$ e $\log_a x = \theta$ si ha infatti $y = a^\tau$ e $x = a^\theta$ e quindi: $\log_a (xy) = \log_a (a^{\tau+\theta}) = \tau + \theta = \log_a y + \log_a x$; $\log_a (x/y) = \log_a (a^{\tau-\theta}) = \tau - \theta = \log_a y - \log_a x$.

113 Il metodo generale proposto da Euler per realizzare tali approssimazioni è assai semplice e si fonda sulla osservazione che da $a^n < y < a^m$ segue $\log_a a^n < \log_a y < \log_a a^m$ e quindi: $n < \log_a y < m$.

114 Secondo la terminologia dell'epoca, Euler chiama "*sistema logaritmico* di base a" l'insieme dei logaritmi rispondenti a tale base.

III. 3. *c*. γ. *Sviluppi in serie intera delle funzioni esponenziale e logaritmica*

Introdotte nel capitolo VI le funzioni esponenziale e logaritmica, Euler dedica il capitolo VII alla ricerca del loro sviluppo in serie intera. Il procedimento che egli utilizza, pur mantenendo una natura strettamente non differenziale, fa ricorso a un'essenziale ipotesi infinitesimalista:

> Quia est $a^0 = 1$, atque crescente Exponente ipsius a simul valor Potestatis augetur, si quidem a est numerus unitate major; sequitur si Exponens infinite parum cyphram[115] excedat, Potestatem ipsam quoque infinite parum unitate esse superaturam. Sit ω numerus infinite parvus, seu Fractio tam exigua, ut tantum non nihilo sit æqualis, erit
>
> (35) $a^\omega = 1 + \psi$
>
> existente ψ quoque numero infinite parvo.[116]

L'infinita piccolezza di ψ permette secondo Euler di porre $\psi = K\omega$ (dove K è una costante a valore finito) e di trarre così:

(36) $a^\omega = 1 + K\omega$; $\omega = \log_a (1 + K\omega)$

Applicando lo sviluppo del binomio si avrà quindi:[117]

$$(37) \qquad a^{\omega\Omega} = (1+K\omega)^{\Omega} = 1 + \Omega K\omega + \frac{\Omega(\Omega-1)}{2!} K^2\omega^2 + \&c.$$

Se Ω è preso d'altra infinitamente grande e "z denotet numerum quemcunque finitum"[118], si può porre ancora $\Omega = z/\omega$ e trarre così:

$$(38) \qquad a^z = \left(1 + \frac{Kz}{\Omega}\right)^{\Omega} = 1 + Kz + \frac{(\Omega-1)}{2!\,\Omega} K^2z^2 + \frac{(\Omega-1)(\Omega-2)}{3!\,\Omega^2} K^3z^3 + \&c.$$

ciò che mostra la dipendenza di K, e quindi di ψ, dal valore di *a*. Essendo Ω infinito si avrà peraltro, per ogni *n* ($n \in \mathbf{N}$):

$$(39) \qquad (\Omega-1)(\Omega-2)\ldots(\Omega-n) = \Omega^n$$

e la (38) si trasformerà quindi nello sviluppo cercato per la funzione espo-

[115]Cfr. la precedente nota (18).
[116]Cfr. *ivi*, t. 1, p. 85.
[117]Euler passa da (36) a (37) senza specificare la natura dell'esponente Ω. Tornerò sulla questione più sotto.
[118]Cfr. *ivi*, t. 1, p. 86.

nenziale $y = a^z$:

$$(40)\qquad a^z = 1 + Kz + \frac{K^2}{2!}z^2 + \frac{K^3}{3!}z^3 + \&c.$$

in cui K soddisfa l'equazione numerica infinitaria (tratta per la semplice sostituzione $z = 1$)[119]:

$$(41)\qquad a = 1 + K + \frac{K^2}{2!} + \frac{K^3}{3!} + \&c.$$

Ponendo $b = a^x$, si avrà inoltre $x = \log_a b$ e $b^z = a^{xz}$ e dalla (40) si potrà quindi trarre:

$$(42)\qquad \begin{aligned} b^z = a^{xz} &= 1 + Kxz + \frac{K^2}{2!}x^2z^2 + \frac{K^3}{3!}x^3z^3 + \&c. \\ &= 1 + (K\log_a b)z + \frac{(K\log_a b)^2}{2!}z^2 + \frac{(K\log_a b)^3}{3!}z^3 + \&c. \end{aligned}$$

in cui le costanti a e K sono determinate l'una relativamente all'altra in base alla (41).

Lungi dal ridursi a una mera manipolazione formale, la dimostrazione di Euler richiede almeno quattro ipotesi che vertono sulla natura intrinseca delle quantità rappresentate dai simboli analitici. Interpretata la forma a^z come la rappresentazione di una quantità, ovvero come una funzione,[120] la prima di queste ipotesi consiste nell'intendere l'assenza di "salti" nei valori di

---

[119]La legittimità di una tale sostituzione dipende ovviamente dalla convergenza della (40) nel punto $z = 1$. Per quanto Euler passi la questione sotto silenzio è chiaro la giustificazione implicita di un tale lemma rinvia all'analisi della (38), in cui la condizione di "verità" [cfr. il precedente paragrafo III.1.θ.] dello sviluppo binomiale ($\left|\frac{Kz}{\Omega}\right| < 1$) è rispettata per ogni valore (finito o infinitamente piccolo) di z, in modo che il carattere finito della quantità $a^z = \left(1+\frac{Kz}{\Omega}\right)^{\Omega}$ - intuitivamente asserito grazie alla partecipazione di $\left(1+\frac{Kz}{\Omega}\right)$ alla "monade" dell'unità - si trasferisce per ogni z alla serie. Si osservi che perché la quantità $\left(1+\frac{Kz}{\Omega}\right)^{\Omega}$ equiparata alla funzione $y = a^z$ possa assumere tutti i valori reali positivi occorre o che la quantità infinitamente piccola $\omega = z/\Omega$ assuma valori tanto negativi che positivi o che l'infinito Ω possa essere alternativamente preso tanto positivamente che negativamente.

[120]Cfr. il precedente paragrafo III.3.*c*.β..

$y = a^x$ [121] come una garanzia per l'implicazione[122]

(43) $[x = \omega\ (\omega \text{ inf. piccolo})]\ \&\ [a^0 = 1] \Rightarrow [1 - a^x = 1 - a^\omega = \psi\ (\psi \text{ inf. piccolo})]$

La seconda ipotesi consiste nell'assunzione che il prodotto di una quantità infinitamente piccola e di una quantità infinita è una quantità finita,[123] la quale possa essere intesa come una variabile a valori reali, ciò che richiede, fra l'altro, la possibilità di intendere le quantità infinitesimali come quantità a loro volta variabili.[124] La terza ipotesi consiste nell'assunzione della regola del binomio per un esponente arbitrario che è successivamente identificato con un numero infinito. La quarta ipotesi consiste nella presupposizione dell'indipendenza di K da ω. Messa a parte la prima ipotesi - che il lettore avrà riconosciuto come un'ipotesi classica - consideriamo le tre restanti. Se ω è intesa come una "frazione esigua", perché il prodotto $\Omega\omega$ possa essere inteso come una quantità variabile a valori (finiti e) reali, occorre che Ω sia tale da convertire non solo una quantità infinitamente piccola in una quantità finita, ma anche un valore razionale in una variabile a valori razionali *e irrazionali*. Se pensiamo, come sembra essere il caso di Euler, le quantità infinitesimali come quantità di natura analoga alle quantità finite (ovvero come elementi di insiemi strutturalmente analoghi a **R**), ciò significa che la regola del binomio deve essere estesa a esponenti (infiniti) razionali *e irrazionali*. Nulla ci obbliga tuttavia a accettare l'apparentemente incauto suggerimento di Euler.[125] Al contrario potremmo intendere ω come una variabile a valori reali infinitamente piccoli e Ω come un numero razionale infinito, ciò che rende la terza ipotesi notevolmente più debole. La quarta ipotesi essa sembra infine essere giustificata dall'interpretazione della (35) come un'identità del primo

[121] Qualcuno potrebbe suggerire di tradurre una tale proprietà in termini moderni, equiparandola alla continuità della *funzione* $y = a^x$. Questo comporterebbe tuttavia, a mio parere, un serio travisamento del punto di vista euleriano, per cui ogni *funzione*, in quanto *quantità*, è per sua natura intrinseca *una* e quindi *continua* (nel nostro senso). La proprietà in questione si riduce allora alla proprietà arbitrariamente assegnata alla *forma* a^x di essere la rappresentazione di una funzione [cfr. il precedente paragrafo III.3.c.β.].

[122] Si osservi che, benché largamente utilizzata per giustificare l'algoritmo del calcolo differenziale, tale ipotesi non è sufficiente a tale scopo e non può quindi intendersi come una surrettizia introduzione del *calcolo* nell'edificio dell'analisi algebrica.

[123] Euler sembra qui rinviare a un'intuizione essenzialmente differente da quella che utilizzerà invece nel 1755 per giustificare l'algoritmo del *calcolo* [cfr. il precedente paragrafo II.1.λ.]. Se un infinitamente piccolo è infatti inteso come un vero e proprio zero, la posizione $\omega\Omega = z$ ripropone il paradosso di Grandi, comportando la perdita di univocità.

[124] In senso stretto z è infatti intesa qui come una funzione suriettiva a una o due variabili: $U \rightarrow \mathbf{R}$, dove U corrisponde o al prodotto cartesiano $A \times B$ - con A e B che indicano gli insiemi delle quantità infinitamente piccole e infinite (del primo ordine) o a uno dei due insiemi A o B. Tornerò sulla questione più sotto.

[125] Cfr. la precedente nota (119): la variabilità di ω in un intorno centrato sullo zero sembra un'ipotesi assai più naturale di quella che presuppone il passaggio di Ω da valori infiniti negativi a valori infiniti positivi.

ordine (rispetto alla quantità infinitamente piccola ω),[126] ovvero come il risultato di un'applicazione del principio di omissione all'identità non condizionata

$$(44)\quad a^{\omega} = 1 + \psi + \omega^2 [A_0 + A_1\omega + A_2\omega^2 + \&c.]$$

con A_0, A_1, &c. delle costanti finite.[127] La quarta ipotesi sembra allora corrispondere alla presupposizione di sviluppabilità in serie intera della funzione assegnata, relativamente al dominio degli infinitamente piccoli.

Comunque le si vogliano interpretare le ipotesi precedenti manifestano una chiara disponibilità a impiegare intuizioni infinitesimaliste anche all'interno dell'edificio dell'analisi algebrica. Ciò rende evidente che il progetto euleriano di una separazione fra analisi algebrica e analisi superiore, lungi dall'assumere la forma di una messa al sicuro dalle "incoerenze" infinitesimaliste della più grande parte possibile del sapere matematico, non corrisponde che a un disegno di riorganizzazione architettonica di questo, le cui ragioni vanno cercate molto più in profondità.

Tramite un procedimento analogo, Euler determina poi lo sviluppo in serie intera della funzione logaritmica $z = \log_a (1 + x)$. Dalla (36) segue infatti, secondo l'algebra del logaritmo:

$$(45)\qquad \Omega\omega = \log_a (1+K\omega)^{\Omega}$$

e

> Manifestum [...] est, quo major numerus pro Ω sumatur, eo magis Potestatem $(1+K\omega)^{\Omega}$ unitatem esse superaturam;[128] atque statuendo Ω = numero infinito, valorem Potestatis $(1+K\omega)^{\Omega}$ ad quemvis numerum unitate majorem ascendere. Quod

---

[126] La precisazione è necessaria per poter intendere la (40) come genericamente valida anche per valori infinitamente piccoli di z. Se Euler considera infatti esplicitamente z come una variabile a valori finiti, la stessa presupposizione di partenza che conduce alla (35) sembra suggerire la necessità di estendere la funzione $y = a^z$ anche a valori infinitamente piccoli di z. Per fare in modo che la dimostrazione si estenda anche a questo caso occorre considerare ω come un infinitamente piccolo di un ordine n qualsiasi, intendere la (35) come un'identità dello stesso ordine e prendere Ω come un infinito di un qualsiasi ordine inferiore. Se in tal modo non si potrà mai giungere a dimostrare la (40) per valori infinitesimali di ordine n della variabile z, la reiteratività del procedimento avrebbe dovuto valere per un matematico settecentesco come un argomento a favore dell'estendibilità della (40) a ogni ordine di infinitamente piccoli.

[127] Si noti che la dimostrazione infinitesimalista del "teorema" di Taylor - e quindi anche dello sviluppo dell'esponenziale - proposta da Lagrange nel 1772 [cfr. il prossimo paragrafo III.4.*b*. γ.] richiede esattamente la medesima omissione.

[128] Euler considera evidentemente - a differenza che nel caso precedente - tanto ω che Ω come positivi e intende la differenza *infinitamente piccola* $[(1+K\omega)^{\Omega} - 1]$ come crescente al crescere di Ω (che assume qui evidentemente dei valori finiti). L'intuizione di infinitesimi variabili (e quindi non necessariamente uguali fra loro) percorre d'altra parte l'intera dimostrazione euleriana, nella quale le identità riferite all'ordine del finito si susseguono a quelle riferite al primo ordine degli infinitamente piccoli.

si ergo ponatur

(46) $(1+K\omega)^{\Omega} = 1 + x$

erit[129]

(47) $\log\,(1+x) = \Omega\,\omega$

Da (46) segue anche:

$$(48)\qquad (1+K\omega) = (1+x)^{1/\Omega} \quad \text{ovvero}: \Omega\omega = \log_a(1+x) = \frac{\Omega}{K}\left[(1+x)^{1/\Omega} - 1\right]$$

Sviluppando il binomio $(1+x)^{1/\Omega}$ (il cui esponente può essere inteso come razionale[130]) si avrà quindi (omettendo tutti i termini in cui compare una qualsiasi potenza della frazione infinitamente piccola $1/\Omega$):

$$(49)\qquad \begin{aligned} \log_a(1+x) &= \frac{1}{K}\left[x + \frac{1}{2!}\left(\frac{1}{\omega} - 1\right)x^2 + \frac{1}{3!}\left(\frac{1}{\omega} - 1\right)\left(\frac{1}{\omega} - 2\right)x^3 + \&c.\right] \\ &= \frac{1}{K}\left[x - \frac{1}{2!}x^2 + \frac{1}{3!}x^3 - \&c.\right] \end{aligned}$$

che fornisce lo sviluppo cercato.[131] Ponendo in esso $x = a-1$ si trae d'altra parte:

$$(50)\qquad K = (a-1) - \frac{(a-1)^2}{2} + \frac{(a-1)^3}{3} - \&c.$$

che fornisce una determinazione esplicita di a. A differenza che nel caso dell'esponenziale, la convergenza dello sviluppo binomiale richiede qui tuttavia una limitazione relativa al valore di x, in modo che la (49) può essere intesa

---

[129] Cfr. *ivi*, t. 1, p. 88. Euler non fa qui che esplicitare le ovvie condizioni implicate dalla (38) [cfr. la precedente nota (119)] ponendo $x = a^z - 1 = y-1$ e restringendo la variazione di ω a valori infinitamente piccoli positivi. Si osservi d'altra parte che sostituendo nella (38) e applicando la (39) si trae l'equazione algebrica infinitaria: $-x + Kz + \frac{K^2}{2!}z^2 + \frac{K^3}{3!}z^3 + \&c. = 0 = {}_{\infty}F(z)$, su cui si può applicare il medesimo ragionamento applicato alla (2) del paragrafo III.3.*b*.β., dimostrando che, per *ogni* valore (reale) positivo di x, essa ha sempre almeno una radice *reale*, ovvero: se z varia su tutto il capo reale, allora x può assumere tutti i valori reali positivi. Assumendo K e ω (e quindi z) come positivi, sarà d'altra parte ovvio concludere che per x minore di zero tale equazione non ha alcuna radice reale.

[130] Cfr. *sopra*.

[131] Per quanto sembri chiaro che Euler intenda x come positivo, prendendo ω come un infinitamente piccolo positivo, la dimostrazione non richiede una tale restrizione. Se ω è infatti inteso come un infinitamente piccolo negativo la potenza infinita $(1+K\omega)^{\Omega}$ risulterà compresa fra 0 e 1 e x potrà quindi assumere valori negativi maggiori di -1.

come un'identità numerica (se e) solo se $|x|<1$.[132] La sostituzione proposta da Euler fornisce quindi una determinazione di K solo nel caso in cui la base del sistema logaritmo sia minore di 2 (ovvero sia compresa fra 1 e 2). Alla stessa conclusione si arriva d'altra parte, banalmente, analizzando *a posteriori* la (50). Euler non manca di sottolineare tale limitazione, anche se lo fa in termini perlomeno curiosi. Data la (50) egli scrive infatti:

> [...] cujus ideo Seriei infinitæ valor, si ponatur $a = 10$, circiter esse debit = 2,30258; quanquam difficulter intelligi potest esse
>
> $$(51)\quad 2{,}30258 = \frac{9}{1} - \frac{9^2}{2} + \frac{9^3}{3} - \frac{9^4}{4} + \&c.$$
>
> quoniam hujus Seriei termini continuo fiunt majores, neque adeo aliquot terminis sumendis summa vero propinqua haberi potest; cui incommodo mox remedium afferetur.[133]

Il modo in cui Euler risolve la "difficoltà" permette di interpretare una tale osservazione in maniera da renderla assai meno problematica di quanto essa possa a prima vista apparire. Sfruttando l'algebra del logaritmo, egli trae infatti dalla (49) la nuova identità infinitaria:

$$(52)\qquad \log_a \frac{1+x}{1-x} = \frac{2}{K}\left(x + \frac{x^3}{3} + \frac{x^5}{5} + \&c.\right)$$

da cui ponendo $x = \dfrac{a-1}{a+1}$ è facile trarre:

$$(53)\qquad K = 2\left(\frac{a-1}{a+1} + \frac{(a-1)^3}{3(a+1)^3} + \frac{(a-1)^5}{5(a+1)^5} + \&c.\right)$$

in cui la sostituzione $a = 10$ fornisce una serie perfettamente convergente. Essendo per ipotesi $a > 1$ la sostituzione richiesta nella (52) è ora tale che la condizione di convergenza degli sviluppi binomiali, $|x| < 1$ è rispettata per ogni scelta di a. La (53) è allora tale da fornire una determinazione esplicita di K per un qualsiasi sistema logaritmico. Nel trarla Euler non fa che porre la (49) in una forma tale da rendere la sostituzione opportuna perfettamente legittima relativamente alle condizioni di convergenza degli sviluppi. La (51) si mostra quindi come un'identità "falsa",[134] a cui si giunge per mezzo di una sostituzione non concessa, dato come noto il valore di K per il sistema logaritmico decimale. Euler sembra quindi non solo perfettamente consapevole delle condizioni sotto le quali i suoi sviluppi si presentano come delle identi-

---

[132] Cfr. la precedente nota (131).

[133] Cfr. *ivi*, t. 1, p. 89.

[134] Cfr. il precedente paragrafo III.1.θ..

tà numeriche,[135] ma anche assolutamente in grado di manipolare opportunamente i suoi risultati, in modo da trovare approssimazioni opportune in tutti i casi desiderati.[136]

Dati gli sviluppi dell'esponenziale e del logaritmo nel caso di una base qualsiasi, Euler può passare senza alcuna difficoltà al caso del logaritmo naturale, introducendo il numero e come quel valore di a che rende la costante K uguale a uno.[137] Sfruttando rispettivamente la (41), la (40), la (42), la (49) e la (52) è allora facile ottenere:

$$\text{i) } e = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \frac{1}{4!} + \&c.$$

$$\text{ii) } e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2!} + \frac{z^3}{3!} + \frac{z^3}{4!} + \&c.$$

$$(54) \qquad \text{iii) } a^z = 1 + [\log a]\, z + \frac{[\log a]^2}{2!} z^2 + \frac{[\log a]^3}{3!} z^3 + \&c.$$

$$\text{iv) } \log(1+x) = x - \frac{1}{2} x^2 + \frac{1}{3} x^3 - \&c.$$

$$\text{v) } \log \frac{1+x}{1-x} = 2x + \frac{2}{3} x^3 + \frac{2}{5} x^5 + \&c.$$

La (54)(iv) e la la (54)(v) "vehementer convergunt, si pro x statuatur fractio valde parva"[138] e possono quindi venire utilizzate per fornire dei valori approssimati dei logaritmi naturali di ogni numero. Invece di porre in 54(v) per ogni argomento positivo ζ la sostituzione $\frac{1+x}{1-x} = \zeta$ - che rende x uguale a $\frac{\zeta-1}{\zeta+1}$ e senz'altro compreso fra -1 e 1 - Euler opera nello stesso sviluppo le sostituzioni $x = \frac{1}{5}$, $x = \frac{1}{7}$ e $x = \frac{1}{9}$ che forniscono rispettivamente le approssimazione dei logaritmi naturali di 3/2, 4/3 e 5/4 che opportunamente combinati (secondo l'algebra del logaritmo) forniscono a loro volta le approssimazioni (che Euler calcola fino a 25 decimali) dei logaritmi naturali di 1, 2, 3,..., 10.

Assegnando d'altro canto a x *un valore* ω infinitamente piccolo la (54)(iv) fornisce l'identità al primo ordine $\log(1+\omega) = \omega - \omega^2/2 + \omega^3/3 - \&c. = \omega$ da cui è facile trarre: $e^{\omega} = 1 + \omega$, ciò che mostra come la (36) debba essere a

---

[135]Cfr. il precedente paragrafo II.2.κ..

[136]Cfr. *sotto.*

[137]La determinazione *a posteriori* di e come il valore della base del sistema logaritmico in cui la costante K è uguale a uno corrisponde allo sviluppo storico della matematica e diverrà classica nel corso della seconda metà del XVIII secolo.

[138]Cfr. *ivi*, t. 1, p. 90.

sua volta intesa come un'identità al primo ordine. Posto invece $a = e$ la (37) e la (48) forniscono rispettivamente le le identità:

$$(55)\qquad \begin{aligned} &\text{i) } e^z = \left(1 + \frac{z}{\Omega}\right)^{\Omega} \quad \text{e quindi:} \quad a^z = \left(1 + \frac{z \log a}{\Omega}\right) \\ &\text{ii) } \log(1+x) = \Omega\left[(1+x)^{1/\Omega} - 1\right] \end{aligned}$$

cosicché "denotante Ω numerum infinite magnum, tam quantitates exponentiales quam logarithmi per potestates exponi possunt".[139] Nel prossimo capitolo III.4. vedremo come la reinterpretazione e la ridimostrazione da parte di Lagrange di un tale risultato fornirà la base per una teoria generale degli sviluppi in serie intere a coefficienti differenziali delle differenze e degli integrali finiti.

III. 3. *c*. δ. *Un'alternativa possibile al procedimento di Euler*

Il carattere non semplicemente formale della procedura di sviluppo applicata da Euler alle funzioni esponenziale e logaritmica risalta con ancora maggiore evidenza qualora lo si confronti con una possibile alternativa, la quale giunge agli stessi risultati attraverso l'impiego del metodo di sviluppo per determinazione dei coefficienti. Per questo basta porre l'equazione identica $a^z = [1 + (a-1)]^z$, da cui è facile trarre, sviluppando secondo la regola del binomio estesa a esponenti qualsiasi:

$$(56)\qquad \begin{aligned} &1 + (a-1)z + (a-1)^2\,\frac{z(z-1)}{2!} + (a-1)^3\,\frac{z(z-1)(z-2)}{3!} + \&c. = \\ &\qquad = K_0 + K_1 z + K_2 z^2 + K_3 z^3 + \&c. \end{aligned}$$

e quindi:

$$(57)\qquad \begin{aligned} &K_0 = 1 \\ &K_1 = (a-1) - \frac{1}{2}(a-1)^2 + \frac{1}{3}(a-1)^3 - \&c. \\ &K_2 = \frac{1}{2!}(a-1)^2 - \frac{3}{3!}(a-1)^3 + \frac{11}{4!}(a-1)^4 + \frac{50}{5!}(a-1)^5 - \&c. = \frac{1}{2!}\left[K_1\right]^2 \\ &K_3 = \frac{1}{3!}(a-1)^3 - \frac{6}{4!}(a-1)^4 + \frac{35}{5!}(a-1)^5 - \&c. = \frac{1}{3!}\left[K_1\right]^3 \\ &\&c. \end{aligned}$$

---

[139] Cfr. *ivi*, t. 1, p. 92.

da cui seguono tanto la (40) che la (50). Ponendo ora $(1+x) = a^z$ si avrà anche $z = \log_a (1+x)$. Per avere lo sviluppo della funzione logaritmica basta quindi invertire la serie[140]

$$(58) \qquad x = Kz + \frac{K^2}{2!}z^2 + \frac{K^3}{3!}z^3 + \&c.$$

ciò che si può fare, senza alcuna difficoltà per mezzo dello stesso metodo di sviluppo per determinazione dei coefficienti. Posta infatti l'identità

$$(59) \qquad z = H_0 + H_1 x + H_2 x^2 + H_3 x^3 + \&c.$$

si avrà, ricordandosi della (58):

$$(60) \qquad \begin{aligned} z &= H_0 + H_1\left(Kz + \frac{K^2}{2!}z^2 + \frac{K^3}{3!}z^3 + \&c.\right) + \\ &\qquad H_2\left(Kz + \frac{K^2}{2!}z^2 + \frac{K^3}{3!}z^3 + \&c.\right)^2 + \&c. \\ &= H_0 + [H_1 K]\, z + \left[H_1\frac{K^2}{2!} + H_2 K^2\right] z^2 + \left[H_1\frac{K^3}{3!} + H_2 K^3 + H_3 K^3\right] z^3 + \&c. \end{aligned}$$

ovvero:

$$(61) \qquad \begin{aligned} & H_0 = 0 \\ & H_1 = \frac{1}{K} \\ & H_2 = -\frac{H_1}{2!} = -\frac{1}{2K} \\ & H_3 = -\frac{H_1}{3!} - H_2 = \frac{1}{3K} \\ & \&c. \end{aligned}$$

da cui la (49) è immediata.

Se un tale procedimento non richiede alcuna ipotesi infinitesimalista, limitandosi alla semplice applicazione di un metodo generale, esso presenta

140Cfr. la precedente nota (129).

rispetto alla dimostrazione di Euler almeno tre svantaggi che giustificano la scelta di questi:
i) esso richiede l'impiego della regola del binomio estesa a esponenti reali qualsiasi (e non solo a esponenti razionali, per quanto di natura infinitesimale);
ii) esso identifica la costante K con il valore limite della (50), in modo che nel caso in cui *a* sia maggiore di due tanto la (40) che la (49) si trasformano in serie divergenti, ovvero esso connette gli sviluppi dell'esponenziale e del logaritmo a delle condizioni di convergenza che non corrispondono alla reale estensione di tali sviluppi;
iii) la legge di formazione dei coefficienti esibita dalla (57) non è perfettamente esplicita e la sua determinazione non induttiva richiede un procedimento noioso e algoritmicamente complesso.

Se non il terzo, almeno i primi due di questi svantaggi si presentano come tali solo agli occhi di un matematico che non intenda i propri procedimenti come dei semplici giochi formali e i propri risultati come mere stringhe simboliche sintatticamente derivate. Se molta storiografia ha per lungo tempo accreditato un'immagine di Euler assai vicina a un tale stereotipo, spero che un esempio come quello costituito dalla ricerca dello sviluppo in serie intera delle funzioni esponenziale e logaritmica possa servire come indizio per la necessità di una correzione. Il mio tentativo di mettere in luce i rapporti che nella concezione euleriana della scienza matematica si instaurano fra quantità e forma tende d'altronde a fornire un'alternativa a una tale insoddisfacente interpretazione.[141]

III. 3. *c. ε. Sviluppo in serie intera del seno e del coseno*

Come le funzioni esponenziale e logaritmica elementari, anche il seno e il coseno sono trattati da Euler come dei dati della nuova analisi.[142] Questi si limita infatti a presentarne le principali proprietà analitiche (senza alcuna giustificazione deduttiva), e a trarre da queste, per mezzo dell'impiego di coefficienti immaginari, lo sviluppo in serie intere di tali funzioni, mostrando nel contempo le relazioni algoritmiche che esse intrattengono con le funzioni esponenziale e logaritmica.

Introdotto il simbolo π per indicare il numero che esprime la circonferenza di un cerchio di raggio unitario (di cui egli fornisce un'approssimazione a 127 decimali), Euler presenta direttamente (senza alcuna definizione o giustificazione) la tavola dei valori dei seni e dei coseni di 0, $\pi/2$, π, $3\pi/2$, 2π - da cui egli conclude che seno e coseno sono funzioni limitate - e le relazioni che questi intrattengono con la tangente e la cotangente dello stesso arco (intese anch'esse come entità note).[143] Anche le seguenti proprietà analitiche

---

[141]Cfr. il precedente paragrafo II.2.α..

[142]Mi riferisco nel presente paragrafo alla prima parte del cap. VIII del primo tomo dell'*Introductio* [cfr. *ivi*, t. 1, pp. 93-103].

[143]Cfr. la prossima nota (147).

sono presentate come note:

$$
(62)\quad
\begin{aligned}
&\text{i)}\ \cos z = \sin(\pi/2 - z)\ ; \qquad \sin z = \cos(\pi/2 - z)\\
&\text{ii)}\ \sin^2 z + \cos^2 z = 1\\
&\text{iii)}\ \sin(x+z) = \sin x \cos z + \cos x \sin z\\
&\text{iv)}\ \cos(x+z) = \cos x \cos z - \sin x \sin z
\end{aligned}
$$

A fianco delle più elementari conseguenze di tali identità, Euler trae poi le seguenti, che derivano da (62)(ii), (iii) e (iv):[144]

$$
(63)\quad
\begin{aligned}
&\text{i)}\ (\cos z + \sqrt{-1}\sin z)(\cos z - \sqrt{-1}\sin z) = 1\\
&\text{ii)}\ (\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z)(\cos x \pm \sqrt{-1}\sin x) = \cos(x+z) \pm \sqrt{-1}\sin(x+z)\\
&\qquad \text{e quindi, ponendo } x = z \text{ e reiterando la moltiplicazione:}\\
&\text{iii)}\ (\cos z \pm \sqrt{-1}\sin z)^n = \cos nz \pm \sqrt{-1}\sin nz
\end{aligned}
$$

Sommando e sottraendo membro a membro le identità che esprimono, secondo la (63)(iii), le quantità $\sqrt{-1}\sin nz$ e $-\sqrt{-1}\sin nz$ si trae allora rispettivamente:

$$
(64)\quad
\begin{aligned}
&\text{i)}\ \cos nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n + (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n}{2}\\
&\text{ii)}\ \sin nz = \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\sin z)^n - (\cos z - \sqrt{-1}\sin z)^n}{2\sqrt{-1}}
\end{aligned}
\qquad [n \in \mathbb{N}]
$$

Sfruttando così la regola binomiale ristretta a esponenti naturali è facile trarre le espressioni di cos *nz* e sin *nz* come funzioni intere omogenee delle due variabili $v = \cos z$ e $w = \sin z$:

(65)

$$
\text{i)}\ \begin{cases}
\cos nz = \cos^n z - \binom{n}{2}\cos^{n-2} z \sin^2 z + \binom{n}{4}\cos^{n-4} z \sin^4 z - \ldots\\
\qquad + (-)^{\frac{n-2}{2}}\binom{n}{n-2}\cos^2 z \sin^{n-2} z + (-)^{n/2}\sin^n z \qquad [n\ \text{pari}]\\
\cos nz = \cos^n z - \binom{n}{2}\cos^{n-2} z \sin^2 z + \binom{n}{4}\cos^{n-4} z \sin^4 z - \ldots\\
\qquad + (-)^{\frac{n-3}{2}}\binom{n}{n-3}\cos^3 z \sin^{n-3} z + (-)^{\frac{n-1}{2}}\binom{n}{n-1}\cos z \sin^{n-1} z \qquad [n\ \text{dispari}]
\end{cases}
$$

[144]Cfr. la prossima nota (199).

$$\text{ii)}\begin{cases} \sin nz = \binom{n}{1}\cos^{n-1}z\sin z - \binom{n}{3}\cos^{n-3}z\sin^3 z + \binom{n}{5}\cos^{n-5}z\sin^5 z - \ldots \\ \quad +(-)^{\frac{n-4}{2}}\binom{n}{n-3}\cos^3 z\sin^{n-3}z + (-)^{\frac{n-2}{2}}\binom{n}{n-1}\cos z\sin^{n-1}z \qquad [\text{n pari}] \\ \sin nz = \binom{n}{1}\cos^{n-1}z\sin z - \binom{n}{3}\cos^{n-3}z\sin^3 z + \binom{n}{5}\cos^{n-5}z\sin^5 z - \ldots \\ \quad +(-)^{\frac{n-3}{2}}\binom{n}{n-2}\cos^2 z\sin^{n-2}z + (-)^{\frac{n-1}{2}}\sin^n z \qquad [\text{n dispari}] \end{cases}$$

Da qui Euler trae poi, per mezzo di un passaggio agli infinitamente piccoli simile a quello già utilizzato nel caso dell'esponenziale e del logaritmo,[145] gli sviluppi in serie intera del seno e del coseno. Se z è infatti infinitamente piccola e n infinito e si pone $z = \omega$ e $n = \Omega$, si avrà: $nz = \omega\Omega = x$ (dove x indica una variabile a valori finiti); $n(n-1)...(n-m+1) = \Omega(\Omega-1)...(\Omega-m+1) = \Omega^m$ ($m \in \mathbb{N}$): $\sin z = \sin \omega = \omega = x/\Omega$; $\cos z = \cos \omega = 1$. Bastano allora semplici sostituzioni nelle (65) per trarre:

$$(66)\quad \begin{aligned} &\text{i) } \cos x = 1 - \frac{x^2}{2!} + \frac{x^4}{4!} - \frac{x^6}{6!} + \&c. \\ &\text{ii) } \sin x = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} - \frac{x^7}{7!} + \&c. \end{aligned}$$

Date tali serie, Euler osserva che esse convergono assai rapidamente se $x < \pi/4$ e possono quindi venire impiegate per determinare i valori razionali approssimati dei seni e dei coseni di archi minori di $\pi/4$, ciò che è sufficiente per determinare successivamente, attraverso opportune combinazioni, i valori razionali approssimati dei seni e dei coseni di ogni arco. Dalle (66) è d'altra parte banale trarre gli sviluppi in serie intera delle funzioni circolari composte $y = \text{tg } x$ e $y = \text{cotg } x$ e quindi i valori razionali approssimati delle tangenti e delle cotangenti di ogni arco.

Anche se nel caso della funzione esponenziale la presupposizione infinitesimalista interviene fin dall'inizio del procedimento dimostrativo, mentre qui essa si applica a degli sviluppi (finiti) già formati, essa gioca nei due casi un ruolo assai simile (e richiede le medesime condizioni). Infatti se ω è un infinitamente piccolo del primo ordine, le identità $\sin \omega = \omega$ e $\cos \omega$ [=

---

[145] Per tutti i problemi legati a un tale passaggio rinvio alle osservazioni contenute nel precedente paragrafo III.3.*c*.γ..

$\sqrt{1 - \sin^2 \omega} = \sqrt{1 - \omega^2} = 1 - \frac{1}{2}\omega^2 + \&c.] = 1$ sono esse stesse delle identità del primo ordine. Euler globalizza quindi, qui come nel caso precedente, delle relazioni sussistenti su degli intervalli infinitesimali per mezzo dell'introduzione di un opportuno fattore infinito. Una tale globalizzazione conduce, come era già avvenuto per l'esponenziale (ma non per il logaritmo), a delle identità dell'ordine del finito, le quali restano vere su tutto **R**. A differenza che nel caso dell'esponenziale, Euler presuppone tuttavia qui il valore del coefficiente del primo termine dello sviluppo di sin x, ponendo appunto l'identità $\sin \omega = \omega$, che deriva da $\sin \omega = K\omega$ per la posizione $K = 1$. Se è chiaro che (avendo presupposto l'unitarietà del raggio del cerchio cui seno e coseno si riferiscono[146]) tale costante non è a sua volta una funzione di alcun'altra quantità (non formando le funzioni circolari alcun sistema dipendente da una base variabile), ciò non implica ancora la conoscenza *a priori* del suo valore numerico. Per giungere alla determinazione di questo - ovvero alla equiparazione *al primo ordine degli infinitamente piccoli* fra l'infinitamente piccolo che esprime l'argomento del sino e quello che ne esprime il valore - non sembra esservi altro modo che quello di studiare il rapporto $\frac{\sin \omega}{\omega}$ (o se si preferisce il limite $\mathrm{Lim}_{x \to 0} \frac{\sin x}{x}$). Ma il modo più semplice e intuitivo per questo è proprio quello di sviluppare il seno in una serie intera centrata sullo zero, ciò che assegna al rapporto in questione una forma polinomiale. Se Euler ha un altro argomento per giustificare *a priori* la posizione $K = 1$, egli non lo esplicita, nascondendo al lettore che le sue identità non si riferiscono all'ordine del finito (per cui ogni infinitesimale è uguale a ogni altro infinitesimale), ma al primo ordine degli infinitamente piccoli. Dietro una tale presupposizione sembra quindi all'opera il ricorso a una conoscenza *già* acquisita per mezzo della individuazione per altra via dello sviluppo del seno, ciò che conduce a una evidente circolarità.

Detto questo, occorre osservare che, mentre nel caso dello sviluppo delle funzioni esponenziali e logaritmica il ricorso a una presupposizione infinitesimalista costituiva un'alternativa a un semplicissimo procedimento fondato su un'applicazione del metodo di sviluppo per determinazione dei coefficienti, esso si presenta qui, in assenza di una manipolazione formale (di carattere non differenziale) atta a rendere possibile l'applicazione di un tale metodo, come la via più naturale. Se si cerca infatti di utilizzare le (62), o delle loro opportune conseguenze, per costruire un'identità fra serie intere, da cui trarre un sistema infinitario atto alla determinazione dei coefficienti, ci si trova di fronte a sistemi indeterminati (o comportanti false identità fra

[146]Si vede qui assai chiaramente il peso esercitato su Euler dalla precedente tradizione matematica, ovvero il carattere di dati delle funzioni trascendenti. In termini strettamente formali un funzione trigonometrica avrebbe dovuto essere intesa come un rapporto a denominatore costante, ma arbitrario. Non è tuttavia l'oggetto formale che Euler sembra studiare, ma l'entità geometrica fornita dalla storia stessa della matematica.

differenti quantità costanti). Vi è qui una manifestazione dell'irriducibilità analitica, nel quadro dell'analisi algebrica, delle funzioni circolari, la quale rende queste ultime delle entità la cui originaria natura geometrica si trasferisce in una possibile caratterizzazione analitica solo a condizione di un ricorso a una loro determinazione o in quanto soluzioni di opportune equazioni differenziali o come limiti di serie già date e autonomamente concepite o infine come esponenziali immaginari indipendentemente introdotti. Se questa difficoltà costituirà, durante tutto il XVIII secolo, un ostacolo a una completa riformulazione analitica della matematica conosciuta, essa sembra semplicemente ignorata da Euler che assume come note le (62) - le quali sono intese come relazioni fra entità date indipendentemente da esse[147] - e usa esplicite presupposizioni infinitesimaliste per operare opportune trasformazioni capaci di condurre tanto agli sviluppi in serie di seno e coseno che alle loro espressione in termini di esponenziali immaginari.[148] Il procedimento infinitesimalista di Euler sembra allora la sola via atta a permettere un semplice trattamento analitico delle funzioni circolari, la quale sia nel contempo compatibile con il progetto di esclusione del *calcolo* e con la concezione delle serie intere come sviluppi di funzioni *già* date e rispondente alla concettualizzazione di queste come oggetti matematici autonomi e elementari (e non come semplici abbreviazioni di certe composizioni di operazioni trascendenti su variabili immaginarie).[149] Nel prossimo capitolo III.6. vedremo d'altra parte come lo stesso procedimento proposto da Lagrange per giungere alla determinazione delle (66) non sia che una riformulazione mascherata della dimostrazione di Euler.[150]

III. 3. *c*. ζ. *Il passaggio agli esponenziali immaginari*

Il confronto fra le (66) e la (40) e la considerazione del ruolo giocato nella precedente dimostrazione dal coefficiente immaginario $\sqrt{-1}$ - la cui introduzione permette di operare degli opportuni cambiamenti di segno, con-

---

[147]Ecco come Euler introduce nei primi due paragrafi del capitolo VIII lo studio delle funzioni circolari, ovvero delle "quantità trascendenti che nascono dal cerchio" [cfr. *ivi*, t. 1, pp. 93]:

> Post Logarithmos et quantitates exponentiales considerari debent Arcus circulares eorumque Sinus et Cosinus, quia non solum aliud quantitatum transcendentium genus constituunt, sed etiam ex ipsi Logarithmis et exponentialibus, quando imaginariis quantitatibus involvuntur, proveniunt, id quod infra clarius patebit. [...]
>
> Denotante z Arcum hujus Circuli quemcunque, cujus Radium perpetuo assumo = 1; hujus Arcus z considerari potissimum solent Sinus et Cosinus. Sinum autem Arcus z in posterum hoc modo indicabo, *sin*. A. z seu tantum *sin*. z. Cosinum vero hoc modo *cos*. A. z, seu tantum *cos*. z. Ita, cum π sit arcus 180°, erit [...]

Seguono - senza alcuna giustificazione - la tavola dei valori del sino e del coseno per 0, $\pi/2$, π, $3\pi/2$, 2π e le (62). E' del tutto chiaro che anche in questo caso vige una restrizione implicita sui valori di z, la quale non è intesa variare che sul campo reale.

[148]Cfr. *sotto*.

[149]Cfr. il prossimo paragrafo III.3.*c*.ζ..

[150]Lo stesso si può dire per il procedimento proposto da Arbogast nel suo manoscritto del 1789 [cfr. Arbogast (1789), par. 28].

ducendo all'eliminazione dei termini di posto pari nella somma algebrica $(\cos z + \sqrt{-1} \sin z)^n \pm (\cos z - \sqrt{-1} \sin z)^n$ - suggerisce la sussistenza di una relazione fra le funzioni circolari e la funzione esponenziale, che dovrebbe potersi individuare tramite l'introduzione di fattori immaginari. Se il percorso euristico seguito da Euler per giungere alla determinazione di una tale relazione dovette consistere probabilmente in un confronto fra le serie sviluppo, quello che egli propone per fornirne una prova è leggermente differente e non richiede alcun riferimento alle (66), limitandosi a richiamare le stesse presupposizioni infinitesimaliste che conducono a esse.

Ponendo infatti nelle (64) $z = \omega$, $n = \Omega$ e $\omega\Omega = x$ si ha (ricordandosi che $\sin \omega = \omega$ e $\cos \omega = 1$):

$$(67)\qquad \begin{aligned} &\text{i) } \cos x = \frac{\left(1 + \frac{x\sqrt{-1}}{\Omega}\right)^{\Omega} + \left(1 - \frac{x\sqrt{-1}}{\Omega}\right)^{\Omega}}{2} \\ &\text{ii) } \sin x = \frac{\left(1 + \frac{x\sqrt{-1}}{\Omega}\right)^{\Omega} - \left(1 - \frac{x\sqrt{-1}}{\Omega}\right)^{\Omega}}{2\sqrt{-1}} \end{aligned}$$

da cui secondo la (55)(i) è ovvio trarre:

$$(68)\qquad \begin{aligned} &\text{i) } \cos x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2} \\ &\text{ii) } \sin x = \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \end{aligned}$$

e viceversa:

$$(69)\qquad \begin{aligned} &\text{i) } e^{x\sqrt{-1}} = \cos x + \sqrt{-1} \sin x \\ &\text{ii) } e^{-x\sqrt{-1}} = \cos x - \sqrt{-1} \sin x \end{aligned}$$

Se nella (64)(ii) si pone[151] invece $n = 1/\Omega$ si trae (essendo ovviamente $\sin z/\Omega = z/\Omega$):

[151] Euler mostra che lo stesso procedimento applicato alla (64)(i) non conduce a alcun risultato interessante.

(70) $$\frac{z}{\Omega} \simeq \frac{(\cos z + \sqrt{-1}\ \sin z)^{1/\Omega} - (\cos z - \sqrt{-1}\ \sin z)^{1/\Omega}}{2\sqrt{-1}}$$

Ponendo $1+x = \cos z \pm \sqrt{-1}\ \sin z$ dalla (55)(ii) si trae d'altra parte

(71) $$(\cos z \pm \sqrt{-1}\ \sin z)^{1/\Omega} = 1 + \frac{1}{\Omega} \log (\cos z \pm \sqrt{-1}\ \sin z)$$

e quindi, sostituendo nella (70):

(72) $$z = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \left(\frac{\cos z + \sqrt{-1}\ \sin z}{\cos z - \sqrt{-1}\ \sin z}\right)$$

Dividendo poi per cos z tanto il numeratore che il denomitore dell'argomento del logaritmo si ottiene:

(73) $$z = \frac{1}{2\sqrt{-1}} \log \left(\frac{1 + \sqrt{-1}\ \mathrm{tg}\ z}{1 - \sqrt{-1}\ \mathrm{tg}\ z}\right)$$

Ponendo $x = \sqrt{-1}\ \mathrm{tg}\ z$ in (54)(v) si ha d'altra parte

(74) $$\log \left(\frac{1 + \sqrt{-1}\ \mathrm{tg}\ z}{1 - \sqrt{-1}\ \mathrm{tg}\ z}\right) = 2\sqrt{-1}\ \mathrm{tg}\ z - \frac{2}{3}\sqrt{-1}\ \mathrm{tg}^3\ z + \frac{2}{5}\sqrt{-1}\ \mathrm{tg}^5\ z - \&c.$$

e quindi:

(75) $$z = \mathrm{tg}\ z - \frac{1}{3}\ \mathrm{tg}^3 z + \frac{1}{5}\ \mathrm{tg}^5 z - \&c.$$

L'interesse analitico di tali relazioni è evidente: se le (68) esprimono il seno e il coseno sotto forma di una funzione esponenziale, le (69) esprimono gli esponenziali immaginari in termini di seni e coseni di archi reali, la (72) permette di ridurre una differenza di logaritmi immaginari a un arco reale, mentre la (75), esprimendo la relazione fra un arco qualunque e la sua tangente, permette di rappresentare per mezzo di un serie numerica tutti i multipli di π. Ponendo a esempio le sostituzioni $z = \pi/4$ e $z = \pi/6$ si ha rispettivamente:

(76)

i) $$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} + \&c.$$

ii) $$\frac{\pi}{6} = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{1}{3^2\sqrt{3}} + \frac{1}{5.3^2\sqrt{3}} - \frac{1}{7.3^3\sqrt{3}} + \&c.$$

La prima di queste serie è la nota serie di Leibniz per la determinazione della circonferenza del cerchio,[152] mentre la seconda fornisce immediatamente la serie:

$$(77) \qquad \pi = 3\sqrt{3} - \frac{2\sqrt{3}}{3^2} + \frac{2\sqrt{3}}{5.3^2} - \frac{2\sqrt{3}}{7.3^3} + \&c.$$

che è la serie che ha permesso di determinare l'approssimazione razionale di π fornita da Euler all'inizio del suo capitolo VIII.[153]

Come si vede bene lo scopo di Euler è quello di dimostrare come a partire dalla relazione fra funzioni circolari e esponenziali immaginari si possa ritrovare un grande insieme di risultati noti, i quali risultano in tal modo unificati all'interno di una teoria generale assai ricca. Si comprende allora perché questi abbia scelto di dimostrare la (68) tramite un procedimento che non corrisponde al percorso euristico più naturale, il quale verte sulla corrispondenza formale sulle serie intere che forniscono gli sviluppi dell'esponenziale e del seno e coseno. Lo stesso metodo che permette di giungere alle (68) permette infatti di giungere anche alla (72) e quindi alla (75). Una preoccupazione di organicità e omogeneità sembra quindi guidare la scelta di Euler.

Ma se questi ha invertito localmente il suo percorso euristico, perché egli non lo ha invertito anche globalmente, scegliendo le (68) come una *definizione* delle funzioni circolari $y = \cos x$ e $y = \sin x$? Un tale procedimento avrebbe infatti risolto molte delle difficoltà sottolineate in precedenza, permettendo di superare l'ostacolo costituito dalla irriducibilità analitica (relativamente all'analisi algebrica) delle funzioni circolari in quanto tali. La risposta verte sulla stessa interpretazione intesa delle (68), che Euler sembra concepire come la manifestazione di una profonda relazione matematica che sussiste fra fra due oggetti intesi come essenzialmente differenti fra loro. Scegliere le (68) come una definizione avrebbe equivalso a privare le funzioni circolari del loro naturale riferimento (geometrico) che, benché nascosto, resta assolutamente presente nella *démarche* di Euler. Una funzione risulterebbe in tal modo definita dalle sue proprietà formali (e non dalla sua forma esplicita, o che dir si voglia dalla forma che la rappresenta) o al più dalla sua espressione in serie intera. Un simile approccio "radicalmente" formalista sembra estraneo al punto di vista euleriano - così come d'altronde a quello dello stesso Lagrange - e non appartiene che a un'età successiva nell'evoluzione del pensiero matematico. La questione non verte tuttavia soltanto sulle funzioni in quanto tali. La stessa scrittura $e^{\sqrt{-1}}$ non possiede infatti, in se stessa, alcun significato esplicito e indipendente. Se è possibile considerarla

[152] Cfr. il precedente paragrafo III.1.η..
[153] Cfr. il precedente paragrafo III.3.c.ε..

come un'abbreviazione della serie numerica $1 + \sqrt{-1} - \frac{1}{2!} - \frac{\sqrt{-1}}{3!} + \&c.$, questa serie è a sua volta tratta dalla (54)(ii) e una tale interpretazione riduce quindi una definizione delle funzioni circolari per mezzo delle (68) a una equiparazione di queste al loro sviluppo, inteso come oggetto indipendente e precedentemente introdotto. Non solo, dal punto di vista euleriano, il carattere stesso di una tale serie, ovvero la presenza in essa di termini immaginari, rende questa inconcepibile indipendentemente dalle (68), ovvero da opportune identità che permettano l'eliminazione finale di tali coefficienti. Così, se le (68) vogliono essere intese come una definizione, queste sono al più una definizione contestuale di $e^{\sqrt{-1}}$, piuttosto che del seno e del coseno. Lo stesso simbolo $\sqrt{-1}$ non svolge infatti nel procedimento di Euler che il ruolo di un simbolo muto, interamente caratterizzato dall'identità $\left(\sqrt{-1}\right)^2 = -1$, la quale permette opportuni cambiamenti di segni. Invertire globalmente il cammino euristico avrebbe equivalso quindi a invertire l'ordine di intelligibilità assegnando a un simbolo muto il ruolo di un *definiens* e a un oggetto indipendente - il quale traspone un concetto perfettamente autonomo - quello di un *definiendum*.

III. 3. *d.*
L'EDIFICIO DELL'ANALISI ALGEBRICA (CAPITOLI IX-XVIII)

III. 3. *d.* α. *Premessa*

Concepita l'analisi come la teoria generale delle funzioni, i risultati raggiunti nei primi otto capitoli del primo tomo dell'*Introductio* ne forniscono gli "elementi".[154] E' a partire da essi che Euler erige nei restanti dieci capitoli del suo volume il grandioso edificio della nuova *analisi algebrica* riformulando in un quadro unitario e reinterpretando in termini funzionali un ampio insieme di risultati già noti e ottenendone di nuovi, ma soprattutto fornendo l'immagine di una costruzione unitaria, retta da una struttura interna che permette l'identificazione di numerosi legami fino a allora insospettati e che fornisce in tal modo la chiave per illuminanti applicazioni l'una nell'altra di teorie che erano apparse fino a alloro distinte. Benché molti degli argomenti matematici affrontati nel corso di tale impresa possano con buone ragioni venire intesi come estranei al percorso che la mia dissertazione si ripropone di ricostruire, a partire dai primi anni del XVIII secolo fino alla pubblicazione della *Théorie des fonctions analytiques* di Lagrange, l'unificazione realizzata da Euler mi è apparsa assolutamente sintomatica e tale da giustificare una analisi dettagliata di tutti i dieci capitoli che completano il primo tomo dell'*Introductio*. E'

[154]Cfr. d'Alembert (El. Sci.).

a questo scopo che è dedicata la presente sezione che dividerò a sua volta in quattro sottosezioni, le quali propongono una classificazione degli argomenti trattati che li ordina, al di là dell'originaria partizione in capitoli, in quattro diversi (anche se certamente connessi) nuclei tematici.

III. 3. *d*(1).
TEORIA GENERALE DEI FATTORI TRINOMI (CAPITOLI IX-XII)

III. 3. *d*. β. *Forma generale dei fattori trinomi di una funzione intera con fattori semplici immaginari e determinazione delle loro radici*

La considerazione dei fattori trinomi (o doppi[155]) di una funzione intera fornisce a Euler un metodo per determinare in certi casi particolari i fattori semplici immaginari di tale funzione indipendentemente dalla conoscenza delle radici immaginarie dell'equazione corrispondente, le quali possono in tal modo venire a loro volta determinate. Essendo sempre possibile moltiplicare fra loro i fattori semplici di una funzione intera ${}_nF(z)$ in modo da non formare che dei fattori trinomi reali, la ricerca dei fattori semplici immaginari di una funzione intera può infatti venire ridotta alla ricerca di quei fattori trinomi la cui scomposizione fornisce a sua volta due fattori semplici immaginari.

Sia[156] allora

$$(78) \qquad {}_2F(z) = P - Qz + Rz^2$$

un fattore trinomio della funzione intera ${}_nF(z)$. I due fattori semplici di ${}_2F(z)$ sono ovviamente immaginari se e solo se vale la diseguaglianza:[157]

$$(79) \qquad Q^2 - 4PR < 0 \text{ , ovvero: } \left|\frac{Q}{2\sqrt{PR}}\right| < 1$$

> Cum igitur - continua Euler - Sinus et Cosinus Angulorum sint unitate minores, formula $P - Qz + Rz^2$ Factores simplices habebit imaginarios si fuerit $\frac{Q}{2\sqrt{PR}}$ = Sinui vel Cosinui cujuspiam Anguli.[158]

Sfruttando la limitatezza della funzione $y = \cos x$ e il fatto che se x varia su $R^+ - \{k\pi\}$ ($k = 0, 1, 2,...$), allora y assume tutti i valori reali appartenenti all'intervallo (-1, 1) e solo tali valori, Euler esprime la condizione indicata dalla

---

[155] Cfr. il precedente paragrafo III.3.*b*.β..

[156] Cfr. Euler (1748), t. 1, pp. 108 e segg..

[157] Per quanto non esplicitato (come usuale nei testi dell'epoca) il riferimento al valore assoluto è del tutto evidente dal contesto [cfr. *ivi*, p. 108].

[158] Cfr. *ivi*, p. 108.

(79) per mezzo dell'identità:

$$(80) \qquad Q = 2\sqrt{PR}\cos x \qquad [k\pi < x < (k+1)\pi \quad (k = 0, 1, 2, ...)]$$

Essendo d'altra parte ${}_2F(z)$ il prodotto di due fattori semplici di ${}_nF(z)$ rispettivamente della forma $\left(\frac{a_i}{K} - \frac{z}{K}\right)$ e $\left(\frac{a_j}{K} - \frac{z}{K}\right)$ (dove a_i e a_j indicano due radici comuni alle equazioni ${}_nF(z) = 0$ e ${}_2F(z)$ e K è un fattore costante), si avrà in generale: $R = 1/K^2 > 0$; e, se a_i e a_j sono due radici immaginarie coniugate, anche: $P = \frac{a_i a_j}{K^2} > 0$. Se ${}_2F(z)$ è un fattore trinomio di ${}_nF(z)$ a fattori a sua volta immaginari si potrà quindi[159] porre nella (78) $P = p^2$ e $R = r^2$. Una funzione intera ${}_nF(z)$ ha così (almeno) due fattori semplici immaginari se e solo se essa ha (almeno) un fattore trinomio ${}_2F(z)$ della forma:

$$(81) \qquad {}_2F(z) = p^2 - (2pr\cdot\cos x) + r^2z^2 \qquad [k\pi < x < (k+1)\pi \ (k = 0, 1, 2,...)]$$

Per quanto semplice l'idea di Euler è assolutamente geniale. La funzione $y = \sin x$ è considerata qui semplicemente come un'entità analitica che gode delle proprietà indicate. Una volta che sia stata posta la (80) e si sia quindi passati dalla (78) alla (82), il fattore $\cos x$ può tuttavia venire inteso come un normale fattore trigonometrico il quale gode di *tutte* le proprietà specifiche di fattori di tal genere.[160]

La (62)(ii) permette in primo luogo di scrivere i fattori semplici immaginari di un fattore doppio ${}_2F(z)$ che rispetta la (81) sotto la forma

$$(82) \qquad \begin{array}{l} {}_1F_1(z) = rz - p(\cos x + \sqrt{-1}\ \sin x) \\ {}_1F_2(z) = rz - p(\cos x - \sqrt{-1}\ \sin x) \end{array} \qquad [k\pi < x < (k+1)\pi \quad (k = 0, 1, 2, ...)]$$

Le radici dell'equazione ${}_2F(z) = 0$ avranno allora la forma:

$$(83) \qquad \begin{array}{l} z_1 = \frac{p}{r}(\cos x + \sqrt{-1}\ \sin x) \\ z_2 = \frac{p}{r}(\cos x - \sqrt{-1}\ \sin x) \end{array} \qquad [k\pi < x < (k+1)\pi \quad (k = 0, 1, 2, ...)]$$

[159] Euler trasforma in realtà la (78) nella (81) senza presentare alcuna giustificazione per la positività dei fattori P e R. L'argomento qui presentato è quindi implicito.

[160] Ciò che Euler ha quindi compreso è che tutte le proprietà analitiche del coseno, salvo quelle indicate, sono irrilevanti rispetto alla questione in esame e possono quindi venire sfruttate in termini algoritmici senza richiedere alcuna limitazione.

e corrisponderanno quindi a due radici immaginarie dell'equazione ${}_nF(z) = 0$.

Sia ora[161]

$$(84) \qquad {}_nF(z) = \alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z^3 + ... + \alpha_n z^n = 0$$

un'equazione algebrica di grado n. Se essa ha (almeno) due radici immaginarie, si avrà anche, secondo la (83), ponendo per semplicità $t = p/r$ e ricordandosi della (63)(iii):

$$(85) \qquad \begin{array}{l} \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu t^\nu (\cos \nu x + \sqrt{-1} \sin \nu x) = 0 \\ \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu t^\nu (\cos \nu x - \sqrt{-1} \sin \nu x) = 0 \end{array} \qquad [k\pi < x < (k+1)\pi \;\; (k = 0, 1, 2, ...)]$$

Sommando e sottraendo membro a membro tali equazioni fra loro (e dividendo rispettivamente i risultati per 2 e $2\sqrt{-1}$) si ottengono peraltro le nuove identità:

$$(86) \qquad \begin{array}{l} \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu t^\nu \cos \nu x = 0 \\ \sum_{\nu=0}^{n} \alpha_\nu t^\nu \sin \nu x = 0 \end{array} \qquad [k\pi < x < (k+1)\pi \;\; (k = 0, 1, 2, ...)]$$

le quali possono essere tratte direttamente dalla (84) ponendo rispettivamente:

$$(87) \qquad \begin{array}{l} z^\nu = t^\nu \cos \nu x \\ z^\nu = t^\nu \sin \nu x \end{array} \qquad [\nu = 0, 1, 2, ...; \; k\pi < x < (k+1)\pi \;\; (k = 0, 1, 2, ...)]$$

Data un'equazione come la (84) è allora possibile, operando le sostituzioni (87), passare direttamente alle (86), a partire dalle quali si può cercare di determinare le incognite t e x e, quindi, il fattore trinomio (81). A questo scopo Euler propone un metodo *standard* che consiste semplicemente nel moltiplicare le due equazioni (85) per i fattori sin mx e cos mx ($m \in \mathbb{N}$) e nel combinare opportunamente le quattro equazioni risultanti.

---

[161] Euler pone in verità: $\alpha + \beta z + \gamma z^2 + \delta z^3 + \&c. = 0$. Il riferimento a delle equazioni intere di grado (finito) qualunque sembra tuttavia implicito, almeno relativamente alle immediate applicazioni del suo risultato.

> Hujusmodi - egli scrive - [...] duæ æquationes quæcunque conjunctæ [si tratta di due fra le quattro equazioni tratte secondo il procedimento indicato] determinabunt incognitas t et x; quod cum plerumque pluribus modis fieri possit, simul plures Factores trinomiales obtinentur, iique adeo omnes, quod Functio proposita in se complecitur.[162]

Dalla determinazione di tutti i fattori trinomi (della forma (83)) è d'altra parte banale passare alla determinazione di tutte le radici immaginarie dell'equazione assegnata. Se tale equazione ha quindi delle radici immaginarie e se le (86) forniscono un sistema algebrico risolvibile in campo reale,[163] il metodo di Euler permette così di determinare tali radici indipendentemente dalla determinazioni dei fattori semplici della funzione intera corrispondente.

III. 3. *d. γ. Radici di un numero reale*

Come semplice applicazione del suo metodo, Euler fornisce le radici di un numero reale[164] qualsiasi $-\alpha^n$. Data l'equazione

(88) $_{n}F(z) = \alpha^n + z^n = 0 \quad [n > 1, n \in N]$

le sostituzioni (87) forniscono infatti il sistema:

$$(89) \qquad \begin{cases} \alpha^n + t^n \cos nx = 0 \\ t^n \sin nx = 0 \end{cases}$$

di cui è facile determinare le infinite radici reali:

$$(90) \quad \begin{array}{llll} \text{i) n qualsiasi:} & x = \dfrac{(2k+1)\pi}{n}; & t = \alpha & [k = 0, 1, 2, ...] \\ \text{ii) n pari:} & x = \dfrac{(2k+1)\pi}{n}; & t = -\alpha & [k = 0, 1, 2, ...] \\ \text{iii) n dispari:} & x = \dfrac{2k\pi}{n}; & t = -\alpha & [k = 0, 1, 2, ...] \end{array}$$

di cui Euler non considera che le (i). Distinta l'ovvia soluzione $x = k\pi/n$ (k = 0, 1, 2,...) della seconda delle equazioni (89) nelle due soluzioni $x = (2k+1)\pi/n$ e $2k\,\pi/n$ (k = 0, 1, 2,...) egli infatti scrive:

> Casus hos ideo distinguo, quod eorum Cosinus sint differentes; priori enim casu erit $cos.\ (2k+1)\pi = -1$ posteriori casu autem $cos.\ 2k\,\pi = +1$. Patet autem priorem for-

[162] Cfr. *ivi*, p. 111.

[163] La natura reale di t e x è del tutto implicita nel ragionamento di Euler.

[164] Il carattere reale del coefficiente α^n è implicito nel riferimento al metodo precedente.

mam $nx = (2k+1)\pi$ sumi debere, quippe quæ dat $cos. nx = -1$, unde fit $0 = \alpha^n - \iota^n$, hincque porro $\iota = \alpha = p/r$. Erit ergo $p = \alpha$, $r = 1$, & $x = (2k+1)\pi/n$.[165]

Compiute queste sostituzioni nella (81) si ottiene:

$$(91) \quad {}_2F_k(z) = \alpha^2 - (2\alpha \cos \frac{(2k+1)\pi}{n})z + z^2$$

$$[k = 0, 1, 2, ...; k \neq \frac{hn-1}{2}; h = 1, 3, 5, ...]$$

che contiene a sua volta o $n/2$ (se n è pari) o $\frac{n}{2}-1$ (se n è dispari) fattori semplici della funzione ${}_nF(z) = \alpha^n + z^n$. Infatti se $k > \frac{n-1}{2}$ (ma diverso da $\frac{hn-1}{2}$ (h = 1, 3, 5,... e n dispari)) non si ritrovano che gli stessi valori trovati per $k < \frac{n-1}{2}$, mentre se $k = \frac{hn-1}{2}$ (h = 1, 3, 5,...) - e n è quindi dispari - si ha $x = \pi$ e la (91) non esprime più un fattore trinomio di ${}_nF(z)$ a radici immaginarie: le sue radici coincidono con la radice reale $z = -\alpha$ dell'equazione assegnata, la quale non fornisce che un fattore semplice ${}_1F(z) = \alpha + z$ di ${}_nF(z)$.

Lo stesso procedimento si applica ovviamente anche al caso della funzione ${}_nF(z) = \alpha^n - z^n$, fornendo la forma generale dei suoi fattori trinomi:

$$(92) \quad {}_2F_k(z) = \alpha^2 - (2\alpha \cos \frac{2k\pi}{n})z + z^2$$

$$[k =, 1, 2, ...; k \neq \frac{hn}{2}; h = 1, 2, 3, ...]$$

L'interesse che Euler assegna ai propri risultati sembra principalmente connesso, più che alla ricerca delle radici di opportune equazioni algebriche, a una teoria generale della trasformazione in prodotti finiti o infiniti di una funzione qualsiasi. La considerazione della parte restante del capitolo IX non sembra lasciare a questo proposito alcun dubbio: egli fa seguire la (91) e la

165 Cfr. *ivi*, t. 1, pp. 111. Per quanto Euler non giustifichi in nessun modo la sua scelta è chiaro che la considerazione delle (ii) e delle (iii) conduce a ritrovare gli stessi fattori trinomi già trovati in base alle (i). Per rendersi conto di questo basta scrivere le frazioni $\frac{(2k+1)\pi}{n}$ e $\frac{2k\pi}{n}$ rispettivamente sotto le forme $\pi + \frac{[2k-(n-1)]\pi}{n}$ e $\pi + \frac{(2k-n)\pi}{n}$, ciò che giustifica le identità: $-2\alpha \cos \frac{(2k+1)\pi}{n} = 2\alpha \cos \frac{[2k-(n-1)]\pi}{n}$ e $-2\alpha \cos \frac{2k\pi}{n} = 2\alpha \cos \frac{(2k-n)\pi}{n}$, i cui secondi membri forniscono, per n rispettivamente pari e dispari, i medesimi valori forniti da $2\alpha \cos \frac{(2k+1)\pi}{n}$.

(92) da analoghe applicazioni del metodo generale al caso delle funzioni ${}_nF(z) = \alpha + \beta z^n + \gamma z^{2n}$, ${}_nF(z) = \alpha + \beta z^n + \gamma z^{2n} + \delta z^{3n}$, &c. e non le applica a sua volta che allo sviluppo in prodotti infiniti di opportune funzioni esponenziali, del seno e del coseno. Tuttavia il passaggio dalla (91) alla determinazione delle radici del numero reale qualsiasi $-\alpha^n$ è del tutto triviale, essendo per questo sufficiente operare una semplice sostituzione nelle (85), ottenendo:

$$z_k = \alpha\left[\cos\left(\frac{2k+1}{n}\right)\pi \pm \sqrt{-1}\,\sin\left(\frac{2k+1}{n}\right)\pi\right]$$

$$(93)\qquad \left[\begin{array}{ll} k = 0, 1, 2, \ldots, \dfrac{n-2}{2} & \text{se } n \text{ è pari} \\ k = 0, 1, 2, \ldots, \dfrac{n-1}{2} & \text{se } n \text{ é dispari} \end{array}\right]$$

che non è difficile riconoscere come un caso particolare della nota formula che fornisce le radici di un qualsiasi numero complesso.

III. 3. *d. δ. Sviluppi in prodotti infiniti di particolari funzioni esponenziali, del seno e del coseno*

La strada che Euler propone per applicare il metodo precedente alla ricerca degli sviluppi in prodotti infiniti di funzioni non intere è differente da quella che ci si potrebbe aspettare. In luogo di estendere tale metodo al caso di polinomi a grado infinito, comprendendo in tal modo le serie sviluppo di *ogni* funzione (ciò che non fornisce *a priori* alcuna garanzia che il sistema infinito sorto dalle (86) sia risolvibile in campo reale), egli propone di cerare opportune trasformazioni che riducano la funzione assegnata a una funzione intera, alla quale questo sia applicabile senza particolari difficoltà. E' facendo ricorso a un simile procedimento che egli determina infatti gli sviluppi in prodotti infiniti delle funzioni trascendenti $F(z) = e^z \pm e^{-z}$,[166] $F(x) = \sin x$ e

---

[166] Prima di rivolgersi alla ricerca dello sviluppo in un prodotto infinito della funzione $F(z) = e^z \pm e^{-z}$, Euler mostra come l'applicazione di un analogo procedimento al caso della funzione $F(z) = e^z - 1$ non produce il risultato desiderato. Il ragionamento di Euler può riformularsi nei termini seguenti. Data la (55)(i) e poste le sostituzioni $\left(1+\frac{z}{\Omega}\right) = \alpha$, $\Omega = n$ e $z = 1$ si avrà $F(z) = e^z - 1 = \alpha^n - z^n$, i cui fattori trinomi saranno (in base alla (92)):

$${}_2F_k(z) = \left(1+\frac{z}{\Omega}\right)^2 - 2\left(1+\frac{z}{\Omega}\right)\cos\frac{2k\pi}{\Omega} + 1 \qquad [k = 1, 2, 3, \ldots]$$

La sostituzione illegittima $k = 0$ manifesta la radice semplice $z = 0$ che risulta d'altra parte dallo stesso sviluppo in serie intera di $e^z - 1$. Per trovare i fattori restanti Euler pone (omettendo gli infinitesimi di ordine superiore a due nello sviluppo in serie intera del coseno):

$F(x) = \cos x$.

Per quanto riguarda la prima di queste funzioni, la (55)(i) permette di porre

$$(94) \qquad F(z) = e^z - e^{-z} = \left(1 + \frac{z}{\Omega}\right)^{\Omega} - \left(1 - \frac{z}{\Omega}\right)^{\Omega}$$

(in cui Ω è un numero infinito), che le sostituzioni $\Omega = n$, $1 + \frac{z}{\Omega} = \alpha$ e $1 - \frac{z}{\Omega} = v$ trasformano nella funzione intera ${}_nF(v) = \alpha^n - v^n$, i cui fattori trinomi saranno (secondo la (92)):[167]

$${}_2F(v) = \alpha^2 - (2\alpha \cos \frac{2k\pi}{n})v + v^2 \qquad \left[\begin{array}{l} k = 1, 2, ..., \frac{n-2}{2} \text{ se n é pari} \\ k = 1, 2, ..., \frac{n-1}{2} \text{ se n è dispari} \end{array}\right.$$

$$(95) \qquad = 2 + \frac{2z^2}{\Omega^2} - 2\left(1 - \frac{z^2}{\Omega^2}\right)\cos\frac{2k\pi}{\Omega} \qquad [k = 1, 2, ...]$$

$$= \frac{4}{\Omega^2}\left[\left(1 - \frac{k^2\pi^2}{\Omega^2}\right)z^2 + k^2\pi^2\right] \qquad [k = 1, 2, ...]$$

La sostituzione illegittima $k = 0$ manifesta la radice $z = 0$ che fornisce a sua volta il fattore z. Trascurando il termine infinitamente piccolo del second'ordine $\frac{k^2\pi^2}{\Omega^2}$ (che fornisce al più nel prodotto infinito una quantità infinitamente piccola del primo ordine), le sostituzioni legittime $k = 1, 2$, &c. forniscono invece i fattori $(z^2 + \pi^2)$, $(z^2 + 4\pi^2)$, $(z^2 + 9\pi^2)$, &c.. Indicando con W un fattore costante da determinare si avrà allora:

$$\cos \frac{2k\pi}{\Omega} = 1 - \frac{2k^2\pi^2}{\Omega^2}$$

ciò che permette di assegnare ai fattori trinomi la forma

$${}_2F_k(z) = \frac{4k^2\pi^2}{\Omega^2}\left(1 + \frac{z}{\Omega} + \frac{z^2}{4k^2\pi^2}\right) \qquad [k = 1, 2, ...]$$

Moltiplicando fra loro tali fattori (il cui numero è uguale a $\Omega/2$), il termine infinitamente piccolo del primo ordine dà luogo al termine finito $z/2$ e non può quindi essere trascurato. Lo sviluppo così ottenuto contiene quindi delle quantità infinitesimali che risultano ineliminabili.

[167]Cfr. la precedente nota (166).

$$(96) \qquad e^z - e^{-z} = W\left[z\left(1+\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{z^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{z^2}{9\pi^2}\right)\&c.\right]$$

Per determinare W è sufficiente confrontare la (96) con la (54)(ii): ponendo infatti $z = 0$ nell'identità

$$(96) \qquad 2\left(1+\frac{z^2}{3!}+\frac{z^4}{5!}+\&c.\right) = W\left[\left(1+\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{z^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{z^2}{9\pi^2}\right)\&c.\right]$$

è facile trarre W = 2 e quindi:

$$(97) \qquad \frac{e^z - e^{-z}}{2} = z\left(1+\frac{z^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{z^2}{4\pi^2}\right)\left(1+\frac{z^2}{9\pi^2}\right)\&c.$$

Se è evidente che l'equazione $F(z) = e^z - e^{-z} = 0$ non ha che una radice reale $z = 0$, il risultato di Euler manifesta che essa ha anche un'infinità di radici immaginarie e fornisce un metodo per costruirle. Questa ovvia conseguenza della (97) non è tuttavia esplicitata da Euler, il cui è obiettivo è piuttosto quello di costruire degli sviluppi in prodotti infiniti per delle "quantità" reali.[168] Tramite lo stesso procedimento, egli dimostra infatti l'identità

$$(98) \qquad \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \left(1+\frac{4z^2}{\pi^2}\right)\left(1+\frac{4z^2}{9\pi^2}\right)\left(1+\frac{4z^2}{25\pi^2}\right)\left(1+\frac{4z^2}{49\pi^2}\right)\&c.$$

e sostituendo a z nella (97) e nella (98) la "quantità immaginaria" $x\sqrt{-1}$ trae, secondo le (68):

$$(99) \qquad \begin{aligned} \text{i) } \sin x &= x\left(1-\frac{x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{4\pi^2}\right)\left(1-\frac{x^2}{9\pi^2}\right)\&c. \\ &= x\left(1-\frac{x}{\pi}\right)\left(1+\frac{x}{\pi}\right)\left(1-\frac{x}{2\pi}\right)\left(1+\frac{x}{2\pi}\right)\&c. \\ \text{ii) } \cos x &= \left(1-\frac{4x^2}{\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{9\pi^2}\right)\left(1-\frac{4x^2}{25\pi^2}\right)\&c. \\ &= \left(1-\frac{2x}{\pi}\right)\left(1+\frac{2x}{\pi}\right)\left(1-\frac{2x}{3\pi}\right)\left(1+\frac{2x}{3\pi}\right)\&c. \end{aligned}$$

[168] Non presenterò qui che gli sviluppi in prodotti infiniti del seno e del coseno. Nella parte finale del capitolo IX [cfr. *ivi*, t. I, paragrafi 159-164, pp. 120-28] Euler applica tuttavia lo stesso metodo utilizzato per dedurre la (97) per determinare gli sviluppi infiniti di altre funzioni trascendenti composte di esponenziali, seni e coseni.

che sono, d'altra parte, una conseguenza banale della determinazione delle infinite radici delle equazioni sin $x = 0$ e cos $x = 0$.[169]

III. 3. *d. ε. Alcune applicazioni dei risultati precedenti alla ricerca dei valori di serie e prodotti infiniti a termini numerici*

Gli sviluppi (97), (98) e (99) possono essere applicati alla ricerca del valore di una ridda di serie e di prodotti infiniti a termini numerici. Nel presente paragrafo esporrò alcuni dei risultati conseguiti da Euler, nel corso di tale ricerca.[170]

Se si pone in generale

$$(100) \qquad 1 + A_1 z + A_2 z^2 + \&c. = (1+a_1 z)(1+a_2 z)(1+a_3 z)\&c.$$

è facile trarre, secondo il metodo dei coefficienti indeterminati,

$$(101) \qquad \begin{aligned} A_1 &= \sum_{i=0}^{\infty} a_i \\ A_2 &= \sum_{i=0}^{\infty} \left(a_i \sum_{j=i+1}^{\infty} a_j \right) \\ A_3 &= \sum_{i=0}^{\infty} \left(a_i \sum_{j=i+1}^{\infty} a_j \left(\sum_{r=j+1}^{\infty} a_r \right) \right) \\ &\&c. \end{aligned}$$

e quindi:

$$(102) \qquad \begin{aligned} &\sum_{i=0}^{\infty} a_i = A_1 \\ &\sum_{i=0}^{\infty} [a_i]^2 = A_1 \sum_{i=0}^{\infty} a_i - 2A_2 \\ &\sum_{i=0}^{\infty} [a_i]^3 = A_1 \sum_{i=0}^{\infty} [a_i]^2 - A_2 \sum_{i=0}^{\infty} a_i + 3A_3 \\ &\&c. \end{aligned}$$

[169] Euler non discute la convergenza dei suoi sviluppi in prodotti infiniti, che sono d'altra parte tutti tali che il loro termine generale tende, per ogni z, verso l'unità.
[170] Cfr. *ivi*, t. 1, cap. X e XI, pp. 128-61.

Utilizzando tali risultati di ordine generale non sarà allora difficile pervenire, per semplice sostituzione, alla sommazione di numerose serie numeriche. Ponendo a esempio in luogo della (100) l'ovvia conseguenza della (97) e della (54)(ii) (per la sostituzione $z^2 = \pi^2 \nu$),

$$1 + \frac{\pi^2}{3!} v + \frac{\pi^4}{5!} v^2 + \&c. = (1 + v)\left(1 + \frac{v}{4}\right)\left(1 + \frac{v}{9}\right)\&c. \tag{103}$$

si trae immediatamente, secondo la (102):

$$\begin{aligned}
&\text{i)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} = \left(\frac{2^0}{3!}\frac{1}{1}\right)\pi^2 \\
(104)\quad &\text{ii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^4} = \left(\frac{\pi^2}{6}\right)^2 - 2\left(\frac{\pi^4}{120}\right) = \frac{\pi^4}{90} = \left(\frac{2}{5!}\frac{1}{3}\right)\pi^4 \\
&\text{iii)} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^6} = \left(\frac{\pi^2}{6}\right)\frac{\pi^4}{90} - \frac{\pi^4}{120}\frac{\pi^2}{6} + 3\frac{\pi^6}{5040} = \frac{\pi^6}{945} = \left(\frac{2^4}{7!}\frac{1}{3}\right)\pi^6
\end{aligned}$$

&c.

Allo stesso modo ponendo in luogo della (100) la conseguenza della (98) e della (54)(ii) (per la sostituzione $z^2 = \pi^2 \nu/4$),

$$1 + \frac{\pi^2}{4 \cdot 2!} v + \frac{\pi^4}{4^2 \cdot 4!} v^2 + \frac{\pi^6}{4^3 \cdot 6!} v^3 + \&c. = (1 + v)\left(1 + \frac{v}{9}\right)\left(1 + \frac{v}{25}\right)\&c. \tag{105}$$

si trae:

$$\begin{aligned}
&\text{i)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2} = \frac{\pi^2}{8} = \left(\frac{1}{1}\frac{1}{2^3}\right)\pi^2 \\
(106)\quad &\text{ii)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^4} = \left(\frac{\pi^2}{8}\right)^2 - 2\left(\frac{\pi^4}{384}\right) = \frac{\pi^4}{96} = \left(\frac{2}{3!}\frac{1}{2^5}\right)\pi^4 \\
&\text{iii)} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^3} = \left(\frac{\pi^2}{8}\right)\frac{\pi^2}{96} - \frac{\pi^4}{384}\frac{\pi^2}{8} + 3\frac{\pi^6}{46080} = \frac{\pi^6}{960} = \left(\frac{16}{5!}\frac{1}{2^7}\right)\pi^6
\end{aligned}$$

&c.

La somma di altre serie dello stesso tipo può d'altra parte essere tratta da altri sviluppi in prodotti infiniti, determinati per mezzo del medesimo procedimento che ha condotto a (97), (98) e (99). In questo modo Euler riottiene a esempio la (76)(i) e numerosi altri risultati, fra i quali i seguenti:

$$\text{(107)}\quad \begin{aligned} &\text{i)}\ \frac{1}{2}-\frac{1}{4}+\frac{1}{8}-\frac{1}{10}+\frac{1}{14}-\frac{1}{16}+\&c.=\frac{\pi}{6\sqrt{3}} \\ &\text{ii)}\ \frac{1}{2^2}+\frac{1}{4^2}+\frac{1}{8^2}+\frac{1}{10^2}+\frac{1}{14^2}+\frac{1}{16^2}+\&c.=\frac{\pi^2}{27} \\ &\text{iii)}\ \frac{1}{3^2}+\frac{1}{6^2}+\frac{1}{9^2}+\frac{1}{12^2}+\&c.=\frac{\pi^2}{54} \end{aligned}$$

Operando invece nelle (99) le sostituzioni $x=\frac{m\pi}{2n}$ e $x=\frac{(n-m)\pi}{2n}$ si otterrà successivamente:

$$\text{(108)}\quad \begin{aligned} &\text{i)}\ \sin\frac{m\pi}{2n}=\frac{m\pi}{2n}\left(\frac{2n-m}{2n}\right)\left(\frac{2n+m}{2n}\right)\left(\frac{4n-m}{4n}\right)\left(\frac{4n+m}{4n}\right)\&c. \\ &\text{ii)}\ \cos\frac{m\pi}{2n}=\left(\frac{n-m}{n}\right)\left(\frac{n+m}{n}\right)\left(\frac{3n-m}{3n}\right)\left(\frac{3n+m}{3n}\right)\&c. \\ &\text{iii)}\ \sin\frac{(n-m)\pi}{2n}\left[=\cos\frac{m\pi}{2n}\right]=\frac{(n-m)\pi}{2n}\left(\frac{n+m}{2n}\right)\left(\frac{3n-m}{2n}\right)\left(\frac{3n+m}{4n}\right)\left(\frac{5n-m}{4n}\right)\&c. \\ &\text{iv)}\ \cos\frac{(n-m)\pi}{2n}\left[=\sin\frac{m\pi}{2n}\right]=\left(\frac{m}{n}\right)\left(\frac{2n-m}{n}\right)\left(\frac{2n+m}{3n}\right)\left(\frac{4n-m}{3n}\right)\&c. \end{aligned}$$

Dividendo allora membro a membro tanto la (108)(i) e la (108)(iv) che la (108)(ii) e la (108)(iii) si trae:

$$\text{(109)}\quad 1=\frac{\pi}{2}\,\frac{1}{2}\,\frac{3}{2}\,\frac{3}{4}\,\frac{5}{4}\,\frac{5}{6}\,\frac{7}{6}\,\&c.$$

ovvero:

$$\text{(110)}\quad \frac{\pi}{2}=\frac{2^2.\,4^2.\,6^2.\ \&c.}{3^2.\,5^2.\,7^2.\ \&c.}$$

che non è d'altra parte che un caso particolare dell'immediata conseguenza della (108)(i),

$$(111)\qquad \frac{\pi}{2}=\frac{n}{m}\sin\frac{m\pi}{2n}\left(\frac{2n}{2n-m}\right)\left(\frac{2n}{2n+m}\right)\left(\frac{4n}{4n-m}\right)\left(\frac{4n}{4n+m}\right)\&c.$$

a partire dalla quale è possibile costruire (n e m essendo arbitrari) un'infinità di prodotti infiniti a termini numerici che esprimono il valore $\pi/2$. Le (34) permettono inoltre, grazie a delle manipolazioni opportune, di esprimere i valori del seno e del coseno di una àrco qualunque $\frac{k\pi}{2n}$ in funzione dei seni e dei coseni di un altro arco qualunque $\frac{m\pi}{2n}$.

Per quanto la (110) sia un'identità nota fin dalla seconda metà del XVII secolo,[171] essa non fornisce un valore opportunamente approssimato di π che a condizione di un calcolo assai lungo e noioso; è infatti facile rendersi conto che la convergenza del prodotto infinito è molto lenta. Essa è al contrario molto utile nella ricerca del valore approssimato dei logaritmi. Dalla (110) si trae infatti

$$(112)\qquad \begin{aligned}\pi &= 2.2\,\frac{2\cdot4}{9}\,\frac{2\cdot4}{25}\,\frac{6\cdot8}{49}\,\&c. = 2\left[\frac{4}{3}\,\frac{16}{15}\,\frac{36}{35}\,\&c.\right]=\\ &=4\left(1-\frac{1}{9}\right)\left(1-\frac{1}{25}\right)\left(1-\frac{1}{19}\right)\&c. = 2\left[\left(1-\frac{1}{4}\right)^{-1}\left(1-\frac{1}{16}\right)^{-1}\&c.\right]\end{aligned}$$

e quindi, ber ogni base a del sistema logaritmico:

$$(113)\qquad \begin{aligned}&\text{i)}\ \log_a\pi = \log_a 4+\log_a\left(1-\frac{1}{9}\right)+\log_a\left(1-\frac{1}{25}\right)+\&c.\\ &\text{ii)}\qquad\quad = \log_a 2-\log_a\left(1-\frac{1}{4}\right)-\log_a\left(1-\frac{1}{16}\right)-\&c.\end{aligned}$$

Se $a = e$ si ha allora - considerando a esempio la (113) e richiamando la (54)(iv) e le (106) -

$$(114)\qquad \begin{aligned}\log\pi &= \log 4-\frac{1}{9}-\frac{1}{2\cdot9^2}-\frac{1}{3\cdot9^3}-\&c.\\ &\quad-\frac{1}{25}-\frac{1}{2\cdot25^2}-\frac{1}{3\cdot25^3}-\&c.\\ &=\log 4-\left[\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\&c.\right]-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{3^4}+\frac{1}{5^4}+\&c.\right]-\frac{1}{3}\left[\frac{1}{3^6}-\frac{1}{5^6}-\&c.\right]-\&c.\end{aligned}$$

[171] Cfr. Wallis (1656), pp. 180-81.

$$= \log 4 - \left[\frac{\pi^2}{8} - 1\right] - \frac{1}{2}\left[\frac{\pi^4}{96} - 1\right] - \frac{1}{3}\left[\frac{\pi^6}{960} - 1\right] - \&c.$$

Per mezzo di un procedimento analogo possiamo trarre d'altra parte, a partire dalla (108), delle serie numeriche che forniscono assai velocemente un valore razionale opportunamente approssimato del logaritmo del seno e del coseno di un arco qualsiasi $\frac{m\pi}{2n}$.

III. 3. *d.* ζ. *Risoluzione di una funzione frazionaria in frazioni parziali minimali a denominatore reale*

La scomposizione in fattori doppi di una funzione intera permette d'altra parte di risolvere ogni funzione frazionaria in una somma di frazioni parziali minimali a denominatore reale, ciò che non può ovviamente essere fatto per mezzo del metodo indicato nel precedente paragrafo III.3.*b*.β.. Se il denominatore della funzione assegnata ha delle radici immaginarie, tale metodo non ne fornisce infatti che una scomposizione in frazioni parziali minimali di cui alcune a denominatore immaginario.

Sia data la funzione frazionaria genuina ${}_{n/m}F(z) = {}_nF(z)/{}_mF(z)$ $(n < m)$ e sia $p^2 - 2(pr \cos x)z + r^2z^2$ un fattore trinomio non ripetuto a fattori semplici immaginari del denominatore ${}_mF(z)$. Si tratta allora semplicemente di applicare il metodo presentato nel precedente paragrafo III.3.*b*.β. alla determinazione della funzione intera ${}_1F(z)$ che costituisce il numeratore della frazione parziale che sorge da un tale fattore. Ponendo

$$(115)\qquad \begin{aligned} {}_{n/m}F(z) &= \frac{{}_nF(z)}{[p^2 - 2(pr\cos x)z + r^2z^2]\cdot {}_{m-2}F(z)} \\ &= \frac{{}_1F(z)}{p^2 - 2(pr\cos x)z + r^2z^2} + \frac{{}_{m-3}F(z)}{{}_{m-2}F(z)} \end{aligned}$$

si trae subito:

$$(116)\qquad [p^2 - 2(pr\cos x)z + r^2z^2]\cdot {}_{m-3}F(z) = {}_nF(z) - {}_{m-2}F(z)\cdot {}_1F(z)$$

da cui è ovvio concludere che se è posta la sostituzione

$$(117)\qquad z = \frac{p}{r}\,[\cos x \pm \sqrt{-1}\,\sin x]$$

si avrà anche:

$$(118) \qquad {}_{n}F(z) - {}_{m-2}F(z) \cdot {}_{1}F(z) = 0$$

Data la funzione ${}_{n/m}F(z)$ e il fattore trinomio $p^2 - 2(pr \cos x)z + r^2z^2$ del suo denominatore ${}_{m}F(z)$, anche le funzioni ${}_{n}F(z)$ e ${}_{m-2}F(z)$ sono d'altra parte date. Operando in esse la sostituzione (117) e ponendo l'identità generica ${}_{1}F(z) = A_0 + A_1 z = A_0 + A_1\left(\dfrac{p}{r}\,[\cos x \pm \sqrt{-1}\,\sin x\,]\right)$ si potrà allora scrivere la (118) da cui - ricordando la (63)(iii) - è possibile determinare i coefficienti incogniti A_0 e A_1 in funzioni dei coefficienti noti di ${}_{n}F(z)$ e ${}_{m-2}F(z)$.

E' del tutto evidente che un tale procedimento permette la determinazione di A_0 e A_1 solo se $p^2 - 2(pr \cos x)z + r^2z^2$ è un fattore non ripetuto di ${}_{m}F(z)$, ovvero se ${}_{m}F(z)$ non possiede alcun fattore uguale a $[\,p^2 - 2(pr \cos x)z + r^2z^2]^s$ $(1< s \leq m/2)$. In caso contrario la sostituzione (117) annullerebbe infatti anche la funzione ${}_{m-2}F(z)$ e la (118) si ridurrebbe alla falsa identità ${}_{n}F(p^2 - 2(pr \cos x)z + r^2z^2) = 0$. In tal caso occorre allora porre:

$$(119) \qquad \begin{aligned} {}_{n/m}F(z) &= \frac{{}_{n}F(z)}{[p^2 - 2(pr \cos x)z + r^2z^2]^s \cdot {}_{m-2s}F(z)} \\ &= \frac{A_0 + A_1 z}{[p^2 - 2(pr \cos x)z + r^2z^2]^s} + \\ &\quad + \frac{B_0 + B_1 z}{[p^2 - 2(pr \cos x)z + r^2z^2]^{s-1}} + \ldots + \\ &\quad + \frac{N_0 + N_1 z}{[p^2 - 2(pr \cos x)z + r^2z^2]} + \frac{{}_{m-2s-1}F(z)}{{}_{m-2s}F(z)} \end{aligned}$$

e procedere come sopra, sfruttando le condizioni di annullamento comportate dal carattere di funzione intera di ${}_{m-2s-1}F(z)$.

III. 3. *d*(2).
TEORIA GENERALE DELLE SERIE RICORRENTI (CAPITOLI XIII, XIV E XVII)

III. 3. *d*. η. *La definizione di Euler di "serie ricorrente"*

Il termine "serie ricorrente" venne per la prima volta introdotto da A.

de Moivre nel 1722,[172] per riferirsi a un particolare tipo di serie che questi aveva già sottoposto a uno studio particolare nella prima edizione de *The Doctrine of Chances*.[173] Sebbene in entrambe le circostanze il riferimento di de Moivre sia chiaramente a serie *intere*, il cui coefficiente generico di ordine ν possa essere espresso come una funzione *lineare* (a coefficienti costanti rispetto all'indice ν[174]) di un numero dato di coefficienti precedenti, questi si permette di parlare genericamente di esse come serie, i cui termini sono

> so related to one another that each of them may be have to the same number of preceding terms a certain given relation, always expressible by the same index [...][175]

senza alcuna esplicita specificazione della natura della relazione in questione. Lo iato fra la definizione e la sua interpretazione intesa appare d'altra parte ancora più evidente nella seconda edizione de *The Doctrine of Chances*, in cui de Moivre qualifica in generale una "serie ricorrente" come una serie

> so consitiued, that having taken at pleasure any number of its terms, each following term shall be related to the same number of preceding terms, according to a constant law of relation [...][176]

---

[172]Cfr. de Moivre (1722a), pp. 175-6.

[173]Cfr. de Moivre (1718), probl. XLII, lemmi I-III, pp. 127-34.

[174]Cfr. la prossima nota (179).

[175]Cfr. *ivi*, lemma III. Ecco d'altra parte la definizione del 1722:

> *[...] in Progressione Geometricâ, Terminus quilibet ad proxime præcedentem habet rationem datam, ita sunt aliæ Progressiones quæ sic constitui possunt ut assumptis ad libitum Terminis duobus primis, Terminus quilibet subsequens ad duos proxime præcedentes habeat rationes datas, hujusmodi est subjecta Series,*
>
> $$\begin{array}{cccccc} A & B & C & D & E & F \\ 1 + & 3x + & 7xx + & 17x^3 + & 41x^4 + & 99x^5, \ \&c. \end{array}$$
>
> *in qua*
>
> $$C = 2Bx + 1Axx$$
> $$D = 2Cx + 1Bxx$$
> $$E = 2Dx + 1Cxx$$
> $$F = 2Ex + 1Dxx \ \&c.$$
>
> *Quantitates autem Naturales 2+1 simul sumptas subque propriis signis connexas appellare licet Indicem Relationis.*
>
> *Eodem modo constitui possunt series aliæ in quibus assumptis ad libitum Terminis tribus primis, Terminis quilibet subsequens ad tres proxime præcedentes habeat rationes datas [...].*
>
> *Sunt aliæ series in quibus Relatio sit ad quatuor, vel ad quinque, vel ad sex Terminos præcedentes, &c.*
>
> Series autem omnes hujus generis recurrentes appellare licebit propter Relationem Terminorum perpetuo recurrentem.

Se gli esempi scelti da de Moivre rendono evidente il riferimento a serie intere, il cui coefficiente generico è una funzione lineare (a coefficienti costanti rispetto all'indice) di uno o più coefficienti precedenti, l'impiego del termine quanto mai impreciso "relazione data" rende possibile un'interpretazione generalizzata che faccia di una "serie ricorrente" una serie il cui termine generico sia esprimibile come una funzione qualsiasi di uno o più termini precedenti.

[176]Cfr. de Moivre (1738), p. 193. Anche in questo caso de Moivre fa seguire la sua defi-

Come abbiamo visto nella precedente sezione III.3.*b*., Euler dimostra nel capitolo IV del primo tomo dell'*Introductio* che per ogni funzione frazionaria la serie intera che ne fornisce lo sviluppo possiede la proprietà richiamata nelle definizioni di de Moivre. Ciò gli appare come un argomento sufficiente per legittimare la sostituzione della definizione di de Moivre con una nuova definizione, la quale caratterizza in termini espliciti una "serie ricorrente" come una serie intera il cui coefficiente generico possa essere espresso come una funzione lineare (a coefficienti costanti rispetto all'indice) di un numero dato di coefficienti precedenti.

> Ad hoc Serierum genus - egli scrive -, quas Moivræus *recorrentes* vocare solet, hic refero omnes Series, quæ ex evolutione Functionis cujusque fractæ per divisionem actualem instituta nascantur. Supra enim jam ostendimus has Series ita esse comparatas, ut quivis terminus ex aliquot præcedentibus secundum legem quandam constantem determinetur, quæ lex a denominatore Functionis fractæ pendet.[177]

In tal modo Euler fornisce una interpretazione restrittiva dei termini "relazione data" o "legge costante di relazione", definendo come "ricorrente" una serie $\sum_{\nu=0}^{\infty} K_\nu x^\nu$ per cui valga la relazione lineare

$$\text{(120)} \quad \begin{aligned} K_\nu &= \Phi(K_\lambda, K_{\lambda+1}, \ldots, K_\mu) \\ &= \beta_0 - \beta_1 K_\lambda - \beta_2 K_{\lambda+1} - \ldots - \beta_{\mu-\lambda+1} K_\mu \qquad [0 \le \lambda \le \mu,\ 0 \le \mu \le \nu-1] \end{aligned}$$

(in cui le costanti $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_{\mu-\lambda+1}$ costituiscono la scala di relazione della serie). La nuova definizione di Euler non fa così che catturare con maggiore precisione l'idea originale dello stesso de Moivre,[178] senza avventurarsi nella grande generalità che una lettura isolata della definizione di quest'ultimo poteva al contrario prospettare.[179]

---

nizione dall'esempio (già impiegato nel 1722) della serie $1 + 2x + 3x^2 + 10x^3 + 34x^4 + 97x^5$ + &c. in cui $K_\nu = 3K_{\nu-1} - 2K_{\nu-2} + 5K_{\nu-3}$.

[177]Cfr. Euler (1748), t; 1, p. 175. Nella definizione di Euler è chiaramente sottinteso che la funzione frazionaria sia genuina [cfr. il precedente paragrafo III.3.*b*.β.].

[178]Si ripropone qui una situazione tipica nell'evoluzione della conoscenza matematica. La trasposizione oggettuale di un concetto utilizza termini che permettono una interpretazione più ampia dell'interpretazione intesa, generando una discrasia fra l'impiego di una definizione e la sua intrinseca natura oggettiva. Il gesto di Euler corrisponde allora a una restrizione della definizione che la riconduce entro i limiti dell'interpretazione intesa, fornendo una più fedele trasposizione oggettuale del concetto originario.

[179]La relazione intercorrente fra una frazione della forma $\frac{A}{{}_nF(z)}$ e una serie ricorrente è d'altra parte già indicata in termini assolutamente espliciti - pur al di fuori da una teoria generale delle funzioni - da de Moivre fin dalla sua memoria del 1722. Una definizione assai precisa di serie ricorrente simile a quella di Euler era già stata d'altra parte proposta da Daniel Bernoulli nel 1728 [cfr. Daniel Bernoulli (1728)]. Tornerò su di

Essa conduce inoltre immediatamente a asserire la possibilità di ridurre ogni *serie convergente*, la cui scala di relazione non sia semplicemente data dalla costante β_1,[180] a una somma di serie ricorrenti "più semplici". Per trarre una tale conseguenza basta infatti osservare che ogni funzione frazionaria ${}_{n/m}F(z)$, in cui sia: $m > 1$, $n < m$ e se, ${}_{m}F(z) = (p+qz)^m$ anche $n > 0$,[181] può essere ridotta a una somma di funzioni parziali "più semplici".[182] E' proprio alla teoria generale della riduzione di una serie ricorrente a una somma di serie ricorrenti più semplici che Euler dedica l'intero capitolo XII del primo tomo del suo trattato.

III. 3. *d*. θ. *Riduzione di una serie ricorrente a una somma di serie ricorrenti più semplici*

Sia $W_0 + W_1z + W_2z^2 +$ &c. una serie ricorrente generata da una funzione frazionaria ${}_{n/m}F(z)$, le cui frazioni parziali generano a loro volta le serie ricorrenti

---

essa nel prossimo paragrafo III.3.*d*.κ.. Assai interessante è a questo proposito anche un'osservazione contenuta in una lettera del 18 Novembre 1728 di Goldbach allo stesso Daniel Bernoulli [cfr. Fuss (1843, vol. II, pp. 273-5]. Commentando la citata memoria di questi del 1728, Goldbach preconizza infatti la possibilità di caratterizzare una classe particolare di serie (che egli propone di chiamare "*recurrentes ordini variabilis*") in cui i termini della scala di relazione siano delle funzioni dell'indice che indica il posto del termine generico della serie: pur restando nell'ambito di serie intere il cui coefficiente generico è una funzione lineare di uno o più coefficienti precedenti, Goldbach propone quindi di generalizzare la definizione di de Moivre (che almeno su questo punto appare esplicitamente restrittiva) intendendo i coefficienti di tale funzione a loro volta come delle funzioni dell'indice. Se la definizione di Euler non accoglie il suggerimento di Goldbach, essa permette di intendere i coefficienti della scala di relazione come delle funzioni di una variabile qualsiasi (indipendente dall'indice) e non necessariamente come delle costanti numeriche (come era invece il caso dell'interpretazione intesa di de Moivre).

[180] Euler non esplicita tale condizione che deriva tuttavia assai semplicemente [cfr. sotto] dall'identità

$$\frac{A}{\alpha+\beta z} = K_0 + K_1 z + K_2 z^2 + \&c. \qquad [K_0 = A/p\ ;\ K_\nu = \frac{q}{p} K_{\nu-1}]$$

[181] Se ${}_{n/m}F(z) = \dfrac{A}{(\alpha+\beta z)^m}$ il metodo di Euler non fornisce infatti alcuna riduzione possibile.

[182] Cfr. il precedente paragrafo III.3.*b*.β.. Il contesto indica chiaramente che la semplicità di una funzione frazionaria dipende dal grado del suo denominatore: più esso è basso più la funzione è semplice. La semplicità di una serie ricorrente dipende allora dalla "lunghezza" della scala di relazione: meno sono le costanti che essa contiene, più la serie è semplice. E' d'altra parte chiaro che se il denominatore della funzione generatrice della serie assegnata non possiede che radici reali e distinte, allora tale serie può essere ridotta a una somma di serie ricorrenti la cui scala di relazione è costituita da una sola costante reale.

$$
\begin{array}{ll}
& {}_1K_0 + {}_1K_1z + {}_1K_2z^2 + \&c. \\
(121) & {}_2K_0 + {}_2K_1z + {}_2K_2z^2 + \&c. \qquad [2 \leq \rho \leq n] \\
& \ldots \\
& {}_\rho K_0 + {}_\rho K_1z + {}_\rho K_2z^2 + \&c.
\end{array}
$$

Secondo il metodo dei coefficienti indeterminati si ha allora:[183]

$$
\begin{array}{ll}
& W_0 = \sum_{\nu=1}^{\rho} {}_\nu K_0 \\
(122) & W_1 = \sum_{\nu=1}^{\rho} {}_\nu K_1 \qquad [2 \leq \rho \leq n] \\
& W_2 = \sum_{\nu=1}^{\rho} {}_\nu K_2 \\
& \&c.
\end{array}
$$

Sia ora ${}_{0/s}F(z) = \dfrac{A}{(1+qz)^s}$ $(1 \leq s \leq m,\ s \in \mathbf{N})$ una frazione parziale della funzione frazionaria assegnata ${}_{m/n}F(z)$. Il metodo di sviluppo in serie intera

[183] Piuttosto stranamente Euler introduce a questo punto un'osservazione generale sul metodo dei coefficienti indeterminati che, dopo essere stato costantemente utilizzato nel corso dei primi dodici capitoli del trattato è così giustificato in occasione di un'applicazione particolare assolutamente banale.

> Dubium - egli scrive [cfr. *ivi* Euler (1748), t. 1, p. 176] - hic suboriri posset, an, si duæ hujusmodi Series fuerint inter se æquales $A + Bz + Cz^2 + Dz^3 + \&c. = \mathfrak{A} + \mathfrak{B}z + \mathfrak{C}z^2 + \mathfrak{D}z^3 + \&c.$, necessario inde sequatur, coefficientes similium Potestatum ipsius z inter se esse æquales; seu $A = \mathfrak{A}$, $B = \mathfrak{B}$, $C = \mathfrak{C}$, $D = \mathfrak{D}$ &c..

La giustificazione generale di Euler ricalca la classica dimostrazione newtoniana del "teorema" di Taylor [cfr. il precedente capitolo III.2.]. Posto $z = 0$ egli trae banalmente $A = \mathfrak{A}$ che permette, dividendo per z, di passare alla nuova identità infinitaria $B + Cz + Dz^2 + \&c. = \mathfrak{B} + \mathfrak{C}z + \mathfrak{D}z^2 + \&c.$ in cui la medesima posizione $z = 0$ conduce a scrivere $B = \mathfrak{B}$, permettendo di reiterare il procedimento. Non è necessario soffermarsi sulle evidenti difficoltà di un simile procedimento, che utilizza la divisione per z (posta contemporaneamente uguale a zero) in luogo delle successive differenziazioni per eliminare i termini di ordine superiore a zero delle serie successivamente prodotte. Per giustificare una simile manipolazione non vi è d'altra parte altra strada che quella di pensare z come infinitamente piccolo introducendo surrettiziamente il *calcolo* e invertendo quindi l'ordine dell'architettonica euleriana. Per evitare una tale incongruenza non resta che accettare la legittimità del metodo dei coefficienti indeterminati come un'estensione infinitaria (non dimostrata) di un ovvia regola algebrica riferita a polinomi finiti, fondando eventualmente su esso (e quindi sulla presupposizione di unicità) - come farà Lagrange nel 1797 [cfr. il prossimo capitolo III.6.] - l'introduzione del *calcolo*.

esposto nel precedente paragrafo III.3.*b*.ε. conduce all'identità:[184]

$$\frac{A}{(1-qz)^s} = A + Asqz + A\,\frac{s(s-1)}{2!}\,q^2z^2 + \&c.$$

$$= A + \sum_{\nu=1}^{\infty} A\,\frac{s(s+1)(s+2)\ldots(s+\nu-1)}{\nu!}\,q^\nu z^\nu \tag{123}$$

$$\left[\begin{array}{l} \text{ovvero: } K_0 = A \\ K_1 = K_0\binom{s}{1}q \\ K_2 = K_1\binom{s}{1}q - K_0\binom{s}{2}q^2 \\ \ldots \\ K_\nu = K_{n-1}\binom{s}{1}q - K_{\nu-2}\binom{s}{2}q^2 + \ldots -(-)^\nu K_0\binom{s}{n}p^\nu \end{array}\right]$$

Essendo ogni funzione frazionaria ${}_{m/n}F(z)$ $(n > 1,\ m < n)$ riducibile a una somma di funzioni parziali della forma $\dfrac{A}{(1+qz)^s}$ $(1 \le s \le m,\ s \in \mathbb{N})$ da ciò segue che ogni serie ricorrente può essere ridotta a una somma di serie ricorrenti il cui termine generico è della forma $A\,\dfrac{s(s+1)(s+2)\ldots(s+\nu-1)}{\nu!}\,q^\nu z^\nu$.

Tuttavia se ${}_mF(z)$ ha delle radici immaginarie una tale riduzione introduce dei termini immaginari che non possono venire eliminati a meno che non ci si arresti, nella riduzione della funzione assegnata, a frazioni parziali il cui denominatore è costituito da un fattore trinomio di ${}_mF(z)$. Sia allora $[1 + (2r\cos x)z + r^2z^2]^s$ $(1 \le s \le m/2,\ s \in \mathbb{N})$ un fattore trinomio di ${}_mF(z)$ il quale contenga $2s$ radici immaginarie. La riduzione della serie ricorrente generata da ${}_{n/m}F(z)$ a una somma di serie ricorrenti a termini reali le più semplici possibile dipende allora dalla determinazione dello sviluppo in serie intera della frazione parziale ${}_{1/2s}F(z) = \dfrac{A + Brz}{[1 - (2r\cos x)z + r^2z^2]^s}$. Se $[\Psi(r, x, \nu, s)]z^\nu$ è il termine generico della serie intera che fornisce lo sviluppo di ${}_{1/2s}F(z)$ si può infatti affermare che ogni serie ricorrente [la cui scala di relazione non si riduca a un solo termine costante] può essere ridotta a una somma di serie ricorrenti a termini reali il cui termine generico sia o della forma

[184] Per quanto Euler non utilizzi il simbolo di sommatoria, egli scrive il termine generico della serie sviluppo ragionando su questo.

$A\dfrac{s(s+1)(s+2)\ldots(s+\nu-1)}{\nu!}q^{\nu}z^{\nu}$ o della forma $[\Psi(r, x, \nu, s)]z^{\nu}$ (dove $n\in\mathbb{N}$ e q, s, r e x sono delle funzioni determinabili dei coefficienti delle funzioni intere $_{n}F(z)$ e $_{m}F(z)$ che compongono la funzione frazionaria $_{n/m}F(z)$ che genera la serie originaria). Si tratta quindi di determinare la forma generica $[\Psi(r, x, \nu, s)]z^{\nu}$. Tale risultato sembra tuttavia, in quanto tale, al di fuori dalla portata di Euler che, determinata la forma $\Psi(r, x, \nu, 1)$, non fornisce che un metodo costruttivo atto a passare da essa alle forme $\Psi(r, x, \nu, 2)$, $\Psi(r, x, \nu, 3)$, &c. (nelle quali s assume un valore qualsiasi, ma determinato) che egli applica ai casi caratterizzati dalle posizioni $s=2$ e $s=3$.[185] Considererò qui il primo passo del procedimento euleriano.

Se è piuttosto semplice, applicando il metodo presentato nel precedente paragrafo III.3.*b*.ε., costruire termine a termine la serie ricorrente che costituisce lo sviluppo della frazione $\dfrac{X}{1-(2r\cos x)z+r^2z^2}$ - la cui scala di relazione è ovviamente costituita dalla coppia $\{2r\cos x, -r^2\}$, con $K_0 = X$ - non altrettanto semplice è determinare il termine generico di tale serie. Per ovviare a tale difficoltà Euler considera successivamente i due differenti sviluppi:[186]

---

[185] Si può peraltro dubitare che la determinazione fornita da Euler per le forme generiche $\Psi(r, x, \nu, 2)$ e $\Psi(r, x, \nu, 3)$ derivi effettivamente dallo studio della legge di formazione dei coefficienti e non sia al contrario il risultato di un'induzione sui primi termini.

[186] Euler non giustifica in nessun modo né la (124)(i), né la (124)(ii), limitandosi a affermare che le serie $\sum_{\nu=1}^{\infty}[Pr^{\nu}\sin\nu x]z^{\nu}$ e $\sum_{\nu=0}^{\infty}[Qr^{\nu}\sin\nu x]z^{\nu}$ nascono rispettivamente dall'evoluzione delle frazioni che ne costituiscono i primi membri. Ho cercato di ricostruire la costruzione euleriana attraverso l'esplicitazione delle sue tappe intermedie. Per quanto riguarda la prima serie si osservi che, essendo

$$\sin(\nu\varphi) = \sin[(\nu-1)\varphi+\varphi] = \sin(\nu-1)\varphi\cos\varphi + \sin\varphi\cos(\nu-1)\varphi$$

$$\sin(\nu-2)\varphi = \sin[(\nu-1)\varphi-\varphi] = \sin(\nu-1)\varphi\cos\varphi - \sin\varphi\cos(\nu-1)\varphi$$

si ha, sottraendo,

$$2\cos(\nu-1)\varphi\sin\varphi + \sin(\nu-2)\varphi = \sin\nu\varphi$$

e quindi, ponendo successivamente $\varphi = 2x$ e $\nu = 3/2$, $\varphi = 3x$ e $\nu = 4/3$, $\varphi = 4x$ e $\nu = 5/4$, &c.:

$$2\cos x\sin 2x - \sin x = \sin 3x$$

$$2\cos x\sin 3x - \sin 2x = \sin 4x$$

$$2\cos x\sin 4x - \sin 3x = \sin 5x$$

&c.

Per ottenere la seconda è invece sufficiente porre $X = Q - Qr^2\cos x$ nello sviluppo di $\dfrac{X}{1-(2r\cos x)z+r^2z^2}$ e ordinare relativamente a z, ricordando che:

$$\cos\nu x = 2^{\nu-1}\cos^{\nu}x + \sum_{h=1}^{n-1}(-)^{h}\frac{n}{2h}\binom{n-(n+1)}{n-1}(2\cos x)^{n-2h}$$

Molto più semplice è peraltro la giustificazione *a posteriori* del risultato. Se si presuppone infatti il metodo di sommazione delle serie ricorrenti che verrà presentato nel prossimo paragrafo III.3.*d*.ι. (la cui dimostrazione non richiede in nessun modo il ricorso

$$\text{i)}\quad \frac{Prz\sin x}{1-(2r\cos x)z+r^2z^2} = (Pr\sin x)z + (2Pr^2\sin x\cos x)z^2 + \&c.$$

$$= (Pr\sin x)z + (Pr^2\sin 2x)z^2 + $$
$$+ [Pr^3(2\cos x\sin 2x - \sin x)]\,z^3 + \&c.$$
$$= (Pr\sin x)z + (Pr^2\sin 2x)z^2 + (Pr^3\sin 3x)z^3 +$$
$$+ [Pr^4(2\cos x\sin 3x - \sin 2x)]\,z^4 + \&c.$$

...

$$= \sum_{v=1}^{\infty}[Pr^v\sin vx]\,z^v$$

(124)

$$\text{ii)}\quad \frac{Q-Qrz\cos x}{1-(2r\cos x)z+r^2z^2} = Q + [Qr\cos x]\,z + [Qr^2(2\cos^2x-1)]z^2 +$$
$$+ [Qr^3(4\cos^3x - 3\cos x)]z^3 +$$
$$+ [Qr^4(8\cos^4x - 4\cos^2x + 1)]\,z^4 + \&c.$$
$$= Q + [Qr\cos x]\,z + [Qr^2\cos 2x]\,z^2 + [Qr^3\cos 3x]\,z^3 +$$
$$+ [Qr^4\cos 4x]\,z^4 + \&c.$$
$$= \sum_{v=0}^{\infty}[Qr^v\cos vx]\,z^v$$

i quali forniscono l'identità:

---

alla (124)) si ha:

$$\left[\frac{a_0 + a_1y}{1-(2\cos x)y+y^2} = 0 + P(\sin x)y + \&c.\right] \Rightarrow a_0 = 0;\ a_1 = P\sin x + 0$$

$$\left[\frac{a_0 + a_1y}{1-(2\cos x)y+y^2} = Q + Q(\cos x)y + \&c.\right] \Rightarrow a_0 = Q;\ a_1 = Q\cos x - 2Q\cos x = -Q\cos x$$

Siccome tale calcolo non involve che i primi due termini delle serie, occorre assicurarsi poi che esse siano effettivamente ricorrenti e che la loro scala di relazione sia esattamente $(2\cos x, -1)$, come richiede il denominatore delle frazioni supposte uguali a esse. Per questo è tuttavia sufficiente osservare che per ogni v valgono le identità

$$\sin vx = 2\cos x\sin(v-1)x - \sin(v-2)x$$

$$\cos vx = 2\cos x\cos(v-1)x - \cos(v-2)x$$

che si dimostrano facilmente a partire da quelle poste all'inizio della presente nota.

$$(125)\qquad \frac{Q + Prz \sin x - Qrz \cos x}{1-(2r \cos x)z + r^2 z^2} = \sum_{\nu=0}^{\infty} [P\sin \nu x + Q\cos \nu x]\, r^\nu z^\nu$$

Ponendo $Q = A$ e $P = A\text{cotg}\, x + B\text{cosec}\, x$ si trae allora:

$$_{1/2}F(z) = \frac{A + Brz}{1 - (2r \cos x)z + r^2 z^2} =$$

$$(126)\qquad = \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\frac{A\cos x \sin \nu x + B\sin \nu x + A\cos \nu x \sin x}{\sin x}\right] r^\nu z^\nu$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\frac{A\sin (\nu+1)x + B\sin \nu x}{\sin x}\right] r^\nu z^\nu$$

e quindi:

$$(127)\qquad Y(r, x, \nu, 1) = \left[\frac{A \sin (\nu+1)x + B\sin \nu x}{\sin x}\right] r^\nu$$

Se $s \neq 1$, Euler pone (secondo la (123) e la (63)(iii)):

$$(128)\qquad \frac{X}{[1 - (\cos x + \sqrt{-1}\, \sin x)rz]^s} + \frac{Y}{[1 - (\cos x - \sqrt{-1}\, \sin x)zr]^s} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\frac{s(s+1)\ldots(s+\nu-1)}{\nu!} [X(\cos \nu x + \sqrt{-1}\, \sin \nu x) + Y(\cos \nu x - \sqrt{-1}\, \sin \nu x)] r^\nu z^\nu\right]$$

da cui operando le sostituzioni $X = \dfrac{\eta\sqrt{-1}+\lambda}{2\sqrt{-1}}$ e $Y = \dfrac{\eta\sqrt{-1}-\lambda}{2\sqrt{-1}}$ si trae:

$$(129)\qquad \frac{\dfrac{\eta\sqrt{-1}+\lambda}{2\sqrt{-1}}[1-(\cos x - \sqrt{-1}\, \sin x)rz]^s + \dfrac{\eta\sqrt{-1}-\lambda}{2\sqrt{-1}}[1-(\cos x + \sqrt{-1}\, \sin x)rz]^s}{[1-(2r\cos x)z + r^2 z^2]^s} =$$

$$= \sum_{\nu=0}^{\infty} \left[\frac{s(s+1)\ldots(s+n-1)}{\nu!} [\eta \cos \nu x + \lambda \sin \nu x]\, r^\nu z^\nu\right]$$

Si tratta quindi di trovare, per ogni valore di s, le sostituzioni che rendono il numeratore del primo membro della (129) uguale a A + Brz. Il secondo membro darà allora la serie sviluppo cercata espressa in funzione del suo termine generico.

Il metodo proposto da Euler per ridurre una serie ricorrente in una somma di serie più semplici può allora riformularsi nei termini seguenti. Data la serie si cerchi, attraverso lo studio della sua scala di relazione (e dei suoi primi $n+1$ termini), la sua funzione generatrice ${}_{n/m}F(z)$;[187] si risolva la frazione intera ${}_mF(z)$ in fattori reali semplici o doppi e si determino quindi le frazioni parziali minimali a denominatore reale. Sviluppando tali frazioni in serie intera si hanno le serie cercate, la cui somma è uguale alla serie di partenza. Sommando fra loro i termini generici delle serie parziali così ottenute si avrà poi un'espressione del termine generico della serie assegnata che non involve alcun termine precedente, esibendo questo come una semplice funzione dell'indice, ciò che in molti casi è assai difficile ottenere limitandosi allo studio della legge di ricorrenza.

III. 3. *d.* ι. *Scomposizione in fattori di seni e coseni di archi multipli*

La teoria generale delle serie ricorrenti permette una reinterpretazione entro un quadro unificato di numerose formule trigonometriche relative agli

---

[187] Per quanto la costruzione delle serie ricorrenti a partire dalle funzioni frazionarie generatrici non corrisponda, secondo il procedimento proposto da Euler, che a un'applicazione del metodo di sviluppo per determinazione dei coefficienti - il quale non è altro che un metodo di associazione formale fra una forma finita e una serie intera e non produce degli sviluppi effettivamente convergenti alla funzione generatrice che sotto certe condizioni - quest'ultima è considerata da Euler, senza alcuna limitazione, come la "somma" della serie in questione:

> Ac primo quidem - egli scrive [cfr. *ivi*, t. 1, p. 195] - manifestum est summam Seriei recurrentis in infinitum extensæ æqualem esse fractioni ex qua oritur.

Il termine "somma" è quindi utilizzato qui nel senso che questi chiarirà nella memoria del 1754-55 [cfr. il precedente paragrafo II.2-A.β.] per indicare la forma finita che produce la serie e che sotto opportune condizioni (che secondo Euler non consistono che in una limitazione del dominio della variabile) ne rappresenta anche il valore numerico. La ricerca della funzione generatrice di una serie data corrisponde allora nel linguaggio euleriano alla ricerca della "somma" di tale serie. Questa può d'altra parte venire condotta secondo un metodo *standard* che è presentato alla fine del capitolo XIII. Sia $\sum_{k=0}^{\infty} K_k z^k$ una serie ricorrente la cui scala di relazione è $(-\alpha_1, -\alpha_2, \ldots, -\alpha_m)$ [Euler considera in verità solo il caso $m = 4$, ma il suo procedimento può banalmente venir generalizzato]. Posta l'identità generica

$$K_0 + K_1 z + K_2 z^2 + \&c. = \frac{a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_{m-1} z^{m-1}}{1 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots + \alpha_m z^m}$$

si tratta semplicemente di determinare i coefficienti indeterminati $a_0, a_1, \ldots, a_{m-1}$ in funzione dei coefficienti noti $K_0, K_1, \ldots, K_{m-1}$ e $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, cosa che può essere fatta banalmente ricorrendo alle (18).

archi multipli.[188] Le (124) esprimono infatti il carattere di successioni ricorrenti delle due sequenze trigonometriche $\{\sin \nu x\}_{\nu=1}^{\nu=\infty}$ e $\{\cos \nu x\}_{\nu=1}^{\nu=\infty}$ fornendone direttamente la scala di relazione comune $\{2\cos x, -1\}$. Questa semplice osservazione permette di trarre la seguente successione di identità:[189]

(130)

i)
$$\begin{aligned}
&\sin x = \sin x\\
&\sin 2x = 2(\cos x)(\sin x)\\
&\sin 3x = 2(\cos x)(\sin 2x) - \sin x\\
&\sin 4x = 2(\cos x)(\sin 3x) - \sin 2x\\
&\ldots\\
&\sin vx = 2(\cos x)(\sin(v-1)x) - \sin (v-2)x\\
&\&c.
\end{aligned}$$

ii)
$$\begin{aligned}
&\cos 0 = 1\\
&\cos x = \cos x\\
&\cos 2x = 2 \cos^2 x - 1\\
&\cos 3x = 2(\cos x)(\cos 2x) - \cos x\\
&\cos 4x = 2(\cos x)(\cos 3x) - \cos 2x\\
&\ldots\\
&\cos vx = 2(\cos x)(\cos(v-1)x) - \cos (v-2)x\\
&\&c.
\end{aligned}$$

e quindi, per reiterazione($\nu \in \mathbf{N}$):

(131)

$$\text{i) } \sin vx = \sin x \left[2^{v-1} \cos^{v-1} x + \sum_{k=1}^{\frac{v-1}{2}} (-)^k\, 2^{v-(2k+1)} \frac{[v-(k+1)][v-(k+2)]\ldots[v-2k]}{k!} \cos^{v-(2k+1)} x \right]$$

[v dispari]

[188]Cfr. *ivi*, t. 1, cap. XIV, pp. 198-220.

[189]Si osservi che la derivazione di Euler non può essere in nessun modo intesa come una dimostrazione delle (130), le quali non fanno che ricevere una collocazione entro la teoria delle serie ricorrenti. La dimostrazione non induttiva delle (124) richiede infatti il ricorso alle identità reciproche alle (130)

$$\begin{aligned}
&\sin vx = 2(\cos (v-1)x)(\sin x) + \sin (v-2)x\\
&\cos vx = -2(\sin (v-1)x)(\sin x) + \cos (v-2)x
\end{aligned}$$

le quali derivano banalmente - come le stesse (130) - dalle identità

$$\begin{aligned}
&\sin vx = (\sin (v-1)x)(\cos x) + (\sin x)(\sin (v-1)x)\\
&\sin (v-2)x = (\sin (v-1)x)(\cos x) - (\sin x)(\cos (v-1)x)\\
&\cos vx = (\cos (v-1)x)(\cos x) - (\sin (v-1)x)(\sin x)\\
&\cos (v-2)x = (\cos (v-1)x)(\cos x) - (\sin (v-1)x)(\sin x)
\end{aligned}$$

mentre la loro giustificazione *a posteriori* deriva dalle stesse (130) [cfr. la precedente nota (186)]

$$\text{ii) } \sin vx = \sin x \left[\begin{array}{l} 2^{v-1} \cos^{v-1} x + \\ \displaystyle\sum_{k=1}^{\frac{v-2}{2}} (-)^k \, 2^{v-(2k+1)} \frac{[v-(k+1)][v-(k+2)]...[v-2k]}{k!} \cos^{v-(2k+1)} x \end{array} \right]$$

[v pari]

$$\text{iii) } \cos vx = \left[\begin{array}{l} 2^{v-1} \cos^v x - 2^{v-3} v \cos^{v-2} x + \\ \displaystyle\sum_{k=2}^{\frac{v-1}{2}} (-)^k \, 2^{v-(2k+1)} \frac{v[v-(k+1)][v-(k+2)]...[v-(2k-1)]}{k!} \cos^{v-2k} x \end{array} \right]$$

[v dispari]

$$\text{iv) } \cos vx = \left[\begin{array}{l} 2^{v-1} \cos^v x - 2^{v-3} v \cos^{v-2} x + \\ \displaystyle\sum_{k=2}^{\frac{v}{2}} (-)^k \, 2^{v-(2k+1)} \frac{v[v-(k+1)][v-(k+2)]...[v-(2k-1)]}{k!} \cos^{v-2k} x \end{array} \right]$$

[v pari]

A partire da qui Euler trae gli sviluppi in prodotti infiniti dei seni e dei coseni di archi multipli. Il procedimento che lo conduce a un tale risultato è veramente notevole. Ponendo nelle (131)(i) e (ii) sin $x = t$ e $x = z/\nu$, queste si trasformeranno in due equazioni nelle variabili t e z, le quali saranno verificate dalla posizione:[190]

$$(132) \qquad t = \sin \left[\frac{k\pi + (-)^k z}{v} \right] \qquad [k = 0, 1, 2, ...]$$

Essendo, per ogni ν e α, $\sin \dfrac{j\pi+\alpha}{\nu} = \sin \dfrac{(2\nu+j)\pi+\alpha}{\nu}$ (j = 1, 2,...), la (132) contiene al più 2ν valori di $t = \sin x$. Se ν è dispari tali valori sono inoltre uguali fra loro a due a due (essendo uguali i seni degli archi la cui somma è π o 3π), mentre se ν é pari saranno i moduli di tali valori a essere uguali fra loro a due a due (essendo uguali i moduli dei seni di archi la cui differenza è uguale a π).[191] La (132) contiene così tanto le ν radici della (131)(i) - ovvero: $t =$

[190]Si osservi infatti che per ogni k si ha: $\sin z = \sin [k\pi + (-)^k z]$.

[191]Cfr. la nota (gg) di Labey in Euler (1796), pp. 344-45. Si osservi che ponendo nelle (131)(i) $\sin x = t$ e $\cos x = \sqrt{1-t^2}$, $\sin \nu x$ risulterà equiparato a una funzione intera di t di grado ν, mentre operando le stesse sostituzioni in (131)(ii) sarà $\sin^2 \nu x$ a risultare equiparato a una funzione intera di t di grado 2ν. Considerate relativamente alla variabile t,

$\sin x$, $t = \sin\left(\frac{2\pi}{\nu} + x\right)$, $t = \sin\left(\frac{4\pi}{\nu} + x\right)$, ..., $t = \sin\left(\frac{2(\nu-1)\pi}{\nu} + x\right)$ - che le 2ν radici della (131)(ii) - ovvero: $t = \pm\sin x$, $t = \pm\sin\left(\frac{\pi}{\nu} - x\right)$, $t = \pm\sin\left(\frac{2\pi}{\nu} - x\right)$, ..., $t = \pm\sin\left(\frac{(\nu-1)\pi}{\nu} - x\right)$ - dalla cui considerazione Euler trae rispettivamente:[192]

---

le due equazioni $\sin \nu x = 0$ ($\nu = 1, 3, ...$) e $\sin^2 \nu x = 0$ ($\nu = 2, 4, ...$) avranno così rispettivamente ν e 2ν radici.

[192]Consideriamo in primo luogo il passaggio dalla (132) alla (133)(i). Essendo ν dispari, gli archi successivi cui tale formula si riferisce differiranno fra loro della differenza $2x$. Sostituendo $2x$ a x nella scala di relazione che fornisce le (130) si avrà la nuova scala $\{2\cos 2x, -1\} = \{2 - 4\sin^2 x, -1\}$, da cui, ricordando che $\sin -x = -\sin x$ e ponendo $\sin x = t$, è facile trarre la successione:

$$\sin -x = -t$$
$$\sin x = t$$
$$\sin 3x = [\sin x][2 - 4t^2] - \sin -x = 3t - 4t^3$$
$$\sin 5x = [\sin 3x][2 - 4t^2] - \sin x = 5t - 20t^3 + 16t^5$$
$$\sin 7x = [\sin 5x][2 - 4t^2] - \sin 3x = 7t - 56t^3 + 112t^5 - 64t^7$$
$$\ldots$$

$$\sin \nu x = \nu t - \frac{\nu(\nu^2-1)}{3!}t^3 + \frac{\nu(\nu^2-1)(\nu^2-9)}{5!}t^5 - \frac{\nu(\nu^2-1)(\nu^2-9)(\nu^2-25)}{7!}t^7 + ... + (-)^{\frac{\nu-1}{2}}2^{\nu-1}t^\nu$$

I fattori della funzione

$$[_\nu F(t) =]\ 1 - \left[\frac{\nu}{\sin \nu x}\right]t\ \left[\frac{\nu(\nu^2-1)}{3!\ \sin \nu x}\right]t^3 - \left[\frac{\nu(\nu^2-1)(\nu^2-9)}{5!\ \sin \nu x}\right]t^5 + ... - \left[\frac{(-)^{\frac{\nu-1}{2}}2^{\nu-1}}{\sin \nu x}\right]t^\nu$$
$$\left[= 1 + A_1 t + A_3 t^3 + A_5 t^5 + ... + A_\nu t^\nu\right]$$

saranno

$$\left(1 - \frac{t}{\sin x}\right), \left(1 - \frac{t}{\sin\left(\frac{2\pi}{\nu} + x\right)}\right), \left(1 - \frac{t}{\sin\left(\frac{4\pi}{\nu} + x\right)}\right), ..., \left(1 - \frac{t}{\sin\left(\frac{2(\nu-1)\pi}{\nu} + x\right)}\right)$$

ciò che conduce Euler a scrivere l'identità

$$\frac{\nu}{\sin \nu x} = \frac{1}{\sin x} + \frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi}{\nu} + x\right)} + \frac{1}{\sin\left(\frac{4\pi}{\nu} + x\right)} + ... + \frac{1}{\sin\left(\frac{2(\nu-1)\pi}{\nu} + x\right)}$$

da cui egli trae direttamente la (133)(i). In effetti, secondo i principi generali della teoria della risoluzione in fattori delle funzioni intere si ha

$$_\nu F(t) = K \prod_{j=0}^{\nu-1}\left[1 - \frac{t}{\sin\left(\frac{2j\pi}{\nu} + x\right)}\right] = 1 + \sum_{j=0}^{\frac{\nu-1}{2}} A_{2j-1}t^{2j-1}$$

da cui, ponendo $t = 0$, si trae $K = 1$ e quindi:

$$\frac{{}_{\nu}F(\iota)}{\iota^{\nu}}=\left(\frac{1}{\iota}-\frac{1}{\sin x}\right)\left(\frac{1}{\iota}-\frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi}{\nu}+x\right)}\right)\cdots\left(\frac{1}{\iota}-\frac{1}{\sin\left(\frac{2(\nu-1)\pi}{\nu}+x\right)}\right)$$

Ponendo $1/\iota = \xi$ si ha allora:

$${}_{\nu}F(\xi)=\xi^{\nu}-\left[\frac{\nu}{\sin \nu x}\right]\xi^{\nu-1}+\left[\frac{\nu(\nu^2-1)}{3!\,\sin \nu x}\right]\xi^{\nu-3}-\ldots-\left[(-)^{\frac{\nu-1}{2}}\frac{2^{\nu-1}}{\sin \nu x}\right]$$

$$=\left(\xi-\frac{1}{\sin x}\right)\left(\xi-\frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi}{\nu}+x\right)}\right)\cdots\left(\xi-\frac{1}{\sin\left(\frac{2(\nu-1)\pi}{\nu}+x\right)}\right)$$

Ponendo

$${}_{\nu}F(\xi)=A_0+A_1\xi+A_2\xi^2+\ldots+A_{\nu}\xi^{\nu}$$

si avrà allora

$$A_0+A_1\xi+A_2\xi^2+\ldots+A_{\nu}\xi^{\nu}=-\left[\frac{1}{\sin x}-\xi\right]\left[\frac{1}{\sin\left(\frac{2\pi}{\nu}+x\right)}-\xi\right]\cdots\left[\frac{1}{\sin\left(\frac{2(\nu-1)\pi}{\nu}+x\right)}-\xi\right]$$

da cui ponendo $\xi = 0$ si trae:

$$-A_0=(-)^{\frac{\nu-1}{2}}\frac{2^{\nu-1}}{\sin \nu x}=\frac{1}{[\sin x]\left[\sin\left(\frac{2\pi}{\nu}+x\right)\right]\cdots\left[\sin\left(\frac{2(\nu-1)\pi}{\nu}+x\right)\right]}$$

da cui segue la (133)(i)). Per quanto si possa dubitare della correttezza di una tale deduzione, che verte in ultima istanza sulla posizione $1/\iota = 0$, essa sembra corrispondere alla giustificazione implicita di Euler che, dato il precedente sviluppo finito di $\frac{\nu}{\sin \nu x}$, scrive immediatamente l'ultima delle precedenti identità.

Tramite un procedimento analogo è possibile pervenire anche alla (133)(ii). Considerando infatti la stessa scala di relazione considerata nel caso precedente si ha (ponendo $\cos x = \sqrt{1-\iota^2}$):

$$\sin 2x = 2\iota\sqrt{1-\iota^2}$$

$$\sin 4x = [\sin 2x][2-4\iota^2] = [4\iota-8\iota^3]\sqrt{1-\iota^2}$$

$$\sin 6x = [\sin 4x][2-4\iota^2]-\sin 2x = [6\iota-32\iota^3+32\iota^5]\sqrt{1-\iota^2}$$

...

$\sin \nu x =$

$$\left[\nu\iota-\frac{\nu(\nu^2-4)}{3!}\iota^3+\frac{\nu(\nu^2-4)(\nu^2-16)}{5!}\iota^5-\frac{\nu(\nu^2-4)(\nu^2-16)(\nu^2-36)}{7!}\iota^7+\ldots+(-)^{\frac{\nu-2}{2}}2^{\nu-1}\iota^{\nu-1}\right]\sqrt{1-\iota^2}$$

e quindi:

$$(\sin \nu x)^2=\nu^2\iota^2+B_4\iota^4+B_6\iota^6+\ldots+B_{2\nu-2}\iota^{2\nu-2}-2^{2\nu-2}\iota^{2\nu}$$

dove B_4, B_6,..., $B_{2\nu-2}$ sono dei coefficienti numerici che non è necessario determinare. Le radici dell'equazione

$$[{}_{2\nu}F(\iota)]=\iota^{2\nu}-\left[\frac{B_{2\nu-2}}{2^{2\nu-2}}\right]\iota^{2\nu-2}-\ldots-\left[\frac{\nu^2}{2^{2\nu-2}}\right]\iota^2+\left[\frac{\sin^2 \nu x}{2^{2\nu-2}}\right]=0$$

saranno allora

(133)

$$\text{i) } \sin vx = (-)^{\frac{v-1}{2}}\, 2^{v-1} \prod_{k=0}^{v-1} \left[\sin\left(\frac{2k\pi}{v} + x \right) \right] \qquad \text{[v dispari]}$$

$$\text{ii) } \sin vx = \pm\, 2^{v-1} \prod_{k=0}^{v-1} \left[\sin\left(\frac{k\pi}{v} + (-)^k x \right) \right] \qquad \text{[v pari]}$$

Essendo, d'altra parte,

(134)

$$\text{i) } \sin\left[\frac{(v-j)\pi}{v} \pm x \right] = \sin\left[\pi - \left(\frac{j}{v} \mp x \right) \right] = \sin\left(\frac{j\pi}{v} \mp x \right)$$

$$\text{ii) } \sin\left[\frac{(v+j)\pi}{v} + x \right] = \sin\left[2\pi - \frac{(v-j)\pi}{v} + x \right] = -\sin\left[\frac{(v-j)\pi}{v} - x \right]$$

$$\pm \sin x,\ \pm \sin\left(\frac{\pi}{v} - x \right),\ \dots,\ \pm \sin\left(\frac{(v-1)\pi}{v} - x \right)$$

da cui - "cum igitur ultimus terminus sit productum omnium harum radicum" - Euler deriva - "extrahendo utrinque radicem quadratam"- la (133)(*ii*), "ubi, quibus casibus utrumvis signum valeat, ex casibus particularibus erit dispiciendum" [cfr. *ivi*, t. I, p. 203]. Dalla precedente equazione si trae in effetti:

$$_{2v}F(t) = K \left[\frac{t}{\sin x} - 1 \right]\left[\frac{t}{\sin x} + 1 \right]\left[\frac{t}{\sin\left(\frac{\pi}{v} - x \right)} - 1 \right]\left[\frac{t}{\sin\left(\frac{\pi}{v} - x \right)} + 1 \right] \dots$$

$$\dots\left[\frac{t}{\sin\left(\frac{(v-1)\pi}{v} - x \right)} - 1 \right]\left[\frac{t}{\sin\left(\frac{(v-1)\pi}{v} - x \right)} + 1 \right]$$

e quindi, per $t = 0$, $K = \frac{\sin^2 vx}{2^{2v-2}}$, ovvero:

$$\frac{_{2v}F(t)}{t^{2v}} = \frac{\sin^2 vx}{2^{2v-2}} \left[\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{t} \right]\left[\frac{1}{\sin x} + \frac{1}{t} \right] \dots \left[\frac{1}{\sin\left(\frac{(v-1)\pi}{v} - x \right)} - \frac{1}{t} \right]\left[\frac{1}{\sin\left(\frac{(v-1)\pi}{v} - x \right)} + \frac{1}{t} \right]$$

Ponendo $[1/t]^2 = \xi$ si avrà allora:

$$_vF(\xi) = 1 - \left[\frac{B_{2v-2}}{2^{2v-2}} \right]\xi - \dots + \left[\frac{\sin^2 vx}{2^{v-2}} \right]\xi^v =$$

$$= -\frac{\sin^2 vx}{2^{2v-2}} \left[x - \frac{1}{\sin^2 x} \right] \dots \left[x - \frac{1}{\sin^2\left(\frac{(v-1)\pi}{v} - x \right)} \right]$$

e quindi per $\xi = 0$:

$$\sin^2 vx = \left(2^{2v-2} \right)\left(\sin^2 x \right)\left(\sin^2\left(\frac{\pi}{v} - x \right) \right) \dots \left(\sin^2\left(\frac{(v-1)\pi}{v} - x \right) \right)$$

da cui è facile derivare la (133)(ii).

$$\text{iii)}\ \sin\left[\frac{\pi}{2}+x\right]=\sin\left[\frac{\pi}{2}-x\right]$$

le (133) possono essere scritte sotto la forma:

(135)

$$\text{i)}\ \sin vx = 2^{v-1}\,[\sin x]\prod_{k=1}^{\frac{v-1}{2}}\left[\sin\left(\frac{k\pi}{v}-x\right)\right]\left[\sin\left(\frac{k\pi}{v}+x\right)\right]\qquad [v\ \text{dispari}]$$

$$\text{ii)}\ \sin vx = 2^{v-1}\,[\sin x]\left[\prod_{k=1}^{\frac{v-2}{2}}\left[\sin\left(\frac{k\pi}{v}-x\right)\right]\left[\sin\left(\frac{k\pi}{v}+x\right)\right]\right]\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]\qquad [v\ \text{pari}]$$

in modo che tali prodotti contengano entrambi v fattori. Da qui, osservando che $\cos vx = \frac{1}{2}\left[\frac{\sin\ 2vx}{\sin\ vx}\right]$, Euler trae direttamente:

(136)

$$\text{i)}\ \cos vx = 2^{v-1}\left[\prod_{k=1}^{\frac{v-1}{2}}\left[\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{2v}-x\right)\right]\left[\sin\left(\frac{(2k-1)}{2v}+x\right)\right]\right]\left[\sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)\right]\qquad [v\ \text{dispari}]$$

$$\text{ii)}\ \sin vx = 2^{v-1}\prod_{k=1}^{\frac{v}{2}}\left[\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{2v}-x\right)\right]\left[\sin\left(\frac{(2k-1)\pi}{2v}+x\right)\right]\qquad [v\ \text{pari}]$$

risultato che può d'altra parte essere tratto dalle (131)(iii) e (iv) secondo un procedimento analogo a quello che ha condotto alle (135). Componendo le (135) con le (136) Euler trae poi delle scomposizioni analoghe per le restanti funzioni trigonometriche elementari e, applicando il metodo di sommazione delle serie ricorrenti esposto nella precedente nota (187), la somma delle serie i cui termini sono rispettivamente costituiti dai seni e dai coseni di archi in progressione aritmetica:

(137)

$$\text{i)}\ \sum_{v=0}^{\infty}\sin(x+ny)=\frac{\cos\left(x-\frac{1}{2}y\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}y\right)}\qquad \text{ii)}\ \sum_{v=0}^{\infty}\cos(x+ny)=\frac{\sin\left(x-\frac{1}{2}y\right)}{2\sin\left(\frac{1}{2}y\right)}$$

III. 3. *d. κ. Il metodo di Daniel Bernoulli per l'approssimazione del valore assoluto della radice a modulo massimo di un'equazione algebrica a radici distinte*

Il capitolo XVII del primo tomo dell'*Introductio* è dedicato da Euler alla presentazione di un metodo di approssimazione per serie ricorrenti di alcune radici di un'equazione algebrica qualsiasi, il quale era stato formulato per la prima volta da Daniel Bernoulli nel 1728.[193] L'idea di Daniel Bernoulli non è semplicemente quella di esprimere il valore approssimato di una radice per mezzo di una serie (convergente) troncata all' n-esimo termine (come risulta sempre possibile per mezzo di un'applicazione del metodo di sviluppo per determinazione dei coefficienti e come lo stesso Newton aveva già proposto, a esempio nel *De Methodis*[194]), ma piuttosto quella di applicare l'algoritmo formale delle serie ricorrenti alla determinazione di un valore opportuno dell'incognita. Lo "spirito" di un tale metodo è quindi perfettamente nella linea del programma di unificazione proposto da Euler. La citazione di Daniel Bernoulli e della sua memoria del 1728 - che resta la sola citazione esplicita introdotta da Euler nel suo trattato - riveste d'altra parte, sotto questo punto di vista, un particolare significato. Benché non si riferisca infatti ai grandi orizzonti dell'*Introductio*, tale memoria sembra in effetti preconizzare un ideale di unificazione matematica che non era evidentemente estraneo, già alla fine degli anni venti, a quella comunità scientifica di cui Euler aveva da poco cominciato a far parte.[195] Il confronto fra le due formulazioni dello stesso metodo, separate fra loro da vent'anni di ricerca matematica, è così particolarmente istruttivo per la comprensione della straordinaria portata innovativa dell'*Introductio*.

All'origine della memoria di Daniel Bernoulli si trovano tanto le ricerche di D. Goldbach e del fratello Nicolaus II[196] sul problema della determinazione del termine generico di una serie ricorrente di cui si conosca la scala di relazione, quanto il problema (presentato a Daniel dallo stesso Nicolaus II[197]) di fornire una dimostrazione non infinitesimalista della (64)(ii). L'idea sfruttata da Daniel Bernoulli per giungere a una tale dimostrazione è quella di considerare il seno di un arco multiplo nz ($n \in \mathbf{N}$) come il termine generico di una successione ricorrente $\{\sin \nu z\}_{\nu=1}^{\nu=\infty}$,[198] la cui scala di relazione è, come ab-

[193]Cfr. Daniel Bernoulli (1728).

[194]Cfr. il precedente paragrafo II.1.θ..

[195]Come è noto, Euler era giunto a Pietroburgo nel 1727, raggiungendo Daniel Bernoulli che fu tra i primi grandi scienziati chiamati alla corte degli Zar, e con cui egli cominciò immediatamente una proficua collaborazione scientifica [cfr. a esempio Straub (1970)].

[196]Il riferimento di Daniel Bernoulli a Goldbach è generico. E' possibile tuttavia rinviare a Goldbach (1720) e (1728). Per quanto riguarda Nicolaus II Bernoulli, Daniel cita una lettera del 21 Novembre 1724.

[197]Daniel Bernoulli cita un'ulteriore lettera del fratello in data 22 agosto 1728.

[198]Basta questa semplice considerazione per indicare i legami assai stretti fra la memoria di Daniel Bernoulli e alcuni dei risultati cui Euler perviene nell'*Introductio*.

biamo visto nel precedente paragrafo III.3.*d*.ι., (2 cos z, -1).[199]

---

[199]Si osservi che la (64)(ii) è una semplice conseguenza della (63)(iii), la quale deriva a sua volta dalla congiunzione della (64)(ii) e della (64)(i). Queste ultime ricorrono d'altra parte in molte dimostrazioni dell'*Introductio* di cui esse forniscono uno dei principali strumenti algoritmici. La (63)(iii) è nota agli storici come "teorema di de Moivre". Questi giunse infatti nel 1722 [cfr. de Moivre (1722b)] a un risultato del tutto analogo, traendolo come conseguenza di un altro risultato dimostrato fin dal 1707 [cfr. de Moivre (1707)]. La dimostrazione di de Moivre è assai interessante relativamente a una valutazione dell'*Introductio* e verte sulla medesima idea di Daniel Bernoulli, ovvero sulla considerazione del seno e del coseno di un arco multiplo come termini generici di due serie ricorrenti. Essa costituisce verosimilmente una delle fonti di ispirazione di Euler che sembra muoversi in un contesto molto simile a quello che essa sottende [mi riferisco qui soprattutto ai risultati considerati nel precedente paragrafo III.3.*d*. ι.]. Il risultato del 1707 può formularsi nei termini seguenti.

Se $\sum_{v=1}^{\infty} A_v y^v$ e $\sum_{v=1}^{\infty} B_v w^v$ sono due serie ricorrenti caratterizzate dalle identità $A_1=n$, $A_2 = 0$, $A_3=\frac{n^2-1}{2.3}\cdot A_1$, $A_4=0$, $A_5=\frac{n^2-3^2}{4\cdot 5}A_3$, $A_6=0$, $A_7=\frac{n^2-5^2}{6\cdot 7}A_5$, &c. e $B_1=n$, $B_2=0$, $B_3=\frac{1-n^2}{2\cdot 3}B_1$, $B_4=0$, $B_5=\frac{3^2-n^2}{4\cdot 5}B_3$, $B_6=0$, $B_7=\frac{5^2-n^2}{6\cdot 7}B_5$, &c., e se si pone $\sum_{v=1}^{\infty} A_v y^v = R$ e $\sum_{v=1}^{\infty} B_v w^v = T$, allora si ha:

$$y = \frac{1}{2}\left[\sqrt[n]{R+\sqrt{R^2+1}} - \frac{1}{\sqrt[n]{R+\sqrt{R^2+1}}}\right] \text{ e } w = \frac{1}{2}\left[\sqrt[n]{T+\sqrt{T^2-1}} + \frac{1}{\sqrt[n]{T+\sqrt{T^2-1}}}\right]$$

Nella memoria del 1722 de Moivre non fa d'altra parte che affermare che da un tale risultato seguono le due equazioni "*cognatas*":

$$1 - 2z^n + z^{2n} = -2z^2\,[\sin v.\ nx] \quad \text{e} \quad 1 - 2z + z^2 = -2z\,[\sin v.\ x]$$

da cui la (63)(iii) deriva molto semplicemente, eliminando z (e ricordando che sin v. φ = 1 - cos φ). De Moivre non esplicita la sua deduzione, la quale può tuttavia venire ricostruita nei termini seguenti. Considerando la successione ricorrente $(\cos vz)_{v=-1}^{v=\infty}$ la cui scala di relazione è [2cos *x*, -1] e ponendo μ = 2ν -1 (ν =0, 1, 2,...) si trae una nuova successione ricorrente di indice μ, la cui scala di relazione è $[4\cos^2 x - 2, -1]$ e il cui termine generico di posto $v = 4\nu + 1 = 2\mu + 3$ può essere scritto (per reiterazione) sotto la forma:

$$\cos vx = v\cos x + \frac{v(1-v^2)}{3!}\cos^3 x + \frac{v(1-v^2)(3^2-v^2)}{5!}\cos^5 x + \ldots + \frac{v(1-v^2)\ldots(4-4v)}{v!}\cos^v x$$

che ponendo T = cos *vx*, *n* = *v* e *w* = cos *x* corrisponde alla serie $\sum_{v=1}^{\infty} B_v w^v$ considerata da de Moivre nel 1707. Applicando il risultato precedente si ha allora:

$$\cos x = \frac{1}{2}\left[\frac{\left(\cos vx + \sqrt{\cos^2 vx - 1}\right)^{2/v} + 1}{\left(\cos vx + \sqrt{\cos^2 vx - 1}\right)^{1/v}}\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{\left(\cos vx + \sqrt{-1}\,\sin vx\right)^{2/v} + 1}{\left(\cos vx + \sqrt{-1}\,\sin vx\right)^{1/v}}\right]$$

Ponendo nell'espressione di cos *vx*, *x* = φ/*n*, la considerazione del termine di posto *v*/*n* = 4ν + 1 = 2μ +3 fornisce d'altra parte, per un'analoga applicazione del risultato precedente, l'identità:

E' probabilmente la riflessione su un tale procedimento che condusse Bernoulli alla presentazione del suo metodo di approssimazione. Tale metodo verte su un teorema di ordine generale che può venir riformulato nei termini seguenti.

Teorema: Se la scala di relazione di una successione (o di una serie) ricorrente è $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ..., \alpha_n\}$ e se essa è tale che $p_1, p_2, p_3, ..., p_n$ sono le radici distinte dell'equazione associata

$$(138)\quad y^n = \alpha_1 y^{n-1} + \alpha_2 y^{n-2} + \alpha_3 y^{n-3} + ... + \alpha_{n-1} y + \alpha_n$$

allora il termine generico K_ν della successione assumerà la forma

$$(139)\quad K_\nu = \beta_1 [p_1]^\nu + \beta_2 [p_2]^\nu + \beta_3 [p_3]^\nu + ... + \beta_n [p_n]^\nu$$

dove le costanti $\beta_1, ..., \beta_n$ debbono essere determinate per mezzo di un confronto con i primi n termini della serie assegnata.

L'equazione (138) è in effetti determinata ponendo y^ν al posto del termine generico di posto ν della serie assegnata, $K_\nu = \alpha_1 K_{\nu-1} + \alpha_2 K_{\nu-2} + ... + \alpha_n K_{\nu-n}$ e dividendo per $y^{\nu-n}$. La (139) è così la forma generale della soluzione completa di tale equazione e la determinazione delle costanti per mezzo del confronto con i primi n termini della serie permette di correggere l'errore dovuto alla traslazione di $\nu-n$ posti comportata dalla divisione per $y^{\nu-n}$.

Se fra le n radici della (138) ve sono μ uguali fra loro, $p_1 = p_2 = ... = p_\mu$ ($\mu \leq n$), il termine generale assumerà per contro la forma:

$$(140)\quad K_\nu = \left(\gamma_1 + \gamma_2 \nu + \gamma_3 \nu^2 + ... + \gamma_\mu \nu^\mu\right)[p_1]^\nu + \beta_{\mu+1}[p_{\mu+1}]^\nu + ... + \beta_n [p_n]^\nu$$

dove sono le costanti $\gamma_1, ..., \gamma_\mu; \beta_{\mu+1}, ..., \beta_n$ a dover essere determinate per mezzo di un confronto con i primi termini della serie data.[200]

$$\cos\varphi = \cos nx = \frac{1}{2}\left[\frac{\left(\cos\nu x + \sqrt{-1}\,\sin\nu x\right)^{2n/\nu} + 1}{\left(\cos\nu x + \sqrt{-1}\,\sin\nu x\right)^{n/\nu}}\right]$$

Ponendo $\left(\cos\nu x + \sqrt{-1}\,\sin\nu x\right)^{1/\nu} = z$ sarà allora ovvio trarre le equazioni "*cognatas*" in cui n deve essere inteso come un esponente naturale. Per una valutazione del risultato di de Moivre nel contesto della sua produzione matematica, cfr. Schneider (1968-69), pp. 237-47.

[200] Da ciò deriva che se $p_1 = p_2 = ... = p_\mu = 1$, ovvero se la (138) ha la forma

$$y^n = \binom{n}{1} y^{n-1} - \binom{n}{2} y^{n-2} + ... - (-)^n \binom{n}{n}$$

E' evidente che il teorema di Bernoulli non fornisce in generale che la forma del termine generico di una successione ricorrente qualsiasi, lasciando la sua determinazione effettiva alla soluzione di un'equazione algebrica di grado n. Esso assicura d'altronde che se una successione è ricorrente, allora essa può presentarsi sotto la forma $\{\Psi(v)\}_{v=1}^{v=\infty}$, dove $\Psi(v)$ è una funzione determinata dell'indice v, ovvero esso assicura che il termine generico di *ogni* successione ricorrente possa essere espresso indipendentemente dal riferimento ai termini precedenti. Invertendo l'implicazione, tale teorema suggerisce, d'altra parte, un metodo atto a determinare il valore approssimato del modulo della radice di modulo massimo di una qualsiasi equazione algebrica. Ecco come Bernoulli presenta tale metodo nel caso più semplice, ovvero quello in cui tutte le radici dell'equazione assumono valori reali e distinti e tali che la radice di valore massimo non possiede lo stesso valore assoluto della radice di valore minimo:

> Concilietur æquationi propositæ hæc forma $1 = \alpha_1 z + \alpha_2 zz + \alpha_3 z^3 + \alpha_4 z^4 +$ &c. Dein formetur series incipiendo a tot terminis arbitrariis,[201] quot dimensiones æquatio habet, ea lege, ut si A, B, C, D, E, &c. denotent terminos se invicem directo ordine consequentes, sit ubique $E = \alpha_1 D + \alpha_2 C + \alpha_3 B + \alpha_1 A +$ &c. sintque in hac serie satis continuata duo termini proximi M et N, erit terminus antecedens M divisus per consequentem N proxime æqualis radici quæsitæ.[202]

Alcuna giustificazione segue una simile enunciazione, la quale è piuttosto chiarificata per mezzo di alcuni esempi.[203] Se le condizioni indicate relativamente alle radici non sono rispettate, il procedimento deve essere convenientemente modificato,[204] mentre se l'approssimazione trovata non è soddi-

---

allora il termine generico K_v è una funzione algebrica (intera) di v e la serie può, da parte sua, essere qualificata, secondo Bernoulli, come *algebrica*.

[201]Come si vedrà la scelta dei termini arbitrari deve in realtà essere opportuna.

[202]Cfr. Bernoulli (1728), p. 92. Traducendo nel linguaggio utilizzato in precedenza si ha chiaramente $A = K_{\rho-4}$, $B = K_{\rho-3}$, $C = K_{\rho-2}$, $D = K_{\rho-1}$, $E = K_\rho$ (in modo che la scala di relazione della serie è esattamente quella considerata nel teorema) e $M/N = K_v/K_{v+1}$.

[203]Il primo degli esempi introdotti da Bernoulli sarà sufficiente a chiarire il procedimento. Data l'equazione $1 = -2x + 5x^2 - 4x^3 + x^4$, si scelgano quattro costanti arbitrarie $K_1 = 1$, $K_2 = 1$, $K_3 = 1$, $K_4 = 1$ e si formi conseguentemente la successione ricorrente i cui termini restanti obbediscano alla scala di relazione {-2, +5, -4, +1}:

$$\{1, 1, 1, 1, 0, 2, -7, 25, -93, 341, -1254, \ldots\}$$

Il rapporto $\frac{341}{1254}$ fornisce allora un valore approssimato di una radice dell'equazione assegnata.

[204]Nel corso del suo trattamento del caso caratterizzato dalla presenza di radici immaginarie, Daniel Bernoulli indica come confrontare il modulo di due valori complessi:

> [...] secundus, quando radix minima est imaginaria - egli scrive [cfr. *ivi*, 93] -, veluti si æquatio has haberet radices $\sqrt{-4}$, $-\sqrt{4}$ [*sic*, evidentemente occorre correggere in $-\sqrt{-4}$] et 5, quarum ultima realis maior i. e. magis a nihilo distans censenda est quam quævis duarum reliquarum.

Un tale criterio, che sembra richiamare al confronto fra i moduli della parte reale di due valori complessi pare implicitamente sotteso a numerosi ragionamenti di Euler [cfr.

sfacente rispetto agli scopi prefissati, essa può venir migliorata, sia considerando due termini di posto maggiore, sia scegliendo opportunamente le n costanti arbitrarie che costituiscono i primi n termini della serie ricorrente associata all'equazione, sia sostituendo in quest'ultima $t \pm p$ a z (dove p è il valore approssimato già determinato) e cercando un'approssimazione di t per mezzo dello stesso procedimento. La considerazione di simili casi particolari costituisce l'argomento delle parti successive della memoria di Bernoulli.

Per parte nostra torniamo al caso più semplice. Il procedimento proposto da Bernoulli trova evidentemente la sua giustificazione nella semplice considerazione del fatto che, se $|p_1| > |p_2| > ... > |p_n|$ ($p_k \in \mathbf{R}$, $k = 1, 2, ..., n$), data la (139), il valore $|K_v/K_{v+1}|$ approssima il modulo del rapporto $1/p_1$ tanto più v é grande e la differenza fra $|p_1|$ e $|p_2|$ è maggiore. Ponendo infatti nella (138) $y = 1/z$ e moltiplicando per z^n si trae:

$$(141) \qquad 1 - \alpha_1 z - \alpha_2 z^2 - ... - \alpha_{n-1} z^{n-1} - \alpha_n z^n = (1-p_1 z)(1-p_2 z) \; ... \; (1-p_n z) = 0$$

e quindi il valore $|K_v/K_{v+1}|$ approssimando il modulo del rapporto $1/p_1$ approssima il valore assoluto della radice di modulo minimo di $z = 1/y$.

Ecco ora come Euler riformula e giustifica il metodo di Daniel Bernoulli, reinterpretandolo entro il nuovo contesto fornito da una teoria generale delle funzioni. Essendo una serie ricorrente $\sum_{v=0}^{\infty} K_v z^v$ di cui la scala di relazioni è $[\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n]$ lo sviluppo di una funzione frazionaria genuina ${}_{m/n}F(z) = \dfrac{{}_mF(z)}{1 - \alpha_1 z - \alpha_1 z^2 - ... - \alpha_n z^n}$, è sempre possibile trovare il termine generale di tale serie secondo il metodo esposto nel precedente paragrafo III.3.*d*.θ., risolvendo ${}_{m/n}F(z)$ nella somma delle sue frazioni parziali, in modo che la (139) e la (140) non sono che dei risultati dell'applicazione di tale metodo, il quale permette peraltro di determinare *a priori* le costanti β_k ($k = 1, 2, ..., n$) e γ_k ($k = 1, 2, ..., \mu$). Se le frazioni parziali di ${}_{m/n}F(z)$ sono in effetti $\dfrac{A_1}{(1 - p_1 z)^{s_1}}, \dfrac{A_2}{(1 - p_2 z)^{s_2}}, ..., \dfrac{A_\sigma}{(1 - p_\sigma z)^{s_\sigma}}$ ($1 \leq s_k \leq n$, $k = 1, 2, ..., \sigma$, $n \in \mathbf{N}$; $s_1+s_2+...+s_\sigma$; $1 \leq \sigma \leq n$) si avrà direttamente, secondo la (123):

sotto].

$$(142)\qquad \begin{aligned} K_\nu &= A_1 \frac{s_1(s_1+1)(s_1+2)\dots(s_1+\nu-1)}{\nu!} p_1^\nu + \dots + \\ &\quad + A_\sigma \frac{s_\sigma(s_\sigma+1)(s_\sigma+2)\dots(s_\sigma+\nu-1)}{\nu!} p_\sigma^\nu \end{aligned}$$

Sia ora $p_k \in \mathbb{R}$ ($k = 1, 2, \dots, n$) e $p_1 \neq p_2 \neq \dots \neq p_n$, $|p_1| < |p_2| \leq \dots \leq |p_n|$ (in modo che $s_1 = s_2 = \dots = s_\sigma = 1$ e $\sigma = n$). Si avrà allora (in accordo con la (139)):

$$(143)\qquad K_\nu = A_1 p_1^\nu + A_2 p_2^\nu + \dots + A_n p_n^\nu$$

e (se $A_1 \neq 0$) il modulo del rapporto $K_{\nu+1}/K_\nu$ fornisce un'approssimazione del valore assoluto di p_1,[205] tanto migliore quanto p, ν e A_1 sono grandi e $|p_2|$ è maggiore di $|p_1|$. Essendo d'altra parte per costruzione:

$$(144)\qquad \begin{aligned} {}_nF(z) &= 1 - \alpha_1 z - \alpha_2 z^2 - \dots - \alpha_{n-1} z^{n-1} - \alpha_n z^n \\ &= (1 - p_1 z)(1 - p_2 z) \dots (1 - p_n z) \end{aligned}$$

$1/p_1$ è la radice a modulo minimale dell'equazione ${}_nF(z) = 0$, il cui valore assoluto è così approssimato dal modulo del rapporto $K_{\nu+1}/K_\nu$. Ponendo d'altra parte $z = 1/y$ lo stesso procedimento fornisce un'approssimazione del valore assoluto della radice p_1 a modulo massimo dell'equazione ${}_nF_1(y) = y^n - \alpha_1 y^{n-1} - \alpha_2 y^{n-2} - \dots - \alpha_n = 0$

Se sono le equazioni ${}_nF(z) = 0$ e ${}_nF_1(y) = 0$ a essere date, si tratta così di costruire a partire da esse la funzione frazionaria ${}_{m/n}F(z)$, di trovare la serie sviluppo e di calcolare il rapporto fra i suoi coefficienti di posto ν e $\nu+1$. Le equazioni assegnate non forniscono tuttavia che il denominatore della funzione frazionaria cercata, lasciando del tutto indeterminati gli m ($m \leq n$) coefficienti del numeratore ${}_mF(z)$, i quali devono così essere scelti arbitrariamente (ciò che corrisponde evidentemente all'arbitrarietà dei primi n

[205] Benché la giustificazione di Euler utilizzi presupposizioni esplicitamente infinitesimaliste, queste non sembrano per nulla essenziali alla dimostrazione del risultato. Ecco comunque come questi si esprime [cfr. Euler (1748), t. 1, pp. 277-78].

Ponamus jam ν esse numerum maximum, seu Seriem recurrentem ad plurimos terminos esse continuatam; quoniam numerorum inæqualium Potestates eo magis fiunt inæquales, quo fuerint altiores; tanta erit diversitas in Potestatibus $A_1 q_1^\nu$, $A_2 q_2^\nu$, $A_3 q_3^\nu$ &c., ut ea, quæ oritur ex maximo numerorum q_1, q_2, q_3 &c., reliquas magnitudine longe superet, præ aeque reliquæ penitus evanescant, si ν fuerit numerus plane infinite magnus. Cum igitur numeri q_1, q_2, q_3 &c. sint inter se inæquales, ponamus inter eos q_1 esse maximum; ac propterea, si ν sit numerus infinitus, fiet $K_\nu = A_1 q_1^\nu$; sin autem ν sit numerus vehementer magnus erit tantum proxime $K_\nu = A_1 q_1^\nu$. Simili vero modo erit $K_{\nu-1} = A_1 q_1^{\nu+1}$, ideoque $K_{\nu-1}/K_\nu = q_1$.

termini della serie di Bernoulli). Tale arbitrarietà non corrisponde tuttavia alla totale assenza di condizioni. La scelta dei coefficienti in questione non solo deve infatti risultare opportuna relativamente all'obiettivo di giungere a un'approssimazione adeguata, ma essa deve inoltre garantire che il coefficiente A_1 assuma un valore non nullo. La funzione intera ${}_mF(z)$ deve essere quindi tale che il fattore $(1 - p_1 z)$ di ${}_nF(z)$ non sia anche un proprio fattore. Una tale condizione non diminuisce tuttavia la potenza del metodo, ma al contrario la aumenta. Una volta che sia stata infatti fornita un'approssimazione adeguata del valore di p_1, se l'equazione data è tale che $|p_2| < |p_3| \leq ... \leq |p_n|$, si potranno scegliere i coefficienti di ${}_mF(z)$ in modo da annullare il primo termine della (144) e passare così alla determinazione di un valore approssimato per il modulo di p_2. Se $|p_1| < |p_2| < ... < |p_n|$ (e $p_k \in \mathbf{R}$, $k = 1, 2, ..., n$), reiterando il procedimento (e ponendo $m = n-1$) si otterrà un'approssimazione del valore assoluto di tutte le radici delle equazioni assegnate ${}_nF(z) = 0$ e ${}_nF_1(y) = 0$.

Restando al caso di equazioni a radici reali e distinte, sia ora $p_1 = -p_2$. Se ν è pari (il caso in cui ν è posto dispari è del tutto analogo) la (143) fornisce allora le identità:

$$
\begin{aligned}
&K_\nu = p_1^\nu\,[A_1 + A_2] + ... + A_n p_n^\nu \\
(145)\qquad &K_{\nu+1} = p_1^{\nu+1}\,[A_1 - A_2] + ... + A_n p_n^{\nu+1} \\
&K_{\nu+2} = p_1^{\nu+2}\,[A_1 + A_2] + ... + A_n p_n^{\nu+2}
\end{aligned}
$$

e (se ${}_mF(z)$ é tale che $A_1 \neq A_2$) il valore assoluto del rapporto $K_{\nu+1}/K_\nu$ non approssima il modulo di p_1. Il modulo del rapporto $K_{\nu+2}/K_\nu$ approssimerà tuttavia il valore di $[p_1]^2$ e la radice di tale modulo fornirà allora un'approssimazione per il valore assoluto di p_1 e p_2. Reiterando il procedimento e scegliendo opportunamente, passo dopo passo, i coefficienti di ${}_mF(z)$ il metodo fornisce allora un'approssimazione del valore assoluto di tutte le radici di ogni equazione ${}_nF(z) = 0$ a radici reali e distinte.

Se la funzione intera ${}_nF(z)$ è d'altra parte tale che l'equazione associata ${}_nF(z) = 0$ possiede $2h$ radici immaginarie distinte $p_1, p_2, ..., p_{2h-1}, p_h$ ($1 \leq h \leq n/2$, $h \in \mathbf{N}$), la (127) fornisce l'identità:

$$
\begin{aligned}
&K_\nu = \frac{B_1 \sin(\nu+1)x + B_2 \sin \nu x}{\sin x}\, r_1^\nu + ... + \\
(146)\qquad &+ \frac{B_{2h-1} \sin(\nu+1)x + B_2 \sin \nu x}{\sin x}\, r_h^\nu + A_{2h+1} p_{2h+1}^\nu + ... + A_n p_n^\nu
\end{aligned}
$$

(dove $r_1 \neq r_2 \neq ... \neq r_h$). Se $|r_k|$ ($k = 1, 2, ..., h$) è minore di $|p_{2h+1}| < |p_{2h+2}| \leq ... \leq$

$|p_n|$ e quindi[206] $[r_k]^2 = (p_{2k-1} \cdot p_{2k}) < (p_{2k+1})^2$ la presenza di $2h$ radici immaginarie non impedisce - essendo x costante relativamente a ν - di trovare per mezzo del metodo precedente un'approssimazione del valore assoluto della radice a modulo minimo dell'equazione data ${}_nF(z) = 0$. Se invece l'equazione data è tale che $|r_1| < |r_2| \leq |r_3| \leq ... \leq |r_n|$, $|p_{2h+1}| \leq |p_{2h+2}| \leq ... \leq |p_n|$ e $[r_k]^2 = (p_1 \cdot p_2) > (p_{2k+1})^2$. Ponendo

$$(147) \qquad C_{\nu+j} = \frac{B_1 \sin(\nu+1+j)x + B_2 \sin(\nu+1)x}{\sin x} r_1^{\nu+1} \qquad [j = 0, 1, 2, ...]$$

si trae allora:

$$(148) \qquad C_{\nu+j}[r_1]^2 + C_{\nu+j+2} = 2\, C_{\nu+j+1}[r_1] \cos x \qquad [j = 0, 1, 2, ...]$$

e quindi confrontando i valori di cos x per le sostituzioni $j = 0$ e $j = 1$:

$$(149) \qquad \begin{aligned} &\text{i)}\ r_1 = \sqrt{\frac{[C_{\nu+2}]^2 - [C_{\nu+1}][C_{\nu+2}]}{[C_{\nu+1}]^2 - [C_\nu][C_{\nu+2}]}} \\ &\text{ii)}\ \cos x = \frac{[C_{\nu+2}][C_{\nu+1}] - [C_\nu][C_{\nu+3}]}{\sqrt{\left([C_{\nu+1}]^2 - [C_\nu][C_{\nu+2}]\right)\left([C_{\nu+2}]^2 - [C_{\nu+1}][C_{\nu+3}]\right)}} \end{aligned}$$

Siccome $C_{\nu+j}$ approssima $K_{\nu+j}$ le (149) permettono di determinare un valore approssimato del fattore doppio $1 - (2r_1 \cos x)z - r_1{}^2z^2$ della funzione ${}_nF(z)$. Non sarà poi difficile, impiegando ragionamenti analoghi a quelli utilizzati in precedenza relativamente a equazioni a radici reali, passare agli altri casi che la presenza di $2h$ radici immaginarie distinte può fornire.

Se ${}_nF(z)$ ha per contro delle radici uguali fra loro - ovvero la (142) è tale che almeno uno degli esponenti $s_1,...s_\sigma$ è maggiore di uno e quindi almeno uno dei coefficienti di K_ν assume la forma: $A_k \dfrac{(\nu+1)(\nu+2)...(\nu+\rho-1)}{(\rho_1-1)!} p_k^\nu$ ($k = 1, 2, ..., \sigma$, $\rho > 1$, $\rho \in \mathbb{N}$) - le approssimazioni trovate per mezzo del procedi-

[206]Ponendo $p_{2h-1} = a+b\sqrt{-1}$ si potranno sempre ordinare le radici immaginarie in modo che $_{2h} = a-b\sqrt{-1}$ e quindi: $p_{2h-1} \cdot p_{2h} = a^2 + b^2$. Se si pone d'altra parte in (78) P = 1 , Q = W e R = Z, la (80) si trasforma nell'identità $W = 2\sqrt{Z} \cos x$ e ponendo ancora $Z = r^2$ si avrà quindi: ${}_2F(z) = 1 - (2\sqrt{Z} \cos x)z + Zz^2 = 1 - 2r \cos x + r^2z^2$. Se i fattori semplici che compongono ${}_2F(z)$ sono $(1-p_{2h-1}z)$ e $(1-p_{2h}z)$ si avrà d'altronde ${}_2F(z) = 1 - 2az + (a^2+b^2)z^2$ e quindi: $\sqrt{r} \cos x = a$ e $r^2 = (a^2 + b^2) = p_{2h-1} \cdot p_{2h}$.

mento precedente risultano accettabili solo se v è molto grande, ciò che rende assai faticoso il ricorso a serie ricorrenti.

La riformulazione di Euler del metodo di Daniel Bernoulli e soprattutto la reinterpretazione di questo nel contesto di una teoria generale delle funzioni permette un notevole accrescimento di intelligibilità matematica e generalità. Vi è qui un esempio perspicuo del modo di procedere che informa l'intera impresa dell'*Introductio*: la riorganizzazione e la reinterpretazione in un quadro unitario di un materiale già largamente noto dà luogo a una matematica radicalmente nuova. Questo a parte, ciò che sembra interessante sottolineare è, tanto in Euler come in Daniel Bernoulli, l'impiego essenzialmente formale delle serie ricorrenti, il quale permette l'approssimazione del valore assoluto della radice a modulo massimo di un'equazione associata a un'opportuna funzione frazionaria, senza che la correttezza del risultato dipenda in alcun modo dalla convergenza alla funzione generatrice della serie impiegata. La teoria generale delle associazioni formali fra forme finite e serie intere trova così, in quanto tale, un'interessante applicazione numerica, mostrandosi con tutta evidenza come uno strumento matematico, il cui interesse trascende una pura esigenza "filosofica" e caratterizzandosi al contrario come una teoria utilizzabile, in quanto tale, anche in un contesto puramente applicativo.

III. 3. *d*(3).
RISOLUZIONE DEI PRODOTTI IN SERIE E APPLICAZIONI ALLA COMBINATORIA (CAPITOLI XV E XVI)

III. 3. *d*. λ. *Combinazioni con e senza ripetizioni*

Il passaggio da un prodotto a una somma segue in generale delle regole molto semplici. La (101) esprime infatti la legge di formazione dei coefficienti A_k ($k = 1, 2, \ldots$) della serie intera equiparata al prodotto generico $(1+a_1z)(1+a_2z)(1+a_3z)$&c.. Ponendo in essa $z = 1$ si deduce facilmente che il prodotto $\prod_{k=1}^{m}(1+a_k)$ è uguale a una somma $1 + \mathfrak{P}_1 + \mathfrak{P}_2 + \ldots + \mathfrak{P}_m$ il cui termine generico $\mathfrak{P}_j$ ($j = 1, 2, \ldots, m$) è a sua volta costituito dalla somma di tutti i prodotti di j fattori che possono essere formati scegliendo tali fattori fra i numeri a_k ($k = 1, 2, \ldots, m$) e prendendo ognuno di questi una sola volta. Se si considera l'operazione di somma come una semplice enumerazione e quella di prodotto come un'associazione dei fattori fra loro, $\mathfrak{P}_j$ è allora una *combinazione senza ripetizioni*: in particolare, essa è la combinazione senza ripetizioni di j oggetti scelti fra gli m oggetti $\{a_1, a_2, \ldots, a_m\}$. Impiegando la moderna notazione combinatoria si potrebbe quindi scrivere $\mathfrak{P}_j = C(m, j)$. Ecco come Euler si esprime.

Quod si ergo ponatur $z = 1$, productum hoc $(1+a_1)(1+a_2)(1+a_3)(1+a_4)(1+a_5)$ &c. æquabitur unitati cum Serie numerorum omnium, qui ex his a_1, a_2, a_3, a_4, a_5, &c., vel sumendis singulis, vel duobus pluribusve diversis in se multiplicandis, nascuntur.[207]

Ponendo d'altra parte:

$$\frac{1}{(1-b_1z)(1-b_2z)(1-b_3z)\dots(1-b_nz)} = 1 + B_1z + B_2z + \&c. \tag{150}$$

si ha, per una semplice applicazione del metodo dei coefficienti indeterminati:

$$\begin{aligned} &B_1 = \sum_{i=1}^{m} b_i \\ &B_2 = B_1\left(\sum_{i=1}^{m} b_i\right) - \sum_{i=1}^{m} b_i\left(\sum_{j=i+1}^{m} b_j\right) = \sum_{i=1}^{m} b_i\left(\sum_{j=1}^{i} b_j\right) \\ &B_3 = B_2\left(\sum_{i=1}^{n} b_i\right) - A_1\left(\sum_{i=1}^{m} b_i\left(\sum_{j=i+1}^{m} b_j\right)\right) + \sum_{i=1}^{m} b_i\left(\sum_{j=i+1}^{m} b_j\left(\sum_{r=j+1}^{m} b_r\right)\right) = \\ &\quad = \sum_{i=1}^{m} b_i\left(\sum_{j=1}^{i} b_j\left(\sum_{r=1}^{j} b_r\right)\right) \\ &\&c. \end{aligned} \tag{151}$$

da cui ponendo $z = 1$ si deduce che il prodotto $\prod_{k=1}^{m}(1-b_k)^{-1}$ è uguale a una somma $1 + Q_1 + Q_2 + \dots + Q_m$ il cui termine generico Q_j ($j = 1, 2, \dots, m$) è a sua volta costituito dalla somma di tutti i prodotti di j fattori che possono essere formati scegliendo tali fattori fra i numeri b_k ($k = 1, 2, \dots, m$) prendendo ognuno di questi tante volte quante si vuole. Se si considera ancora l'operazione di somma come una enumerazione e quella di prodotto come un'associazione, Q_j è allora una *combinazione con ripetizioni*: in particolare, essa è la combinazione con ripetizioni di j oggetti scelti fra gli m oggetti $\{b_1, b_2, \dots, b_m\}$. Secondo la moderna notazione combinatoria si avrebbe così: $Q_j = K(m, j)$. Ecco anche in questo caso la formulazione di Euler.

Posito ergo $z = 1$, ista expressio $\frac{1}{(1-b_1)(1-b_2)(1-b_3)(1-b_4)(1-b_5)\&c.}$ æquabitur unitati cum Serie numerorum omnium, qui ex his $b_1, b_2, b_3, b_4, b_5, b_6$, &c., vel sumendis singulis, vel duobus pluribusve in se multiplicandis, oriuntur, non exclusis

[207] Cfr. *ivi*, t. 1, p. 221.

æqualibus.[208]

Questi risultati sono in quanto tali assolutamente banali e erano perfettamente noti ben prima della pubblicazione dell'*Introductio*. Le applicazioni proposte da Euler mostrano tuttavia, ancora una volta, come essi ricevano qui una nuova interpretazione, indicando la possibilità di esprimere per mezzo dei prodotti $\prod_{k=1}^{m}(1+a_k)$ e $\prod_{k=1}^{m}(1-b_k)^{-1}$ quelli che in linguaggio moderno qualificheremmo come gli insiemi di tutti i sottoinsiemi di 1, 2, ..., m elementi rispettivamente dell'insieme di m elementi $\{a_1, a_2, ..., a_m\}$ e dell'insieme di m^2 elementi $\{\{b_1, b_2, ..., b_m\}, \{b_1, b_2, ..., b_m\}$,...($m$ volte)..., $\{b_1, b_2, ..., b_m\}\}$. Se il linguaggio insiemistico è certamente estraneo alla matematica settecentesca, esso esprime assai bene il cuore dell'idea di Euler: invece di leggere la (110) e la (151) come delle formule atte a permettere una determinazione dei coefficienti incogniti A_k e B_k (1, 2, ..., m) tramite l'ausilio di opportuni strumenti combinatori, egli le concepisce come due risultati chiave a partire dai quali è possibile fornire una trattazione analitica della stessa combinatoria: la teoria generale delle funzioni si mostra abbastanza ricca per esprimere e studiare in termini astratti la combinazione regolata di una qualsiasi moltitudine di oggetti (o, per meglio dire - assumendo l'indubitabile particolarismo del punto di vista di Euler - di numeri). In effetti, dopo aver tratto dalla (110) e dalla (151) una ridda di risultati particolari - nel capitolo XV - questi consacra il capitolo XVI alla costruzione di una teoria analitica delle partizioni numeriche.

Fra i risultati presentati nel capitolo XV, i quali si riferiscono a particolari serie e prodotti infiniti a termini numerici, non sceglierò che qualche esempio.

Considerando in primo luogo un'estensione infinitaria della (151) e sostituendo i coefficienti b_k (k = 1, 2, ...) con i successivi numeri primi p_1, p_2, p_3, &c. è ovvio trarre le due interessanti identità:

$$(152)\qquad \begin{array}{ll} \text{i)} & \displaystyle\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_k}\right)^{-1}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} \\ \text{ii)} & \displaystyle\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_k^n}\right)^{-1}=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^n} \qquad [n\in \mathbb{N}] \end{array}$$

dalla seconda delle quali segue subito l'altra identità:

[208] Cfr. *ivi*, t. 1, p. 224.

$$(153)\qquad \frac{\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{n}}}{\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^{2n}}}=\prod_{k=1}^{\infty}\frac{1-\dfrac{1}{p_k^{2n}}}{1-\dfrac{1}{p^{n}}}=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+\frac{1}{p_k^{n}}\right)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{q_k^{n}}\qquad [n\in \mathbb{N}]$$

dove q_k $(k=1, 2, \ldots)$ rappresenta successivamente tutti i numeri naturali salvo quelli che presentano come fattori due o più numeri primi.

Essendo poi, secondo la (54)(iv), $\log\left(\dfrac{1}{1-x}\right) = -\log(1-x) = \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty}\frac{x^{k}}{k}$, ponendo $x = 1$ dalla (152)(i) si trae

$$(154)\qquad \log(\infty)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k}=\prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_k}\right)^{-1}=\infty$$

e quindi:

$$(155)\qquad \prod_{k=1}^{\infty}\left(1-\frac{1}{p_k}\right)=0$$

Questi pochi risultati mostrano assai bene l'approccio di Euler. Cosciente che la (110) e la (151) non forniscono che delle associazioni formali, egli non sceglie nei suoi esempi che delle sostituzioni che forniscono o degli sviluppi numerici convergenti o l'espressione formale della divergenza, ovvero l'equiparazione all'infinito di uno sviluppo determinato.

III. 3. *d. μ. Principi fondamentali di una teoria analitica delle partizioni generalizzate*

Lasciate le applicazioni di ordine particolare della (110) e della (151), veniamo ora alla teoria euleriana delle "*partitiones numerorum*".[209] Ponendo in primo luogo:

$$(156)\qquad \prod_{i=1}^{\infty}\left(1+x^{n_i}z\right)=\sum_{i=0}^{\infty}N_i\, z^{i}\qquad [N_0=1]$$

dalla (110) segue:

[209] Cfr. *ivi*, t. 1, cap. XVI, pp. 253-75.

$$
\begin{aligned}
&N_1 = \sum_{i=1}^{\infty} x^{n_i} \\
&N_2 = \sum_{i=1}^{\infty} \left[x^{n_i} \sum_{j=i+1}^{\infty} x^{n_j} \right] = \sum_{i=1}^{\infty} \left[x^{n_i+n_{i+1}} + x^{n_i+n_{i+2}} + x^{n_i+n_{i+3}} + \&c. \right] \\
(157) \quad &N_3 = \sum_{i=1}^{\infty} \left[x^{n_i} \sum_{j=i+1}^{\infty} \left[x^{n_j} \sum_{r=j+1}^{\infty} x^{n_r} \right] \right] = \\
&= \sum_{i=1}^{\infty} \left[\begin{array}{l} x^{n_i+n_{i+1}+n_{i+2}} + x^{n_i+n_{i+1}+n_{i+3}} + \&c. \\ + x^{n_i+n_{i+2}+n_{i+3}} + x^{n_i+n_{i+2}+n_{i+4}} + \&c. \\ + x^{n_i+n_{i+3}+n_{i+4}} + x^{n_i+n_{i+3}+n_{i+5}} + \&c. \\ \&c. \end{array} \right] \\
&\&c.
\end{aligned}
$$

da cui è facile capire che i coefficienti N_i (i = 1, 2, ...) sono costituiti dalle somme delle potenze di x i cui esponenti sono tutte le somme di i addendi che possono essere formate scegliendo tali addendi fra i numeri n_j (j = 1, 2, ...) e prendendo ognuno di essi una sola volta. E' chiaro d'altra parte che i valori di alcune delle somme così formate possono coincidere fra loro, di modo che il coefficiente generico $\sum_{i=0}^{\infty} N_i z^i$ assumerà la forma:

$$
(158) \qquad N_v = \sum_{i=1}^{\infty} \mathfrak{R}_{m_i,v}\, x^{m_i}
$$

in cui i coefficienti $\mathfrak{R}_{m_i,v}$ sono dei numeri naturali che indicano quante volte il numero m_i può essere formato in quanto somma di v addendi distinti scelti fra i numeri n_j (j = 1, 2, ...). Facendo astrazione dall'indice di m (la cui funzione è qui soltanto espositiva) si conclude quindi che

> si quæratur quot variis modis numerus m possit esse summa v terminorum illius Seriei $\left[\{n_i\}_{i=1}^{i=\infty} \right]$ diversorum, in expressione evoluta [ovvero nella serie intera $\sum_{i=0}^{\infty} N_i z^i$] quæri debet terminus $x^m z^v$, ejusque coëfficiens indicabit numerum quæsitum.[210]

Il simbolo $\mathfrak{R}_{m,v}$ potrà allora essere utilizzato per indicare il coefficiente di

[210]Cfr. *ivi*, p. 254.

$x^m z^\nu$ nella serie intera associata al prodotto infinito $\prod_{i=1}^{\infty}(1+x^{n_i}z)$, il quale indica quante volte il numero m può essere formato in quanto somma di ν addendi distinti scelti fra i numeri n_j $(j = 1, 2, ...)$.

Se nella serie $\sum_{i=0}^{\infty} N_i z^i$ si pone ora $z = 1$ tutte le potenze di x a esponente uguale possono essere sommate fra loro e i coefficienti R_{m_i} $(i = 1, 2, ...)$ della serie intera che risulta da una tale operazione,

$$(159) \qquad \sum_{i=0}^{\infty} R_{m_i} x^{m_i} = \prod_{i=1}^{\infty} (1 + x^{n_i}) \qquad [m_0 = 0; R_{m_0} = R_0 = 0; \ m_1 = n_1]$$

indicano quindi quante volte il numero m_i può essere formato in quanto somma di un numero qualsiasi di addendi differenti fra loro e scelti fra i numeri n_j $(j = 1, 2, ...)$. Facendo astrazione dall'indice di m si potrà indicare con R_m il coefficiente di x^m nella serie intera associata al prodotto infinito $\prod_{i=1}^{\infty}(1+x^{n_i})$, il quale indica quante volte il numero m può essere formato in quanto somma di un numero qualsiasi di addendi distinti scelti fra i numeri n_j $(j = 1, 2, ...)$.

Applicando analoghi ragionamenti alle conseguenze che possono venir tratte dalla (151) si otterranno dei risultati analoghi riferiti a somme formate da un numero finito di addendi non necessariamente distinti fra loro. Il coefficiente $S_{m_i,\nu}$ di $x^{m_i}z^\nu$ nella serie intera

$$(160) \qquad \sum_{i=0}^{\infty} Q_i z^i = \prod_{i=1}^{\infty} (1 - x^{n_i} z)^{-1} \qquad [Q_\nu = \sum_{i=1}^{\infty} S_{m_i,\nu} x^{m_i}; \ Q_{0,\nu} = 1]$$

indica così quante volte il numero m_i può essere formato come somma di ν addendi non necessariamente distinti fra loro scelti fra i numeri n_j $(j = 1, 2, ...)$, in modo che il simbolo $S_{m,\nu}$ potrà essere utilizzato per indicare il coefficiente di $x^m z^\nu$ nella serie intera associata al prodotto infinito $\prod_{i=1}^{\infty}(1+x^{n_i}z)^{-1}$, il quale indica, per canto suo, quante volte il numero m può essere formato in quanto somma di ν addendi non necessariamente distinti fra loro scelti fra i numeri n_j $(j = 1, 2, ...)$. Allo stesso modo il coefficiente S_{m_i} di x^{m_i} nella serie intera

$$(161) \qquad \sum_{i=0}^{\infty} S_{m_i} x^{m_i} = \prod_{i=1}^{\infty} (1 - x^{n_i})^{-1} \qquad [m_0 = 0;\ S_{m_0} = 1;\ m_1 = n_1]$$

indica quante volte il numero m_i può essere formato come somma di un numero qualsiasi di addendi non necessariamente distinti scelti fra i numeri n_j ($j = 1, 2, ...$), in modo che il simbolo S_m potrà essere utilizzato per indicare il coefficiente di x^m nella serie intera associata al prodotto infinito $\prod_{i=1}^{\infty} (1 + x^{n_i})^{-1}$, il quale indica, per canto suo, quante volte il numero m può essere formato in quanto somma di un numero qualsiasi di addendi non necessariamente distinti fra loro scelti fra i numeri n_j ($j = 1, 2, ...$).

III. 3. *d.* v. *Partizioni di un numero naturale sull'insieme dei numeri naturali positivi*

I risultati precedenti sono chiaramente indipendenti dalla scelta della successione numerica $\{n_1, n_2, ...\}$ e possono quindi applicarsi allo studio delle "composizioni"[211] del tipo considerato fra i termini di una qualsiasi successione di numeri (ma si potrebbe anche dire: fra gli elementi di un insieme qualsiasi). Euler non si riferisce tuttavia che a dei casi in cui i termini di tale successione sono dei numeri naturali e fra questi non dedica particolari attenzioni che al caso in cui questa stessa successione coincida con l'intera successione di tali numeri (escluso ovviamente lo zero). Ora, se assumiamo la corrispondenza fra la successione $\{n_1, n_2, ...\}$ e l'insieme $\{N - 0\}$ dei numeri naturali positivi, i coefficienti $\mathfrak{R}_{m,\nu}$, R_m, $\mathfrak{S}_{m,\nu}$ e S_m corrispondono ai numeri dei differenti tipi di *partizioni*[212] di un qualsiasi numero intero positivo m: $\mathfrak{R}_{m,\nu}$ è il numero delle partizioni di m in ν parti differenti; R_m è il numero di tutte le partizioni possibili di m in parti differenti; $\mathfrak{S}_{m,\nu}$ è il numero delle partizioni di m in ν parti uguali o differenti fra loro; S_m è il numero di tutte le partizioni possibili di m in parti uguali o differenti fra loro. Per sottolineare la particolarità di una tale situazione - rispetto alla grande generalità che i risultati di Euler sembrano preconizzare - indicherò rispettivamente tali numeri con i nuovi simboli T_m^{ν}, T_m, P_m^{ν} e P_m ($m, \nu \in N$, $\nu \neq 0$). Il problema affrontato da Euler è quello della determinazione di tali numeri per mezzo del ricorso alle leggi di formazione delle serie a essi associate e senza alcun impiego di procedure di ordine specificatamente combinatorio. I risultati che egli raggiunge possono venir presentati nei termini seguenti.

Si consideri in primo luogo la (156). Ponendo in essa $z = xy$ e $n_i = i$ ($i =$

[211] Il termine è di Euler.

[212] Utilizzando l'usuale linguaggio combinatorio mi riferisco qui ovviamente a *partizioni* di un numero intero positivo in addenti costituiti a loro volta da numeri interi positivi [cfr. a esempio Berge (1968)].

1, 2, ...) si avrà ovviamente

$$(162)\qquad \prod_{i=1}^{\infty} (1 + x^{i+1} y) = \frac{\prod_{i=1}^{\infty} (1 + x^{i} y)}{(1 + xy)} = \sum_{i=0}^{\infty} N_i \, [xy]^i \qquad [N_0 = 1]$$

e quindi:

$$(163)\qquad \prod_{i=1}^{\infty} (1 + x^{i} y) = [1 + xy] \sum_{i=1}^{\infty} N_i \, [xy]^i \qquad [N_0 = 1]$$

Confrontando una tale identità con la (156) - in cui si sia posto $n_i = i$ - si avrà allora

$$(164)\quad \sum_{i=0}^{\infty} N_i \, y^{i} = [1 + xy] \sum_{i=0}^{\infty} N_i \, [xy]^i \qquad [N_0 = 1]$$

da cui, secondo il metodo dei coefficienti indeterminati (riferito alle potenze intere di y), è facile trarre, per ogni ν (ν = 1, 2, ...):

$$(165)\qquad N_\nu = \left[\frac{x^\nu}{1 - x^\nu} \right] N_{\nu-1} \, ; \quad N_0 = 1$$

Essendo le N_ν delle funzioni frazionarie di x, la successione $\{N_\nu\}_{\nu=1}^{\nu=\infty}$ non è strettamente ricorrente, essendo la sua scala di relazione fornita, essa stessa, da una funzione di x. Sono tuttavia le N_ν a poter essere espresse per mezzo di una serie intera ricorrente ordinata secondo le potenze di x, il cui coefficiente generico di ordine m non sarà quindi che il numero $\overset{\nu}{T}_m$, il quale potrà allora essere determinato sviluppando la (165) secondo il procedimento presentato nel precedente paragrafo III.3.b.ε. e prendendo il coefficiente di ordine m della serie intera così costruita.

D'altra parte, se si calcola per reiterazione la funzione N_ν, senza svilupparla in serie intera (ricordando che, per ogni ν, $\sum_{k=1}^{\nu} k = \frac{\nu(\nu+1)}{2}$) si ottiene:

$$(166)\quad \begin{aligned} N_\nu &= \frac{x^{\frac{\nu(\nu+1)}{2}}}{(1-x)(1-x^2)\dots(1-x^\nu)} = x^{\frac{\nu(\nu+1)}{2}} \prod_{i=1}^{\nu} (1-x^i)^{-1} \\ &= x^{\frac{\nu(\nu+1)}{2}} \sum_{m=0}^{\infty} {}_\nu P_m\, x^m \qquad [{}_\nu P_0 = 1] \\ & \qquad\qquad [\nu \in \mathbb{N}, \nu \neq 0] \end{aligned}$$

in cui l'indice ν posto innanzi a P_m indica che gli addendi delle somme considerate devono essere scelti fra i numeri interi e positivi minori o uguali a ν. Il numero ${}_\nu P_m$ indica così quante volte il numero m può essere formato in quanto somma di un numero qualsiasi di addendi non necessariamente distinti fra loro scelti fra i numeri $\{1, 2, \dots, \nu\}$, ovvero, in linguaggio moderno, il numero di tutte le partizioni possibili di m in parti uguali o differenti fra loro e tali che la maggiore di esse sia uguale a ν. Confrontata con la (158) la (166) esprime così il seguente teorema (che Euler ha dimostrato in termini strettamente analitici):

Teorema: Se ν è un numero naturale non nullo, il numero naturale m può essere formato in quanto somma di un numero qualsiasi di addendi non necessariamente distinti fra loro e scelti fra i numeri $\{1, 2, \dots, \nu\}$ tante volte quante il numero $m + \frac{\nu(\nu+1)}{2}$ può essere formato in quanto somma di ν addendi distinti scelti fra tutti i numeri naturali positivi. Ovvero: il numero di tutte le partizioni possibili di m in parti uguali o differenti fra loro e tali che la maggiore di esse sia uguale a ν è uguale al numero delle partizioni di $m + \frac{\nu(\nu+1)}{2}$ in ν parti differenti fra loro:[213]

$$(167)\qquad {}_\nu P_m = T^{\nu}_{m+\frac{\nu(\nu+1)}{2}} \qquad [\nu, m \in \mathbb{N}, \nu \neq 0;\ {}_\nu P_0 = 1]$$

Siccome il numero naturale m non può essere scomposto che in addendi scelti a loro volta fra i numeri naturali $\{1, 2, \dots, m\}$, si avrà ${}_m P_m = P_m$ e quindi:[214]

[213]Nel linguaggio di Euler [cfr. *ivi*, t. 1, p. 262]:

Quot variis modis numerus m per additionem produci potest ex numeris 1, 2, 3, 4,...ν, totidem modis numerus m + [...] $\left[\frac{\nu(\nu+1)}{1\cdot 2}\right]$ in ν partes inæquales secari poterit.

[214]Tale conseguenza, la quale risulta assolutamente banale qualora si introducano delle considerazioni strettamente combinatorie, non è esplicitata da Euler, il quale vuole evidentemente restare su un terreno strettamente analitico.

(168) $$P_m = T^{\nu}_{m+\frac{m(m+1)}{2}} \qquad [P_0 = 1]$$

Si consideri ora la (160) e si pongano anche in essa $n_i = i$ {i = 1, 2,... } e $z = xy$, in modo da trarre:

(169) $$\prod_{i=1}^{\infty} (1 - x^{i+1}y) = [1 - xy] \prod_{i=1}^{\infty} (1 - x^{i}y)^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} Q_i\, [xy]^i \qquad [Q_0 = 1]$$

Confrontando tale identità con la stessa (160) si avrà allora

(170) $$[1 - xy] \sum_{i=0}^{\infty} Q_i\, y^i = \sum_{i=0}^{\infty} Q_i\, [xy]^i \qquad [Q_0 = 1]$$

e da qui, per il metodo dei coefficienti indeterminati

(171) $$Q_\nu = \left[\frac{x}{1 - x^{\nu}}\right] Q_{\nu-1} \qquad [\nu \in N,\ \nu \neq 0;\ Q_0 = 1]$$

che, confrontata a sua volta con la (165), fornisce:

(172) $$Q_\nu = \left[\frac{1}{x^{\frac{\nu(\nu-1)}{2}}}\right] N_\nu \qquad [Q_0 = N_0\ ;\ \nu \in N,\ \nu \neq 0]$$

Ricordando la (158), la (160) e la (167) si avrà allora

(173) $$T^{\nu}_{m} = P^{\nu}_{m-\frac{\nu(\nu-1)}{2}} = {}_{\nu}T_{m-\frac{\nu(\nu+1)}{2}} \qquad [\nu, m \in N,\ \nu \neq 0,\ m \geq \frac{\nu(\nu+1)}{2}\ ]$$

e quindi

(174) $${}_{\nu}P_{m} = P^{\nu}_{\nu+m} \qquad [\nu, m \in N,\ \nu \neq 0]$$

ovvero:[215]

(175) $$P_m = P^{m}_{2m}\ ;\ P^{\nu}_{m} = {}_{\nu}P_{m-\nu}\ ;\ P^{m-\nu}_{m} = P_{m-\nu} \qquad [\nu, m \in N,\ \nu \neq 0,\ m \geq \nu]$$

[215] La (175) non è esplicitamente tratta da Euler [cfr. la precedente nota (214)].

Euler ha così dimostrato un nuovo teorema:

Teorema: Il numero naturale m può essere formato in quanto somma di un numero qualsiasi di addendi non necessariamente distinti fra loro e scelti fra i numeri [1, 2, ..., ν] tante volte quante il numero $m+\nu$ può essere formato in quanto somma di ν addendi non necessariamente distinti fra loro e scelti fra tutti i numeri naturali positivi. Ovvero: il numero di tutte le partizioni possibili di m in parti uguali o differenti fra loro e tali che la maggiore di esse sia uguale a ν è uguale al numero delle partizioni di $m+\nu$ in ν parti uguali o differenti fra loro.[216]

Tale teorema, congiunto ai risultati precedenti permette di determinare i numeri P_m^ν e $\overset{\nu}{P}_m$ in funzione del numero $\overset{\nu}{T}_m$, il quale è determinato a sua volta per mezzo della costruzione di una serie ricorrente. In molti casi può essere tuttavia più conveniente giungere a tale risultato attraverso la determinazione diretta del numero ${}_\nu P_m$. Per tale determinazione è possibile impiegare un procedimento per ricorrenza fondato sulla seguente identità generica:

$$(176)\qquad {}_\nu P_m = {}_{\nu-1}P_m + {}_\nu P_{m-\nu} \qquad [\nu, m \in \mathbf{N}, \nu \neq 0, m \geq \nu]$$

la cui dimostrazione segue un procedimento del tutto analogo a quello che ha condotto ai due precedenti teoremi. Posto infatti nella (161) $n_i = i$ ($i = 1, 2, ...$) sarà ovvio trarre

(177)

$$\text{i)}\ \sum_{i=0}^{\infty} {}_\nu P_i\, x^i = \prod_{i=1}^{\nu} (1 - x^i)^{-1} \qquad [{}_\nu P_0 = 1]$$

e quindi:

$$\text{ii)}\ x^\nu \sum_{i=0}^{\infty} {}_\nu P_i\, x^i = \prod_{i=1}^{\nu} x^\nu\, [1 - x^i]^{-1} = \sum_{i=0}^{\infty} {}_\nu P_{i-\nu}\, x^i$$

$$[{}_\nu P_r = 0\ (r < 0),\ {}_\nu P_0 = 1]$$

che sottratte membro a membro fra di loro forniscono l'identità:

[216]Nel linguaggio di Euler [cfr. *ivi*, p. 264]:

Quot variis modis numerus m per additionem produci potest ex numeris 1, 2, 3, ..., ν, totidem modis numerus $m+\nu$ in ν partes dispertiri poterit.

A tale teorema Euler ne fa seguire altri i quali non sono tuttavia che delle riformulazioni, per opportune sostituzioni degli indici dei teoremi espressi dalla (167) e dalla (174).

$$(178)\qquad \prod_{i=1}^{\nu-1}(1-x^i)=\sum_{i=0}^{\infty}{}_{\nu-1}P_i\,x^i=\sum_{i=0}^{\infty}\left[{}_{\nu}P_i-{}_{\nu}P_{i-\nu}\right]x^i\qquad [P_0=0]$$

da cui la (176) segue confrontando il coefficiente generico di ordine m. Per quanto Euler non lo osservi esplicitamente, tanto la definizione combinatoria di ${}_{\nu}P_m$ che il procedimento di formazione delle serie ricorrenti in cui tale numero compare come coefficiente rendono chiaro che per ogni r naturale e maggiore di zero vale l'identità ${}_{m+r}P_m={}_{m}P_m$.[217] Il fatto che la (176) sia dotata di senso solo se $m\geq\nu$ non è quindi per nulla una limitazione. Essendo d'altra parte, per ogni ν,[218] ${}_{\nu}P_0=1$ se ne trae che ${}_{m}P_m={}_{m-1}P_{m+1}$. La (176) sembra possedere tuttavia un'ulteriore limitazione; essa esprime infatti il numero ${}_{1}P_m$ in funzione di un termine ${}_{0}P_m$ che appare come del tutto privo di significato relativamente alle definizioni precedenti e non sembra quindi adeguata che per calcolare il valore di ${}_{\nu}P_m$ quando l'indice ν è un numero naturale maggiore o uguale a due. Anche senza ricorrere a nozioni prettamente combinatorie è tuttavia possibile utilizzare la stessa (176) per fornire una determinazione contestuale del numero che il simbolo ${}_{0}P_m$ si trova in essa a rappresentare, la quale non richiede il calcolo dei valori di ${}_{\nu}P_m$ per ν maggiore o uguale a due. Essendo infatti, secondo tale identità, ${}_{1}P_m-{}_{1}P_{m-1}={}_{0}P_m$, si avrà secondo la (167) ${}_{0}P_m=T^1_{m+1}-T^1_m$. Ponendo poi nella (156) $n_i=i$ $(i=1,2,\ldots)$, la (158) permette di trarre, per ogni $m>0$, $T^1_{m+1}=T^1_m=1$, da cui segue ovviamente, per ogni m $(m\geq\nu;\ \nu\geq 1;\ m,\nu\in\mathbb{N})$, ${}_{0}P_m=0$ e quindi: ${}_{1}P_m={}_{1}P_{m-1}$, ovvero, per reiterazione: ${}_{1}P_m={}_{1}P_1={}_{1}P_0=1$, che fornisce la base per una determinazione per ricorrenza di tutti i valori di ${}_{\nu}P_m$ $(\nu, m=1,2,\ldots)$. Dalla (176) segue infatti (per ogni r intero e positivo):

---

[217] Dopo aver costruito la tavola delle successioni $({}_{\nu}P_1, {}_{\nu}P_2, \ldots)$ $(\nu=1,2,\ldots)$ Euler osserva per la verità che tali successioni possiedono un tratto iniziale comune, il quale tende a crescere al crescere di ν, ciò che corrisponde a una constatazione *a posteriori* della proprietà espressa dall'identità ${}_{m+r}P_m={}_{m}P_m$. Egli afferma inoltre che da ciò segue che tali successioni "in infinitum [...] inter se fore congruentes" [cfr. *ivi*, t. 1, p. 269], ovvero che la successione $({}_{\infty}P_1, {}_{\infty}P_2, \ldots)$ $[=({}_{1}P_1, {}_{2}P_2, {}_{3}P_3, \ldots)]$ può essere perfettamente determinata essendo fornita dai coefficienti dello sviluppo della funzione infinitaria $\prod_{i=1}^{\infty}(1-x^i)^{-1}$.

[218] Si osservi che in termini strettamente combinatori la posizione $P_0=1$ non può che corrispondere a una convenzione, non avendo alcun senso parlare di parti intere di zero. Entro l'interpretazione euleriana, essa diviene invece una semplice conseguenza della forma della funzione frazionaria generatrice.

$$
\begin{array}{lll}
& m=1: & {}_{1}P_{1} = 1 = {}_{1+r}P_{1} \\
& m=2: & {}_{1}P_{2} = 1 \\
& & {}_{2}P_{2} = {}_{1}P_{1} + 1 = 1+1 = 2 = {}_{2+r}P_{2} \\
& m=3: & {}_{1}P_{3} = 1 \\
& & {}_{2}P_{3} = {}_{1}P_{3} + {}_{2}P_{1} = 1+1 = 2 \\
(179) & & {}_{3}P_{3} = {}_{2}P_{3} + 1 = 2+1 = 3 = {}_{3+r}P_{3} \\
& m=4: & {}_{1}P_{4} = 1 \\
& & {}_{2}P_{4} = {}_{1}P_{4} + {}_{2}P_{2} = 1+2 = 3 \\
& & {}_{3}P_{4} = {}_{2}P_{4} + {}_{3}P_{1} = 3+1 = 4 \\
& & {}_{4}P_{4} = {}_{3}P_{4} + 1 = 4+1 = 5 = {}_{4+r}P_{4} \\
& m=5: & {}_{1}P_{5} = 1 \\
& & {}_{2}P_{5} = {}_{1}P_{5} + {}_{2}P_{3} = 1+2 = 3 \\
& & {}_{3}P_{5} = {}_{2}P_{5} + {}_{3}P_{2} = 3+2 = 5 \\
& & {}_{4}P_{5} = {}_{3}P_{5} + {}_{4}P_{1} = 5+1 = 6 \\
& & {}_{5}P_{5} = {}_{4}P_{5} + 1 = 6+1 = 7 = {}_{5+r}P_{5} \\
& \&c. &
\end{array}
$$

Come è facile osservare la costruzione di tale tavola non richiede a propria volta la costruzione di alcuna serie ricorrente particolare. Benché egli non lo sottolinei,[219] Euler ha così dimostrato che la propria interpretazione funzionale della teoria delle partizioni di un numero naturale sull'insieme dei numeri naturali positivi permette di giungere a dei risultati di ordine generale che conducono, a loro volta, alla determinazioni del numero ${}_{\nu}P_{m}$ - e quindi dei numeri $\overset{\nu}{T}_{m}$ e $\overset{\nu}{P}_{m}$ - per ogni ν e m naturali ($\nu \neq 0$), senza passare per la costruzione di alcuna serie ricorrente. Invertendo il procedimento, i risultati contenuti nella tavola (179) possono così fornire i coefficienti degli sviluppi in serie intere dei prodotti finiti o infiniti il cui termine generico di ordine k possa essere scritto sotto la forme $(1 + x^{k}z)^{\pm 1}$.

Il solo problema che i precedenti risultati lasciano aperto è allora quello della determinazione del numero T_{m}, il quale non compare in nessuna

---

[219] L'insistenza di Euler è piuttosto sulle relazioni che sussistono fra le successioni $\{ {}_{\nu}P_{1}, {}_{\nu}P_{2}, \dots \}$ ($\nu = 1, 2, \dots$) e le successioni dei numeri figurati (naturali, triangolari, piramidali, &c.), la cui individuazione permette di determinare la tavola (179) a partire da queste ultime.

delle identità dimostrate finora. Essendo d'altronde

(180)

$$\text{i)}\ \left[\prod_{i=1}^{\infty}(1+x^i)\right]\left[\prod_{i=1}^{\infty}(1-x^i)\right]=\prod_{i=1}^{\infty}(1-x^{2i})$$

ovvero:

$$\text{ii)}\ \prod_{i=1}^{\infty}(1+x^i)=\prod_{i=1}^{\infty}(1-x^{2i-1})^{-1}$$

ponendo nella (159) $n_i = i$ e nella (161) $n_i = 2i$-1, è facile trarre, confrontando il coefficiente generico di ordine m:

(181) $$T_m = P_m^{[\therefore]}$$

in cui il simbolo $P_m^{[\therefore]}$ indica il numero S_m nel caso in cui la successione $\{n_j\}$ (j = 1, 2, ...) sia costituita dalla successione dei numeri dispari {1, 3, 5, ...}. Il nuovo teorema di Euler può allora essere formulato nei termini seguenti:

Teorema: Il numero naturale m può essere formato in quanto somma di un numero qualsiasi di addendi distinti scelti fra tutti i numeri naturali positivi tante volte quante questo può essere formato in quanto somma di un numero qualsiasi di addendi non necessariamente distinti fra loro e scelti fra tutti i numeri positivi dispari. Ovvero: il numero di tutte le partizioni possibili di m in parti differenti fra loro è uguale al numero di tutte le partizioni possibili dello stesso numero m in parti dispari uguali o differenti fra loro.[220]

La determinazione di $P_m^{[\therefore]}$ è tuttavia in generale meno agevole di quella di T_m, il quale può in ogni caso essere determinato per mezzo della costruzione della serie intera associata al prodotto infinito $\prod_{i=1}^{\infty}(1+x^i)$. Da un punto di vista puramente calcolatorio la (181) deve quindi essere letta in senso inverso. La costruzione di tale serie intera può d'altra parte essere agevolata dal ricorso ai risultati contenuti nella tavola (179). Essendo in effetti

---

[220]Nel linguaggio di Euler [cfr. *ivi*, p. 272]:

Quot modis datus numerus per additionem formari potest ex omnibus numeris integris inter se inæqualibus; totidem modis idem numerus formari poterit per additionem ex numeris tantum imparibus, sive æqualibus sive inæqualibus.

$$
(182)\qquad \prod_{i=1}^{\infty}(1+x^i)=\frac{\prod_{i=1}^{\infty}(1-x^i)\cdot\prod_{i=1}^{\infty}(1+x^i)}{\prod_{i=1}^{\infty}(1-x^i)}=
$$

$$
=\prod_{i=1}^{\infty}(1-x^{2i})\cdot\prod_{i=1}^{\infty}(1-x^i)^{-1}
$$

si avrà anche (secondo la (159) e la (161)):

$$
(183)\qquad \sum_{i=0}^{\infty}T_i x^i=\left[1-x^2-x^4+x^{10}+x^{14}-\&c.\right]\cdot\sum_{i=0}^{\infty}P_i x^i \quad [T_0=Q_0=1]
$$

$$
=1+x+x^2+2x^3+2x^4+3x^5+4x^6+\&c.
$$

di cui Euler non fornisce tuttavia il termine generico di ordine m.

III. 3. *d. ξ. Alcune considerazioni finali sulla teoria euleriana delle "partitiones numerorum"*

Benché gli ultimi quattro paragrafi del capitolo XVI siano dedicati allo studio di alcune particolari partizioni generalizzate, caratterizzate dall'identificazione della successione $\{n_1, n_2, \ldots\}$ con successioni numeriche particolari non coincidenti con la successione dei numeri naturali positivi, le ricostruzioni contenute nei paragrafi precedenti mi paiono sufficienti a indicare la generalità e la ricchezza del punto di vista di Euler, così come i principi generali e le tecniche dimostrative di cui egli si serve. Se il mio impiego di una notazione modernizzata basata sull'introduzione di indici variabili non deve indurre a una valutazione scorretta che confonda i procedimenti di questi con delle procedure proprie a un calcolo simbolico ormai maturo,[221] gli elementi di "modernità" della teoria euleriana delle "*partitiones numerorum*" sono senza dubbio numerosi e per molti versi sorprendenti. Mi limiterò qui a indicarne qualcuno.

In primo luogo deve certamente essere sottolineata l'idea generale di un trattamento analitico della combinatoria, ovvero, in ultima istanza, la ri-

---

[221] Ecco a esempio come Euler enuncia il proprio risultato chiave che ho più sopra riformulato nei termini della (176) [cfr. *ivi*, t. 1, p. 266]:

Sit L numerus modorum, quibus numerus m per additionem produci potest ex numeris 1, 2, 3, ... ν-1.

Sit M numerus modorum, quibus numerus m-ν per additionem produci potest ex numeris 1, 2, 3, ...ν.

Sitque N numerus modorum, quibus numerus m per additionem produci potest ex numeris 1, 2, 3, ... ν.

His positis, erit, [...] L = M-N; ideoque N=L+M.

duzione di questa alla teoria degli sviluppi in serie intera delle funzioni algebriche, la cui potenza arriva fino a mettere capo a una costruzione ricorsiva delle tavole dei valori di ${}_{v}P_{m}$, $\overset{v}{T}_{m}$ e $\overset{v}{P}_{m}$, che resta così perfettamente indipendente, non solo da ogni intuizione combinatoria particolare, ma anche dalla costruzione effettiva di una qualsiasi serie intera.

In secondo luogo particolarmente notevole è la stessa tecnica dimostrativa cui possono essere ricondotte tutte le dimostrazioni di Euler, la quale consiste nel confronto fra i termini generici di due differenti serie intere i cui coefficienti subiscono opportune traslazioni relativamente alle potenze della variabile. Tanto le serie intere che i prodotti infiniti sono in tal modo intesi come delle mere scritture formali, le quali possono venir opportunamente manipolate termine a termine secondo le regole dell'algebra polinomiale. Che essi convergano o meno (entro opportuni intervalli) resta così del tutto inessenziale rispetto al successo della dimostrazione, la quale non richiede che l'univocità delle relazioni formali sulle quali essa opera. La teoria generale delle associazioni formali fra funzioni espresse da forme finite e sviluppi infinitari di forma opportuna, lungi dall'essere un semplice malinteso, mostra così anche in tal caso tutta la sua potenza. Se la reinterpretazione funzionale delle teorie combinatorie proposta da Euler non ha (purtroppo) trovato nella seconda metà del XVIII secolo alcun continuatore (nel prossimo capitolo III.5. vedremo come la cosiddetta "scuola combinatoria tedesca" prenderà corpo, a partire dai lavori di Hindenburg, sulla base di un punto di vista diametralmente opposto a quello euleriano[222]), la tecnica dimostrativa che essa impiega verrà ripresa e generalizzata da Laplace nel quadro della sua teoria delle funzioni generatrici,[223] la quale può per molti versi considerarsi come una delle discendenze più strette dell'*Introductio*.

Infine, *last but not least*, credo sia opportuno soffermarsi sulla generalità che l'impostazione euleriana permette di raggiungere in termini del tutto naturali, attraverso la considerazione di successioni qualsiasi di esponenti, fra le quali la successione completa nei numeri naturali non si presenta che come un caso particolare.[224] Per quanto questa non sia mai pre-

---

[222]La mia ricostruzione storica si fermerà alla vigilia della nota polemica che, nei primi anni del XIX secolo, dividerà le ragioni di Hindenburg e dei combinatoristi tedeschi da quelle di Arbogast, il cui "calcolo delle derivazioni" [cfr. Arbogast (1800)] può in qualche senso intendersi come un tentativo di riprendere, seppure in un contesto ampiamente modificato, alcuni significativi elementi del programma lanciato da Euler nell'*Introductio*.

[223]Cfr. la prossima sezione III.4.*d*..

[224]Il confronto del XVI capitolo del primo tomo dell'*Introductio* con un moderno manuale (non insiemistico) di combinatoria è a questo proposito assai istruttivo. A questo scopo ho scelto il testo di Berge [cfr. Berge (1968)] e in particolare il capitolo che esso dedica ai "*problèmes de partages*". A p. 44 Berge scrive:

> Une autre façon d'étudier les nombres $\overset{v}{P}_{m}$ est de récourir à la méthode des fonctions génératrices, due à Laplace et Euler.

[F(x) è definita da Berge come la funzione generatrice di $\varphi(n)$ ($n \in N$) se $x \in (-\delta, \delta) \Rightarrow$

sentata in termini espliciti, sembra emergere così un'idea assai vicina a quella di *insieme*. Se si direbbe certamente troppo affermando che vi è qui una delle origini della *teoria* delle insiemi, non si può disconoscere il fatto che Euler abbia compreso la possibilità di considerare una qualsiasi successione (finita o infinita) di numeri come un'entità matematica autonoma e del tutto indipendente dal carattere particolare dei singoli numeri che la compongono, sulla quale è possibile definire delle vere e proprie operazioni analitiche.

III. 3. *d*(4).
FRAZIONI CONTINUE (CAPITOLO XVIII)

III. 3. *d*. o. *Serie e frazioni continue*

L'ultimo capitolo del primo tomo dell'*Introductio* (il diciottesimo) è dedicato da Euler alla considerazione di un "tertium genus expressionum infinitarum" che, per quanto "parum adhuc est excultum" può avere un ampio uso nell' "analisi dell'infinito" e che consiste nelle cosiddette frazioni continue. La trattazione di Euler è per la verità solo parzialmente connessa all'edificio unitario che questi ha gradualmente costruito nel corso dei capitoli precedenti e manifesta quindi dal punto di vista complessivo dell'opera la necessità di un'ulteriore elaborazione teorica.

La nozione di *frazione continua* è così introdotta senza alcun riferimento alla nozione di funzione:

> Fractionem autem continuam voco ejusmodi fractionem, cujus denominator constat ex numero integro cum fractione, cujsus denominator denuo est aggregatum ex integro et fractione, quæ porro simili modo sit comparata, sive ista affectio in infinitum progrediatur sive alicubi sistatur.[225]

Una *frazione continua* non è quindi altro che una *frazione* della forma parti-

---

$F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \varphi(n)x^n$. Come abbiamo visto il ricorso alla nozione di convergenza è in realtà qui inessenziale, essendo sufficiente che la relazione fra una funzione e la sua serie sviluppo sia definita in base a un metodo univoco di associazione, che nel caso di Euler corrisponde al metodo di sviluppo per determinazione dei coefficienti. D'altra parte dal punto di vista dei matematici settecenteschi la convergenza su $(-\delta, \delta)$ della serie intera alla propria funzione generatrice è piuttosto una proprietà della relazione formale stabilita in base al metodo di associazione [cfr. il precedente paragrafo II.2.κ.].] Se dal punto di vista delle definizione dei numeri dei "*partages*" si ritrovano qui le medesime relazioni indicate da Euler, la differenza consiste nel fatto che Berge introduce *d'emblée* la nozione di "*partage*" di un intero m (in parti intere), facendola corrispondere al caso generale, mentre Euler non la introduce che come un caso particolare delle "partizioni" che possono essere costruite su un qualsiasi insieme di numeri $(a_i)_{i=0}^{i=\infty}$.

225 Cfr. *ivi*, t. 1, p. 295.

colare:

$$(184) \qquad b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cfrac{a_4}{b_4 + \&c.}}}}$$

in cui il simbolo "&c." indica tanto una reiterazione dell'operazione fino a una frazione qualsiasi $\dfrac{a_n}{b_n}$ che una sua possibile prosecuzione all'infinito.

Se una frazione continua è troncata al termine di ordine ν essa risulta evidentemente uguale a una frazione ordinaria, che può sempre essere determinata per mezzo di una semplice reiterazione della somma fra frazioni. Siano allora rispettivamente A_ν e B_ν il numeratore e il denominatore della frazione che risulta reiterando la somma indicata dalla (184) fino al termine di ordine ν, in modo che si possa porre l'identità:[226]

$$(185) \qquad \frac{A_\nu}{B_\nu} = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \dots + \cfrac{a_\nu}{b_\nu}}}$$

da cui segue ovviamente

$$(186) \qquad \frac{A_\nu}{B_\nu} = \cfrac{A_{\nu-2}}{B_{\nu-2} + \cfrac{a_{\nu-1}}{b_{\nu-1} + \cfrac{a_\nu}{b_\nu}}}$$

$$= \frac{[A_{\nu-2}][b_{\nu-1}\, b_\nu + a_\nu]}{[B_{\nu-2}][b_{\nu-1}\, b_\nu + a_\nu] + a_{\nu-1}\, b_\nu}$$

ma anche

$$(187) \qquad \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1}} = \cfrac{A_{\nu-2}}{B_{\nu-2} + \cfrac{a_{\nu-1}}{b_{\nu-1}}}$$

---

[226] Si osservi che A_ν e B_ν indicano qui delle *forme* analitiche finite che risultano da un processo costruttivo codificato. Ponendo successivamente nella (185) $\nu = 1$; $\nu = 2$; &c. si avrà quindi: $A_1 = b_0 b_1 + a_1$, $B_1 = b_1$; $A_1 = b_0 b_1 b_2 + a_2 b_0 + a_1 b_2$, $B_1 = b_1 b_2 + a_2$; &c., in cui le identità non si riferiscono ai valori rappresentati dalle forme in questione, ma esprimono il fatto che la forma atomica che costituisce il primo membro è utilizzata come un'abbreviazione della forma strutturata che costituisce il secondo.

$$= \frac{[A_{v-2}][b_{v-1}]}{[B_{v-2}][b_{v-1}] + a_{v-1}}$$

e quindi, in generale:[227]

$$(188) \qquad \frac{A_v}{B_v} = \frac{[A_{v-1}][b_v] + [A_{v-2}][a_v]}{[B_{v-1}][b_v] + [B_{v-2}][a_v]} \qquad [v = 1, 2, \ldots ; \frac{A_0}{B_0} = \frac{b_0}{1}, A_{-1}=1, B_{-1}=0]$$

ciò che per una qualsiasi frazione continua finita permette di calcolare per ricorrenza la frazione ordinaria a cui essa si riduce.

Si consideri ora una frazione continua protratta all'infinito. La (188) permetterà ovviamente di trovare, per ogni ordine v, il valore parziale di tale frazione continua espresso per mezzo di una frazione ordinaria; il limite della successione $\left\{\frac{A_i}{B_i}\right\}_{i=0}^{i=\infty}$ esprimerà il valore della frazione continua a cui essa è associata.[228] Scritta quindi l'identità

$$(189) \qquad X = b_0 + \cfrac{a_1}{b_1 + \cfrac{a_2}{b_2 + \cfrac{a_3}{b_3 + \cfrac{a_4}{b_4 + \&c.}}}}$$

---

[227]La (186) e la (187) forniscono infatti rispettivamente le identità seguenti: [cfr. la precedente nota (226)] $A_v = [A_{v-2}][b_{v-1}\, b_v + a_v]$, $B_v = [B_{v-2}][b_{v-1}\, b_v + a_v] + a_{v-1}\, b_v$ e $A_{v-1} = [A_{v-2}][b_{v-1}]$, $B_{v-1} = [B_{v-2}][b_{v-1}] + a_{v-1}$.

[228]Calcolate le frazioni A_v/B_v per $v = 0, 1, 2, 3$, Euler scrive[cfr. *ivi*, p. 298]:

> Quod si ergo hæ fractiones eousque continuentur quoad fractio continua indices suppeditet, tum ultima fractio verum dabit valorem fractionis continuæ. Præcedentes fractiones vero continuo propius ad hunc valorem accedent, ideoque perquam idoneam appropinquationem suggerent.

Euler non fa quindi alcuna menzione della convergenza della frazione continua, salvo osservare [cfr. *sotto*] che la serie a cui egli la riduce è "molto convergente" se gli a_i (i = 0, 1, 2, ...) sono costantemente uguali a uno e i b_i (i = 1, 2, ...) sono dei numeri naturali qualsiasi. La questione è qui particolarmente delicata in quanto la nozione di frazione continua è introdotta senza alcun riferimento a una forma finita di cui tale frazione esprime uno sviluppo; quest'ultima non può quindi essere associata che a un valore di cui nulla assicura in generale l'esistenza [si osservi che il carattere oscillante di una frazione continua non convergente impedisce di pensare quest'ultima come dotata di *un* valore infinito]. Per assegnare senso alle affermazioni di Euler occorre quindi o assumere la convergenza della (184), qualora essa sia protratta all'infinito, o intendere X [cfr. *sotto*] non come il valore della frazione continua, ma come una notazione abbreviata che rappresenta quest'ultima in quanto tale.

(in cui il simbolo "&c." indica ora che la frazione continua è protratta all'infinito) si tratterà di esprimere X nei termini di una serie opportuna. Per questo basta tuttavia osservare che per ogni v la differenza $\frac{A_v}{B_v} - \frac{A_{v-1}}{B_{v-1}}$ esprime la variazione del valore parziale della frazione continua comportata dalla considerazione del nuovo termine di ordine v. Il calcolo di tale differenza relativamente ai primi valori dell'indice conduce allora Euler a scrivere la nuova identità:

$$(190) \qquad X = b_0 + \frac{a_1}{b_1} - \frac{a_1 a_2}{b_1(b_1 b_2 + a_2)} + \frac{a_1 a_2 a_3}{(b_1 b_2 + a_2)(b_1 b_2 b_3 + a_2 b_3 + a_3 b_1)} - \&c.$$

> Unde, si a_1, a_2, a_3, a_4 &c. fuerint numeri non crescentes, uti omnes unitates, denominatores vero b_0, b_1, b_2, b_3, &c. numeri integri quicunque affirmativi, valor fractionis continuæ exprimetur per Seriem terminorum maxime convergentem.[229]

Scrivendo la (190) in termini generali si avrà ovviamente:

$$(191) \qquad \begin{aligned} X &= \frac{A_0}{B_0} + \sum_{i=1}^{\infty} -(-)^i \left[-(-)^i \frac{A_i}{B_i} + (-)^i \frac{A_{i-1}}{B_{i-1}} \right] \\ &= b_0 + \sum_{i=1}^{\infty} -(-)^i \frac{\prod_{j=1}^{i} a_j}{[B_i][B_{i-1}]} \end{aligned}$$

in modo che si potrà sempre ridurre una frazione continua a una serie a segni alternati i cui termini successivi possono essere costruiti ricorsivamente secondo un procedimento *standard*. Anche il viceversa è d'altra parte vero. Data infatti la serie

$$(192) \qquad X = \Psi_0 + \Psi_1 - \Psi_2 + \Psi_3 - \ldots -(-)^v \Psi_v +(-)^v \&c.$$

si avrà, confrontandola termine a termine con la (190),

---

[229]Cfr. *ivi*, t. 1, p. 300.

$$
(193)\qquad
\begin{array}{ll}
\Psi_0 = b_0 & \Psi_0 = b_0 \\[2ex]
\Psi_1 = \dfrac{a_1}{b_1} & \dfrac{\Psi_2}{\Psi_1} = \dfrac{a_2}{b_1 b_2 + a_2} \\[2ex]
\Psi_2 = \dfrac{a_1 a_2}{b_1[b_1 b_2 + a_2]} \quad \text{ovvero:} & \dfrac{\Psi_3}{\Psi_2} = \dfrac{a_3 b_1}{b_1 b_2 b_3 + a_2 b_3 + a_3 b_1} \\[2ex]
\ldots & \ldots \\[2ex]
\Psi_\nu = \dfrac{\prod\limits_{i=1}^{\infty} a_i}{[B_{\nu-1}][B_\nu]} & \dfrac{\Psi_\nu}{\Psi_{\nu-1}} = \dfrac{a_\nu B_{\nu-2}}{B_\nu} \\[2ex]
\&c. & \&c.
\end{array}
$$

e quindi:

$$
(194)\qquad
\begin{array}{l}
a_1 = \Psi_1 b_1 \\[2ex]
a_2 = \dfrac{\Psi_2 b_1 b_2}{\Psi_1 - \Psi_2} \\[2ex]
a_3 = \dfrac{\Psi_1 \Psi_3 b_2 b_3}{(\Psi_1 - \Psi_2)(\Psi_2 - \Psi_3)} \\[2ex]
\ldots \\[2ex]
a_\nu = \dfrac{\Psi_{\nu-2} \Psi_\nu b_{\nu-1} b_\nu}{(\Psi_{\nu-2} - \Psi_{\nu-1})(\Psi_{\nu-1} - \Psi_\nu)} \\[2ex]
\&c.
\end{array}
$$

che esprime la relazione che deve sussistere fra i numeratori a_i e i denominatori b_i (i = 1, 2, ...) di una frazione continua che possa venire equiparata alla serie assegnata. A condizione che essi soddisfino la (194) tali numeratori e denominatori potranno allora essere scelti in modo arbitrario. Perché il passaggio dalla (192) a un'espressione di X sotto forma di una frazione continua risulti tuttavia agevole e possa venir regolato da un metodo costruttivo univoco e di facile applicazione, occorrerà fornire una (e una sola) soluzione generale della (194) la quale risulti particolarmente opportuna.

> Inventis ergo valoribus numeratorum a_1, a_2, a_3, a_4 &c., - scrive Euler a questo proposito - denominatores b_1, b_2, b_3, b_4 &c., arbitrio nostro relinquuntur: ita autem eos assumi convenit, ut, cum ipsi sint numeri integri, tum valores integros pro a_1, a_2, a_3, a_4 &c., exhibeant.[230]

[230] Cfr. *ivi*, t. 1, p. 303.

Il rispetto di tale condizione dipenderà ovviamente dai termini successivi della serie assegnata e in particolare dalla loro natura di termini numerici. Dopo aver studiato alcuni casi particolari in cui tali termini sono assunti come dei valori razionali, Euler passa tuttavia al caso più generale scrivendo la (192) sotto la forma generica

$$(195) \qquad X = \beta_0 + \frac{\alpha_1}{\beta_1} - \frac{\alpha_2 x}{\beta_2 z} + \frac{\alpha_3 x^2}{\beta_3 z^2} - \ldots + (-)^v \frac{\alpha_{v-1} x^v}{\beta_{v-1} z^v} - (-)^v \ \&c.$$

e proponendo di passare a una frazione continua, associando alla (194) la posizione

$$(196) \qquad b_v = \alpha_{v-1}\beta_v z - \alpha_v \beta_{v-1} x \qquad [v = 2, 3, \ldots; \ b_0 = \beta_0 \ ; \ b_1 = \beta_1]$$

che fornisce appunto una frazione continua, la cui legge di progressione è facilmente determinabile (in termini non ricorsivi):[231]

$$(197) \qquad X = \beta_0 + \cfrac{\alpha_1}{\beta_1 + \cfrac{\alpha_2 \beta_1^2 x}{\alpha_1\beta_2 z - \alpha_2\beta_1 x + \cfrac{\alpha_1\alpha_3\beta_2^2 \, x z}{\alpha_2\beta_3 z - \alpha_3\beta_2 x + \cfrac{\alpha_2\alpha_4\beta_3^2 \, x z}{\alpha_3\beta_4 z - \alpha_4\beta_3 x + \&c.}}}}$$

III. 3. *d. π. Frazioni continue e approssimazioni numeriche*

Tanto il passaggio da una frazione continua a una serie che quello da una serie a una frazione continua non corrispondono così che a delle associazioni formali, le quali non dipendono in alcun modo dalla convergenza. Se una frazione continua è tuttavia associata secondo i precedenti procedimenti a una serie di cui si conosca la "somma", allora - afferma Euler - possiamo assegnare tale somma alla stessa frazione continua. Così, siccome è possibile ridurre "un'infinità di serie" di cui si conosce la somma alla forma generale (195), è anche possibile determinare un'infinità di frazioni continue di cui è possibile "esibire il valore" (numerico).[232] Per questo è infatti sufficiente sostituire nella serie data dei valori opportuni di x e y - i quali garantiscano la convergenza - trasformando quest'ultima in una serie numerica che potrà essere trasformata a sua volta in una frazione continua a termini numerici, il

[231] Ponendo in realtà nella (192) $\Psi_0 = 0$ (in modo da avere una serie a segni alternati fin dal suo primo termine) Euler scrive tanto la (196) che la (197) secondo la posizione $\beta_0 = 0$.

[232] Cfr. *ivi*, t. I, p. 310.

cui valore è dato operando le medesime sostituzioni nella forma finita che esprime la "somma" della serie.

Se d'altra parte, a partire da un certo ordine ν, tutti i termini successivi $\frac{a_{\nu+i}}{b_{\nu+i}}$ $(i = 0, 1, 2, \ldots)$ di una frazione continua sono fra loro uguali si potrà porre

$$(198) \qquad X = \frac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1} + Y} \qquad\qquad Y = \cfrac{a_\nu}{b_\nu + \cfrac{a_\nu}{b_\nu + \cfrac{a_\nu}{b_\nu + \cfrac{a_\nu}{b_\nu + \&c.}}}}$$

$$= \frac{a_\nu}{b_\nu + Y}$$

e quindi:

$$Y^2 + Yb_\nu = a_\nu \quad \text{ovvero} : = \frac{-b_\nu \pm \sqrt{b_\nu^2 + 4a_\nu}}{2}$$

$$(199) \qquad X = \cfrac{A_{\nu-1}}{B_{\nu-1} - \cfrac{b_\nu \quad \sqrt{b_\nu^2 + 4a_\nu}}{2}}$$

ciò che suggerisce l'applicazioni aritmetica principale delle frazioni continue, ovvero il loro impiego per esprimere la radice quadrata di un numero qualsiasi e quindi per approssimarne il valore.[233] Ponendo infatti nella (189) $b_0 = 0$, $a_i = 1$, $b_{2i-1} = r$ e $b_{2i} = s$ $(i = 1, 2, \ldots)$ si avrà:

$$(200) \qquad X = \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{s + \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{s + \&c.}}}}$$

---

[233]Euler non fa qui che ripresentare, sotto la forma di un'applicazione particolare della teoria generale delle frazioni contine, il metodo di approssimazione di un radicale quadrato che più di un secolo prima era stato all'origine dell'introduzione, da parte di P.A. Cataldi, dell'algoritmo stesso delle funzioni continue [cfr. Cataldi (1613)]. All'opera matematica di Cataldi ha dedicato numerosi studi Ettore Bortolotti [una bibliografia completa è in Panza (1987)], la cui prospettiva storiografica resta tuttavia, a mio parere, largamente inaccettabile.

$$= \cfrac{1}{r + \cfrac{1}{s + X}} = \frac{s + X}{rs + 1 + rX}$$

e quindi, prendendo la radice con il segno positivo:

$$X = \frac{-rs + \sqrt{r^2 s^2 + 4\,rs}}{2r}$$

(201)

ovvero

$$\sqrt{r^2 s^2 + 4\,rs} = rs + 2rX$$

approssimando X secondo la (188) si avrà quindi un'approssimazione della radice quadrata di $r^2s^2 + 4rs$.

III. 4.
L'INTEGRAZIONE DEL *CALCOLO* NELL'EDIFICIO DELL'ANALISI EULERIANA: LAGRANGE, LAPLACE E "L'ANALOGIA DI LEIBNIZ" (1768-1779)

III. 4. 0. *Premessa*

Se la separazione operata da Euler fra *analisi algebrica* e *analisi differenziale* aveva mostrato nell'*Introductio* tutta la sua fecondità, conducendo a una straordinaria opera di unificazione matematica della prima, essa aveva anche lasciato alle proprie spalle una frattura - non solo metodologia o espositiva - fra due diversi domini matematici, una frattura che le *Institutiones* del 1755[1] avevano solo molto parzialmente ricomposto. Facendo ricorso all'artificio espositivo degli zeri qualitativi (che lungi dal risolvere le difficoltà incontrate dalla "metafisica" leibniziana, le aveva nascoste dietro un più accattivante travestimento retorico) Euler era sì riuscito a trasporre il problema della fondazione del *calcolo* dalla questione matematicamente inessenziale dello "statuto" degli enti infinitesimali a quella della determinazione di un algoritmo riferito a forme analitiche e della utilizzabilità di questo entro una teoria della trasformazione di tali forme, ma non aveva che fatto intravedere la possibilità di un'integrazione del nuovo strumento all'edificio che egli stesso aveva costruito sette anni prima, lasciando aperte tanto la questione di una interpretazione del *calcolo* che risultasse pienamente coerente con il nucleo più interno del programma lanciato nell'*Introductio*,[2] che quella di una determinazione non episodica dei legami strutturali fra analisi superiore e analisi algebrica.

Tali questioni forniscono a mio parere un nucleo problematico profondo, comune a alcune memorie scritte fra il 1768 e il 1779 da J. L. Lagrange e P. S. de Laplace. E' proprio per il loro misurarsi con una tale difficoltà che queste memorie giocano un ruolo centrale nell'evoluzione della matematica settecentesca. Giovane matematico all'inizio di una carriera scientifica difficilmente eguagliabile per la qualità della produzione e l'ampiezza dei riconoscimenti, giunto da poco a Parigi alla corte di d'Alembert,[3] Laplace mostra in tali lavori una sensibilità davvero sorprendente, che lo conduce a dialogare, all'interno di un punto di vista largamente comune e su un piano di assoluta parità, con un uomo che, come Lagrange, era ormai entrato nel pieno fulgore della sua maturità scientifica e era universalmente considerato come l'erede

---

[1]Cfr. Euler (1755). Ho presentato una sommaria analisi dei primi capitoli del testo euleriano nel precedente paragrafo II.1.λ..

[2]Cfr. il precedente capitolo II.2..

[3]Su Laplace e la sua vasta opera scientifica cfr. fra l'altro Gillispie, Grattan-Guinness, Fox (1978).

del grande Euler. Scopo del presente capitolo è quello di analizzare nei dettagli le memorie in questione, mostrandone i legami reciproci e indicandone la collocazione davvero cruciale lungo quell'ideale percorso che congiunge l'*Introductio* alla *Théorie des fonctions analytiques*. Il calcolo differenziale sembra con esse installarsi nel cuore stesso della teoria delle serie intere, perdendo l'aspetto di uno strumento algoritmico essenzialmente indipendente da tale teoria - anche se applicabile alla determinazione dello sviluppo di una funzione qualsiasi - per divenirne, in quanto tale, una parte essenziale e intrinsecamente propria e assumere, in modo via via più esplicito, l'aspetto di un calcolo di operatori formalmente definiti su un universo di forme analitiche.[4]

III. 4. *a*.
LA MEMORIA DEL 1768 DI LAGRANGE SULLA SOLUZIONE PER SERIE DELLE EQUAZIONI ALGEBRICHE

III. 4. *a*. α. *La formula di Lagrange per l'espressione in serie di una funzione qualsiasi di una radice di un'equazione algebrica*

Se la determinazione di un metodo generale capace di condurre all'espressione per serie delle radici di una qualsiasi equazione algebrica era stato fin dal *De Methodis* uno degli obiettivi della ricerca matematica di Newton[5] e l'impiego del calcolo differenziale nella soluzione di tali equazioni era già stato l'oggetto di un capitolo delle *Institutiones calculi differentialis* di Euler,[6] fu solo nel 1768 che Lagrange fornì per primo una formula differenziale capace di esprimere nei termini di una serie non solo una radice di una qualsiasi equazione algebrica, ma anche una "qualsiasi funzione" di essa.[7] Egli andava così ben al di là del semplice risultato consistente nell'esibizione di un metodo differenziale di approssimazione numerica per le radici reali di un'equazione assegnata, mostrando un legame profondo fra la teoria delle equazioni algebriche, la teoria degli sviluppi in serie di una funzione qualsiasi (implicita o esplicita) e lo stesso calcolo differenziale. La ricostruzione della dimostrazione di Lagrange costituisce l'oggetto del presente paragrafo.

Sia

$$(1) \qquad A - Bx + Cx^2 - Dx^3 + \&c. = 0$$

un'equazione (algebrica) qualsiasi di un grado qualunque ($A - Bx + Cx^2 - ... + (-)^n Nx^n = 0$) e siano $p, q, r,$ &c. le sue radici. Dalla ben nota identità

[4] Cfr. Koppelman (1971) e Lusternik, Petrova (1972).

[5] Cfr. il precedente paragrafo II.1.θ..

[6] Cfr. Euler (1755), parte II, cap. XII.

[7] Cfr. Lagrange (1768). Secondo Lacroix la memoria di Lagrange "fait époque dans l'histoire de l'analyse, par rapport au développement des fonctions en séries" [cfr. Lacroix (1819-19), vol. 1, p. 286].

$$(2)\qquad A - Bx + Cx^2 - \&c = A\left(1 - \frac{x}{p}\right)\left(1 - \frac{x}{q}\right)\left(1 - \frac{x}{r}\right)\&c.$$

si ottiene, dividendo per Bx:

$$(3)\qquad \begin{aligned} 1 - \frac{A}{Bx} - \frac{Cx - Dx^2 + \&c.}{B} &= - \frac{A}{Bx}\left(1 - \frac{x}{p}\right)\left(1 - \frac{x}{q}\right)\left(1 - \frac{x}{r}\right)\&c. \\ &= \frac{A}{Bp}\left(1 - \frac{p}{x}\right)\left(1 - \frac{x}{q}\right)\left(1 - \frac{x}{r}\right)\&c. \end{aligned}$$

ovvero, ponendo $Z = \dfrac{A}{x} + Cx - Dx^2 + \&c.$:

$$(4)\qquad \begin{aligned} \log\left(1 - \frac{A}{Bx} - \frac{Cx - Dx^2 + \&c.}{B}\right) &= \log\left(1 - \frac{Z}{B}\right) \\ &= \log\left(\frac{A}{Bp}\right) + \log\left(1 - \frac{p}{x}\right) + \log\left(1 - \frac{x}{q}\right) + \&c. \end{aligned}$$

Il polinomio indeterminato $\dfrac{1}{B}\left[Z - \dfrac{A}{x}\right] = \dfrac{1}{B}\left[Cx - Dx^2 + \&c.\right]$ può essere d'altra parte inteso come una funzione di x che verrà indicata per brevità per mezzo del simbolo η, ponendo appunto $\eta = \eta(x)$. Essendo così $Z = \dfrac{A}{x} + B\eta$, la (4) assumerà la forma:

$$(5)\quad \log\left(1 - \frac{A}{Bx}\right) + \log\left(1 - \frac{\eta}{1 - \frac{A}{Bx}}\right) = \log\left(\frac{A}{Bp}\right) + \log\left(1 - \frac{p}{x}\right) + \log\left(1 - \frac{x}{q}\right) + \&c.$$

Sviluppando i logaritmi in serie e cambiando di segno si avrà allora:

$$(6)\qquad \begin{aligned} &\frac{A}{Bx} + \frac{A^2}{2B^2x^2} + \&c. + \frac{\eta}{1 - \frac{A}{Bx}} + \frac{\eta^2}{2\left(1 - \frac{A}{Bx}\right)^2} + \&c. = \\ &\qquad = \log\left(\frac{Bp}{A}\right) + \left(\frac{p}{x} + \frac{p^2}{2x^2} + \&c.\right) + \left(\frac{1}{q} + \frac{1}{r} + \&c.\right)x + \\ &\qquad\quad + \left(\frac{1}{q^2} + \frac{1}{r^2} + \&c.\right)\frac{x^2}{2} + \&c. \end{aligned}$$

Si tratta ora di mettere tale identità sotto una forma adeguata a rendere possibile un'applicazione a essa del metodo dei coefficienti indeterminati, relativamente ai coefficienti delle potenze intere di x. Ponendo a questo scopo

$$
(7)\qquad
\begin{aligned}
&\eta(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \&c.\\
&[\eta(x)]^2 = b_0 + b_1 x + b_2 x^2 + \&c.\\
&[\eta(x)]^3 = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \&c.\\
&\&c.
\end{aligned}
$$

si avrà:

$$
\begin{aligned}
&\frac{\eta}{1-\dfrac{A}{Bx}} = \eta\left(1-\frac{A}{Bx}\right)^{-1} = \left[a_0 + a_1 x + a_2 x^2\right]\left[1 + \frac{A}{Bx} + \frac{A^2}{B^2x^2} + \&c.\right]\\
\text{i)}\quad &= \left[a_0 + a_1 x + a_2 x^2\right] + \left(a_0\frac{A}{Bx} + a_1\frac{A}{B} + a_2\frac{A}{B}x + \&c.\right) +\\
&+\left(a_0\frac{A^2}{B^2x^2} + a_1\frac{A^2}{B^2x} + a_2\frac{A^2}{B^2} + \&c.\right) + \&c.\\
&\frac{\eta^2}{2\left(1-\dfrac{A}{Bx}\right)^2} = \frac{1}{2}\left[b_0 + b_1 x + b_2 x^2\right]\left[1 + 2\frac{A}{Bx} + \frac{3!}{2}\frac{A^2}{B^2x^2} + \&c.\right]\\
(8)\quad \text{ii)}\quad &= \frac{1}{2}\left[b_0 + b_1 x + b_2 x^2\right] + \left(2b_0\frac{A}{Bx} + 2b_1\frac{A}{B} + 2b_2\frac{A}{B}x + \&c.\right) +\\
&+\left(\frac{3!}{2}b_0\frac{A^2}{B^2x^2} + \frac{3!}{2}b_1\frac{A^2}{B^2x} + \frac{3!}{2}b_2\frac{A^2}{B^2} + \&c.\right) + \&c.\\
&\frac{\eta^3}{3\left(1-\dfrac{A}{Bx}\right)^3} = \frac{1}{3}\left[c_0 + c_1 x + c_2 x^2\right]\left[1 + 3\frac{A}{Bx} + \frac{3.4}{2}\frac{A^2}{B^2x^2} + \&c.\right]\\
\text{iii)}\quad &= \frac{1}{3}\left[c_0 + c_1 x + c_2 x^2\right] + \left(3c_0\frac{A}{Bx} + 3c_1\frac{A}{B} + 3c_2\frac{A}{B}x + \&c.\right) +\\
&+\left(\frac{3.4}{2}c_0\frac{A^2}{B^2x^2} + \frac{3.4}{2}c_1\frac{A^2}{B^2x} + \frac{3.4}{2}c_2\frac{A^2}{B^2} + \&c.\right) + \&c.\\
&\&c.
\end{aligned}
$$

Confrontando fra loro i coefficienti di x^0, x^{-1}, x^{-2}, &c. nella (6) sarà quindi facile trarre:

$$\log p \left[= \log\left(\frac{Bp}{A}\right) + \log\left(\frac{A}{B}\right)\right] = \log\left(\frac{A}{B}\right) + \left(a_0 + a_1 \frac{A}{B} + a_2 \frac{A^2}{B^2} + \&c.\right)$$

$$\text{i)} \qquad + \frac{1}{2}\left(b_0 + 2b_1 \frac{A}{B} + \frac{3!}{2} b_2 \frac{A^2}{B^2} + \&c.\right)$$

$$+ \frac{1}{3}\left(c_0 + 3c_1 \frac{A}{B} + \frac{3.4}{2} c_2 \frac{A^2}{B^2} + \&c.\right) + \&c.$$

$$p = \frac{A}{B} + \left(a_0 \frac{A}{B} + a_1 \frac{A^2}{B^2} + \&c.\right)$$

$$(9)\ \text{ii)} \qquad + \frac{1}{2}\left(2b_0 \frac{A}{B} + \frac{3!}{2} b_1 \frac{A^2}{B^2} + \&c.\right)$$

$$+ \frac{1}{3}\left(3c_0 \frac{A}{B} + \frac{3.4}{2} c_1 \frac{A^2}{B^2} + \&c.\right) + \&c.$$

$$p^2 = \frac{A^2}{B^2} + 2\left(a_0 \frac{A^2}{B^2} + a_1 \frac{A^3}{B^3} + \&c.\right)$$

$$\text{iii)} \qquad + \left(\frac{3!}{2} b_0 \frac{A^2}{B^2} + \frac{4!}{3!} b_1 \frac{A^3}{B^3} + \&c.\right)$$

$$+ \frac{2}{3}\left(\frac{3.4}{2} c_0 \frac{A^2}{B^2} + \frac{3.4.5}{3!} c_1 \frac{A^3}{B^3} + \&c.\right) + \&c.$$

&c.

Non è difficile rendersi conto, ricordando le (7), che tali identità possono scriversi attraverso l'impiego dell'algoritmo diffrenziale. Ponendo infatti $\frac{A}{B} = x$, esse possono venir poste, per ogni ν naturale e positivo, sotto la forma:

(10)

$$\text{i)}\ \log p = \log x + \eta + \frac{1}{2!}\frac{d}{dx}\left(x\,\eta^2\right) + \frac{1}{3!}\frac{d^2}{dx^2}\left(x^2\,\eta^3\right) + \&c.$$

$$\text{ii) } p = x + x\eta + \frac{1}{2!}\frac{d}{dx}\left(x^2\eta^2\right) + \frac{1}{3!}\frac{d^2}{dx^2}\left(x^3\eta^3\right) + \&c.$$

$$\text{iii) } p^2 = x^2 + 2\left[x^2\eta + \frac{1}{2!}\frac{d}{dx}\left(x^3\eta^2\right) + \frac{1}{3!}\frac{d^2}{dx^2}\left(x^3\eta^3\right) + \&c.\right]$$

...

$$\text{iv) } p^\nu = x^\nu + \nu\left[x^\nu\eta + \frac{1}{2!}\frac{d}{dx}\left(x^{\nu+1}\eta^2\right) + \frac{1}{3!}\frac{d^2}{dx^2}\left(x^{\nu+2}\eta^3\right) + \&c.\right]$$

&c.

Se in tali identità si pone quindi, dopo aver eseguito le differenziazioni, $x = \frac{A}{B}$ (ovvero si considerano i rapporti differenziali come relativi al punto $x = \frac{A}{B}$), si ottiene l'espressione in serie di una qualsiasi potenza intera e positiva di una radice dell'equazione

$$(11) \qquad A - Bx + Cx^2 - \&c. = A - Bx + \eta Bx = 0$$

Ponendo $A = t$, $B = 1$ e $\eta = \frac{\varphi(x)}{x}$ la (11) assume d'altra parte la forma generica

$$(12) \qquad t - x + \varphi(x) = 0$$

e quindi se p è una radice di tale equazione la sua potenza ν-esima ($\nu \in \mathbf{N}$) potrà essere espressa per mezzo della serie seguente:

$$(13) \qquad p^\nu = t^\nu + \nu\left[\varphi(t)\cdot t^{\nu-1} + \frac{1}{2!}\frac{d}{dt}\left([\varphi(t)]^2\cdot t^{\nu-1}\right) + \frac{1}{3!}\frac{d^2}{dt^2}\left([\varphi(t)]^3\cdot t^{\nu-1}\right) + \&c.\right]$$

Da qui - continua Lagrange -

> il est facile de conclure qu'une fonction quelconque de p comme $\psi(p)$ sera exprimée de la maniere suivante[8]

$$(14) \qquad \psi(p) = \psi(t) + \varphi(t)\cdot\psi'(t) + \frac{d}{dt}\left(\frac{[\varphi(t)]^2\cdot\psi'(t)}{2!}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{[\varphi(t)]^3\cdot\psi'(t)}{3!}\right) + \&c.$$

[8] Cfr. Lagrange (1768), p. 275.

in cui $\psi'(t)$ è il rapporto differenziale $\dfrac{d\psi}{dt}$.[9]

Per quanto il passaggio da (13) a (14) non sia particolarmente problematico, una volta che si sia accettata la presupposizione che ogni funzione possa essere espressa per mezzo di una serie intera, Lagrange non ne fornisce una giustificazione formale che trent'anni più tardi, nel suo trattato *De la resolution des équations numériques*.[10] Questa può venir ricostruita nei termini seguenti. Essendo ψ una funzione qualunque di p è possibile porre in generale: $\psi(p) = Ap^{\alpha} + Bp^{\beta} + Cp^{\gamma} + \&c.$ ($\alpha, \beta, \&c. \in \mathbb{N}$) e quindi, secondo la (13),

$$\begin{aligned}\psi(p) = {} & A\left[t^{\alpha} + \alpha\left(\varphi(t)\cdot t^{\alpha-1} + \frac{1}{2!}\frac{d}{dt}\left([\varphi(t)]^{2}\cdot t^{\alpha-1}\right) + \&c.\right)\right] + \\ & + B\left[t^{\beta} + \beta\left(\varphi(t)\cdot t^{\beta-1} + \frac{1}{2!}\frac{d}{dt}\left([\varphi(t)]^{2}\cdot t^{\beta-1}\right) + \&c.\right)\right] + \\ & + C\left[t^{\gamma} + \gamma\left(\varphi(t)\cdot t^{\gamma-1} + \frac{1}{2!}\frac{d}{dt}\left([\varphi(t)]^{2}\cdot t^{\gamma-1}\right) + \&c.\right)\right] + \\ & \&c.\end{aligned} \tag{15}$$

ovvero, ordinando opportunamente:

$$\begin{aligned}\psi(p) = {} & \left(At^{\alpha} + Bt^{\beta} + Ct^{\gamma} + \&c.\right) + \\ & + \varphi(t)\left[A\alpha t^{\alpha-1} + B\beta t^{\beta-1} + C\gamma t^{\gamma-1} + \&c.\right] + \\ & + \frac{1}{2!}\frac{d}{dt}\left[[\varphi(t)]^{2}\left(A\alpha t^{\alpha-1} + B\beta t^{\beta-1} + C\gamma t^{\gamma-1} + \&c.\right)\right] + \\ & + \&c.\end{aligned} \tag{16}$$

che corrisponde chiaramente alla (14).

[9] La notazione è di Lagrange, il quale la introduce "pour plus de simplicité" [cfr. *ivi*].

[10] Cfr. Lagrange (1798), pp. 252-53 (cfr. anche Lacroix (1810-19), vol. 1, p. 290). L'impiego delle lettere greche per indicare i successivi esponenti di p nell'espressione in serie di $\psi(p)$ è qui puramente "retorico", non avendo Lagrange dimostrato la (13) che per valori naturali di ν [è evidente il riferimento al presupposto concesso l'anno precedente nella *Théorie* relativamente allo sviluppo in serie di potenze razionali di ogni funzione [cfr. la prossima sezione III.6.*b*.]]. Nel trattato del 1798 Lagrange presenta infatti una dimostrazione della (13) "à-peu-près semblable" a quella fornita nel 1768, anche se egli qualifica quest'ultima come "moins rigoreuse" rispetto alla nuova versione. Per quanto senza dubbio largamente perfettibile, la dimostrazione esposta nel presente paragrafo non può peraltro venire intesa - come sostiene invece Lacroix [cfr. *ivi*, vol. 1, p. 286] - come il risultato di una semplice induzione, essendo fondata su un'analisi della legge di formazione dei coefficienti considerati.

III. 4. *a*. β. *I presupposti della dimostrazione di Lagrange*

Come risulta evidente, la dimostrazione di Lagrange riposa interamente sulla presupposizione dello sviluppo in serie intera del logaritmo e sull'estensione della regola binomiale al caso di esponenti interi negativi. Se tali risultati - e in particolar modo il primo - sono a loro volta dimostrati senza ricorrere all'ausilio del *calcolo*, anche essa ne risulta essenzialmente indipendente. Il passaggio dalla (9) alla (10) non corrisponde infatti che al riconoscimento della possibilità di esprimere i termini delle serie trovate secondo l'algoritmo differenziale; l'impiego dell'operazione di differenziazione non è così in nessun modo necessario per giungere al risultato di Lagrange, il quale resta così essenzialemente indipendente dal *calcolo*.. Ciò permette di introdurre *a posteriori* la scrittura $\frac{d^{\nu}}{dx^{\nu}}\left(x^{j}\eta^{i}\right)$ $(\nu, j, i \in \mathbb{N})$ come un modo di esprimere i termini successivi di certe serie che, dati lo sviluppo del logaritmo e la regola del binomio, derivano da un'applicazione priva di ogni difficoltà del metodo dei coefficienti indeterminati. Se Lagrange non esplicita quindi l'idea che costituirà il punto di partenza della *Théorie* (e che egli formulerà a chiare lettere fin dalla memoria "*Sur une nouvelle éspece de calcul*" del 1772[11]) - la quale consiste, come è noto, nella interpretazione del *calcolo* come un algoritmo di determinazione dei coefficienti successivi dello sviluppo in serie intera di ogni funzione assegnata - essa sembra qui, per quanto implicitamente, già all'opera. Ciò detto occorre tuttavia osservare che le (9) non sono certamente le formule più opportune per esprimere i differenziali successivi in quanto componenti dei termini successivi di uno sviluppo in serie, così come non sembra esserlo la (14). La ragione essenziale di questo consiste tuttavia nel carattere non intero delle serie considerate e non nella loro natura di espressione infinitaria di una radice di una certa equazione (algebrica). Essendo infatti secondo la (12) $t = p - \varphi(p)$, nella (14) si può porre la sostituzione $p = x$, in modo che tale serie "donne la valeur d'une [...] fonction quelconque de x, telle que $\psi(x)$"[12], posto che si abbia anche $t = x - \varphi(x)$. Essa è così

> indépendante de la considération des racines et n'est plus qu'un résultat de la transformation des fonctions, qu'on peut vérifier par l'élimination successive de x ou de t.[13]

Per comprendere tale osservazione è sufficiente porre $t = x - \varphi(x) = \chi(x)$, $\psi(t) = \psi[\chi(x)] = \Psi(x)$ e $\varphi(t) = \varphi[\chi(x)] = \Phi(x)$, in modo che la (14) assuma la forma:

---

[11]Cfr. la prossima sezione III.*4.b*..

[12]Cfr. Lagrange (1769), p. 207.

[13]Cfr. Lagrange (1798), p. 253.

$$(17)\qquad \psi(x) = \Psi(x) + \Phi(x)\cdot\Psi'(x) + \frac{d}{dt}\left(\frac{[\Phi(x)]^2\cdot\Psi'(x)}{2!}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{[\Phi(x)]^3\cdot\Psi'(x)}{3!}\right) + \&c.$$

Per contro se si considera t, e non x, come la variabile indipendente, da $x - \varphi(x) = t$ si trae $x = F_\varphi(t)$ (è chiaro che se φ è determinata e t é costante la (14) non esprime che una funzione qualsiasi di una radice della (12)) e quindi:

$$(18)\qquad \psi[F_\varphi(t)] = \psi(t) + \varphi(t)\cdot\psi'(t) + \frac{d}{dt}\left(\frac{[\varphi(t)]^2\cdot\Psi'(t)}{2!}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{[\varphi(t)]^3\cdot\psi'(t)}{3!}\right) + \&c.$$

Intendendo inoltre $t - x + \varphi(x)$ come una funzione di x, che potremmo indicare con $F(x)$ la (12) assume la forma generica $F(x) = 0$ e la (14) permette quindi di trovare, data un'equazione qualsiasi $F(x) = 0$, lo sviluppo in serie di una qualsiasi funzione $G(x)$ della stessa variabile, relativamente a un'indeterminata t. La forma particolare di $F(x)$ non implica infatti alcuna perdita di generalità. Data un'equazione $\Gamma(x) = 0$, anche senza ridurre $\Gamma(x)$ alla forma $t - x + \varphi(x)$ si avrà $t - x + [\Gamma(x) - t + x] = 0$ e quindi $\varphi(x) = \Gamma(x) - t + x$, e quindi, considerando t come una variabile arbitraria:

$$(19)\qquad G(x) = G(t) + \Gamma(t)G'(t) + \frac{d}{dt}\left(\frac{[\Gamma(t)]^2\cdot G'(t)}{2!}\right) + \frac{d^2}{dt^2}\left(\frac{[\Gamma(t)]^3\cdot G'(t)}{3!}\right) + \&c.$$

L'indipendenza della (14) dalla "considerazioni delle radici" di un'equazione algebrica può tuttavia essere indicata anche richiamandosi a un argomento informale, la quale ha il vantaggio di riferirsi a uno dei presupposti essenziali dell'analisi settecentesca. Per quanto Lagrange introduca infatti la (1) come un'equazione algebrica di grado qualunque, egli sembra infatti lavorare nel corso della sua dimostrazione sulla funzione $\eta = \eta(x)$ come su una funzione qualsiasi espressa per mezzo di una serie intera e non come su un polinomio di grado indeterminato *ma finito*. La trasposizione, spesso non solo implicita, di un polinomio di grado qualsiasi in una serie intera è, come già abbiamo visto nei capitoli precedenti, un *locus classicus* della matematica post-newtoniana che sembra presentarsi qui in un contesto particolarmente interessante. Prendendo infatti nella (1) il simbolo "&c." come l'indicazione di una prosecuzione infinita della somma, l'identità in questione si trasforma da una semplice equazione algebrica in una generica espressione implicita per una funzione qualsiasi, di cui la (10)(ii) fornisce (posto $p = x$) una rappresentazione esplicita sotto forma di una serie intera. Che una simile interpretazione sia del tutto compatibile con il punto di vista di Lagrange sembra d'altra parte confermato dall'applicazione della (14) alla soluzione del classico problema del *ritorno delle serie*. E' a questa che conviene quindi volgere ora l'attenzione.

III. 4. *a. γ. Il problema del ritorno delle serie: le soluzioni di Newton e de Moivre*

Nella sua forma più usuale il problema del ritorno delle serie può formularsi nei termini seguenti. Data una qualsiasi serie intera,

$$(20)\qquad z = A_0 + A_1x + A_2x^2 + A_3x^3 + \&c.$$

si tratta di esprimere x in funzione della variabile z, ovvero di determinare i coefficienti della serie

$$(21)\qquad x = B_0 + B_1z + B_2z^2 + B_3z^3 + \&c$$

in funzione dei coefficienti noti A_0, A_1, A_2, &c.. Se la (20) è intesa come un'espressione infinitaria di una funzione qualsiasi $z = z(x)$, il problema è quindi quello di invertire tale funzione senza ricorrere alla sua forma finita, esprimendo la stessa funzione inversa sotto la forma di una serie intera.

Per il caso (più semplice) caratterizzato dalla posizione $A_0 = 0$ il problema venne risolto in termini del tutto generali già da Newton in una lettera a Oldemburg del 24 Ottobre 1676, la quale venne poi pubblicata nel *Commercium epistolicum*.[14] L'idea di Newton è di costruire la (21) termine a termine, scegliendo i coefficienti successivi (di ordine 2, 3, &c.) in modo da annullare il termine dello stesso ordine della serie in x equiparata alla ridotta parziale considerata. Un esempio chiarirà tale procedura. Data la serie

$$(22)\qquad z \left[= \log\,(1-x)^{-1} = \int \frac{1}{1-x}\,dx \right] = x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{3}x^3 + \frac{1}{4}x^4 + \&c..$$

si avrà, calcolando le successive potenze intere positive,

$$(23)\qquad \begin{aligned} &\text{i) } z^2 = x^2 + x^3 + \frac{11}{12}x^4 + \frac{5}{6}x^5 + \&c. \\ &\text{ii) } z^3 = x^3 + \frac{3}{2}x^4 + \frac{7}{4}x^5 + \&c. \\ &\&c. \end{aligned}$$

e quindi:

[14]Cfr. Collins (1712), pp. 67-86 e in particolare pp. 84-5.

$$(24) \qquad z - B_2 z^2 = x + \left(\frac{1}{2} - B_2\right)x^2 + \left(\frac{1}{3} - B_2\right)x^3 + \left(\frac{1}{4} - \frac{11}{12}B_2\right)x^4 + \&c.$$

Il coefficiente di x^2 sarà quindi nullo quando B_2 è uguale a 1/2. Assunta tale posizione si avrà allora:

$$(25) \qquad z - \frac{1}{2}z^2 = x - \frac{1}{6}x^3 - \frac{5}{24}x^4 + \&c.$$

Procedendo in modo analogo si può poi cercare la posizione che annulla il coefficiente di x^3 nell'espressione in serie intera di x del trinomio indeterminato $z - \frac{1}{2}z^2 + B_3 z^3$, traendo ovviamente, secondo la (23)(ii) e la (25):

$$(26) \qquad z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{6}z^3 = x + \frac{1}{24}x^4 + \&c.$$

Reiterando il procedimento all'infinito si avrà così l'espressione di x in serie intera in z

Illustrato il suo metodo su qualche esempio, Newton lo generalizza per mezzo del seguente teorema.

Teorema: Data la serie intera (20) si avrà, invertendo:

$$(27) \qquad x = \frac{1}{A_1}z - \frac{A_2}{A_1^3}z^2 + \frac{2A_2^2 - A_1A_3}{A_1^5}z^3 + \frac{5A_1A_2A_3 - 5A_2^3 - A_1^2A_4}{A_1^7}z^4 + \&c.$$

Per quanto egli non fornisca alcuna esplicita dimostrazione di tale teorema, richiamandosi semplicemente agli esempi forniti, è chiaro che applicando direttamente alla (20) il medesimo procedimento applicato alla (22) si trae esattamente la (27), la cui posizione risulta quindi perfettamente giustificata in termini formali.[15] La difficoltà evidente del metodo di Newton è

[15] Assunta la (20) si avrà infatti successivamente

$$\text{i)} \quad \frac{z}{A_1} = x + \frac{A_2}{A_1}x^2 + \frac{A_3}{A_1}x^3 + \&c.$$

$$\text{ii)} \quad \left(\frac{z}{A_1}\right)^2 = x^2 + 2\frac{A_2}{A_1}x^3 + \left[\left(\frac{A_2}{A_1}\right)^2 + 2\left(\frac{A_3}{A_1}\right)\right]x^4 + \&c.$$

$$\text{iii)} \quad \left(\frac{z}{A_1}\right)^3 = x^3 + 3\frac{A_2}{A_1}x^4 + \left[3\left(\frac{A_3}{A_1}\right) + 3\left(\frac{A_2}{A_1}\right)\right]x^5 + \&c.$$

&c.

e quindi:

piuttosto un'altra e risiede nel fatto che, posta sotto la forma (27), la serie invertita non presenta alcuna legge evidente di progressione, e la ricerca del suo termine generale, a partire dalla considerazione della legge di formazione dei coefficienti successivi quale essa è fornita da tale metodo, si presenta come tutt'altro che agevole. Newton si trova d'altra parte in un'analoga situazione per ciò che riguarda il problema della determinazione della potenza n-esima ($n \in \mathbf{N}$) di una serie intera: egli non sembra disporre di alcuna formula che esprima la legge di formazione dei coefficienti successivi, essendo così costretto a ricorrere al calcolo diretto dei primi termini.[16]

Tanto il problema del ritorno delle serie che quello della determinazione della potenza n-esima ($n \in \mathbf{N}$) di una serie intera furono al centro degli interessi di A. de Moivre, che nel 1698 presentò una versione generalizzata del teorema di Newton, individuando il carattere di serie ricorrente[17] della (27) e ponendo quindi tale serie sotto una forma più opportuna.[18] Il risultato raggiunto da questi può riformularsi nei termini del seguente teorema.

Teorema: Se è posta l'identità infinitaria

$$(28) \qquad C_1 z + C_2 z^2 + C_3 z^3 + \&c. = A_1 x + A_2 x^2 + A_3 x^3 + \&c.$$

si potrà anche porre, per inversione:

$$(29) \qquad \begin{aligned} x = {} & \frac{C_1}{A_1} z + \frac{C_2 - A_2 W_1^2}{A_1} z^2 + \frac{C_3 - 2A_2 W_1 W_2 - A_3 W_1^3}{A_1} z^3 + \\ & + \frac{C_4 - A_2 W_2^2 - 2A_2 W_1 W_3 - 3A_3 W_1^2 W_2 - A_4 W_1^4}{A_1} z^4 + \&c. \end{aligned}$$

$$\text{i)} \quad \frac{z}{A_1} - \frac{A_2}{A_1^3} z^2 = x + 0x^2 - \frac{2A_2^2 - A_1 A_2}{A_1^2} x^3 + \&c.$$

$$\text{ii)} \quad \frac{z}{A_1} - \frac{A_2}{A_1^3} z^2 + \frac{2A_2^2 - A_1 A_3}{A_1^5} x^3 = x + 0x^3 + \&c.$$

&c.

[16]Relativamente a quest'ultimo problema cfr. il prossimo capitolo III.5..

[17]Il termine "serie ricorrente" è qui utilizzato in senso ampio per indicare una serie i cui termini successivi sono espressi in funzione dei termini precedenti (o di alcuni di essi). Assumendo infatti la definizione ristretta di Euler, la (29) non si presenta, almeno immediatamente, come una "serie ricorrente", non esibendo direttamente una scala di relazione della forma $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \&c.\}$ [cfr. il precedente paragrafo III.3.*d*.η.].

[18]Cfr. de Moivre (1698).

dove W_1, W_2, W_3, &c. sono rispettivamente i coefficienti di ordine 1, 2, 3, ..., della stessa (29), la cui legge di progressione è così fornita per ricorrenza.

E' chiaro che se $C_1 = 1$ e $C_2 = C_3 =$ &c. $= 0$, il teorema di de Moivre è perfettamente equivalente a quello di Newton e non fa quindi che riformularlo in termini più perspicui.

Per quanto la (29), non esibisca infatti in modo esplicito la legge di formazione dei propri coefficienti, essa esprime certe regolarità che permettono, in ogni caso particolare, di costruirla termine a termine in modo piuttosto agevole. Tali regolarità potranno essere indicate nei termini seguenti:

i) moltiplicando fra loro l'indice e l'esponente di ogni W_i^j $(i, j \in \mathrm{N})$ che compare al numeratore di ognuno dei suoi coefficienti (tranne il primo) e sommando fra di loro i risultati di tale operazione applicata a ogni W_i^j involto in ogni addendo (tranne il primo) del numeratore di un coefficiente qualsiasi si ottiene un numero intero che è costantemente uguale all'esponente della potenza di z cui si riferisce il coefficiente in questione;[19]

ii) la somma degli esponenti di ogni W_i^j involto in ognuno di tali addendi è costantemente uguale, per ogni coefficiente dello sviluppo, all'indice del fattore A_i che compare nello stesso addendo;

iii) il coefficiente numerico di ogni addendo (che de Moivre chiama "*uncia*") è uguale al numero delle possibili permutazioni dei fattori W_i che compaiono come fattori in tale addendo.

Il coefficiente generico $-W_\nu$ della (29) sarà allora costituito da una frazione il cui denominatore è costantemente uguale a A_1 e il cui denominatore è formato dalla somma di ν addendi di cui il primo è $-C_\nu$ e i seguenti - che potremmo genericamente indicare con H_μ $(\mu = 1, 2, ..., \nu-1)$ - possono essere costruiti moltiplicando fra loro gli elementi di tutte le μ-uple $(\mu = 1, 2, ..., \nu-1)$ ordinate $<W_\alpha, W_\beta, ..., W_\eta>$, tali che $\alpha \leq \beta \leq ... \leq \nu$ e $\alpha + \beta + ... + \nu = \eta$, e il risultato di tale moltiplicazione per A_μ e per il numero delle μ-uple che possono essere costruite permutando gli elementi $W_\alpha, W_\beta, ..., W_\eta$.[20]

---

[19]De Moivre indica tale somma come l' "esponente" dell'addendo corrispondente. Non facendo ricorso all'uso di indici (e indicando i coefficienti W_1, W_2, &c. rispettivamente con le lettere A, B, &c.), egli qualifica l' "esponente" di ogni addendo (tranne il primo) del denominatore del coefficiente considerato come la somma degli ordinali che esprimono il posto nella successione alfabetica di ogni lettera maiuscola (eventualmente ripetuta) che compare come fattore dell'addendo considerato. L'uso di indici permette così di semplificare l'esposizione del risultato di de Moivre, senza alterarne la natura essenziale.

[20]E' evidente che se, a esempio, $\beta = \gamma$, allora $B_\beta = B\gamma$ e quindi $< B_\beta, B\gamma > = < B_\gamma, B_\beta >$; permutando gli elementi B_β, $B\gamma$ non si può costruire così che una sola coppia $< B_\beta, B\gamma > = < B_\gamma, B_\beta >$.

De Moivre non fornisce una effettiva dimostrazione del suo teorema, limitandosi a indicare le linee generali di una dimostrazione possibile. Si tratta di assumere la (21) (per $B_0 = 0$ e B_1, B_2, &c. indeterminati), di sostituire in (28) le espressioni di x, x^2, x^3, &c. tratte da essa e di applicare all'identità così ottenuta il metodo dei coefficienti indeterminati. La forma della serie risultante dipenderà così dalla forma assegnata alle successive potenze della (21), e in effetti de Moivre porta come garanzia della validità del proprio teorema (ovvero della persistenza delle legge di formazione dei coefficienti che egli ha identificato relativamente ai termini di ordine minore) l'altro teorema relativo alle potenze intere positive di un polinomio di un grado qualunque[21] (ovvero la sussistenza di una legge costante di formazione per i coefficienti successivi di tali potenze). Se le potenze della (21) (per $B_0 = 0$) sono ordinate relativamente alle potenze intere di z, la (29) deriva del tutto naturalmente senza alcun riordinamento.

III. 4. *a*. δ. *L'applicazione della formula di Lagrange al problema del ritorno delle serie*

Per quanto la formula di Lagrange generalizzi i risultati di Newton e de Moivre (il cui metodo continuò per la verità a essere utilizzato durante tutto il XVIII secolo[22]), essa non fornisce alcuna maniera per semplificare il procedimento di costruzione dei coefficienti della serie inversa, non contenendo come proprie conseguenze particolari che la (27) e la (29). Per esplicitare tali conseguenze[23] è sufficiente porre la (20) (per $A_0 = 0$) sotto la forma

$$(30) \qquad \frac{z}{A_1} = x + \frac{x^2}{A_1}(A_2 + A_3 x + \&c.)$$

- che è esattamente la (12) per le sostituzioni:

$$(31) \quad t = \frac{z}{A_1}; \qquad \varphi(x) = -\frac{x^2}{A_1}(A_2 + A_3 x + \&c.)$$

- e cercare lo sviluppo in serie della potenza v-esima di x, $\psi(x) = x^{v}$. Ponendo nella (14) $p = x$ si avrà infatti:

[21] Cfr. de Moivre (1697).

[22] Ancora nel 1810 Lacroix ripresenterà tale metodo, senza alcuna modificazione, nell'introduzione alla prima edizione del proprio grande *Traité* [cfr. Lacroix (1810-9), pp. 95-102], riferendosi - oltre che a de Moivre - alla seconda edizione del trattato di Cagnoli [cfr. Cagnoli (1804), pp. 44-7].

[23] Per la seguente ricostruzione cfr. Lacroix (1810-19), vol. I, pp. 297-8, il quale si riferisce a Lagrange (1768), pp. 272-74 e 277-80.

$$
\begin{aligned}
x^{v} = {} & \left(\frac{z}{A_1}\right)^{v} - \frac{v}{A_1}\left(\frac{z}{A_1}\right)^{v+1}\left[A_2 + A_3\left(\frac{z}{A_1}\right) + A_4\left(\frac{z}{A_1}\right)^2 + \&c.\right] + \\
& + \frac{v}{2!\,A_1^2}\,\frac{d}{d\left(\frac{z}{A_1}\right)}\left[\left(\frac{z}{A_1}\right)^{v+3}\left(A_2 + A_3\left(\frac{z}{A_1}\right) + A_4\left(\frac{z}{A_1}\right)^2 + \&c.\right)^2\right] + \\
& - \frac{v}{3!\,A_1^3}\,\frac{d^2}{d\left(\frac{z}{A_1}\right)^2}\left[\left(\frac{z}{A_1}\right)^{v+5}\left(A_2 + A_3\left(\frac{z}{A_1}\right) + A_4\left(\frac{z}{A_1}\right)^2 + \&c.\right)^3\right] + \\
& + \&c.
\end{aligned}
\tag{32}
$$

da cui la (27) segue per $v = 1$, ordinando la serie secondo le potenze crescenti di z dopo aver effettuato le differenziazioni e aver calcolato i primi termini delle prime potenze del polinomio infinito $A_2 + A_3\left(\frac{z}{A_1}\right) + A_3\left(\frac{z}{A_1}\right)^2 + \&c.$. Per quanto la (32) non si presenti d'altra parte sotto la forma di una serie ricorrente[24], essa si trasforma in una serie di tal tipo qualora le successive potenze di $A_2 + A_3\left(\frac{z}{A_1}\right) + A_3\left(\frac{z}{A_1}\right)^2 + \&c.$ siano a loro volta espresse ricorsivamente.[25] Non è difficile rendersi conto che essa si trasforma allora nella (29) per $C_1 = 1$ e $C_2 = C_3 = \&c. = 0$. Per passare dalla (14) alla (29) per C_1, C_2, &c. indeterminati occorre porre invece nella (12)

$$
t = \frac{C_1 z + C_2 z^2 + C_3 z^3 + \&c.}{A_1} \tag{33}
$$

ciò che tuttavia rende la dimostrazione del teorema di de Moivre assai noiosa e per nulla naturale.

Se consideriamo le cose da un punto di vista puramente algoritmico, il risultato di Lagrange non realizza dunque, relativamente al problema del ritorno delle serie per $A_0 = 0$, alcun progresso significativo rispetto ai classici risultati di Newton e de Moivre. In particolare, esso non sembra rendere in alcun modo il problema del ritorno delle serie indipendente da quello delle potenze naturali di un polinomio di grado qualsiasi: si può sperare di costrui-

---

[24] Cfr. la precedente nota (17).

[25] Il primo a fornire una formula generale che esprimesse non ricorsivamente una qualsiasi potenza naturale di un polinomio di grado qualunque fu Hindemburg nel 1778 [cfr. il prossimo capitolo III.5.].

re una serie inversa di cui sia nota, in termini non puramente ricorsivi, la legge di formazione del coefficiente generico, solo a condizione che la stessa potenza di ordine ν ($\nu \in \mathbf{N}$) di un polinomio infinito sia espressa a propria volta per mezzo di una serie intera di cui si conosca, in termini non ricorsivi, la legge di formazione del coefficiente generico. Esso permette tuttavia di risolvere (nei termini di Newton e de Moivre) una versione generalizzata di tale problema[26] - data una serie della forma (20) per $A_1 = 0$, esprimere sotto la forma di una serie intera ordinata secondo le potenze di z, una funzione qualsiasi di x - e di immergere l'intera questione nel quadro di una teoria generale delle funzioni, assegnando a essa una differente collocazione matematica. E' su una tale differenza di collocazione che vale quindi la pena di riflettere.

In primo luogo non è difficile rendersi conto che i due metodi di Newton e de Moivre non sono applicabili che nel caso in cui il coefficiente A_0 della serie assegnata è posto uguale a zero. In caso contrario le potenze successive di z mantengono infatti dei termini in cui compaiono le potenze 0 e 1 di x e il procedimento di eliminazione di Newton risulta quindi inattuabile, mentre il confronto dei coefficienti invocato da de Moivre non fornisce che equazioni di natura infinitaria. Al contrario la posizione

(34) $$t = -\frac{A_0 - z}{A_1}$$

non complica eccessivamente la ricerca di una formula analoga alla (32) essendo ovviamente $d\left(\frac{-A_0+z}{A_1}\right) = d\left(\frac{z}{A_1}\right) = \frac{dz}{A_1}$. La (14) fornisce quindi una soluzione di ordine generale per il problema del ritorno delle serie, anche nel caso in cui la serie assegnata possegga un termine noto non nullo, pur lasciando, anche in questo caso, la determinazione della serie inversa del tutto dipendente dalla costruzione delle potenze intere e positive di un qualsiasi polinomio infinito.

L'interpretazione funzionale del problema del ritorno delle serie permette, in secondo luogo, di esplicitare la connessione di tale problema con quello della determinazione delle funzioni inverse. Intendendo infatti z e x come delle funzioni generiche di una variabile comune v, la (20) e la (21) assumono rispettivamente le forme $z(v) = A_0 + A_1x(v) + A_2[x(v)]^2 + \&c. = f[x(v)]$ e $x(v) = B_0 + B_1z(v) + B_2[z(v)]^2 + \&c. = g[z(v)]$, in modo che $g[g(v)] = g(f[x(v)]) = x(v)$.

[26] E' lo stesso Lagrange a sottolineare un tale vantaggio della propria soluzione [cfr. *ivi*, pp. 277-80].

III. 4. *a. ε. La convergenza della serie soluzione*

Lagrange dedica l'ultima sezione della propria memoria[27] alla discussione delle condizioni di convergenza della (14).

> Il ne suffit pas - egli scrive - de pouvoir exprimer les racines des équations, ou leurs fonctions quelconques, par des séries régulieres, & dont la loi soit bien développée; il faut surtout pouvoir reconnaître par la loi même de ces séries si elles sont convergentes à l'infini ou non; car il est clair que pour qu'une série puisse être regardée comme représentant réellement la valeur d'une quantité cherchée, il faut qu'elle soit convergente à son extrémité [...].[28]

Come era del tutto usuale nel XVIII secolo Lagrange considera quindi la convergenza come una condizione di rappresentatività da parte della serie del *valore* (numerico) della funzione a essa associata e affronta la questione *a posteriori*. Il criterio che egli utilizza è d'altra parte scorretto:

> [...] c'est à dire - egli continua -, que ses derniers termes soient infiniment petits, de sorte que l'erreur puisse devenir moindre qu'aucune quantité donnée.[29]

Come oggi sappiamo, e come anche Lagrange avrebbe dovuto sapere,[30] l'infinita piccolezza di a_k per k infinitamente grande non è una condizione sufficiente per la convergenza di $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$. Ciò che occorre stabilire, per affermare la convergenza di tale serie, è piuttosto che il valore assoluto del rapporto $\frac{a_{k+1}}{a_k}$ resti minore dell'unità anche qualora k sia infinito. Tuttavia Lagrange, dopo aver posto nella (12) $x = ty$ e aver quindi posto la (14) sotto la forma

$$\psi\left(\frac{x}{t}\right) = \psi(1) + \frac{\varphi(ty)\cdot[\psi'(y)]_{y=1}}{t} + \frac{d}{2!\,dy}\left[\frac{\varphi(ty)\cdot\psi'(y)}{t^2}\right]_{y=1} + \&c. \tag{35}$$

riduce il problema della convergenza al problema di "voir ce que" la "quantité"

$$\frac{d^{\nu-1}}{\nu!\,dy^{\nu-1}}\left[\frac{[\varphi(ty)]^{\nu}\cdot\psi'(y)}{t^{\nu}}\right]_{y=1} \tag{36}$$

---

[27]Cfr. *ivi*, pp. 314-26.

[28]Cfr. *ivi*, p. 314.

[29]Cfr. *ivi*.

[30]Cfr. la precedente appendice 2.II-A..

"devient lorsqu'on suppose ν infiniment grand".[31] A questo scopo egli pone

$$(37)\qquad \varphi(yt) = A\, t^{\alpha} y^{\alpha} + B\, t^{\beta} y^{\beta} + C\, t^{\gamma} y^{\gamma} + \&c.$$

e ne deduce che il termine generico della potenza intera $[\varphi(ty)]^{\nu}$ ha la forma seguente

$$(38)\qquad \frac{\nu!}{m!\; n!\; p!\; \&c.}\left(A^m B^n C^p\ \&c.\right)[ty]^{\alpha m+\beta n+\gamma p+\&c.}$$

in cui m, n, p, &c. sono degli interi positivi tali che $m+n+p+\&c. = \nu$. D'altra parte la funzione $\psi'(y)$ sarà "représentée par une suite de termes tels que Ry^r" e il termine generico di $[\varphi(ty)]^{\nu}\cdot\psi'(y)$ assumerà quindi la forma

$$(39)\qquad \frac{\nu!\, R\left(A^m B^n C^p\ \&c.\right)}{m!\; n!\; p!\; \&c.}\, t^{\mu} y^{\mu+r}$$

ove $\mu = \alpha m+\beta n+\gamma p+\&c.$. Il termine generico della (35), espresso dalla (36), potrà così essere posto, a sua volta, sotto la forma di una somma di termini, ognuno dei quali assume la forma

$$(40)\qquad \frac{(\mu+r)(\mu+r-1)(\mu+r-2)\ \ldots\ (\mu+r-\nu+2)}{m!\; n!\; p!\; \&c.}\, R\left(A^m B^n C^p\ \&c.\right) t^{\mu-\nu}$$

A partire da un tale risultato, Lagrange mostra, attraverso opportune manipolazioni algebriche, che la "quantità" (36) è infinitamente piccola per ν infinitamente grande, qualora per la stessa ipotesi sia verificata la condizione:

$$(41)\qquad \left|\frac{\mu}{\nu}\left(\frac{\mu t}{\mu-1}\right)^{\frac{\mu}{\nu}-1}\left(\frac{A}{m/\nu}\right)^{m/\nu}\left(\frac{B}{n/\nu}\right)^{n/\nu}\left(\frac{C}{p/\nu}\right)^{p/\nu}\ \&c.\right| \leq 1$$

ciò che gli permette di concludere che la convergenza della (35) - e quindi della (14) - non dipende dalla scelta della funzione ψ.

III. 4. *a*. ζ. *Una nuova dimostrazione di Lambert del risultato di Lagrange*

Una dimostrazione del tutto differente del risultato raggiunto da Lagrange nel 1768 fu proposta da Lambert tre anni più tardi, in una memoria

[31] Cfr. *ivi*,. 315.

presentata all'Accademia di Berlino.[32] Il punto di partenza di tale dimostrazione è il confronto fra due differenti rappresentazioni geometriche dell'equazione (12). In primo luogo, se AM (figura 1) è la curva che rappresenta la funzione φ e AP il segmento che rappresenta la variabile x - ovvero se si pone PM = $\varphi(x)$ - sarà sufficiente porre AB = t per interpretare tale equazione come la risolvente del sistema

$$(42)\qquad \begin{cases} y = \varphi(x) \\ y = x - t \end{cases}$$

che attesta che l'ordinata PM è uguale al cateto di un triangolo rettangolo isoscele di ipotenusa BM. D'altra parte mantenendo la posizione AB = t si può anche porre

$$(43)\qquad \begin{aligned} &AC = t + \varphi(t) \\ &AD = t + \varphi[t+\varphi(t)] \\ &\&c. \end{aligned}$$

costruzione che corrisponde all'approssimazione

$$(44)\qquad x = t + \varphi[t+\varphi(t+\varphi(t+\&c.))]$$

Essendo t un'ascissa si potrà allora assumere BP = Δt e quindi AP = x = $t+\Delta t$. Secondo il "teorema" di Taylor si avrà allora

$$(45)\qquad \varphi(x) = \varphi(t+\Delta t) = \varphi(t) + \Delta t\,\frac{d\varphi(t)}{dt} + \frac{[\Delta t]^2\, d^2\varphi(t)}{2!\ dt^2} + \&c.$$

e dunque, ricordandosi della prima costruzione,

$$(46)\qquad \varphi(x) = \varphi(t) + \varphi(x)\,\frac{d\varphi(t)}{dt} + \frac{[\varphi(x)]^2\, d^2\varphi(t)}{2!\ dt^2} + \&c.$$

ovvero, reiterando indefinitamente la sostituzione di $\varphi(x)$ con la serie che la esprime:

---

[32]Cfr. Lambert (1770). Benché comparsa nel volume dei *Nouveaux Mémoires* per l'anno 1770, la memoria di Lambert fu presentata all'Accademia solo nel corso del 1771 [cfr. *ivi*, p.225]. L'interesse di Lagrange per l'equazione trinomia $t - x + \varphi(x) = 0$ e per il problema dello sviluppo in serie della radice x di tale equazione sembra peraltro essere stato originato dalle ricerche precedenti dello stesso Lambert [cfr. *ivi*, pp. 228 e segg. e Lagrange (1768), p. 271].

(47)
$$\varphi(x) = \varphi(t) + \frac{d\varphi(t)}{dt}\left[\varphi(t) + \frac{d\varphi(t)}{dt}\left(\varphi(t) + \frac{d\varphi(t)}{dt}\left(\varphi(t) + \&c.\right)\right)\right] + \\ + \frac{d^2\varphi(t)}{2!\ dt^2}\left[\varphi(t) + \frac{d\varphi(t)}{dt}\left(\varphi(t) + \frac{d\varphi(t)}{dt}\left(\varphi(t) + \&c.\right)\right)\right]^2 + \\ + \&c.$$

che, calcolando i primi termini, Lambert scrive sotto la forma:

(48)
$$\varphi(x) = \varphi(t) + \frac{d\left([\varphi(t)]^2\right)}{2!\ dt} + \frac{d^2\left([\varphi(t)^3\right)}{3!\ dt^2} + \&c.$$

Sia ora $\psi(x)$ una funzione qualsiasi rappresentata dalla curva ANQ. E' allora chiaro che $BN = \psi(t)$ e $PQ = \psi(x)$. Applicando ancora il teorema di Taylor si trae quindi

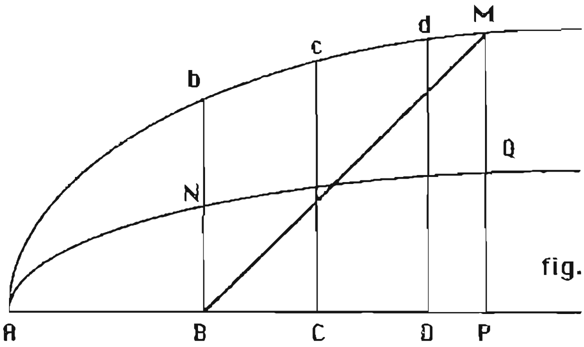


fig. 1

(49)
$$\psi(x) = \psi(t+\Delta t) = \psi(t) + \Delta t\,\frac{d\psi(t)}{dt} + \frac{[\Delta t]^2\ d^2\psi(t)}{2!\ dt^2} + \&c.$$

e sostituendo in tale identità l'espressione in serie di $\Delta t = \varphi(x)$ fornita dalla (48) si avrà allora

(50)
$$\psi(x) = \psi(t) + \frac{d\psi(t)}{dt}\left[\varphi(t) + \frac{d\left([\varphi(t)]^2\right)}{2!\ dt} + \&c.\right] + \\ + \frac{d^2\psi(t)}{2!\ dt^2}\left[\varphi(t) + \frac{d\left([\varphi(t)]^2\right)}{2!\ dt} + \&c.\right]^2 + \\ + \&c.$$

da cui, calcolando i primi termini, è facile trarre:

$$(51) \qquad \psi(x) = \psi(t) + \frac{\varphi(t)\cdot d\psi(t)}{dt} + \frac{d\left([\varphi(t)]^2\cdot d\psi(t)\right)}{2!\ dt^2} + \frac{d^2\left([\varphi(t)]^3\cdot d\psi(t)\right)}{3!\ dt^3} + \&c.$$

che è chiaramente equivalente alla (14).

Per quanto resa perspicua da un riferimento geometrico, la dimostrazione di Lambert resta in se stessa strettamente analitica, non essendo fondata che su regole di trasformazione formale. Fra queste, il ruolo centrale è chiaramente giocato dal "teorema" di Taylor, di cui il risultato di Lagrange si mostra così come una conseguenza. Proprio l'individuazione di tale relazione fra il "teorema" di Taylor e la formula di Lagrange sembra d'altra parte costituire l'essenziale contributo della memoria di Lambert.

III. 4. *b*.
"*SUR UNE NOUVELLE ESPECE DE CALCUL*": LA MEMORIA DI LAGRANGE DEL 1772

III. 4. *b. α. Premessa: Lagrange precursore di sé stesso*

> Dans un mémoire imprimé parmi ceux de l'académie de Berlin, de 1772, || et dont l'objet était l'analogie entre les différentielles et les puissances positives, et entre les intégrales et les puissances négatives, || j'avançai que la théorie du développement des fonctions en série, contenait les vrais principes du calcul différentiel, dégagés de toute considération d'infiniment petits, ou de limites, et je démontrai par cette théorie le théorème de *Taylor*, {qu'on peut regarder comme le principe fondamental de ce calcul} || qui est le fondement de la méthode des séries ||, et qu'on n'avait encore démontré que par le secours de ce même calcul, ou par la considération des différences infiniment petites.[33]

E' con queste parole che nelle prime pagine della *Théorie des fonctions analytiques* Lagrange rivendica alla propria memoria del 1772[34] il merito di aver per la prima volta indicato la via per una fondazione "completamente analitica" del *calcolo*.[35]

---

[33]Cfr. Lagrange (1797), p. 5 e (1813), p. 5. Le proposizioni poste fra due doppie barre non compaiono che nella seconda edizione, mentre quella fra parentesi graffe compare soltanto nella prima.

[34]Cfr. Lagrange (1772).

[35]Per un'ulteriore retrodatazione agli anni torinesi della prima giovinezza di Lagrange (1756-60), se non dell'idea programmatica esposta nel 1772, almeno della proconizzazione di un punto di vista associabile a essa, cfr. Jourdain (1912) e più recentemente Pepe (1982) e (1986) (il quale si riferisce principalmente ai *Principi di analisi sublime*, Ms., Biblioteca Reale di Torino, Saluzzo 736). Che la "fondazione" lagrangiana del calcolo risalesse sostanzialmente alla memoria del 1772 era d'altra parte un'opinione abbastanza diffusa fra gli stessi matematici coevi [cfr. a esempio de Prony (1796) e Lacroix (1797), vol. 1, pp. XXII-XXIII e (1810-19), vol. 1, pp. XLI-XLII].

> Depuis - continua Lagrange -, *Arbogast* a présenté à l'académie des sciences, un (beau) mémoire, où la même idée est exposée avec des développements et des applications qui lui appartiennent. (Cet ouvrage ne doit rien laisser à désirer sur l'objet dont il s'agit;) mais l'auteur n'ayant (pas) encore (jugé à propos de le faire paraître,) il rien publié sur ce sujet,il et m' étant trouvé engagé par des circonstances particulières à développer les principes généraux de l'analyse, j'ai rappelé mes anciens idées sur ceux du calcul différentiel, et j'ai fait de nouvelles réflexions tendantes à les confirmer et à les généraliser [...].[36]

Per quanto in tal modo Lagrange riconosca implicitamente l'insufficienza delle proprie indicazioni del 1772 e dei risultati su cui esse erano fondate, relativamente allo scopo di fornire una adeguata trattazione del *calcolo* entro la teoria generale degli sviluppi in serie intere, egli sembra cercare di minimizzare l'apporto di novità contenuto tanto nella memoria di Arbogast del 1779[37] che nel suo stesso trattato del 1797. Le considerazioni contenute nel presente capitolo così come nel prossimo capitolo III.6. dovrebbero al contrario mostrare che il percorso che conduce dalla memoria del 1772 al trattato del 1797 è tutt'altro che lineare, richiedendo al contrario trasformazioni profonde di numerosi punti di vista matematici.[38] Una parte di questo percorso (e non certamente la più facile) è d'altra parte compiuta dallo stesso Lagrange nella seconda parte della sua memoria (che gli storici hanno in verità largamente trascurato), in cui egli espone una "*nouvelle espèce de calcul*" che lungi dall'identificarsi con una nuova versione del *calcolo*, consiste in una trasposizione algoritmica - nel contesto della costruzione di certi sviluppi in serie intera - della cosiddetta "analogia di Leibniz"[39] fra potenze di una somma e differenziali (o integrali) di un prodotto. Scopo di Lagrange non è d'altra parte quello di giustificare *a priori* tale analogia (o di indicarne le ragioni più o meno profonde), ma piuttosto, accettandola come un dato di fatto, di trarne opportune conseguenze algoritmiche relativamente al calcolo delle differenze (finite e infinitamente piccole). E' proprio lo studio di tali conseguenze che dà luogo a

> une espèce particuliere de calcul qui - scrive Lagrange - me paroît mériter d'être cultivée et qui peut donner lieu à beaucoup de découvertes utiles et importantes dans l'analyse.[40]

III. 4. *b*. β. *Una forma opportuna per lo sviluppo in serie intera di una funzione incrementata*

Il punto di partenza di Lagrange è assolutamente esplicito: se $u = u(x)$ è

[36] Cfr. *ivi* [cfr. la precedente nota (33)].
[37] Cfr. Lagrange (1779).
[38] Non tornerò nella presente dissertazione sulla memoria di Arbogast del 1779, per cui mi permetto di rimandare a Panza (1985).
[39] Cfr. il precedente paragrafo III.2.*d*. γ..
[40] Cfr. Arbogast (1772), p. 186.

una funzione qualsiasi della variabile x, allora "la teoria delle serie"[41] ci assicura che:

$$(52) \qquad u(x+\xi) = u(x) + u_{[1]}\,\xi + u_{[2]}\,\xi^2 + u_{[3]}\,\xi^3 + \&c.$$

dove ξ è un incremento a sua volta variabile e $u_{[1]}$, $u_{[2]}$, $u_{[3]}$, &c. sono "nouvelles fonctions de x, dérivées d'une certaine manière de la fonction u".[42]

> Le calcul différentiel considéré dans toute sa généralité consiste - allora - à trouver, directement et par des procédés simples et faciles les fonctions $u_{[1]}$, $u_{[2]}$, $u_{[3]}$, &c. [...] dérivées de la fonction u; et le calcul intégral consiste à retrouver la fonction u par le moyen de ces dernieres fonctions.[43]

Esplicitamente definito quindi come un calcolo delle funzioni (ovvero come una teoria della loro trasformazione), il "calcolo differenziale"[44] è così immediatamente pensato nei termini di un'*operazione*[45] che conduce da una funzione data a un insieme di funzioni derivate, la cui forma (relativamente alla funzione assegnata) deve essere determinata per mezzo di un algoritmo di ordine generale.

Se tale algoritmo è tuttavia inteso come una regola di trasformazione che conduce successivamente da u a $u_{[1]}$, $u_{[2]}$, $u_{[3]}$, &c., esso non solo non può corrispondere in termini stretti all'usuale algoritmo differenziale, ma non può neppure essere reso, in quanto tale, indipendente dall'indice della funzione $u_{[k]}$ che deve essere determinata; se la (52) è infatti comparata con

---

[41] J. Grabiner [cfr. Grabiner (1981), pp. 189-90] ha sostenuto che Lagrange si riferisca qui implicitamente all'*Introductio*

> which derived [*sic.*] the infinite-series expansion for all the common transcendental functions without appearing appeal to the concept of differential quotient.

Se i risultati di Euler possono certamente essere intesi come il punto di partenza per un argomento costruttivo atto a giustificare la sviluppabilità in serie intera di tutte le funzioni (intese come composizioni delle funzioni elementari) [cfr. il precedente paragrafo. III.3.*b*. δ.], l'assunto di Lagrange sembra in realtà rinviare a ragioni di ordine più profondo che spero che l'intero corpo della mia dissertazione possa contribuire a mettere in chiaro.

[42] Cfr. *ivi*, p. 186. Per evitare fastidiose confusioni e evidenziare la natura strettamente operazionale del procedimento che conduce dalla (52) alla (57) ho modificato la notazione di Lagrange, il quale indica le funzioni $u_{[1]}$, $u_{[2]}$, $u_{[3]}$, &c. rispettivamente come p, p', p'', &c.. Mentre i simboli di Lagrange indicano direttamente delle funzioni differenti fra loro, i miei simboli indicano il risultato di certe operazioni applicate alla funzione u di partenza. Ciò mi permetterà di scrivere assai semplicemente la (54) evidenziando le relazioni intercorrenti fra i differenti coefficienti e mostrando la natura profonda della dimostrazione di Lagrange. Tale artificio espositivo tradisce tuttavia la "*démarche*" della dimostrazione originale che non passa dalla considerazione delle funzioni a quella delle operazioni che le connettono fra loro che all'ultimo stadio del ragionamento [cfr. la prossima nota (47)].

[43] Cfr. Lagrange (1772), p. 187.

[44] Sembra chiaro che Lagrange non si riferisca qui che all'algoritmo di tale calcolo.

[45] Il termine "operazione" è di Lagrange [cfr. *ivi*, p. 189]. Cfr. comunque la precedente nota (42).

gli sviluppi in serie conosciuti, è facile rendersi conto (assumendo l'unicità dello sviluppo) che il passaggio da u a $u_{[k]}$ ($k \in \mathbf{N}$) non può consistere di una applicazione reiterata (per k volte) della medesima operazione, definibile, in termini generali, indipendentemente dalla considerazione del posto che essa occupa nella successione delle operazioni cui partecipa. Si tratterà allora di assegnare alla (52) una forma opportuna a evitare una tale difficoltà, senza fare ovviamente alcun riferimento, per questo, al "teorema" di Taylor. Il procedimento tramite il quale Lagrange perviene a un tale risultato può essere ricostruito nei termini seguenti.

Essendo ovviamente (per ogni scelta delle variabili x, ξ e ω) $(x + \omega) + \xi = x + (\xi + \omega)$ si avrà anche (intendendo le funzioni come delle composizioni analitiche) $u[(x+\omega)+\xi] = u[x+(\xi+\omega)]$ e quindi (assumendo che tale identità si trasmetta agli sviluppi), secondo la (52),

$$
\begin{aligned}
(53)\qquad & u(x+\omega) + u_{[1]}(x+\omega)\,\xi + u_{[2]}(x+\omega)\,\xi^2 + \&c. = \\
& \qquad = u(x) + u_{[1]}(x)\,[\xi+\omega] + u_{[2]}(x)\,[\xi+\omega]^2 + \&c.
\end{aligned}
$$

ovvero (scrivendo $u_{[i][j]}$ in luogo di $\left(u_{[i]}\right)_{[j]}$ $(i, j = 1, 2, \ldots)$):

$$
\begin{aligned}
& u(x+\omega) + \Big[u_{[1]}(x) + u_{[1][1]}(x)\,\omega + u_{[1][2]}(x)\,\omega^2 + \&c.\Big]\xi \\
& \qquad + \Big[u_{[2]}(x) + u_{[2][1]}(x)\,\omega + u_{[2][2]}(x)\,\omega^2 + \&c.\Big]\xi^2 \\
& \qquad + \&c. \\
(54)\qquad & \qquad\qquad = \\
& u(x+\omega) + \left[\binom{1}{0}u_{[1]}(x) + \binom{2}{1}u_{[2]}(x)\,\omega + \binom{3}{2}u_{[3]}(x)\,\omega^2\right]\xi \\
& \qquad + \left[\binom{2}{0}u_{[2]}(x) + \binom{3}{1}u_{[3]}(x)\,\omega + \binom{4}{2}u_{[4]}(x)\,\omega^2\right]\xi^2 \\
& \qquad + \&c.
\end{aligned}
$$

Eguagliando fra loro i coefficienti delle successive potenze intere di ξ si avrà allora

$$
\begin{aligned}
& \text{i)}\ \Big[u_{[1][1]}(x) - 2u_{[2]}(x)\Big]\omega + \Big[u_{[1][2]}(x) - 3u_{[3]}(x)\Big]\omega^2 + \&c. = 0 \\
(55)\qquad & \text{ii)}\ \Big[u_{[2][1]}(x) - 3u_{[3]}(x)\Big]\omega + \Big[u_{[2][2]}(x) - 6u_{[4]}(x)\Big]\omega^2 + \&c. = 0 \\
& \&c.
\end{aligned}
$$

e quindi, applicando ancora il metodo dei coefficienti indeterminati, relativamente alle potenze di ω,[46]

$$
(56)\qquad
\begin{aligned}
&u_{[2]}(x) = \frac{1}{2}\, u_{[1][1]}(x)\\
&u_{[3]}(x) = \frac{1}{3}\, u_{[1][2]}(x) = \frac{1}{3}\, u_{[2][1]}(x) = \frac{1}{3!}\, u_{[1][1][1]}(x)\\
&u_{[4]}(x) = \frac{1}{4}\, u_{[1][3]}(x) = \frac{1}{6}\, u_{[2][2]}(x) = \frac{1}{4}\, u_{[3][1]}(x) = \frac{1}{4!}\, u_{[1][1][1][1]}(x)\\
&\&c.
\end{aligned}
$$

da cui, indicando per semplicità la funzione $\varphi_{[1]}$ con φ',[47] è ovvio trarre:

$$
(57)\qquad
\begin{aligned}
u(x+\xi) &= u(x) + u'(x)\,\xi + \frac{1}{2!}\,[u']'(x)\,\xi^2 + \frac{1}{3!}\,[(u')']'(x)\,\xi^3 + \&c.\\
&= u(x) + u'(x)\,\xi + \frac{1}{2!}\,u''(x)\,\xi^2 + \frac{1}{3!}\,u'''(x)\,\xi^3 + \&c.
\end{aligned}
$$

Per quanto Lagrange non ripeta, dopo aver posto la (52) sotto la forma (57), la precedente dichiarazione relativa all' "oggetto del calcolo differenziale", è chiaro che quest'ultima debba intendersi come riferita alle funzioni $u'(x)$, $u''(x)$ &c., piuttosto che alle $u_{[1]}$, $u_{[2]}$,&c.. Passando dalla (52) alla (57) Lagrange ha infatti dimostrato che lo sviluppo in serie intera di una qualsiasi funzione incrementata $u(x+\xi)$ può essere posto sotto una forma tale che il suo coefficiente generico di ordine ν è uguale a un prodotto della forma $\frac{1}{\nu!}\Phi_{(u,\nu)}(x)$ in cui $\Phi_{(u,\nu)}(x)$ è una funzione che deriva da $u(x)$ applicando per ν volte la stessa operazione che porta da $u(x)$ al coefficiente di ordine uno di

[46] Si osservi che la (57) segue senza alcuna difficoltà dalla sola considerazione della (55)(i) o - come è d'altra parte il caso della dimostrazione di Lagrange - dall'annullamento dei soli coefficienti di ω nelle successive identità contenute nella (55). Il confronto fra le differenti determinazioni delle $u_{[k]}$ evidenzia tuttavia alcune delle proprietà formali delle funzioni derivate, che Lagrange non dimostrerà nel 1797 che facendo riferimento all'algebra delle serie intere.

[47] Avendo indicato rispettivamente i coefficienti $u_{[1]}$, $u_{[2]}$, $u_{[3]}$, &c. della (52) per mezzo dei simboli "p, p', p'', &c.", Lagrange è costretto, a indicare in (54) i successivi coefficienti degli sviluppi di $u_{[1]}(u+\omega)$, $u_{[2]}(x+\omega)$, &c. rispettivamente per mezzo dei simboli "p, π, ρ, &c.; p', π', ρ', &c.; &c." E' solo dopo aver tratto le (56) che egli osserva che ρ «deriva da p come p deriva da u», in modo che ponendo $p = u'$ si avrà anche: $\rho = u''$, indicando con u'' «una funzione che deriva da u' come u' deriva da u». Tuttavia, in tal modo egli modifica surrettiziamente il significato dell'apice nel corso della sua dimostrazione, trasformandolo da un mezzo per distinguere fra di loro i coefficienti successivi di una stessa serie intera nel simbolo di un'*operazione* (dalla quale tali coefficienti non derivano che a meno di un fattore numerico).

tale sviluppo, operazione che resta quindi, in quanto tale, del tutto indipendente dalla scelta di ν. Detto in altri termini: individuata l'operazione che conduce da $u(x)$ al coefficiente di ordine uno dello sviluppo di $u(x+\xi)$ è possibile passare da $\Phi_{(u,\nu)}(x)$ a $\Phi_{(u,\nu+1)}(x)$ del tutto indipendentemente dalla conoscenza del valore di ν. Tenendo conto che la dimostrazione assume la (52), il risultato di Lagrange può allora essere formulato nei termini seguenti.

Teorema: Se per ogni funzione $u = u(x)$ esiste un'operazione (-)' che permette di costruire il coefficiente di ordine uno dello sviluppo in serie intera relativo a ξ della funzione incrementata $u(x+\xi)$, allora tale operazione permette di trovare per mezzo di una ricorrenza infinita - i cui passi successivi non dipendono che dalla considerazione del termine precedente e sono quindi indipendenti dall'indice - una successione di funzioni (eventualmente nulle a partire da un certo ordine) $\{u', u'', u''', \ldots, u^{[\nu]}, \&c.\}$ tali che:

$$(58) \qquad u(x+\xi) = u(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k!} u^{[k]}(x)\, \xi^{k}$$

Se assumiamo - come sembra essere il caso di Lagrange - che per ogni funzione $u(x)$ è possibile associare alla funzione incrementata $u(x + \xi)$ uno sviluppo in serie intera secondo le potenze di ξ, tale che il suo coefficiente di ordine uno mantenga una relazione con la funzione data $u = u(x)$ che può essere espressa nei termini di un'operazione qualsiasi, allora tale teorema afferma che tale operazione (di cui si assume in tal modo l'esistenza) possiede le proprietà indicate.

III. 4. *b. γ. Il passaggio al teorema di Taylor e il problema della reinterpretazione del calcolo*

Compiuta l'analisi della dimostrazione di Lagrange, un problema interessante che mi sembra porsi naturalmente, soprattutto alla luce della dichiarazione di questi, è il seguente: il precedente teorema può essere inteso come equivalente al "teorema" di Taylor, ovvero come una versione di esso? La risposta che io credo si debba dare a tale domanda è radicalmente negativa: il precedente teorema di Lagrange non equivale - neppure formalmente - al "teorema" di Taylor. Vi sono due ordini di ragioni che mi conducono a una tale conclusione. In primo luogo, se il teorema di Lagrange afferma che una certa operazione (di cui si assume l'esistenza) possiede *questa e questa* proprietà, esso non ci dice nulla sui caratteri specifici di tale operazione, la quale resta in quanto tale del tutto indeterminata. Per giungere a tale determinazione occorre costruire il primo termine dello sviluppo in questione e individuare l'operazione che conduce a esso a partire dalla funzione data. A differenza che nel caso del "teorema" di Taylor, l'algoritmo costruttivo di tale sviluppo rimane del tutto indeterminato e non può quindi essere *a fortiori* equiparato, senza un'ulteriore dimostrazione, all'algoritmo del *calcolo* diretto. La dimostrazione di Lagrange è in secondo luogo tale da non autorizzare alcuna generalizzazione che affermi che l'operazione su cui essa verte sia indipendente dalla funzione considerata - ovvero non muti le sue caratteristiche algoritmiche passando da funzione a funzione - o, per meglio dire, possa essere intesa come *una sola* operazione applicabile a ogni funzione. Anche per questo occorre quindi un'ulteriore dimostrazione. Oltre a non corrispondere al "teorema" di Taylor, il teorema di Lagrange non fornisce quindi, in quanto tale, alcun metodo di costruzione dello sviluppo in serie intera di ogni funzione data e non può in nessun modo essere utilizzato, senza una ulteriore dimostrazione, per introdurre entro l'edificio dell'analisi algebrica l'algoritmo del *calcolo* e per passare quindi all'analisi superiore.

Per compiere tale passo e per giustificare quindi la dichiarazione iniziale di Lagrange occorre così percorrere un'ulteriore cammino, il quale sembra naturalmente potersi dirigere in due direzioni non solo differenti, ma fra loro radicalmente alternative. In primo luogo si può cercare di mostrare, che l'operazione (-)' conduce al rapporto differenziale della funzione data, inteso in quanto tale, ovvero che per ogni funzione $u = u(x)$ il coefficiente di ordine uno dello sviluppo in serie intera di $u(x+\xi)$ relativamente a ξ può essere identificato con il rapporto differenziale du/dx. In tal modo il teorema di Lagrange si trasforma automaticamente nel "teorema" di Taylor, ma esso non è per nulla indipendente dalle ipotesi infinitesimaliste proprie del calcolo differenziale e non può essere utilizzato per introdurre l'algoritmo di questo, che dopo avere introdotto, per altra via, la nozione stessa di differenziale (primo) e di rapporto differenziale e aver provato, a partire da essa, l'identità $u'(x) = du/dx$. In secondo luogo si può, al contrario, cercare, tramite lo studio degli sviluppi fondamentali dimostrati all'interno dell'analisi algebrica e delle proprietà formali di una qualsiasi serie intera, di stabilire la natura algoritmica dell'operazione (-)', constatando *a posteriori* che questa corrisponde all'algoritmo del *calcolo* diretto[48] e cercando poi, senza alcun riferimento a nozioni in se stesse estranee allo stesso concetto di serie intera (quali quella di limite o di differenziale), di giustificare l'applicabilità di tale algoritmo alla soluzione dei problemi matematici (analitici, geometrici e meccanici) tradizionalmente affrontati per mezzo del ricorso al calcolo differenziale (o a teorie equivalenti).

La differenza fra le due alternative è chiara e non si limita a mettere luogo a due diverse procedure matematiche; è lo stesso significato degli oggetti algoritmici considerati che si presenta nei due casi come radicalmente differente. Se nel secondo caso il *calcolo* risulta infatti reinterpretato come un algoritmo che conduce alla determinazione dei coefficienti successivi dello sviluppo in serie intera associato a ogni funzione data - i quali non posseggo-

---

[48]Si noti che da un tale punto di vista una simile constatazione è non solo del tutto inessenziale, ma inevitabilmente estranea all'edificio dell'analisi, richiamando una nozione che non fa parte di questo. Essa non ha quindi altra natura che quella di un giudizio storico. Tornerò sulla questione nel prossimo capitolo III.6..

no altro significato matematico che quello che viene loro dall'essere appunto dei coefficienti di una determinata serie, la quale realizza una trasformazione funzionale - esso resta nel primo l'algoritmo proprio alle differenze infinitamente piccole (o ai limiti delle differenze finite) e i coefficienti successivi della serie sviluppo sono identificati con i successivi rapporti differenziali, i quali non fanno che presentarsi, in quanto tali, nel contesto di un'applicazione particolare della teoria generale di cui costituiscono l'oggetto.[49]

Se è solo la seconda di tali alternative che sembra qualificare una nuova fondazione del *calcolo* e costituire quindi il nucleo programmatico di una reinterpretazione essenzialmente nuova dell'analisi superiore compatibile con i dettami del programma euleriano, perché Lagrange imbocchi questa strada occorrerà attendere fino al 1797. Nella memoria del 1772 egli si piega al contrario all'immediata facilità della prima alternativa.

Preso ξ come un incremento infinitamente piccolo dx, omettendo gli infinitesimali di ordine superiore e indicando con du la differenza infinitamente piccola $u(x+\xi) - u(x) = u(x+dx) - u(x)$, la (57) si ridurrà all'identità finita

$$(59)\quad du = u'(x)\, dx$$

da cui è ovvio trarre successivamente, ricordando che $u^{(k)} = [u^{(k-1)}]'$:

$$(60)\qquad u'(x) = \frac{du(x)}{dx}\ ;\ u''(x) = \frac{d}{dx}\left(\frac{du(x)}{dx}\right) = \frac{d^2u(x)}{dx^2}\ ;\ \&c.$$

Riscrivendo quindi ξ in luogo di dx la (57) assumerà la forma

$$(61)\qquad u(x+\xi) = u(x) + \frac{du(x)}{dx}\xi + \frac{d^2u(x)}{dx^2}\frac{\xi^2}{2!} + \frac{d^3u(x)}{dx^3}\frac{\xi^3}{3!} + \&c.$$

> où du, d^2u, d^3u, &c. désignent les différences première, seconde, troisième &c. de u prises en faisant varier x de la différence infiniment petite dx.[50]

E' solo a questo punto che, riconoscendo la (61) come il "teorema" di Taylor, Lagrange afferma di averne fornito una nuova dimostrazione.

---

[49] La situazione qui è del tutto simile a quella che si verifica qualora si mostra che il rapporto differenziale di una funzione esprime il coefficiente angolare della tangente alla curva corrispondente. Due concetti essenzialmente differenti fra loro sono associati a un medesimo algoritmo, che permette una trattazione matematica dell'uno nei termini dell'altro. Si noti che ciò non significa automaticamente che tali concetti posseggono la medesima trasposizione oggettiva. In quanto oggetto matematico, il coefficiente angolare di una tangente può essere infatti reso del tutto indipendente dall'algoritmo del calcolo differenziale, così come è d'altra parte il caso di tutta la matematica pre-newtoniana. Allo stesso modo il coefficiente di uno sviluppo in serie intera é un oggetto matematico che non presenta in quanto tale alcuna dipendenza dall'algoritmo differenziale (come mostra d'altra parte l'intero edificio dell'*Introductio*), così come questo non presenta alcuna dipendenza da quello.

[50] Cfr. *ivi*, p. 191.

On peut le démontrer de différentes manieres - egli scrive -: la précédante me paroît une des plus simples.[51]

Come si ricorderà dalla citazione posta all'inizio della presente sezione, Lagrange affermerà nella *Théorie* che la propria dimostrazione del 1772 del teorema di Taylor era parte di una teoria "dégagées de toute considération d'infiniment petits, ou de limites" e era quindi indipendente dal calcolo differenziale o dalla "considération des différences infiniment petites". Si pone quindi il problema di capire se una tale pretesa di Lagrange possa o meno considerarsi come fondata. Le considerazioni presentate all'inizio del presente paragrafo dovrebbero giustificare, se affiancate all'analisi del procedimento che conduce dalla (57) alla (61), una risposta chiaramente negativa. Tanto sembra infatti inaccettabile - e contrario alle stesse dichiarazioni lagrangiane del 1772 - identificare la (57) come una versione del teorema di Taylor, quanto sembra pretestuoso affermare che il passaggio dalla (57) alla (61) non faccia alcun ricorso a nozioni e presupposizioni infinitesimaliste.

Se la dichiarazione di Lagrange sembra essere quindi semplicemente falsa, un'ulteriore riflessione può condurci a comprendere le ragioni che potrebbero averla originata. La dimostrazione della (57) contiene infatti del tutto esplicitamente la considerazione di un'entità matematica che in un linguaggio di pochi anni posteriore potremmo qualificare come un *operatore*. Considerate infatti delle funzioni coefficienti connesse fra loro secondo un certo insieme di identità, nella parte finale della dimostrazione Lagrange sposta la sua attenzione sull' "operazione" che permette la costruzione di tali funzioni a partire dalla funzione data. La seconda delle due alternative indicate qui sopra corrisponde al mantenimento di tale entità al centro degli interessi della teoria o, detto in altri termini, alla edificazione di una teoria di tale operazione, la quale sia capace di fornirne una determinazione. In tal senso il teorema di Taylor può essere ritrovato a partire dalla (57) sotto la forma di una caratterizzazione algoritmica dell'operazione di *derivazione*. Guardando le cose da un tale punto di vista la (57), se non è ancora il "teorema" di Taylor, è un risultato intermedio tutt'altro che banale, il quale contiene buona parte della ricchezza di quest'ultimo, inteso in termini essenzialmente nuovi. Assunta, venticique anni più tardi, una tale prospettiva, Lagrange può allora guardare al proprio risultato del 1772 come a un passo decisivo verso una dimostrazione non differenziale del "teorema" di Taylor. Questa non è tuttavia la prospettiva della memoria del 1772. Data la (57) Lagrange torna infatti a spostare l'attenzione sulle funzioni coefficienti e cerca per esse una determinazione alternativa nel quadro del calcolo delle differenze infinitamente piccole. La (60) non esprime così delle identità fra *operazioni*, ma delle identità fra *funzioni* (tratte per mezzo di certe operazioni, a partire da una comune funzione assegnata). L'attenzione all'operazione di derivazione, intesa come oggetto indipendente dalle funzioni a cui essa si riferisce, rimane quindi in qualche modo locale. In un tale contesto la (57) sembra allora possedere un significato profondamente diverso, mostrandosi come

[51] Cfr. *ivi*.

una tappa di una dimostrazione essenzialmente tradizionale del "teorema" di Taylor, inteso classicamente in termini differenziali. In questo quadro la dichiarazione di Lagrange relativa alla natura del "calcolo differenziale" sembra così preconizzare un programma essenzialmente diverso da quello perseguito dalla *Théorie*, il quale si riduce all'idea di introdurre l'*algoritmo* che presiede la ricerca dei successivi *differenziali* a partire dalla determinazione della relazione che questi intrattengono con i coefficienti dello sviluppo in serie intera della funzione assegnata. Lungi dal fornire una reinterpretazione del *calcolo*, Lagrange non fa che proporre una differente esposizione dei più elementari principi algoritmici del calcolo *differenziale*: invece di utilizzare l'algoritmo differenziale per dimostrare il "teorema" di Taylor, egli si serve del principio di omissione per dimostrare tale "teorema" senza ricorrere a tale algoritmo, il quale può così essere introdotto in un secondo tempo, senza l'ausilio di ulteriori omissioni.[52]

Ciò detto l'argomento con cui Lagrange passa dalla (57) alla (61) merita comunque un'analisi più dettagliata. Inteso il "teorema" di Taylor come la determinazione della forma generica dello sviluppo in serie intera di una differenza *finita*, questi ne fornisce una prova il cui passo decisivo consiste di un'ingiustificato "ritorno al finito". La determinazione delle (60) richiede infatti necessariamente che l'incremento ξ sia inteso come infinitamente piccolo e Lagrange non fornisce alcun argomento esplicito che garantisca l'estendibilità di tali identità al caso in cui ξ torni invece a essere inteso come finito.[53] Se per salvare la dimostrazione - o, per meglio dire, renderla indipendente da presupposizioni nascoste, la cui esplicitazione darebbe luogo a evidenti circolarità - si assume che anche nella (61) l'incremento ξ debba essere inteso come infinitamente piccolo, allora quest'ultima identità si riduce all'altra identità:

$$(62) \qquad u(x+dx) = u(x) + \frac{du(x)}{dx}dx + \frac{d^2u(x)}{dx^2}dx^2 + \frac{d^3u(x)}{dx^3}dx^3 + \&c.$$

Per evitare che questa si trasformi nella banale uguaglianza $du = du$ occorre o negare che la differenza $u(x+dx) - u(x)$ sia uguale al differenziale du della funzione, o rigettare il principio di omissione, o infine negare la possibilità della semplificazione incrociata nel termine di ordine uno del secondo membro. La strada più ovvia sembra la seconda, la quale corrisponde d'altra parte a una pratica corrente fra i matematici leibniziani della prima metà del

[52]L'idea di Lagrange sembra così quella di utilizzare i risultati dell'*Introductio* relativi agli sviluppi in serie intera delle funzioni elementari per concentrare in una sola dimostrazione di carattere generale l'impiego del principio di omissione.

[53]Il carattere finito assegnato da Lagrange all'incremento ξ nel caso della (61) risulta del tutto evidente dal prosieguo della memoria. E' ovvio che, a una tale condizione, tanto la (57) che la (61) non esprimono delle identità numeriche che sotto certe condizioni che Lagrange non specifica. Il punto di vista che egli sembra adottare appare d'altra parte del tutto corrispondente a quello delineato nel precedente paragrafo II.2.κ..

secolo, che sembrano considerare il principio di omissione come una regola applicabile solo in contesti selezionati, la cui determinazione corrisponde all' "arte" del calcolo differenziale.[54] E' proprio di questa pratica matematica che la dimostrazione di Lagrange sembra figlia, ereditando da essa tanto le note ambiguità che la contraddistinguono che una natura essenzialmente extra-analitica. La dichiarazione che Lagrange pone all'inizio della sua memoria del 1772[55] sembra allora vanificata: le funzioni derivate non sono in ultima instanza che dei veri e propri rapporti differenziali.

III. 4. *b*. δ. *Le formule di Lagrange per le differenze e gli integrali finiti di ordine qualsiasi*

La seconda parte della memoria di Lagrange del 1772[56] è dedicata allo studio delle conseguenze che possono essere tratte dal "teorema" di Taylor, nella forma (61), assumendo *a priori* l' "analogia di Leibniz" fra potenze intere di un binomio e differenziali di un prodotto. Per quanto Lagrange non consideri che funzioni di un numero qualsiasi di variabili $u = u(x, y, ..., z)$[57] (adattando opportunamente la (61)) ne riformulerò qui gli argomenti in riferimento a una qualsiasi funzione $u = u(x)$ a una sola variabile.[58]

Osservando che dal noto sviluppo dell'esponenziale (che può peraltro venir dimostrato in quanto caso particolare dello sviluppo di Taylor) segue l'identità

$$(62) \qquad e^{\frac{du}{dx}\xi} - 1 = \frac{du}{dx}\xi + \left(\frac{du}{dx}\right)^2 \frac{\xi^2}{2!} + \left(\frac{du}{dx}\right)^3 \frac{\xi^3}{3!} + \&c.$$

Lagrange scrive la (61) sotto la forma dell'identità:[59]

[54]Cfr. le considerazioni qui svolte con quelle contenute nel precedente paragrafo III.2.*d*.α..

[55]Cfr. la citazione di cui alla precedente nota (43).

[56]Cfr. *ivi*, (parr. 8-16).

[57]In realtà Lagrange pone $u = u(x, y, t, z, \&c.)$. E' tuttavia chiaro che egli intenda trattare di funzioni a un numero qualunque, ma comunque finito, di variabili.

[58]Relativamente ai risultati in questione il passaggio a un numero superiore di variabili non sembra infatti porre alcun interessante problema matematico.

[59]Essendo

$$e^{\frac{du}{dx}\xi + \frac{du}{dy}\psi + \frac{du}{dz}\zeta + \&c.} = \left(\frac{du}{dx}\xi + \left(\frac{du}{dx}\right)^2 \frac{\xi^2}{2!} + \left(\frac{du}{dx}\right)^3 \frac{\xi^3}{3!} + \&c.\right) \times$$
$$\left(\frac{du}{dy}\psi + \left(\frac{du}{dy}\right)^2 \frac{\psi^2}{2!} + \left(\frac{du}{dy}\right)^3 \frac{\psi^3}{3!} + \&c.\right) \times$$
$$\left(\frac{du}{dz}\zeta + \left(\frac{du}{dz}\right)^2 \frac{\zeta^2}{2!} + \left(\frac{du}{dz}\right)^3 \frac{\zeta^3}{3!} + \&c.\right) \times \&c.$$

si avrà, nel caso di funzioni a più variabili:

$$(63) \qquad {}_{\xi}\Delta u = \left(e^{\frac{du}{dx}\xi} - 1\right)_{*}$$

in cui ${}_{\xi}\Delta u$ indica la differenza (finita) $u(x+\xi) - u(x)$, mentre l'asterisco posto a destra della seconda parentesi indica che il termine fra parentesi deve essere sviluppato in serie intera secondo le potenze di $\frac{du}{dx}\xi$ sostituendo nello sviluppo ottenuto le potenze du^k con i differenziali $d^k u$ (k = 1, 2, ...).[60] Per quanto la (63) assuma quindi l'aspetto di un'identità fra due forme finite,[61] essa non è a ben guardare che l'espressione abbreviata di un'identità (formale) infinitaria o meglio l'indicazione compatta di una regola costruttiva che conduce alla determinazione dello sviluppo associabile al termine che ne costituisce il primo membro. D'altra parte, benché la sostituzione di du^k con $d^k u$ faccia immediatamente pensare all' "analogia di Leibniz", il passaggio dalla (61) alla (63) non richiede alcun ricorso a argomenti informali in qualche modo connessi a tale analogia. Al contrario la (63) sembra potersi intendere, in quanto tale, come un'ulteriore manifestazione di questa. E' proprio facendo fede a una tale analogia che Lagrange passa invece, senza alcuna ulteriore giustificazione, dalla (63) alla nuova identità:

$$(64) \qquad {}_{\xi}\Delta^{\lambda} u = \left[\left(e^{\frac{du}{dx}\xi} - 1\right)^{\lambda}\right]_{*}$$

$${}_{\xi,\psi,\zeta,\&c}\Delta u = \left(e^{\frac{du}{dx}\xi + \frac{du}{dy}\psi + \frac{du}{dz}\zeta + \&c.} - 1\right)_{*}$$

(in cui $u = u(x, y, z, \&c.)$ e ${}_{\xi,\psi,\zeta,\&c.}\Delta u$ è la differenza finita di u relativamente agli incrementi rispettivi ξ, ψ, ζ, &c. delle variabili x, y, z, &c.). Non sarà allora difficile rendersi conto della forma che assumeranno le formule successive, qualora u sia assunta come una funzione a due o più variabili. Se il procedimento simbolico adottato da Lagrange rende senza dubbio assai agile il trattamento delle funzioni a due o più variabili, non è certamente questo il motivo essenziale dell'interesse di tale procedimento. La scelta di Lagrange di presentare le proprie formule direttamente per funzioni a più variabili sembra ridursi così a un mero artificio retorico, matematicamente irrilevante.

[60] Il ricorso a una notazione particolare non è ovviamente di Lagrange che si limita a scrivere la (63) come una normale identità fra forme finite, specificando che il suo secondo membro deve essere trasformato secondo la regole indicata. Esso non deve quindi venir inteso che come un artificio atto a favorire la comodità dell'esposizione.

[61] Si osservi che, benché il ricorso alla nozione di differenza finita possa far pensare a un riferimento a quantità, piuttosto che a forme, il ruolo del simbolo ${}_{\xi}\Delta u$ non è qui che quello di abbreviare la forma funzionale $u(x+\xi) - u(x)$ tratta componendo per sottrazione la trasformata $u(x+\xi)$ della funzione $u(x)$ con questa stessa funzione. E' solo la specificazione delle condizioni di convergenza che permette, in casi opportuni, di intendere la (63) come un'identità riferita a quantità. In termini generali tale formula non indica che la possibilità di un passaggio costruttivo dalla forma che ne costituisce il primo termine a quella che ne costituisce il secondo.

in cui λ è un esponente intero positivo. Prendendo invece un qualsiasi esponente intero negativo e uguale a $-\lambda$ si avrà:

$$(65)\qquad {}_{\xi}\Sigma^{\lambda} u = \left[\frac{1}{\left(e^{\frac{du}{dx}\xi} - 1 \right)^{\lambda}} \right]_{*}$$

in cui λ è ancora un'esponente intero positivo e ${}_{\xi}\Sigma u$ è l'integrale finito della funzione $u = u(x)$ calcolato relativamente alla differenza ξ. Scritte tali identità Lagrange commenta:

> Quoique l'opération par laquelle nous avons passé de la différence Δu, à la difference $\Delta^{\lambda} u$, et à la somme $\Sigma^{\lambda} u$, ne soit pas fondée sur des principes claires et rigoureux, elle n'en est cependant moins exacte, comme on peut s'en assurer *a posteriori*; mais il seroit peut-être très difficile d'en donner une démonstration directe et analytique [...].[62]

Lagrange ha quindi tratto dalla constatazione dell' "analogia di Leibniz"[63] una regola algoritmica che permette la conversione di certe identità differenziali di ordine uno in altre identità differenziali di ordine λ ($\lambda \in \{\mathbf{Z} - 0\}$). Per comprendere la natura del passaggio da (63) a (64) e (65) è forse opportuno presentare l'analogia in questione come lo stesso Leibniz la pre-

[62]Cfr. *ivi*, p. 195.

[63]Il riferimento all' "analogia di Leibniz" come "fondamento informale" dell' "operazione" che conduce da (63) a (64) e (65) è esplicito in altre parti della memoria di Lagrange. Ecco a esempio come egli si esprime in apertura di questa [cfr. *ivi*, p. 185-6]:

> Leibnitz a donné, dans le premier volume des *Miscellanea Berolinensia* un Mémoire intitulé *Symbolismus memorabilis calculi algebraici, et infinitesimalis in comparatione potentiarum et differentiarum*, *&c* [cfr. Leibniz (1710)] dans lequel il fait voir l'analogie qui regne entre les différentielles de tous les ordres, du produit de deux, ou de plusieurs variables, et les puissances des mêmes ordres du binome, ou du polynome composé de la somme de ces mêmes variables. Ce grand géometre a aussi remarqué ailleurs que la même analogie subsistoit entre les puissances négatives et les intégrales (*voyez* le *Commercium epistolicum* [cfr. Collins (1712)], Epist. XVII); mais ni lui ni aucun autre que je sache n'a poussé plus loin ces sortes de recherches, si on en excepte seulement Mr. Jean Bernoulli, qui dans la Lettre XIV du *Commercium cité* a montré comment on pouvoit dans certains cas trouver l'intégrale d'une différentielle donnée en cherchant la troisieme proportionelle à la différence de la quantité donnée et à cette même quantité, et changeant ensuite les puissances positives en différences, et les négatives en sommes ou intégrales [cfr. il precedente paragrafo [III.2.*d*. γ.]. Quoique le principe de cette analogie entre les puissances positives et les différentielles, et les puissances négatives et les intégrales, ne soit pas évident par lui-même, cependant comme les conclusions qu'on en tire n'en sont pas moins exactes, ainsi qu'on peut s'en convaincre *à posteriori*, je vais en faire usage dans ce mémoire pour découvrir différens théorèmes généraux concernant les différentiations et les intégrations des fonctions de plusieurs variables; théorème dont la plupart sont nouveaux, et auxquels il seroit d'ailleurs très difficile de parvenir par d'autres voies.

sentò nella sua memoria del 1710.[64] Indicando la potenza k-esima ($\nu \in \mathbf{Z}$) di un termine α per mezzo della notazione (di natura espressamente operazionale) $p^k(\alpha)$ si ha, secondo le regole note:

$$(66)\qquad \begin{aligned} &\text{i)}\ p^{\nu}(x+y) = 1p^{\nu}(x)\cdot p^{0}(y) + \nu p^{\nu-1}(x)\cdot p^{1}(y) + \frac{\nu(\nu-1)}{2!}\,p^{\nu-2}(x)\cdot p^{2}(y) + \&c. \\ &\text{ii)}\ d^{\nu}(xy) \ = 1d^{\nu}(x)\cdot d^{0}(y) + \nu d^{\nu-1}(x)\cdot d^{1}(y) + \frac{\nu(\nu-1)}{2!}\,d^{\nu-2}(x)\cdot d^{2}(y) + \&c. \end{aligned}$$

L'osservazione di tale analogia - che, ignaro della nota di Leibniz e delle lettere fra questi e Johann I Bernoulli,[65] Lagrange aveva riscoperto fin dagli anni della sua prima giovinezza, dedicando a essa il suo primo lavoro matematico[66] - permette di concludere che, sostituendo fra loro le "*characteristicæ*" p e d è possibile passare da uno dei due sviluppi all'altro, in modo che il differenziale ν-esimo di xy può essere trovato calcolando la potenza ν-esima di $x+y$ e sostituendo in essa la "*characteristica*" p con la "*characteristica*" d. E' tuttavia chiaro che non è questa la regola costruttiva applicata da Lagrange per passare da (63) a (65) e (66). Per comprendere l'affermazione di questi - che sembra intendere la propria deduzione come un'inferenza (informalmente) *suggerita* dalla constatazione dell' "analogia di Leibniz" - è quindi necessario comprendere i rapporti fra le due regole, ovvero fra quella che la constatazione della (66) *dimostra* e quella che invece *suggerisce*. In primo luogo è facile osservare che la sostituzione proposta da Lagrange di du^k con $d^k u$ corrisponde nella notazione leibniziana alla sostituzione di $p^k(du)$ con $d^{k-1}(du)$ o, per meglio dire, di $p^k\left(\dfrac{du}{dx}\right)$ con $\dfrac{d^{k-1}}{dx^{k-1}}\left(\dfrac{du}{dx}\right)$. Ciò che questi asserisce, passando da (63) a (64) e (65), è allora che *se* tale sostituzione permette di passare dallo sviluppo di $e^{\frac{du}{dx}\xi} - 1$ a quello di $\xi\Delta u$, *allora* essa permette di passare dallo sviluppo di $\left(e^{\frac{du}{dx}\xi} - 1\right)^{\lambda}$ a quello di $\xi\Delta^{\lambda}u$. Avendo *dimostrato* l'antecedente di tale implicazione, egli conclude quindi a favore del conseguente. L'assunzione che non risulta "fondata su principi chiari e rigorosi" è quindi l'assunzione dell'implicazione e non quella del suo antecedente o del suo conseguente e nemmeno quella della regola di sostituzione. Il passaggio dalla (66) a tale implicazione è infatti difficilmente caratterizzabili in termini chiari, fondandosi essenzialmente su una sorta di "sentimento di comunanza" o, se si preferisce, su un'intuizione non altrimenti

[64] Cfr. Leibniz (1710).

[65] Cfr. il precedente paragrafo III.2.d.γ..

[66] Cfr. Lagrange (1754).

esplicabile. Il percorso euristico di Lagrange sembra allora vertere essenzialmente sulla verifica a posteriori della correttezza della (64) e della (65), ovvero sulla loro corrispondenza con formule *già note* per lo sviluppo delle differenze e degli integrali finiti. L' "esattezza" del risultato è utilizzata come garanzia per la correttezza della prova. Si tratta allora di fornire un metodo generale per sviluppare i secondi membri della (64) e della (65), il quale permetta di realizzare la verifica richiesta. Il metodo proposto da Lagrange può venir riformulato nei termini seguenti.

Essendo per ω "très petit" $e^{\omega} - 1 = \omega$, ovvero $(e^{\omega} - 1)^{\lambda} = \omega^{\lambda}$, segue che il primo termine della serie intera che sviluppa la potenza $(e^{\omega} - 1)^{\lambda}$ è, per ogni ω, uguale a ω^{λ}. Se A, B, C, &c. sono dei coefficienti indeterminati si potrà quindi porre l'identità generica[67]

$$(67) \qquad (e^{\omega} - 1)^{\lambda} = \omega^{\lambda} (1 + A\omega + B\omega^2 + \&c.)$$

ovvero:

$$(68) \qquad \lambda \log (e^{\omega} - 1) - \lambda \log \omega = \log (1 + A\omega + B\omega^2 + \&c.)$$

Differenziando relativamente a ω sarà allora facile trarre

$$(69) \qquad \lambda \left(\frac{e^{\omega}}{e^{\omega} - 1} - \frac{1}{\omega} \right) = \frac{A + 2B\omega + \&c.}{1 + A\omega + B\omega^2 + \&c.}$$

da cui, essendo (secondo lo sviluppo dell'esponenziale)

$$(70) \qquad \frac{e^{\omega}}{e^{\omega} - 1} = \frac{1}{1 - e^{-\omega}} = \frac{1}{\omega - \frac{\omega^2}{2!} + \frac{\omega^3}{3!} - \&c.}$$

segue, sostituendo e moltiplicando in croce:

[67] Lagrange utilizza qui un'ipotesi analoga a quella utilizzata da Euler nell'*Introductio* per trovare lo sviluppo in serie intera dell'esponenziale [cfr. il precedente paragrafo III.3.*c*.γ.]. Qui l'infinitesimalità di ω è tuttavia inessenziale; Lagrange non ha infatti alcun bisogno di postulare l'identità euleriana $e^{\omega} = 1 + k\omega$ con k indipendente da ω (e ω infinitamente piccolo), essendo per lui sufficiente assumere l'asintoticità di $e^z - 1$ e z (per $z \to 0$). In luogo di intendere ω come il valore della differenza infinitamente piccola $e^{\omega} - 1$, egli lo intende infatti come il primo termine dello sviluppo di tale differenza, utilizzando solo localmente l'ipotesi di una sua infinita piccolezza.

$$\lambda\left(\frac{1}{2!}-\frac{\omega}{3!}+\frac{\omega^2}{4!}-\&c.\right)\left(1+A\omega+B\omega^2+\&c.\right)=$$
(71)
$$=\left(1-\frac{\omega}{2!}+\frac{\omega^2}{3!}-\&c.\right)\left(A+2B\omega+3C\omega^2+\&c.\right)$$

da cui, per il metodo dei coefficienti indeterminati, è ovvio trarre successivamente, annullando i coefficienti delle potenze di ω:

$$A=\frac{\lambda}{2!}$$

(72)
$$2B=\frac{A}{2!}(\lambda+1)-\frac{\lambda}{3!}\ ;\ B=\frac{\lambda}{24}+\frac{\lambda^2}{8}$$

$$3C=\frac{B}{2!}(\lambda+2)-\frac{A}{3!}(\lambda+1)+\frac{\lambda}{4!}\ ;\ C=\frac{\lambda^2}{48}+\frac{\lambda^3}{48}$$

&c.

La (64) si trasforma allora nell'identità infinitaria

(73)
$$_{\xi}\Delta^{\lambda}u=\frac{d^{\lambda}u}{dx^{\lambda}}\xi^{\lambda}+\frac{\lambda}{2}\frac{d^{\lambda+1}u}{dx^{\lambda+1}}\xi^{\lambda+1}+\left(\frac{\lambda}{24}+\frac{\lambda^2}{8}\right)\frac{d^{\lambda+2}u}{dx^{\lambda+2}}\xi^{\lambda+2}$$
$$+\left(\frac{\lambda^2}{48}+\frac{\lambda^3}{48}\right)\frac{d^{\lambda+3}u}{dx^{\lambda+3}}\xi^{\lambda+3}+\&c.$$

che corrisponde agli sviluppi delle differenze di ordine successivo di una funzione qualsiasi già dimostrati da Euler nelle *Institutiones*.[68] E' proprio alle *Institutiones* (oltre che al *Traité* di Maclaurin) che Lagrange rinvia, d'altra parte, per ulteriori dettagli riferiti a tali risultati.

III. 4. *b*. ε. *Alcune considerazioni sulla portata innovativa dei risultati di Lagrange*

Ma se le formule di Lagrange non contengono che risultati già noti e anzi non sono in quanto tali legittimate che *a posteriori*, grazie alla dimostrazione della loro equivalenza con questi risultati, quale interesse possono esse

[68]Cfr. Euler (1755), pp. 338 e segg.. Un procedimento analogo conduce alla determinazione, a partire dalla (65), dello sviluppo dell'integrale finito di ordine λ, che Lagrange trae tuttavia sostituendo in (73) $-\lambda$ a λ.

rivestire dal punto di vista dei matematici dell'epoca, e in quale senso possono essere intese come un contributo alla crescita della conoscenza matematica?

Il confronto fra il procedimento di Lagrange e la dimostrazione euleriana della (73) fornirà il punto di partenza di alcune considerazioni che mi porteranno, nel corso del presente paragrafo, a fornire una risposta a una tale questione. Dimostrato il "teorema" di Taylor, secondo il procedimento già utilizzato nella memoria del 1736,[69] Euler scrive le sue ovvie conseguenze

(74)
$$\text{i) } u(x+2\xi) = u(x) + \frac{du}{dx}2\xi + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{4\xi^2}{2!} + \&c.$$
$$\text{ii) } u(x+3\xi) = u(x) + \frac{du}{dx}3\xi + \frac{d^2u}{dx^2}\frac{9\xi^3}{2!} + \&c.$$
&c.

da cui sostituendo è ovvio trarre successivamente:

(75)
$$\text{i) } {}_\xi\Delta^2 u = u(x+2\xi) - 2(x+\xi) + u(x) =$$
$$= \frac{(2^2-2)}{2!}\frac{d^2u}{dx^2}\xi^2 + \frac{(2^3-2)}{3!}\frac{d^3u}{dx^3}\xi^3 + \frac{(2^4-2)}{4!}\frac{d^4u}{dx^4}\xi^4 + \&c.$$
$$\text{ii) } {}_\xi\Delta^3 u = u(x+3\xi) - 3u(x+2\xi) + 3u(x+\xi) - u(x) =$$
$$= \frac{(3^3-3.2^3+3)}{3!}\frac{d^3u}{dx^3}\xi^3 + \frac{(3^4-3.2^4+3)}{4!}\frac{d^4u}{dx^4}\xi^4 + \&c.$$
&c.

Se non è difficile rendersi conto della corrispondenza (relativamente ai primi termini) fra le prime identità di una tale successione e i corrispondenti casi particolari della (73), è anche evidente che una generalizzazione non semplicemente induttiva dei risultati di Euler - la quale permetta di scrivere lo sviluppo di una differenza finita di un qualsiasi ordine λ - dipende dal calcolo delle somme

(76) $$\lambda^v - \lambda(\lambda-1)^v + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2!}(\lambda-2)^v - ... + (-)\lambda \qquad [v = \lambda, \lambda+1, \lambda+2, ...]$$

---

[69] Cfr. il precedente paragrafo.III. 2. *b*. β..

che esprimono i coefficienti numerici successivi di tale sviluppo. Se il risultato di Lagrange non contiene quindi che degli sviluppi già noti, esso li contiene in una forma non solo più elegante e compatta, ma tale da permettere un'espressione più conveniente dei coefficienti successivi dello sviluppo di ordine generico. E' lo stesso Lagrange, d'altra parte, che sottolinea questo punto:

> [...] personne que je sache - egli scrive - n'avoit encore donné l'expression générale de ces nombres [i coefficienti successivi dello sviluppo] pour les différences et les sommes d'un ordre quelconque.[70]

Se fosse tuttavia solo questa la novità contenuta nella memoria di Lagrange, essa non solo si ridurrebbe in ultima istanza a un contributo marginale,[71] ma sarebbe tale che la stessa "esattezza" delle conclusioni su cui essa verte non sarebbe che determinabile (oltre che *a posteriori* anche) induttivamente, riferendosi semplicemente ai primi coefficienti degli sviluppi dei primi ordini. Perché la verifica sia infatti non induttiva occorre generalizzare gli sviluppi di Euler indipendentemente dai procedimenti di Lagrange e confrontare i risultati ottenuti. Così se novità vi è, relativamente all'espressione dei coefficienti numerici, essa risiede al più nella proposta di una generalizzazione congetturale dei risultati euleriani, la quale deve, in quanto tale, essere indipendentemente dimostrata secondo i vecchi procedimenti. L' "analogia di Leibniz" fornisce allora un suggerimento euristico che conduce a congetture che sarebbero altrimenti difficilmente individuabili, senza fornire tuttavia - almeno relativamente alla memoria di Lagrange[72] - alcuna indicazione per una dimostrazione indipendente.

La parte successiva della memoria di Lagrange sembra tuttavia giustificare una differente risposta alla domanda che ho formulato all'inizio del presente paragrafo. Presentata infatti la (73), questi ritorna alla (63) per trarre da essa, per mezzo di un procedimento analogo al precedente, una serie di interessanti conseguenze, le quali contengono in forma compatta ulteriori sviluppi non immediatamente riconducibili a quelli euleriani. Passando ai logaritmi, egli trae, in primo luogo, l'identità di ordine uno:

$$(77) \qquad \frac{du}{dx}\xi = \left[\log\left(1 + {}_{\xi}\Delta u\right)\right]_{*}$$

in cui l'asterisco indica ora che il termine fra parentesi deve essere sviluppato in serie intera secondo le potenze di ${}_{\xi}\Delta u$ sostituendo nello sviluppo otte-

---

[70]Cfr. Lagrange (1772), p.198.

[71]Non è difficile rendersi conto che lo stesso procedimento di Euler permette infatti, a dispetto della dichiarazione di Lagrange, di esprimere i coefficienti in forma compatta e generale, richiedendo semplicemente una derivazione più lunga e noiosa (oltre che senza dubbio meno elegante).

[72]Nella prossima sezione III.4.*c*. vedremo che le cose saranno ben diverse per Laplace, il quale troverà una giustificazione formale *a priori* dei risultati di Lagrange del tutto indipendente dai procedimenti euleriani.

nuto le potenze ${}_\xi\Delta u^k$ con le differenze di ordine superiore ${}_\xi\Delta^k u$ (k = 1, 2, ...).[73] Da qui, per un passaggio del tutto simile a quello che conduce dalla (63) alla (64), Lagrange deriva allora la nuova identità di ordine generico:

$$(78)\qquad \frac{d^\lambda u}{dx^\lambda}\xi^\lambda = \left[\left(\log\left[1 + {}_\xi\Delta u\right]\right)^\lambda\right]_*$$

(in cui λ è un esponente intero positivo), che egli esplicita per mezzo di un procedimento analogo a quello che porta da (64) a (73).[74] Considerato d'altra parte un incremento η diverso da ξ, dalla (77) é ovvio trarre

$$(79)\qquad \frac{du}{dx}\eta = \frac{\eta}{\xi}\left[\log\left(1 + {}_\xi\Delta u\right)\right]_* = \left[\log\left(1 + {}_\xi\Delta u\right)^{\eta/\xi}\right]_*$$

e quindi, ricordandosi della (63) e ritornando agli esponenziali:

$$(80)\qquad \left(e^{\frac{du}{dx}\eta}\right)_* = {}_\eta\Delta u + 1 = \left[\left(1 + {}_\xi\Delta u\right)^{\eta/\xi}\right]_*$$

Da qui, applicando ancora un'inferenza congetturale, Lagrange può allora trarre:

$$(81)\qquad {}_\eta\Delta^\lambda u = \left[\left(\left[1 + {}_\xi\Delta u\right]^{\eta/\xi} - 1\right)^\lambda\right]_*$$

e

---

[73] Si osservi che, benché la (63) sia in quanto tale dimostrata del tutto indipendentemente dal ricorso a argomenti informali suggeriti dall'analogia di Leibniz, il passaggio da essa alla (77), pur non richiedendo il passaggio a differenze o differenziali di ordine superiore, non può essere ridotto a un banale passaggio ai logaritmi, riguardando piuttosto l'algebra della regola di sostituzione indicata dall'asterisco, la quale si riferisce ora a differenze finite piuttosto che a differenziali. Se anche in tal caso l'implicazione utilizzata da Lagrange è del tutto congetturale, il risultato a cui essa conduce è ancora una volta verificabile (almeno in termini induttivi) per mezzo del ricorso alle formule di Euler. Sviluppato il secondo membro e applicata la sostituzione richiesta si avrà infatti

$$\frac{du}{dx}\xi = {}_\xi\Delta u - \frac{1}{2}{}_\xi\Delta^2 u + \frac{1}{3}{}_\xi\Delta^3 u - \&c.$$

il cui secondo membro è tale che, sostituendo in esso gli sviluppi (75), i termini di ordine superiore a uno si annullano vicendevolmente uno dopo l'altro.

[74] Lagrange passa ora agli integrali (considerando esponenti negativi) solo a partire dall'espressione esplicita dello sviluppo, non fornendo alcuna formula analoga alla (65).

$$(82)\qquad {}_{\xi}\Sigma^{\lambda} u = \frac{1}{\left[\left(\left[1 + {}_{\xi}\Delta u\right]^{\eta/\xi} - 1\right)^{\lambda}\right]_{*}}$$

(in cui λ è sempre un esponente intero e positivo).

La considerazione di tali risultati può far pensare a un ulteriore vantaggio del metodo di Lagrange, il quale sembrerebbe permettere la derivazione (sia pure congetturalmente) di un considerevole insieme di formule, molte delle quali contengono degli sviluppi non ancora noti, che possono venire esplicitati per mezzo di un procedimento *standard*. Consideriamo tuttavia, per prendere un solo esempio, la (78). Applicando il metodo di sviluppo proposto da Lagrange, essa si trasforma nell'identità infinitaria

$$(83)\qquad \frac{d^{\lambda}u}{dx^{\lambda}}\xi^{\lambda} = {}_{\xi}\Delta^{\lambda} u - \frac{\lambda}{2}\,{}_{\xi}\Delta^{\lambda+1} u + \left(\frac{5\lambda}{24} + \frac{\lambda^{2}}{8}\right){}_{\xi}\Delta^{\lambda+2} u - \&c.$$

la quale è a sua volta costruibile termine a termine e senza soverchia difficoltà a partire dalla (73). Da tale formula sarà infatti facile trarre successivamente

$$(84)\qquad \begin{aligned} &\text{i)}\ \frac{d^{\lambda}u}{dx^{\lambda}}\xi^{\lambda} = {}_{\xi}\Delta^{\lambda} u - \frac{\lambda}{2}\frac{d^{\lambda+1}u}{dx^{\lambda+1}}\xi^{\lambda+1} - \left(\frac{\lambda^{2}}{8} + \frac{\lambda}{24}\right)\frac{d^{\lambda+2}u}{dx^{\lambda+2}}\xi^{\lambda+2} + \&c. \\ &\text{ii)}\ \frac{d^{\lambda+1}}{dx^{\lambda+1}}\xi^{\lambda+1} = {}_{\xi}\Delta^{\lambda+1} u - \frac{\lambda+1}{2}\frac{d^{\lambda+2}u}{dx^{\lambda+2}}\xi^{\lambda+2} - \left(\frac{(\lambda+1)^{2}}{8} + \frac{\lambda+1}{24}\right)\frac{d^{\lambda+3}u}{dx^{\lambda+3}}\xi^{\lambda+3} + \&c. \\ &\&c. \end{aligned}$$

da cui, sostituendo reiterativamente in (i) i successivi rapporti differenziali con gli sviluppi corrispondenti, segue immediatamente la (83). Non sarà d'altra parte difficile immaginare procedimenti analoghi che portino dai risultati di Euler (riscritti in termini generali) agli sviluppi contenuti nelle restanti formule di Lagrange. Se tali sviluppi sono quindi, in quanto tali, nuovi, essi appaiono come delle conseguenze banali di risultati già noti. L'obiettivo di fornirne una derivazione più semplice e agile non può quindi giustificare il ricorso a argomenti informali quali quelli utilizzati da Lagrange, che non può quindi che far risiedere altrove l'interesse essenziale della sua memoria e non può certo identificare con essi quei "teoremi, in maggior parte nuovi, ai quali sarebbe difficile pervenire per altra via" cui egli si riferisce all'inizio del suo lavoro.[75]

[75]Cfr. la precedente nota (63). Se è d'altra parte certamente vero che il vantaggio di agilità dei procedimenti lagrangiani rispetto a quelli euleriani diviene ancora più

La domanda posta all'inizio del presente paragrafo deve così trovare una risposta diversa, la quale non faccia riferimento agli sviluppi contenuti nelle formule compatte di Lagrange, ma a queste stesse formule, alla forma che esse assumono e al procedimento algoritmico tramite il quale esse sono tratte. Ciò che Lagrange sembra scorgere è la possibilità di operare in termini strettamente simbolici per mezzo di un simbolismo operazionale, i cui principi algoritmici sono tuttavia non solo espressamente congetturali (e giustificati solo, caso per caso, dalla correttezza delle conclusioni), ma anche assai difficilmente generalizzabili in termini espliciti. E' proprio in questo operare "non rigoroso"[76] che egli sembra individuare i germi di un "nuovo calcolo" intuitivamente connesso all' "analogia di Leibniz", ma ancora lontano dall'essere precisamente costituito. Lungi dall'indicare una scarsa attenzione all'esigenza di perspicuità formale delle dimostrazioni matematiche, la decisione di Lagrange di pubblicare una memoria nella quale nessun risultato essenzialmente nuovo è presentato - mentre alcuni risultati già noti insieme a loro banali conseguenze sono ridimostrati per mezzo di un ricorso a argomenti largamente intuitivi (i quali sembrano essere confermati dai risultati a cui conducono, piuttosto che fornirne una prova) - indica così la preconizzazione di un possibile sviluppo matematico, la consapevolezza di essere sulle tracce non solo di una nuova teoria, ma di un nuovo modo di far matematica, che lasci alle spalle la pesantezza delle sostituzioni e delle reiterazioni euleriane, per sostituire a esse un formalismo, che in luogo di vertere sulle quantità analiticamente rappresentate, passando da identità a identità, sfrutti l'agilità di un opportuno insieme di regole puramente simboliche. La memoria di Lagrange si presenta così come un ponte lanciato verso il domani, come l'invito a comprendere le ragioni intrinseche di un insieme di relazioni formali, che in essa non sono, in ultima instanza, che constatate, e a trarre dagli esiti di una tale ricerca i principi sui quali erigere quel nuovo calcolo simbolico che essa si limita a immaginare.

Sarà il giovane Laplace a raccogliere per primo un tale messaggio, avviando quelle ricerche che lo porteranno, nel giro di qualche anno, alla formulazione della propria teoria delle funzioni generatrici. E' proprio all'esame dei lavori che egli dedicherà a tale questione fra il 1773 e il 1779 che rivolgerò la mia attenzione nelle prossime due sezioni del presente capitolo. Qui è invece opportuno tornare alla memoria di Lagrange e prenderne in considerazione la terza e ultima parte.[77]

---

evidente considerando il caso di funzioni a più variabili, non sembra esserci alcun ostacolo matematico a generalizzare i risultati tratti con il secondo procedimento a funzioni di tal tipo. La novità dei risultati di Lagrange sembra quindi difficilmente ascrivibile alla loro facile generalizzazione a funzioni a due o più variabili [cfr. la precedente nota (59)].

[76]Si ricordi che il termine è di Lagrange [cfr. la citazione di cui alla precedente nota (62)].

[77]Cfr. *ivi*, parr. 17-22.

III. 4. b. ζ. Differenziali di ordine superiore e coefficienti degli sviluppi in serie intera

Fornite le proprie espressioni compatte per le differenze e i differenziali di ogni ordine, così come per i corrispondenti integrali,[78] Lagrange ritorna nella parte finale della sua memoria a un approccio "classico", fornendo

> une méthode facile et générale de trouver immédiatement les différences d'un ordre quelconque d'une fonction quelconque de plusieurs variables, sans passer par les différences des ordres inférieurs.[79]

Consideriamo direttamente il caso di una funzione a più[80] variabili $u = u(x, y, \&c.)$ in cui $x, y, \&c.$ siano a loro volta intese come delle funzioni di una variabile comune considerata come indipendente. Scelto un valore iniziale $u_0 = u(x_0, y_0, \&c.)$ siano $u_1 = u(x_1, y_1, \&c.)$, $u_2 = u(x_2, y_2, \&c.)$, &c. i successivi valori di tale funzione dovuti a successivi incrementi finiti delle variabili, in modo che si abbia $u_1 = u(x_1, y_1, \&c.) = u_0 + \Delta u_0 = u(x_0 + \Delta x_0, y_0 + \Delta y_0, \&c.)$, $u_2 = u(x_2, y_2, \&c.) = u_0 + 2\Delta u_0 + \Delta^2 u_0 = u(x_0 + 2\Delta x_0 + \Delta^2 x_0, y_0 + 2\Delta y_0, \Delta^2 y_0, \&c.)$, &c.. Scelto un qualsiasi esponente intero positivo ν si avrà allora (scrivendo per semplicità x, y, &c. in luogo di x_0, y_0, &c.)

$$(85)\qquad u_\nu = u(x, y) + \nu\Delta u(x, y) + \frac{\nu(\nu-1)}{2!}\Delta^2 u(x, y) + \&c. =$$
$$= u\left[x + \nu\Delta x + \frac{\nu(\nu-1)}{2!}\Delta^2 x + \&c.\,, y + \nu\Delta y + \frac{\nu(\nu-1)}{2!}\Delta^2 y + \&c, \&c.\right]$$

e quindi, se "les différences deviennent infiniment petites et qu'en même temps le nombre ν devienne infiniment grand":[81]

$$(86)\qquad u(x, y) + \nu du(x, y) + \frac{\nu^2}{2!}d^2 u(x, y) + \&c. =$$
$$= u\left[x + \nu dx + \frac{\nu^2}{2!}d^2 x + \&c.\,, y + \nu dy + \frac{\nu^2}{2!}d^2 y + \&c, \&c.\right]$$

---

[78]Fra i meriti della memoria di Lagrange si può forse citare (marginalmente) l'elegante unificazione di un insieme di risultati, i quali sembrano dare corpo a una teoria degli sviluppi delle differenze finite e dei corrispondenti integrali in termini di differenziali e integrali corrispondenti e viceversa dei differenziali e dei corrispondenti integrali in termini di differenze finite e di integrali corrispondenti.

[79]Cfr. *ivi*, pp. 209-10.

[80]La presentazione dei risultati di Lagrange nei termini di funzioni a più variabili permetterà di applicare direttamente tali risultati alla dimostrazione del teorema di Bernoulli, che questi presenta nell'ultimo paragrafo della sua memoria. Il riferimento a tali funzioni sembra tuttavia anche qui, come in precedenza, matematicamente inessenziale.

[81]Cfr. *ivi*, p. 211.

Se un simile risultato non poteva certo essere inteso da Lagrange come una rilevante scoperta matematica (essendo nella sostanza largamente noto fin dai primi anni del secolo e riducendosi a una ovvia generalizzazione del "teorema" di Taylor a funzioni a più variabili a variazione non uniforme), ciò che è interessante è la lettura che questi ne fornisce.

> Ainsi - egli scrive - si on développe la fonction $u(\ldots)$[82] suivant les puissances de v, en sorte qu'il en résulte une séries de cette forme $P + vQ + v^2R + v^3S +$ &c. on aura $u = P$, $du = Q$, $\frac{d^2u}{2} = R$, $\frac{d^3u}{2\cdot 3} = S$, &c., Par où l'on voit comment on peut trouver sur le champ tous les différentielles de u [...].[83]

Tornando al tema che egli aveva evocato nella prima parte della propria memoria, Lagrange legge così le proporzionalità esibite dal "teorema" di Taylor, fra i coefficienti della serie intera che sviluppa una funzione data e i differenziali successivi di tale funzione, in un senso inverso a quello usuale, individuando in esse il principio di un metodo di determinazione dei differenziali di ordine superiore.[84] La differenza con il punto di vista che verrà espresso venticinque anni più tardi nella *Théorie* è tuttavia qui assolutamente esplicita. La nozione leibniziana di differenziale come differenza infinitamente piccola si ripresenta infatti del tutto inalterata. Le identità osservate da Lagrange non esprimono che la possibilità di una differente determinazione algoritmica (rispetto a quella usuale) della medesima entità matematica.[85] Non si tratta quindi di fornire una interpretazione alternativa del *calcolo* rispetto a quella leibniziana, ma di fornire un metodo più agile per

---

[82]Il riferimento di Lagrange é ovviamente al secondo membro della (86).

[83]Cfr. *ivi*, p. 212.

[84]Questa era stata, d'altra parte, l'originale lettura newtoniana del "teorema" di Taylor in occasione della sua prima formulazione [cfr. il precedente paragrafo III. 2. *a*. δ.].

[85]La distinzione formulata nella prima parte della presente dissertazione fra oggetti e concetti matematici può apparire qui (come in numerosi casi simili, tutt'altro che inabituali) inadeguata. Per quanto i concetti di differenziale e di coefficiente di una certa serie intera siano infatti differenti, essi sembrano tradursi nel medesimo oggetto matematico. Così cercare il coefficiente di una tale serie è in termini oggettivi esattamente la stessa cosa che cercare il differenziale di una certa funzione, pur essendo concettualmente una cosa molto differente. Tale differenza non può tuttavia indicarsi affermando che nei due casi si cercano due differenti *concetti*, il problema infatti non è quello di determinare dei concetti, ma di assegnare una forma simbolica a certi *oggetti*: la determinazione lagrangiana del differenziale di ordine λ di una funzione data non è una determinazione del concetto di differenziale, ma dell'oggetto corrispondente, o meglio della forma analitica semplice [cfr. i precedenti paragrafi II.2.θ e II.2.ι.] che tale oggetto assume. La differenza consiste quindi in questo: che nei due casi si cerca il medesimo oggetto interpretandolo diversamente. L'operare matematico è qui immediatamente connesso alla interpretazione che il matematico dà di esso. Il termine neutro (rispetto alla distinzione fra concetti e oggetti matematici) "entità matematica" è qui (come d'altra parte altrove) utilizzato per riferirsi a oggetti direttamente interpretati. Il differenziale (in quanto oggetto) potrà allora intendersi come un'entità matematica differente dal coefficiente di una certa serie intera (inteso anch'esso in quanto oggetto), pur essendo da esso oggettivamente indistinguibile.

calcolare i *differenziali* di ordine superiore. La seguente citazione è a questo proposito inequivocabile. Fornito, per mezzo della determinazione del termine generico dello sviluppo di $u(x+\mathrm{v}dx) = (a + bx + \mathrm{v}b \cdot dx)^r$ il differenziale di ordine generico $d^\lambda y$ della funzione $u = u(x) = (a + bx)^r$, Lagrange scrive:

> Dans le cas de l'exemple précédent il auroit été facile de trouver la valeur générale de $d^\lambda u$ par la méthode ordinaire des différentiations, mais il n'en seroit pas de même si la fonction $u(x)$ étoit tant soit peu plus compliquée.
>
> Supposons en effet $u(x) = (a+bx+cx^2)^r = u$, on verra aisément que les différentielles de $u(x)$ seront exprimés par des séries dont il ne sera pas aisé de trouver la loi, pour avoir l'expression de $d^\lambda u(x)$; suivant notre méthode il n'y aura qu'à mettre $x + \mathrm{v}dx$ à la place de x, ce qui rendra $a + b + cx^2$ égal à $a + bx + cx^2 + \mathrm{v}(b+2cx)dx + \mathrm{v}^2 cdx^2$; de sorte que la difficulté ne consistera qu'à réduire l'expression $[a+bx+cx^2+\mathrm{v}(b+2cx)dx+\mathrm{v}^2cdx^2]^r$ en une série qui procède suivant les puissances de v.[86]

Discusso il caso relativo a un tale esempio, Lagrange applica il proprio metodo alla dimostrazione del teorema di Bernoulli. Scelta la funzione a due variabili $u = u(x, y) = xy$, la (86) fornisce l'identità

$$\begin{aligned} & xy + \mathrm{v}\, d(xy) + \frac{\mathrm{v}^2}{2!} d^2(xy) + \&c. = \\ (87) \qquad & = \left[x + \mathrm{v}dx + \frac{\mathrm{v}^2}{2!} d^2x + \&c. \right] \left[y + \mathrm{v}dy + \frac{\mathrm{v}^2}{2!} d^2y + \&c. \right] \\ & = xy + \mathrm{v}\,(xdy + ydx) + \mathrm{v}^2 \left(x \frac{d^2y}{2!} + dx\, dy + y \frac{d^2x}{2!} \right) + \&c. \end{aligned}$$

e quindi, secondo il metodo dei coefficienti indeterminati:

$$(88) \qquad d^\lambda xy = y d^\lambda x + \lambda d^{\lambda-1} x\, dy + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2!} d^{\lambda-2} x\, d^2 y + \&c.$$

(dove λ è un esponente qualsiasi intero positivo). Considerando un esponente intero negativo uguale a $-\lambda$ si avrà allora

$$(89) \qquad \int^\lambda xy = y \int^\lambda x - \lambda dy \int^{\lambda-1} x + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2!} d^2 y \int^{\lambda-2} x - \&c.$$

e, sostituendo x con il suo differenziale *dx* inteso come costante:

[86] Cfr. *ivi*, pp. 213-14.

$$(90)\qquad \begin{aligned}\int^{\lambda} y\,dx &= y\int^{\lambda-1} x - \lambda dy\int^{\lambda-2} x + \frac{\lambda(\lambda-1)}{2!}\,d^2y\int^{\lambda-3} x - \&c.\\ &= y\,\frac{x^{\lambda}}{\lambda!\,dx^{\lambda-1}} - \lambda\,dy\,\frac{x^{\lambda+1}}{(\lambda+1)!\,dx^{\lambda}} + \frac{\lambda(\lambda+1)}{2!}\,d^2y\,\frac{x^{\lambda+2}}{(\lambda+2)!\,dx^{\lambda+1}} - \&c.\end{aligned}$$

che per $\lambda = 1$ è il teorema di Bernoulli, formulato in un linguaggio apertamente differenziale.[87]

III. 4. *c.*
DUE MEMORIE DEL GIOVANE LAPLACE, 1773 E 1777

III. 4. *c. α. Il programma di Laplace: dimostrare le formule di Lagrange senza far ricorso a inferenze congetturali*

La memoria di Lagrange del 1772 suscitò fra gli altri l'interesse del giovane Laplace che dedicò alla discussione dei suoi risultati i paragrafi finali di una memoria miscellanea apparsa fra quelle presentate a l'*Académie* "par divers savans" nel corso dell'anno 1773.[88] L'*ouverture* di Laplace è esplicita:

> M. de Lagrange - egli scrive - a donné [...] un très-beau mémoire sur l'analogie qui règne entre les puissances positives et les différences, aussi-bien qu'entre les puissances négatives et les intégrales [...]; en suivant cette analogie, il est parvenu à plusieurs théorèmes fort intéressans sur les fonctions; mais comme cette voie est indirecte, et que d'ailleurs ce grand géomètre semble regarder comme difficile la démonstration directe de ces théorèmes; je vais ici les démontrer par une méthode assez simple, et qui de plus a l'avantage de faire voire pourquoi l'analogie des puissances et des sommes ou des différences a lieu.[89]

La pretesa di Laplace è in verità largamente discutibile. L'individuazione delle ragioni dell' "analogia di Leibniz" (ovvero la giustificazione *a priori* del

[87]Moltiplicando i due membri per $dx^{\lambda-1}$ Lagrange scrive la (90) sotto la forma

$$\int^{\lambda} y\,dx^{\lambda} = y\,\frac{x^{\lambda}}{\lambda!} - 1\,dy\,\frac{x^{\lambda+1}}{(\lambda+1)!\,dx} + \frac{\lambda(\lambda+1)}{2!}\,d^2y\,\frac{x^{\lambda+2}}{(\lambda+2)!\,dx^2} - \&c.$$

L'integrale è qui chiaramente inteso come un anti-differenziale alla maniera di Leibniz e Bernoulli e *x* e *y* sono quindi considerate come due variabili fra loro indipendenti [cfr. il precedente paragrafo III.2.*d*.β. e in particolare la nota (113)].

[88]Cfr. Laplace (1773), parr. XI-XIII (pp. 534-40). Non sono note informazioni sulla data dell'effettiva presentazione di tale memoria all'*Académie* di cui Laplace divenne membro effettivo a partire dal 31 marzo 1773 [cfr. Gillispie, Grattan-Guinness, Fox (1978), pp. 276 e 396]. Né la data della raccolta in cui essa fu inserita, ne quella della sua pubblicazione (avvenuta nel 1776) sembrano indicative dell'anno della sua composizione.

[89]Cfr. *ivi*, pp. 534-35.

suo "aver luogo") richiede infatti che sia fatta chiarezza sullo statuto di tale analogia, ovvero che il vago sentimento di corrispondenza fra l'osservazione compiuta da Leibniz - che assicura l'interscambiabilità delle "*characterisctic cæ*" p e d nel passaggio dallo sviluppo di $p^{\nu}(x + y)$ a quello di $d^{\nu}(xy)$ - e le inferenze di Lagrange sia trasformato nella predicazione a determinati oggetti di una esplicita proprietà matematica, la quale comporti fra le sue conseguenze tanto l'interscambiabilità osservata da Leibniz che la legittimità delle inferenze di Lagrange. Per dare alla questione sollevata da quest'ultimo una simile risposta è tuttavia necessaria l'esplicita introduzione della nozione generale di *operatore*, la quale si accompagni all'edificazione di una teoria delle proprietà formali di certe classi di operatori chiaramente definite. Lungo una simile direzione Laplace non si avvierà che qualche anno più tardi con la propria memoria del 1779 sulle funzioni generatrici,[90] aprendo un programma di ricerca che giungerà a una convincente soluzione del problema di Lagrange solo con la memoria di Servois su "un nuovo modo di esposizione dei principi del calcolo differenziale".[91] Nella sua memoria del 1773 (così come in quella del 1777 che ne riformula i risultati) Laplace si limita a percorrere il passaggio inverso rispetto a quello compiuto da Lagrange, fornendo una dimostrazione degli sviluppi contenuti nelle formule compatte di quest'ultimo del tutto indipendente da tali formule, le quali sono poi dimostrate a partire da questi.

Se un simile procedimento conferma inequivocabilmente che l'interesse essenziale della memoria di Lagrange consisteva - anche agli occhi dei matematici coevi - nel nuovo modo di rappresentare in forma compatta degli sviluppi già noti (o comunque altrimenti determinabili), esso sembra difficilmente distinguersi, in modo veramente essenziale, da quello dello stesso Lagrange. Passando dalle proprie formule agli sviluppi euleriani, questi aveva infatti mostrato la possibilità di scrivere tali sviluppi nei termini di esse e aveva quindi implicitamente compiuto anche il passaggio inverso, sul quale egli aveva d'altra parte fatto vertere, in ultima istanza, la propria dichiarazione di "esattezza" di queste formule. Da un punto di vista strettamente logico, Laplace non compie quindi alcun passo avanti rispetto a Lagrange: dimostrando il conseguente dell'implicazione congetturata da questi in modo indipendente da tale implicazione, egli non solo non fornisce alcun argomento né per affermare la correttezza di tale implicazione, né per giustificare l' "aver luogo" dell'analogia da cui essa sembra dipendere, ma non perviene a alcun risultato che non fosse già presente nella memoria del 1772. Se novità vi è nella dimostrazione di Laplace, questa risiede allora non nel suo esito formale, ma nelle modalità con cui essa lo raggiunge e nell'interpretazione che essa fornisce per risultati già noti, in primo luogo per lo stesso "teorema" di Taylor.

Tale dimostrazione può essere divisa in tre tappe successive: la prima consiste di una dimostrazione esplicitamente differenziale del "teorema" di Taylor, la seconda consiste nel passaggio da tale teorema agli sviluppi conte-

---

[90]Cfr. la prossima sezione III.4.*d*..

[91]Cfr. Servois (1814-15a).

nuti nelle formule compatte di Lagrange, la terza nella deduzione di tali formule a partire dagli sviluppi trovati. In tutti e tre i casi le prove prospettate da Laplace (che si limita, per ragioni di semplicità, al caso di una funzione a una sola variabile $u = u(x)$)[92] risultano diverse da quelle considerate nella precedente sezione III.4.*b*.: la dimostrazione del "teorema" di Taylor è radicalmente differente da quella presentata da Lagrange nella prima parte della memoria 1772; il passaggio da tale "teorema" agli sviluppi delle differenze finite e infinitamente piccole (e dei rispettivi integrali), pur seguendo la traccia del procedimento utilizzato da Euler per pervenire alla (75), ne fornisce una riformulazione estremamente elegante richiamandosi agli stessi risultati già impiegati per dimostrare il "teorema" di Taylor; infine la deduzione delle formule di Lagrange a partire da tali sviluppi è esplicita e non consiste nel semplice riconoscimento di questi nelle formule in questione. L'idea chiave delle prime due tappe della dimostrazione è l'interpretazione della funzione incrementata $u(x+\xi)$ come una funzione a due variabili indipendenti fra loro x e ξ, la quale conduce all'impiego dimostrativo del calcolo ai differenziali parziali anziché, come usuale, di quello ai differenziali ordinari; l'idea chiave della terza tappa è invece quella di sfruttare l'indipendenza dalla funzione $u = u(x)$ dai coefficienti numerici degli sviluppi trovati, sostituendo in essi tale funzione generica con la funzione esponenziale $u(x) = e^x$, per cui il passaggio da ${}_\xi\Delta u(x) = e^x(e^\xi - 1)$ a ${}_\xi\Delta^\lambda u(x) = e^x(e^\xi - 1)^\lambda$ risulta assolutamente banale.

III. 4. *c*. β. *Una nuova dimostrazione per gli sviluppi delle differenze finite di ordine qualsiasi e dei corrispondenti integrali*

Le prime due tappe della dimostrazione di Laplace possono venir ricostruite nei termini seguenti. Data una funzione qualsiasi $u = u(x)$ e considerato un incremento qualsiasi ξ della variabile indipendente si potrà scrivere, senza ulteriori condizioni, l'identità generica

$$(91)\qquad u(x+\xi) = u(x) + \alpha \qquad [\alpha = \alpha(x, \xi) \text{ e } \alpha(x, 0) = 0 \text{ per ogni } x]$$

in cui $\alpha = \alpha(x, \xi)$ è un incremento variabile, la cui natura particolare dipende dalla funzione $u(x)$. Differenziando la (91) rispetto a ξ e sfruttando la nota identità algoritmica[93] $\dfrac{\partial u(x+\xi)}{\partial\xi} = \dfrac{\partial u(x+\xi)}{\partial x}$ si avrà allora[94]

[92] Lo stesso Laplace giudica evidentemente inessenziale il riferimento di Lagrange a funzioni a due o più variabili.

[93] E' interessante osservare che tale identità dipende in ultima istanza dalla stessa identità $u[(x+\omega)+\xi] = u[x+(\xi+\omega)]$ utilizzata da Lagrange nel 1772 [cfr. il precedente paragrafo.III. 4. *b*. β.].

[94] Benché nella memoria di Laplace, come in molte altre memorie pubblicate dall'*Académie de Paris*, il differenziale sia indicato per mezzo della lettera corsiva settecentesca "∂", piuttosto che tramite l'usuale "*d*" leibniziana, Laplace non fa alcuna distinzio-

$$(92)\qquad \frac{\partial u(x+\xi)}{\partial x} = \frac{\partial \alpha(x,\xi)}{\partial \xi}$$

e quindi, esprimendo α in termini integrali e sostituendo nella (91):[95]

$$(93)\qquad u(x+\xi) = u(x) + \int_0^{\xi} \frac{\partial u(x+\xi)}{\partial x}\, d\xi$$

Differenziando tale identità rispetto a *x* si avrà d'altra parte:

$$(94)\qquad \frac{\partial u(x+\xi)}{\partial x} = \frac{du(x)}{dx} + \int_0^{\xi} \frac{\partial^2 u(x+\xi)}{\partial x^2}\, d\xi$$

e quindi, sostituendo nella stessa (93):

$$(95)\qquad \begin{aligned} u(x+\xi) &= u(x) + \int_0^{\xi} \left(\frac{du(x)}{dx} + \int_0^{\xi} \frac{\partial^2 u(x+\xi)}{\partial x^2}\, d\xi \right) d\xi \\ &= u(x) + \frac{du(x)}{dx}\,\xi + \int_0^{\xi} \left(\int_0^{\xi} \frac{\partial^2 u(x+\xi)}{\partial x^2}\, d\xi \right) d\xi \end{aligned}$$

---

ne fra la notazione del differenziale parziale e quella del differenziale ordinario. Per restare fedeli alla notazione laplaciana la (92) dovrebbe così essere scritta sotto la forma $\frac{du'}{dx} = \frac{d\alpha}{d\xi}$ (in cui u' denota la "quantità" u sotto l'ipotesi che x "divenga" $x+\xi$). La mia introduzione della moderna distinzione fra d e ∂ non va quindi intesa che come un ausilio espositivo. Ciò è tanto più importante da osservare in quanto l'edizione delle *Opere complete* di Laplace [cfr. Laplace (1878-1912), vol. VIII, pp. 277-321] introduce surrettiziamente tale distinzione mantenendo la ∂ originale nel caso di differenziali parziali e convertendola altrimenti in d.

[95]Laplace non fa ovviamente alcun impiego della notazione per gli integrali definiti (che comparirà per la prima volta in un sommario della *Théorie analytique de la chaleur* di J. Fourier, pubblicato nel 1816 [cfr. Fourier (1816), p. 361 e Grattan-Guinness (1972), p. 241], in cui il trattato [cfr. Fourier (1822), in particolare pp. 237 e 252 e segg.] che verrà pubblicato solo sei anni più tardi è annunciato come in corso di stampa), limitandosi a non scrivere le costanti di integrazione, la cui somma totale può d'altra parte venir determinata come nulla, ponendo $\xi = 0$ nello sviluppo finale. L'impiego di una notazione moderna mi pare tuttavia essere più fedele allo spirito della dimostrazione di Laplace (che sembra intendere le integrazioni in termini puramente formali) che l'introduzione arbitraria di costanti indeterminate. Per passare dalle mie notazioni a quelle di Laplace non sarà d'altra parte necessario, sotto tale rispetto, che cancellare i limiti di integrazione.

Differenziando ancora la (94) relativamente a x avremo un'espressione binomia per $\frac{\partial^2 u(x+\xi)}{\partial x^2}$, la quale potrà a sua volta essere sostituita a tale rapporto in (95). Assumendo la reiterabilità all'infinito del procedimento, sarà allora facile trarre lo sviluppo di Taylor per una funzione qualsiasi che, lasciando indeterminati i coefficienti numerici, Laplace scrive sotto la forma:[96]

$$(96) \qquad {}_{\xi}\Delta u(x) = \frac{du(x)}{dx}\xi + A_1 \frac{d^2u(x)}{dx^2}\xi^2 + A_2 \frac{d^3u(x)}{dx^3}\xi^3 + \&c.$$

in cui A_1, A_2, &c. sono appunto dei coefficienti numerici costanti che non dipendono né da ξ, né da x, né da $u(x)$.[97]

Sostituendo in tale formula x con $x+\xi$ si trarrà d'altra parte l'espressione in serie della differenza finita di $u(x+\xi)$; essendo (grazie all'indipendenza di ξ) $d(x+\xi) = dx$, si avrà allora:

[96] Considerando a esempio il primo passo della reiterazione si avrà, differenziando la (94) relativamente a x,

$$\frac{\partial^2 u(x+\xi)}{\partial x^2} = \frac{d^2u(x)}{dx^2} + \int_0^{\xi} \frac{\partial^3 u(x+\xi)}{\partial x^3} d\xi$$

e quindi sostituendo in (95)(e assumendo $d\xi$ come costante):

$$\begin{aligned} {}_{\xi}\Delta u &= \frac{du(x)}{dx}\xi + \int_0^{\xi}\left(\int_0^{\xi}\left(\frac{d^2u(x)}{dx^2} + \int_0^{\xi}\frac{\partial^3 u(x+\xi)}{\partial x^3}dx\right)d\xi\right)d\xi \\ &= \frac{du(x)}{dx}\xi + \frac{d^2u(x)}{dx^2}\int_0^{\xi}\int_0^{\xi} d\xi^2 + \int_0^{\xi}\int_0^{\xi}\int_0^{\xi}\frac{\partial^3 u(x+\xi)}{\partial x^3}d\xi^3 \\ &= \frac{du(x)}{dx}\xi + \frac{d^2u(x)}{dx^2}\frac{1}{2}\xi^2 + \int_0^{\xi}\int_0^{\xi}\int_0^{\xi}\frac{\partial^3 u(x+\xi)}{\partial x^3}d\xi^3 \end{aligned}$$

[97] Si noti che la scelta di lasciare indeterminati i coefficienti numerici non dipende dalla difficoltà della loro determinazione nel contesto della dimostrazione di Laplace che, in quanto tale, conduce agevolmente (qui, come nelle formule che seguono) alla loro determinazione. Lo scopo finale di dimostrare le formule compatte di Lagrange rende semplicemente inutile tale determinazione, la quale richiederebbe quindi l'introduzione di calcoli superflui relativamente al raggiungimento dell'obiettivo prefissato.

$$
\begin{aligned}
{}_{\xi}\Delta^{2}u(x) &= {}_{\xi}\Delta u(x+\xi) - {}_{\xi}\Delta u(x) = \\
&= \left(\frac{\partial u(x+\xi)}{\partial x} - \frac{du(x)}{dx}\right)\xi + A_1\left(\frac{\partial^2 u(x+\xi)}{\partial x^2} - \frac{d^2u(x)}{dx^2}\right)\xi^2 + \&c.
\end{aligned}
\tag{97}
$$

i cui successivi coefficienti potranno essere posti in forma integrale, sfruttando la (94). Differenziando reiterativamente tale identità relativamente a x e sostituendo in (97) si avrà così (assumendo $d\xi$ come costante)

$$
{}_{\xi}\Delta^{2}u(x) = \left(\int_0^{\xi}\frac{\partial^2 u(x+\xi)}{\partial x^2}\,d\xi\right)\xi + A_1\left(\int_0^{\xi}\frac{\partial^3 u(x+\xi)}{\partial x^3}\,d\xi\right)\xi^2 + \&c.
\tag{98}
$$

e quindi, sfruttando ancora la (94) per trarre la forma binomia delle successive integrande:

$$
\begin{aligned}
{}_{\xi}\Delta^{2}u(x) &= \left[\int_0^{\xi}\left(\frac{d^2u(x)}{dx^2} + \int_0^{\xi}\frac{\partial^3 u(x+\xi)}{\partial x^3}\,d\xi\right)d\xi\right]\xi + A_1\left[\int_0^{\xi}\frac{\partial^3 u(x+\xi)}{\partial x^3}\,d\xi\right]\xi^2 + \&c. \\
&= \frac{d^2u(x)}{dx^2}\xi^2 + \left[\int_0^{\xi}\int_0^{\xi}\frac{\partial^3 u(x+\xi)}{\partial x^3}\,d\xi^2\right]\xi + A_1\left[\int_0^{\xi}\frac{\partial^3 u(x+\xi)}{\partial x^3}\,d\xi\right]\xi^2 + \&c. \\
&= \frac{d^2u(x)}{dx^2}\xi^2 + \left[\int_0^{\xi}\int_0^{\xi}\left(\frac{d^3u(x)}{dx^3} + \int_0^{\xi}\frac{\partial^4 u(x+\xi)}{\partial x^4}\,d\xi\right)d\xi^2\right]\xi + \\
&\qquad + A_1\left[\int_0^{\xi}\left(\frac{d^3u(x)}{dx^3} + \int_0^{\xi}\frac{\partial^4 u(x+\xi)}{\partial x^4}\,d\xi\right)d\xi\right]\xi^2 + \&c. \\
&= \frac{d^2u(x)}{dx^2}\xi^2 + \left[\frac{1}{2} + A_1\right]\frac{d^3u(x)}{dx^3}\xi^3 + \left[\int_0^{\xi}\int_0^{\xi}\int_0^{\xi}\frac{\partial^4 u(x+\xi)}{\partial x^4}\,d\xi^3\right]\xi + \\
&\qquad + A_1\left[\int_0^{\xi}\int_0^{\xi}\frac{\partial^4 u(x+\xi)}{\partial x^4}\,d\xi^2\right]\xi^2 + \&c.
\end{aligned}
\tag{99}
$$

Reiterando le sostituzioni si avrà allora:

$$(100)\qquad {}_{\xi}\Delta^{2} u(x) = \frac{d^{2}u(x)}{dx^{2}}\xi^{2} + B_{1}\frac{d^{3}u(x)}{dx^{3}}\xi^{3} + B_{2}\frac{d^{4}u(x)}{dx^{4}}\xi^{4} + \&c.$$

in cui B_1, B_2, &c. sono dei coefficienti numerici costanti che non dipendono né da ξ, né da x, né da $u(x)$. Allo stesso modo, generalizzando un tale procedimento, si otterrà la forma dello sviluppo della differenza finita di ordine λ ($\lambda \in \{N - 0\}$)

$$(101)\qquad {}_{\xi}\Delta^{\lambda} u(x) = \frac{d^{\lambda}u(x)}{dx^{\lambda}}\xi^{\lambda} + N_{1}\frac{d^{\lambda+1}u(x)}{dx^{\lambda+1}}\xi^{\lambda+1} + N_{2}\frac{d^{\lambda+2}u(x)}{dx^{\lambda+2}}\xi^{\lambda+2} + \&c.$$

in cui N_1, N_2, &c. sono ancora dei coefficienti numerici costanti che non dipendono né da ξ, né da x, né da $u(x)$.

Per ottenere poi la forma dello sviluppo dell'integrale finito di ordine λ, Laplace (che, cercando dimostrazioni indipendenti dall' "analogia di Leibniz", non può ovviamente passare a esponenti negativi) integra la (96) in termini finiti (assumendo la nullità delle costanti), traendo la nuova identità

$$(102)\qquad {}_{\xi}\Sigma\left(\frac{du(x)}{dx}\right) = \frac{1}{\xi}\,u(x) - A_{1}\,{}_{\xi}\Sigma\left(\frac{d^{2}u(x)}{dx^{2}}\right)\xi - A_{2}\,{}_{\xi}\Sigma\left(\frac{d^{3}u(x)}{dx^{3}}\right)\xi^{2} - \&c.$$

che ponendo $\dfrac{du(x)}{dx}$ in luogo di $u(x)$ assume la forma

$$(103)\qquad {}_{\xi}\Sigma\big(u(x)\big) = \frac{1}{\xi}\int_{0}^{x} u(x)\,dx - A_{1}\,{}_{\xi}\Sigma\left(\frac{du(x)}{dx}\right)\xi - A_{2}\,{}_{\xi}\Sigma\left(\frac{d^{2}u(x)}{dx^{2}}\right)\xi^{2} - \&c.$$

Basterà allora calcolare, in base a questa stessa formula, gli integrali finiti dei successivi rapporti differenziali; la sostituzione reiterata fornirà lo sviluppo dell'integrale primo:

$$(104)\qquad {}_{\xi}\Sigma\big(u(x)\big) = \frac{1}{\xi}\int_{0}^{x} u(x)\,dx + P_{1}u(x) + P_{2}\xi\,\frac{du(x)}{dx} + P_{3}\,x^{3}\,\frac{d^{2}u(x)}{dx^{2}} + \&c.$$

in cui P_1, P_2, &c. sono come sopra dei coefficienti numerici costanti che non dipendono né da ξ, né da x, né da $u(x)$. Integrando in termini finiti tale identità e esprimendo in base a essa gli integrali primi dei termini successivi del suo secondo membro, si potrà passare poi all'espressione in serie dell'integrale finito di ordine 2 e, generalizzando il procedimento, a quella dell'integrale finito di ordine λ:

(105)

$$ {}_{\xi}\Sigma^{\lambda}\Big(u(x)\Big) = \frac{1}{\xi^{\lambda}}\int_0^{\xi^{\lambda}} u(x)\, dx^{\lambda} + \frac{Q_1}{\xi^{\lambda-1}}\int_0^{\xi^{\lambda-1}} u(x)\, dx^{\lambda-1} + \frac{Q_2}{\xi^{\lambda-2}}\int_0^{\xi^{\lambda-2}} u(x)\, dx^{\lambda-2} + \&c. $$

in cui Q_1, Q_2, &c. sono ancora dei coefficienti numerici costanti che non dipendono né da ξ, né da x, né da $u(x)$.

Seguendo l'esempio di Lagrange, Laplace dimostra quindi il "teorema" di Taylor prima di passare da esso agli sviluppi di una differenza finita di ordine qualsiasi e del corrispondente integrale. Mentre tuttavia la dimostrazione di Lagrange sembra perseguire lo scopo di fornire una prova di tale "teorema", la quale resti indipendente dall'*algoritmo* del *calcolo* (ma non da un'esplicita presupposizione infinitesimalista) e permetta quindi di introdurre tale algoritmo (in quanto algoritmo delle differenze infinitamente piccole) facendo riferimento alla forma generale dello sviluppo in serie intera di una funzione qualsiasi, l'impostazione di Laplace è essenzialmente diversa. In linea con la tradizione newtoniana, egli perviene al "teorema" di Taylor, inteso come l'espressione in serie intera di una differenza finita, attraverso l'impiego dell'algoritmo del *calcolo* (diretto e inverso) e senza alcun richiamo a esplicite presupposizioni di natura infinitesimalista. Lo strumentario operazionale che è così utilizzato nel corso della prova resta in quanto tale estraneo a ogni interpretazione, assumendo l'aspetto di un insieme di regole di trasformazione simbolica, le quali regolano il "gioco" delle differenziazioni rispetto a x e delle integrazioni rispetto a ξ.[98] Tutto ciò di cui Laplace ha quindi bisogno per condurre la prova è l'introduzione di due operatori reciproci (che potremmo genericamente indicare con Γ e Γ^{-1}) i quali operano su funzioni qualsiasi relativamente a una data variabile e obbediscono alle regole seguenti (Φ, Ψ dipendenti o indipendenti da ε; ζ e η indipendenti da ε; $\nu \in \{N - 0\}$):[99]

---

[98] I termini "differenziazione" e "integrazione" sono qui utilizzati in senso puramente operazionale e non rimandano quindi in alcun modo alla nozione stessa di *differenziale* inteso come differenza infinitamente piccola.

[99] Non sarà difficile, utilizzando tali regole, ricostruire la dimostrazione di Laplace nei termini dei due operatori Γ e Γ^{-1}, giungendo a esempio alla (96) sotto la forma

$$ {}_{\xi}\Delta u(x) = \Gamma_x\, [u(x)]\, \xi + A_1\, \Gamma_x^2\, [u(x)]\, \xi^2 + A_2\, \Gamma_x^3\, [u(x)]\, \xi^3 + \&c. $$

$$
(106)\quad
\begin{aligned}
&\text{i) } \left[\Phi = \Psi\right] \Rightarrow \left[\Gamma_{\varepsilon}(\Phi) = \Gamma_{\varepsilon}(\Psi)\right] \\
&\text{ii) } \Gamma_{\varepsilon}\left[\Phi + \Psi\right] = \Gamma_{\varepsilon}\left[\Phi\right] + \Gamma_{\varepsilon}\left[\Psi\right] \\
&\text{iii) } \Gamma_{\varepsilon}(\zeta) = 0 \\
&\text{iv) } \Gamma_{\varepsilon}\left[F(\eta+\varepsilon)\right] = \Gamma_{\eta}\left[F(\eta+\varepsilon)\right] \\
&\text{v) } \Gamma_{\varepsilon}^{-1}\Gamma_{\varepsilon}\left[F(\varepsilon)\right] = F(\varepsilon) \\
&\text{vi) } \Gamma_{\eta}\,\Gamma_{\varepsilon}^{-1}\left[F(\eta,\varepsilon)\right] = \Gamma_{\varepsilon}^{-1}\Gamma_{\eta}\left[F(\eta,\varepsilon)\right] \\
&\text{vii) } \Gamma_{\varepsilon}^{-\nu}\left[F(\eta)\right] = \frac{1}{\nu!}\,F(\eta)\,\varepsilon^{\nu}
\end{aligned}
$$

Tali regole possono allora venire introdotte arbitrariamente è essere utilizzate per fornire una definizione implicita di Γ e Γ^{-1} i quali possono, *dopo la dimostrazione*, essere intesi come gli operatori che conducono da una funzione data $u = u(x)$ ai successivi coefficienti di $\xi^{\nu}/\nu!$ ($\nu = 0, 1, 2,$ &c.) nello sviluppo di $u(x+\xi)$ (ξ indipendente da x). Trovati per altra via gli sviluppi delle funzioni elementari, il confronto fra i coefficienti permetterà allora di determinare la forma analitica semplice corrispondente all'esito dell'operazione $\Gamma_x\,[u(x)]$ per ogni funzione $u = u\,(x)$ assegnata.[100]

Se è certamente difficile affermare che questo fosse effettivamente il punto di vista di Laplace, è certo che la dimostrazione che egli fornisce segna una separazione evidente fra l'algoritmo del *calcolo* e la sua interpretazione, connettendo quest'ultima più che alla nozione di differenza infinitamente piccola - come era il caso di Lagrange - alla stessa nozione di coefficiente di un certo sviluppo in serie intera. Passando definitivamente il guado, sembra quindi abbastanza naturale liberarsi definitivamente da una concezione separata del "teorema" di Taylor, inteso come l'espressione della forma generale (nei termini di un algoritmo indipendente) dello sviluppo in serie intera della differenza finita di una funzione qualsiasi, per cercare, a partire dalla determinazione della (57) e dal confronto con gli sviluppi particolari, la natura algoritmica dell'operazione (non altrimenti intesa) che conduce da $u = u(x)$ ai successivi coefficienti di $\xi^{\nu}/\nu!$ ($\nu = 0, 1, 2,$ &c.) nello sviluppo di $u(x+\xi)$

[100] Si osservi che la (106)(vii) non contiene che l'algoritmo del *calcolo* relativamente a potenze intere e positive della variabile principale. Da $\Gamma_{\varepsilon}\,\Gamma_{\varepsilon}^{-\nu}\,[F(\eta)] = \Gamma_{\varepsilon}\left[\frac{1}{\nu!}\,F(\eta)\,\varepsilon^{\nu}\right] = \Gamma_{\varepsilon}^{-(\nu-1)}\,[F(\eta)] = \frac{1}{(\nu-1)!}\,F(\eta)\,\varepsilon^{\nu-1}$ segue infatti, per ν intero e positivo, $\Gamma_{\varepsilon}\,[F(\eta)\,\varepsilon^{\nu}] = \frac{1}{\nu}\,F(\eta)\,\varepsilon^{\nu-1}$.

(ξ indipendente da x). In tal modo la stessa introduzione arbitraria delle regole (106) (o di altre analoghe) diviene pleonastica, potendo definire completamente gli operatori Γ eΓ^{-1} per mezzo delle regole algoritmiche determinate in base al confronto fra la (57) e gli sviluppi delle diverse funzioni elementari. Proprio questo sarà il programma realizzato da Lagrange nella *Théorie*, che - lungi dal presentare, come spesso si è sostenuto, una reinterpretazione del *calcolo* fondata su una dimostrazione non differenziale del "teorema" di Taylor - ricostruisce l'intero edificio dell'analisi ordinaria a partire da una vera e propria eliminazione di tale "teorema", inteso come risultato separato, ovvero, detto in altri termini, dalla ricomposizione del dualismo che esso aveva introdotto fra differenziali (o flussioni) e coefficienti di uno sviluppo in serie intera. In un tale mutamento di orientamento che conduce Lagrange dalla memoria del 1772 alla *Théorie*, le memorie di Laplace cui sono dedicate le sezioni *c.* e *d.* del presente capitolo sembrano svolgere un ruolo tutt'altro che marginale.

Ciò detto, vi è almeno un altro aspetto della dimostrazione di Laplace che la rende matematicamente interessante, sul quale è opportuno concentrare ora la nostra attenzione. A differenza della classica prova newtoniana, essa prende infatti avvio da un'ipotesi diversa della presupposizione della sussistenza di uno sviluppo in serie intera per ogni funzione assegnata, costruendo passo a passo tale sviluppo, mostrandone *a posteriori* la forma caratteristica e fornendo direttamente, per ogni sua ridotta parziale, un'espressione integrale del resto della serie. Se ciò non significa certamente che i presupposti di una tale dimostrazione siano più deboli di quelli richiesti dalla dimostrazione di Newton e Maclaurin, le modalità con cui essa si sviluppa sono tali che questi si presentano sotto una forma senza dubbio meno generica esplicitando le condizioni del loro effettivo verificarsi. In particolare la possibilità di disporre di una forma generale del resto relativo alla ridotta parziale di ogni ordine n ($n \in \mathbf{N}$) permette di legare la generalizzazione che porta a scrivere la (96) - la quale presuppone l'infinita reiterabilità del procedimento che conduce alla (95) - alla considerazione delle proprietà di un tale resto. Così se lo sviluppo è inteso come una serie intera formalmente associata alla funzione data, è facile comprendere che la legittimità della (96) dipende dall'infinita differenziabilità di tale funzione in un aperto centrato su x e di raggio maggiore o uguale a ξ. Se invece il problema è quello di capire sotto quali condizioni la (96) si trasforma in una identità numerica è possibile trasporre l'indagine allo studio del comportamento del resto per n che tende verso l'infinito, uscendo così dalla generica assunzione, secondo la quale ogni serie intera converge alla funzione di cui essa è sviluppo su un intervallo finito (ma difficilmente determinabile in termini generali) centrato sullo zero.[101]

L'ultimo punto che mi preme qui affrontare è relativo alla paternità della dimostrazione di Laplace. Se il quadro in cui egli la presenta è certa-

[101]Cfr. la prossima sezione III.6.*d.*.

mente nuovo, così come nuovo è l'impiego di un procedimento analogo a quello che conduce alla (96) per passare da questa alla (101) e alla (105), non è difficile scorgere in essa una riformulazione (e una generalizzazione) di un argomento già impiegato nel 1754 da d'Alembert per fornire una prova dello stesso "teorema" di Taylor.[102] D'Alembert non fa d'altra parte che riprendere un'idea antica che già Johann I Bernoulli e Brook Taylor avevano a loro tempo utilizzato per dimostrare il teorema di Bernoulli per mezzo di integrazioni per parti reiterate. Rimpiazzando le integrazioni per parti con opportune sostituzioni delle integrande rese possibili da identità tratte nel corso di tappe precedenti della stessa dimostrazione, egli adatta un simile procedimento alla ricerca dello sviluppo in serie intera di una differenza finita. Impiegando la notazione di d'Alembert l'argomento in questione può essere presentato nei termini seguenti. Sia $f(x)$ una qualsiasi funzione di x e $\varphi(x)dx$ il suo differenziale; siano inoltre $\chi(x)dx$ il differenziale di $\varphi(x)$, $\psi(x)dx$ quello di $\chi(x)$, &c. e sia ξ una qualsiasi quantità "*très petite*". Se poniamo

$$f(x+\xi) = f(x) + \alpha \tag{107}$$

e consideriamo x come costante avremo allora, differenziando,

$$f(x+\xi)d\xi = d\alpha \tag{108}$$

e quindi:[103]

$$f(x+\xi) = f(x) + \int_0^\xi \varphi(x+\xi)\, d\xi \tag{109}$$

Agendo allo stesso modo sulle funzioni $\varphi(x)$, $\chi(x)$, $\psi(x)$, &c. si avrà, d'altra parte

$$(110) \quad \begin{cases} \text{i) } \varphi(x+\xi) = \varphi(x) + \int_0^\xi \chi(x+\xi)\, d\xi \\ \text{ii) } \chi(x+\xi) = \chi(x) + \int_0^\xi \psi(x+\xi)\, d\xi \\ \&c. \end{cases}$$

[102] Cfr. d'Alembert (1754-56), parte I, p. 50.

[103] Anche d'Alembert, come più tardi Laplace, si limita a non scrivere le costanti di integrazione, senza alcun cenno al carattere definito dell'integrale considerato (cfr. la precedente nota (95)). Per un'interpretazione degli integrali di d'Alembert come integrali definiti cfr. Lacroix (1810-19), vol. III, pp. 396-7.

e quindi, sostituendo reiterativamente:

$$
\begin{aligned}
f(x+\xi) &= f(x) + \int_0^\xi \varphi(x)\, d\xi + \int_0^\xi \left(\int_0^\xi \chi(x)\, d\xi \right) dx + \\
(111) \qquad & \quad + \int_0^\xi \left(\int_0^\xi \left(\int_0^\xi \psi(x)\, d\xi \right) d\xi \right) d\xi + \&c. \\
&= f(x) + \varphi(x)\, \xi + \frac{1}{2!} \chi(x)\, \xi^2 + \frac{1}{3!} \psi(x)\, \xi^3 + \&c.
\end{aligned}
$$

Per quanto d'Alembert assuma ξ come una grandezza "molto piccola", questa non è chiaramente una condizione di realizzabilità formale dei passi successivi della dimostrazione e non può quindi essere connessa che con la richiesta di convergenza della serie sviluppo, la quale è d'altra parte intesa da questi - in un contesto chiaramente applicativo - come un'espressione infinitaria del *valore* di $f(x+\xi)$.[104]

III. 4. *c.* γ. *Il passaggio alle formule compatte di Lagrange*

Dimostrate la (101) e la (105) si tratta ora, per completare il programma annunciato, di passare da queste alla (64), alla (65) e alle altre formule compatte di Lagrange. Per questo basta tuttavia porre sia nella (101) che nella (105) $u(x) = e^x$. Essendo infatti, per ogni λ intero e positivo

$$
\begin{aligned}
& {}_\zeta\Delta\left[e^x\right] = e^x(e^\zeta - 1)\ ; \quad {}_\zeta\Sigma\left[e^x\right] = \frac{e^x}{e^\zeta - 1} \\
(112) \qquad & {}_\zeta\Delta^2\left[e^x\right] = {}_\zeta\Delta\left[e^{x+\zeta}\right] - {}_\zeta\Delta\left[e^x\right] = e^x\left(e^\zeta - 1\right)^2 ; \ {}_\zeta\Sigma^\lambda\left[e^x\right] = \frac{e^x}{\left(e^\zeta - 1\right)^2} \\
& \ldots
\end{aligned}
$$

[104]E' strano che d'Alembert non riconosca esplicitamente il proprio risultato come il "teorema" di Taylor e anzi, ripresentandolo nel supplemento all'articolo "*Séries*" dell' *Encyclopédie*, sotto la forma usuale

$$
f(x+\Delta x) = f(x) + \frac{df(x)}{dx}\Delta x + \frac{d^2 f(x)}{dx^2}\frac{\Delta x^2}{2!} + \&c.
$$

dopo averlo dimostrato per mezzo del classico procedimento di Newton e Maclaurin, lo indichi come "teorema di d'Alembert" [cfr. d'Alembert (Ser. Supp.)].

$$ {}_{\zeta}\Delta^{\lambda}\left[e^{x}\right] = {}_{\zeta}\Delta^{\lambda-1}\left[e^{x+\zeta}\right] - {}_{\zeta}\Delta^{\lambda-1}\left[e^{x}\right] = e^{x}\left(e^{\zeta}-1\right)^{\lambda}\ ;\ {}_{\zeta}\Sigma^{\lambda}\left[e^{x}\right] = \frac{e^{x}}{\left(e^{\zeta}-1\right)^{\lambda}} $$

(assumendo l'algoritmo differenziale per la funzione esponenziale, $d(e^x) = e^x dx$) una tale sostituzione conduce alle identità

$$ (113)\quad \begin{aligned} &\text{i)}\ \left(e^{\zeta}-1\right)^{\lambda} = \zeta^{\lambda} + N_1\,\zeta^{\lambda+1} + N_2\,\zeta^{\lambda+2} + \&c. \\ &\text{ii)}\ \frac{1}{\left(e^{\zeta}-1\right)^{\lambda}} = \frac{1}{\zeta^{\lambda}} + \frac{Q_1}{\zeta^{\lambda-1}} + \frac{Q_2}{\zeta^{\lambda-2}} + \&c. \end{aligned} $$

da cui, ponendo $\zeta = \dfrac{du}{dx}\,\xi$, è ovvio trarre:

$$ (114)\quad \begin{aligned} &\text{i)}\ \left(e^{\frac{du}{dx}\xi}-1\right)^{\lambda} = \left(\frac{du}{dx}\right)^{\lambda}\xi^{\lambda} + N_1\left(\frac{du}{dx}\right)^{\lambda+1}\xi^{\lambda+1} + N_2\left(\frac{du}{dx}\right)^{\lambda+2}\xi^{\lambda+2} + \&c. \\ &\text{ii)}\ \frac{1}{\left(e^{\frac{du}{dx}\xi}-1\right)^{\lambda}} = \left(\frac{du}{dx}\right)^{-\lambda}\xi^{-\lambda} + Q_1\left(\frac{du}{dx}\right)^{-\lambda+1}\xi^{-\lambda+1} + Q_2\left(\frac{du}{dx}\right)^{-\lambda+2}\xi^{-\lambda+2} + \&c. \end{aligned} $$

che, secondo la (101) e la (105), corrispondono esattamente alla (64) e alla (65). Tornando poi alla (101) e alla (105), calcolando in base a esse le differenze finite di $u(x)$ di ordine $\lambda+1$, $\lambda+2$, &c. e applicando il procedimento che conduce dalla (73) alla (83), passando per la (84), si avranno gli sviluppi del rapporto differenziale di ordine λ e del corrispondente integrale in funzione, rispettivamente, delle differenze finite di ordine λ, $\lambda+1$, $\lambda+2$, &c. e degli integrali finiti di ordine λ, $\lambda-1$, $\lambda-2$, &c. (nei quali i coefficienti numerici resteranno indeterminati). Operando ancora la sostituzione $u(x) = e^{x}$ e agendo come sopra si avranno così tanto la (78) che la formula corrispondente per l'integrale di ordine λ. Componendo opportunamente i risultati così ottenuti Laplace dimostra poi, senza alcuna difficoltà, anche la (81) (lasciando evidentemente al lettore la dimostrazione della (82)).

L'assoluta semplicità della prova di Laplace (che è la ragione essenziale della sua indiscutibile eleganza) non deve ingannarci. Se la sostituzione della funzione esponenziale alla funzione generica $u = u(x)$ è un artificio dimostrativo - per quanto geniale - non particolarmente profondo,[105] esso non è concepibile che a condizione di conoscere *a priori* i risultati che si intendono raggiungere. L' "analogia di Leibniz" continua a svolgere così un ruolo euristico essenziale. La sostituzione $\zeta = \frac{du}{dx}\xi$ verte inoltre sulla concezione dell'incremento arbitrario ζ come una variabile indipendente della funzione $u = u(x+\zeta)$ e è quindi, almeno analogicamente, connessa all'impiego del calcolo ai differenziali parziali, che resta il segno distintivo della dimostrazione di Laplace

III. 4. *c*. δ. *Teoria delle serie e calcolo ai differenziali parziali*

Sarà lo stesso Laplace d'altra parte a rileggere in questo senso la propria dimostrazione solo qualche anno dopo, presentando all'*Académie*, il 16 giugno 1779, una memoria dal titolo assolutamente esplicito, "*Mémoire sur l'usage du calcul aux différences partielles dans la théorie des suites*",[106] il cui scopo dichiarato è la generalizzazione del procedimento dimostrativo adottato nella memoria del 1773. Dall'impiego del calcolo differenziale parziale nella teoria delle serie possono infatti derivare, secondo Laplace, "les principaux théorèmes sur cet objet, auxquels le Géomètres ne sont parvenus que par des méthodes particulières".[107]

Data una funzione qualsiasi a quattro variabili[108] $u = u(x, z, \xi, \zeta)$ e posta l'identità generica[109]

$$\begin{aligned} u(x, z, \xi, \zeta) = u(x, z, 0, 0) &+ A_{1,0}\,\xi + A_{2,0}\,\xi^2 + A_{3,0}\,\xi^3 + \&c. \\ &+ A_{0,1}\,\zeta + A_{1,1}\,\xi\,\zeta + A_{2,1}\,\xi^2\zeta + \&c. \\ &+ A_{0,2}\,\zeta^2 + A_{1,2}\,\xi\,\zeta^2 + \&c. \\ &+ A_{0,3}\,\zeta^3 + \&c. \\ &+ \&c. \end{aligned} \tag{115}$$

---

[105] L'osservazione chiave su cui tale sostituzione si basa, ovvero l'indipendenza da u dei coefficienti numerici degli sviluppi, è d'altra parte del tutto ovvia e la genialità di Laplace è quindi solo quella di sfruttare dimostrativamente una proprietà assolutamente evidente.

[106] Cfr. Laplace (1777). Per la data della presentazione a l'*Académie* cfr. Gillispie, Grattan-Guinness, Fox (1978), p. 392.

[107] Cfr. Laplace (1777), p. 100.

[108] Benché Laplace formuli i propri risultati generali relativamente a una qualsiasi funzione a più variabili (accoppiate a due a due) $u = u(\xi, \zeta, \&c., x, z, \&c.)$ [è chiaro che, nonostante la notazione utilizzata, egli si riferisce a funzioni a un numero di variabili qualsiasi, ma pur sempre finito] - salvo applicarli poi per dimostrare le formule compatte di Lagrange relativamente a una funzione a una sola variabile - mi limiterò nella mia esposizione al caso di una funzione a quattro variabili accoppiate a due a due $u = u(x, z, \xi, \zeta)$. Il passaggio al caso generale è infatti banale.

[109] L'impiego di una notazione a indici è di Laplace.

(in cui i coefficienti A_{ij} ($i = 0, 1, 2, ...; j = 0, 1, 2, ...$) sono delle funzioni di x e z) differenziando successivamente, tanto rispetto a ξ che rispetto a ζ, e ponendo $\xi = \zeta = 0$ dopo le differenziazioni si ottiene senza difficoltà

$$A_{1,0} = \frac{\partial u(x, z, 0, 0)}{\partial\xi}\ ;\ A_{2,0} = \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 u(x, z, 0, 0)}{\partial\xi^2}\ ;\ A_{3,0} = \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 u(x, z, 0, 0)}{\partial\xi^3}\ ;\ \&c.$$

$$A_{0,1} = \frac{\partial u(x, z, 0, 0)}{\partial\zeta}\ ;\ A_{1,1} = \frac{\partial^2 u(x, z, 0, 0)}{\partial\xi\,\partial\zeta}\ ;\ A_{2,1} = \frac{1}{2!}\frac{\partial^3 u(x, z, 0, 0)}{\partial\xi^2\,\partial\zeta}\ ;\ \&c.$$

$$(116)\quad A_{0,2} = \frac{1}{2!}\frac{\partial^2 u(x, z, 0, 0)}{\partial\zeta^2}\ ;\ A_{1,2} = \frac{1}{2!}\frac{\partial^3 u(x, z, 0, 0)}{\partial\xi\,\partial\zeta^2}\ ;\ \&c.$$

$$A_{0,3} = \frac{1}{3!}\frac{\partial^3 u(x, z, 0, 0)}{\partial\zeta^3}\ ;\ \&c.$$

&c.

e in generale:

$$(117)\qquad A_{\nu,\mu} = \frac{1}{\nu!\,\mu!}\frac{\partial^{\nu+\mu} u(x, z, 0, 0)}{\partial\xi^{\nu}\,\partial\zeta^{\mu}}$$

che altro non è che una opportuna generalizzazione del "teorema" di Maclaurin, dimostrata secondo il classico procedimento newtoniano per differenziazioni successive. Si supponga ora che "par la nature de cette fonction [$u = u(x, z, \xi, \zeta)$], ou par une équation aux différence partielles qui la représente"[110] si pervenga a esprimere il differenziale parziale di ordine $\nu + \mu$, $\dfrac{\partial^{\nu+\mu} u(x, z, \xi, \zeta)}{\partial\xi^{\nu}\,\partial\zeta^{\mu}}$, nei termini della stessa funzione $u = u(x, z, \xi, \zeta)$ e dei suoi differenziali parziali presi relativamente a x e z, per mezzo di una forma analitica opportuna[111] $\Omega\left(\dfrac{\partial^k u(x, z, \xi, \zeta)}{\partial x^i\,\partial z^j}\right) = \Omega(x, z, \xi, \zeta)$ ($i = 0, 1, 2, \&c.; j = 0, 1, 2, \&c.; k = i+j$). Dalla (117) è allora ovvio trarre l'identità:

[110]Cfr. *ivi*, p. 100.

[111]Per quanto $\Omega(x, z, \xi, \zeta)$ non sia ovviamente una forma analitica semplice, Laplace si riferisce a essa come a una *funzione* [cfr. *ivi*].

$$(118) \qquad A_{\nu,\mu} = \frac{1}{\nu!\,\mu!}\,\Omega\,(x, z, 0, 0) = \Omega\left(\frac{\partial^{k} u\,(x, z, 0, 0)}{\partial x^{i}\,\partial z^{j}}\right)$$

$$[i = 1, 2, \&c.\ ; j = 1, 2, \&c.\ ; k = i + j]$$

che, secondo Laplace, esprime in generale l'uso del calcolo differenziale parziale nella teoria delle serie.

Per mostrare l'impiego della (118) si ponga a esempio $u = u(x+\xi, z+\zeta)$. Essendo, come è noto,[112] $\frac{\partial^{\nu+\mu} u(x+\xi, z+\zeta)}{\partial\xi^{\nu}\,\partial\zeta^{\mu}} = \frac{\partial^{\nu+\mu} u(x+\xi, z+\zeta)}{\partial x^{\nu}\,\partial z^{\mu}}$, la (118) diviene:

$$(119) \qquad A_{\nu,\mu} = \frac{1}{\nu!\,\mu!}\,\frac{\partial^{\nu+\mu} u(x, z)}{\partial x^{\nu}\,\partial z^{\mu}}$$

che fornisce una generalizzazione del "teorema" di Taylor al caso di funzioni a due variabili. Come è chiaro, la dimostrazione di Laplace riposa tuttavia sulla (117), la quale è a sua volta dimostrata secondo il classico procedimento newtoniano. Il suo interesse non consiste quindi nella novità del percorso argomentativo che essa propone, ma piuttosto nell'interpretazione che essa fornisce. Laplace non fa infatti che interpretare il teorema di Taylor nel quadro del calcolo alle differenze parziali, esprimendolo come caso particolare di una generalissima formula di sviluppo. Di più, lo stesso percorso che conduce alla (118) manifesta non solo una consapevolezza ormai indiscutibile del carattere operazionale della differenziazione, ma anche una surrettizia sostituzione dell'operazione di differenziazione con quella di derivazione, intesa espressamente come una regola di trasformazione funzionale del tutto indipendente da ogni concettualizzazione infinitesimalista.

Data la (119) (la quale contiene lo sviluppo in serie intera della differenza finita di una qualsiasi funzione a due variabili e può banalmente venire generalizzata al caso di un numero qualsiasi di variabili[113]), Laplace torna al caso di una funzione a una variabile $u = u(x)$, dimostrando per esso le formule di Lagrange, tramite un procedimento globalmente analogo a quello impiegato nella memoria del 1773. Fra le marginali differenze di carattere locale vale la pena di osservarne due. In primo luogo, per passare dal "teorema" di Taylor allo sviluppo della differenza finita di ordine λ Laplace opera

---

[112] Cfr. il passaggio dalla (91) alla (92).

[113] Laplace fornisce in verità direttamente la corrispondente della (119) per una funzione a un numero qualsiasi di variabili [cfr. la precedente nota (108)]:

$$A_{\nu,\rho,\mu,\ \&c.} = \frac{1}{\nu!\,\rho!\,\mu!\ \&c.}\,\frac{\partial^{\nu+\rho+\mu+\&c.} u(x, y, z, \&c.)}{\partial x^{\nu}\,\partial y^{\rho}\,\partial z^{\mu}\ \&c.}$$

ora con la "caratteristica" Δ come con un operatore lineare. Scritta la (61) egli ne trae infatti l'identità

$$ {}_{\xi}\Delta^{2} u(x) = {}_{\xi}\Delta\left(\frac{d(u)}{dx}\right)\xi + {}_{\xi}\Delta\left(\frac{d^{2}u(x)}{dx^{2}}\right)\frac{\xi^{2}}{2!} + {}_{\xi}\Delta\left(\frac{d^{3}u(x)}{dx^{3}}\right)\frac{\xi^{3}}{3!} + \&c. \tag{120}$$

e calcola i successivi termini del secondo membro sostituendo nella stessa (61) $u(x)$ rispettivamente con $\dfrac{d^{i}u(x)}{dx^{i}}$ $(i = 1, 2,...)$. Riordinando si avrà allora la (100) e, reiterando il procedimento, la (101). In secondo luogo per trarre la (65), Laplace pone nella stessa (101) $\dfrac{d^{\lambda}u(x)}{dx^{\lambda}} = {}_{\xi}\Sigma^{\lambda}\phi(x)$ e quindi $u(x) = \int^{\lambda} {}_{\xi}\Sigma^{\lambda}\phi(x)\,dx = {}_{\xi}\Sigma^{\lambda}\int^{\lambda}\phi(x)\,dx$, ovvero ${}_{\xi}\Delta^{\lambda}u(x) = \int^{\lambda}\phi(x)\,dx$, traendo:

$$\begin{aligned} {}_{\xi}\Sigma^{\lambda}\phi(x) &= \frac{1}{\xi^{\lambda}}\int^{\lambda}\phi(x)\,dx - N_{1}\frac{d^{\lambda}}{dx^{\lambda}}\left(\frac{du(x)}{dx}\right)\xi - N_{2}\frac{d^{\lambda}}{dx^{\lambda}}\left(\frac{d^{2}u(x)}{dx^{2}}\right)\xi^{2} - \&c. \\ &= \frac{1}{\xi^{\lambda}}\int^{\lambda}\phi(x)\,dx - N_{1}\,{}_{\xi}\Sigma^{\lambda}\left(\frac{d\phi(x)}{dx}\right)\xi - N_{2}\,{}_{\xi}\Sigma^{\lambda}\left(\frac{d^{2}\phi(x)}{dx^{2}}\right)\xi^{2} - \&c. \end{aligned} \tag{121}$$

da cui egli trae la (105) (con $\phi(x)$ in luogo di $u(x)$) calcolando nel secondo membro i termini successivi al primo, differenziando ripetutamente questa stessa formula e reiterando le sostituzioni.

Laplace persegue nella sua nuova memoria l'evidente obiettivo di presentare una riorganizzazione di un insieme di risultati già noti, raffinando i procedimenti dimostrativi già impiegati nel 1773 e fornendo una generalizzazione del teorema di Maclaurin, la quale non solo contenga lo sviluppo in serie intera di una qualsiasi funzione a un numero qualsiasi di variabili, ma permetta anche un immediato passaggio a corrispondenti generalizzazioni del "teorema" di Taylor e a formule analoghe che esprimono lo sviluppo formale di una qualsiasi funzione a più variabili $u: \mathbf{R}^{n} \to \mathbf{R}$ in una serie intera centrata su un un punto qualsiasi di $\mathbf{R}^{n}$. Egli avvia così un programma di ricerca che troverà, almeno fino ai primi vent'anni del XIX, non pochi continuatori, il cui scopo dichiarato sarà quello di trovare una formula generalissima che contenga, come propri casi particolari, tutti gli sviluppi in serie conosciuti per una funzione qualsiasi (espressa tanto per mezzo di una forma analitica esplicita che tramite un'equazione algebrica o differenziale). In un tale contesto Laplace non ritiene essenziale ripresentare la dimostrazione del "teorema" di Taylor fornita nella memoria del 1773, richiamandosi piuttosto alla classica dimostrazione newtoniana (che egli applica alla costruzione dello sviluppo di MacLaurin), senza preoccuparsi di evitare l'esplicita introduzione *a priori* dell'ipotesi della sviluppabilità in serie intera di una qualsiasi funzione. La riformulazione della prima parte della dimostrazione presentata nel 1773 è quindi infedele. Se Laplace generalizza l'impiego del calcolo differenziale parziale e, di conseguenza, il trattamento dell'incremento ξ come una variabile indipendente, il calcolo di integrali della forma $\int_0^{\xi} F(x, \xi)\, dx$ non gioca più alcun ruolo, essendo completamente assorbito nella formula generale (118). Non solo, dimostrato il "teorema" di Taylor, è lo stesso calcolo differenziale parziale che viene accantonato. L'argomento che conduce dalla (61) alla (101) e alla (105) verte infatti ora essenzialmente sulla linearità dell'operatore Δ anche relativamente a polinomi infiniti e sulla sostituibilità di $u(x)$ con una qualsiasi forma analitica (e in particolare con forme analitiche non semplici[114]). Proprio la reiterata sostituzione di $u(x)$ con $\dfrac{d^i u(x)}{dx^i}$ ($i = 1, 2, \ldots$), la quale conduce dalla (120), alla (100) e alla (101), rimpiazzando la differenziazione reiterata di $_\xi\Delta\left(\dfrac{d^i u(x)}{dx^i}\right)$, mi pare, peraltro, costituire una delle novità locali più interessanti della nuova dimostrazione di Laplace. Se da un punto di vista algoritmico i due procedimenti sono infatti perfettamente equivalenti, il primo esprime la possibilità di definire la differenza $_\xi\Delta$ come un operatore interamente determinato dallo sviluppo di Taylor, ovvero, in generale, la possibilità di "liberare" certi oggetti dalla loro interpretazione primitiva e "naturale", collegandoli piuttosto a alcune delle loro proprietà formali.

III. 4. c. ε. *Una generalizzazione del teorema di Lagrange relativo allo sviluppo in serie di una funzione qualsiasi della radice di un'equazione algebrica*

Ridimostrate le formule di Lagrange, Laplace dedica gli ultimi tre paragrafi della propria memoria a mostrare come il proprio metodo generale possa essere applicato alla ricerca dello sviluppo di una funzione di una variabile, che sia a sua volta costituita da una funzione a una o più variabili, implicitamente assegnata per mezzo di una opportuna equazione alle differenze parziali. Non mi soffermerò qui che sul primo di tali paragrafi (il settimo

[114]Cfr. il precedente paragrafo II.2.θ..

dell'intera memoria),[115] nel quale egli perviene a una generalizzazione del teorema, enunciato per la prima volta da Lagrange nella propria memoria del 1768, relativo allo sviluppo in serie di una funzione qualsiasi di una radice dell'equazione $t - x + \varphi(x) = 0$, fornendone così una nuova (e più soddisfacente) dimostrazione.

Sia $x = x(t, \vartheta)$ una funzione soluzione di un'equazione ai differenziali parziali della forma generica

$$(122) \qquad \frac{\partial x(t, \vartheta)}{\partial \vartheta} = z\, \frac{\partial x(t, \vartheta)}{\partial t}$$

nella quale z sia una funzione qualsiasi di x: $z = z(x) = z(t, \vartheta)$. Si tratta di esprimere una funzione qualsiasi di x, $u = u(x) = u(t, \vartheta)$ per mezzo di una serie intera relativamente a ϑ. Data la (122) Laplace scrive:[116]

[...] or on a $\left(\frac{du}{d\vartheta}\right) = \left(\frac{du}{dx}\right) \cdot \left(\frac{dx}{d\vartheta}\right) = z \left(\frac{du}{dx}\right) \cdot \left(\frac{dx}{dt}\right)$, à cause $\left(\frac{dx}{d\vartheta}\right) = z \left(\frac{dx}{dt}\right)$; partant,

$$(123) \qquad \left(\frac{du}{d\vartheta}\right) = \left(\frac{d.\int z \left(\frac{du}{dx}\right) dx}{dt}\right);$$

en differenciant cette équation par rapport à ϑ, on aura $\left(\frac{ddu}{d\vartheta^2}\right) = \left(\frac{dd.\int z \left(\frac{du}{dx}\right) dx}{dt \cdot d\vartheta}\right)$; or l'équation (123) donne en y changeant u en $\int z \left(\frac{du}{dx}\right) dx$, $\frac{d \int z \left(\frac{du}{dx}\right) dx}{d\vartheta} = \frac{d. \int z^2 \left(\frac{du}{dx}\right) dx}{dt}$;

partant $\left(\frac{ddu}{d\vartheta^2}\right) = \frac{d^2. \int z^2 \left(\frac{du}{dx}\right) dx}{dt^2}$ =; [...] en suivant ce procédé, il est aisé de conclure généralement[117]

$$(124) \qquad \left(\frac{d^{v} u}{d\vartheta^{n}}\right) = \frac{d^{v}.\int z^{v} \left(\frac{du}{dx}\right). dx}{dt^{v}} = \frac{d^{v-1}.z^{v}.\left(\frac{du}{dx}\right).\left(\frac{dx}{dt}\right)}{dt^{v-1}} = \frac{d^{n-1}.z^{v}.\left(\frac{du}{dt}\right)}{dt^{v-1}}$$

---

[115] Cfr. *ivi*, pp. 113-16.

[116] Ho mantenuto qui la notazione di Laplace scrivendo "d" in luogo di "∂" [cfr. la precedente nota (94)].

[117] Cfr. *ivi*, pp. 113-14.

Benché Laplace sembri a prima vista operare per mezzo di semplificazioni incrociate relativamente ai differenziali isolatamente considerati, non è difficile rendersi conto che, interpretando in tal modo i calcoli precedenti, essi non conducono alla (124) che a condizione di confondere fra differenziali di x presi relativamente a ϑ e differenziali di x presi relativamente a t. Il linguaggio più naturale per ricostruire l'argomento di Laplace sembra allora quello delle derivate parziali, al cui concetto questi sembra peraltro assai vicino.[118]

Essendo $u = u[x(t, \vartheta)] = u(t, \vartheta)$, si avrà, infatti $u'_{\vartheta}(t, \vartheta) = [u'_x(x)]\cdot[x'_{\vartheta}(t, \vartheta)]$ e quindi, in base alla (122), $u'_{\vartheta}(t, \vartheta) = z\cdot [u'_x(x)]\cdot[x'_t(t, \vartheta)]$, ovvero

$$(125) \qquad \frac{\partial u(t, \vartheta)}{\partial \vartheta} = z \frac{du(x)}{dx} \frac{\partial x(t, \vartheta)}{\partial t}$$

che Laplace riscrive sotto la forma

$$(126) \qquad \frac{\partial u(t, \vartheta)}{\partial \vartheta} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{\alpha}^{x} z\left(\frac{du(x)}{dx}\right) dx\right)$$

in cui α sia preso in modo da annullare le costanti di integrazione. Derivando rispetto a ϑ si avrà allora

$$(127) \qquad \frac{\partial u^2(t, \vartheta)}{\partial \vartheta^2} = \frac{\partial}{\partial \vartheta}\frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{\alpha}^{x} z\left(\frac{du(x)}{dx}\right) dx\right) = \frac{\partial}{\partial t}\frac{\partial}{\partial \vartheta}\left(\int_{\alpha}^{x} z\left(\frac{du(x)}{dx}\right) dx\right)$$

Essendo d'altra parte $u = u(x)$ una funzione qualsiasi, la (126) vale per ogni sostituzione di u con un'altra funzione di x. Sostituendo u con la nuova funzione[119] $\int_{\alpha}^{x} z\left(\frac{du(x)}{dx}\right)dx$ si avrà così:

[118] Per quanto il linguaggio di Laplace sia sostanzialmente ancora quello leibniziano, uno degli aspetti più interessanti della sua memoria sembra essere l'implicita considerazione della derivazione (piuttosto che della differenziazione) come operazione elementare del *calcolo*: è il differenziale che sembra definito nei termini del rapporto differenziale, piuttosto che questo nei termini di quello.

[119] Per la considerazione di forme analitiche non semplici come funzioni, cfr. il precedente paragrafo III.4.*c*. δ..

$$\frac{\partial}{\partial\vartheta}\int_{\alpha}^{x} z\left(\frac{du(x)}{dx}\right)dx = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{\alpha}^{x} z\,\frac{d}{dx}\left(\int_{\alpha}^{x} z\left(\frac{du(x)}{dx}\right)dx\right)dx\right) = \frac{\partial}{\partial t}\left(\int_{\alpha}^{x} z^2\left(\frac{du(x)}{dx}\right)dx\right) \tag{128}$$

e quindi da (127):

$$\frac{\partial u^2(t,\vartheta)}{\partial\vartheta^2} = \frac{\partial^2}{\partial t^2}\left(\int_{a}^{x} z^2\left(\frac{du(x)}{dx}\right)dx\right) \tag{129}$$

Reiterando un tale procedimento si avrà allora, in generale (ν = 1, 2,...):

$$\frac{\partial u^{\nu}(t,\vartheta)}{\partial\vartheta^{\nu}} = \frac{\partial^{\nu}}{\partial t^{\nu}}\left(\int_{a}^{x} z^{\nu}\left(\frac{du(x)}{dx}\right)dx\right) = \frac{\partial^{\nu-1}}{\partial t^{\nu-1}}\left[z^{\nu}\left(\frac{du(x)}{dx}\right)\left(\frac{\partial x(t,\vartheta)}{\partial t}\right)\right] = \frac{\partial^{\nu-1}}{\partial t^{\nu-1}}\left[z^{\nu}\left(\frac{\partial u(t,\vartheta)}{\partial t}\right)\right] \tag{130}$$

Ricordandosi della (118) sarà allora facile trarre l'espressione del coefficiente generico della serie cercata:

$$A_{\nu} = \frac{1}{\nu!}\,\frac{d^{\nu-1}}{dt^{\nu-1}}\left[\,[z(t,0)]^{\nu}\left(\frac{du(t,0)}{dt}\right)\right] \tag{131}$$

Lo sviluppo in serie intera relativamente a ϑ di $u = u(t, \vartheta)$ sarà allora il seguente:

$$u(t,\vartheta) = u(t,0) + \left[z(t,0)\left(\frac{du(t,0)}{dt}\right)\right]\vartheta + \frac{d}{dt}\left[[z(t,0)]^2\,\frac{du(t)}{dt}\right]\frac{\vartheta^2}{2!} + \frac{d^2}{dt^2}\left[[z(t,0)]^3\,\frac{du(t)}{dt}\right]\frac{\vartheta^3}{3!} + \&c. \tag{132}$$

Integrando la (122) non è d'altra parte difficile assegnare alla funzione $x = x(t, \vartheta)$ la forma generica $x = F(t+\vartheta z)$. Nel caso in cui $z = \varphi(x)$ e F è la funzione identità, si avrà $x = t + \vartheta\,[\varphi(x)]$ e $t = x - \vartheta[\varphi(x)]$ e basterà quindi porre $u(t, \vartheta) = u(x) = \psi(x)$, $u(t, 0) = u(t) = \psi(t)$ e $\vartheta = 1$ per avere il teorema di Lagrange del 1768, che risulta così potentemente generalizzato.

III. 4. *c.. ζ. Tre lettere, per concludere*

Presentando nell'*Histoire de l'Académie* la seconda memoria di Laplace, J. B. Delambre[120] insiste su tre differenti aspetti: l'irreprensibile dimostrazione delle formule compatte di Lagrange;[121] la generalità del risultato espresso dalla (132); la possibilità di impiegare il metodo che essa propone allo scopo di "perfezionare" l'intera "teoria delle serie". E' lo stesso Laplace d'altra parte che, inviando la propria memoria a Lagrange, sottolinea la generalità dei propri risultati e dei procedimenti tramite i quali essi sono conseguiti, nonché lo scopo che questa persegue di una reinterpretazione sotto un nuovo e unitario "punto di vista" di un insieme di risultati già noti.

> [...] j'ai eu pour objet - egli scrive - de rassembler sous un seul point de vue les différents théorèmes que l'on a trouvé sur cette matière [les suites], et principalement ceux dont vous l'avez enrichie.[122]

Per contro ciò che sembra sorprendere Lagrange è l'originalità e la novità dell'approccio matematico proposto da Laplace. Ecco come egli si esprime in una lettera (allo stesso Laplace) del 12 novembre 1779:

> Ce qui me vient de vous me cause toujours un plaisir nouveau, par les idées originales que j'y trouve.
> Celle d'employer les différences partielles, pour réduire ensuite la quantité x, dans l'équation $x = t + \vartheta\varphi(x)$ en est une, et la généralisation que vous avez obtenue, par ce moyen, de ma formule est une preuve de la fécondité de cette méthode.[123]

E ancora, quasi un anno più tardi:

> Je n'ai pas besoin de vous dire combien je suis content de vos dernières productions; tant pis pour moi, si je ne sentais pas le prix de ce que vous faites; mais, Dieu merci, je n'ai rien à me reprocher à cet égard, et je vous avue que vos découvertes me donnent autant et peut-être plus de satisfaction que si elles venaient de moi. Aussi ne saurais-je vous exprimer le plaisir que m'a causé surtout la lecture du Mémoire dans lequel vous parvenez, d'une manière si élégante et si ingénieuse, par le moyen du calcul différentiel aux différences partielles, aux

---

120Cfr. Delambre (1777).

121Delambre considera quella contenuta nella memoria del 1777 come la prima dimostrazione soddisfacente di tali teoremi. Egli non era evidentemente al corrente della memoria del 1773 dello stesso Laplace.

122Cfr. Lagrange (1867-92), vol. 14, pp. 88-9. Si tratta della lettera di Laplace a Lagrange del 30 luglio 1779 [*ivi*, pp. 88-90].

123Cfr. *ivi*, p. 93. La lettera è alle pp. 92-4.

> théorèmes que je n'avais trouvé que par des voies indirectes et particulières. C'est un nouveau pas que vous avez fait dans la théorie des séries.[124]

La mia congettura è che quello compiuto da Laplace sia un passo decisivo: tanto per ciò che riguarda l' evoluzione delle idee dello stesso Lagrange, che nella prospettiva della nascita e del completo sviluppo un un calcolo formale degli operatori.

III. 4. *d.*
LA TEORIA DELLE FUNZIONI GENERATRICI

III. 4. *d. α. La nozione di funzione generatrice e i primi teoremi di Laplace*

Malgrado l'alto grado di generalità raggiunto, Laplace non era ancora soddisfatto dei propri risultati. Egli aveva fornito certamente un'interpretazione del "teorema" di Taylor (generalizzato al caso di funzioni a più variabili) che permetteva di collocare tale teorema entro di un nuovo contesto matematico - nel quale la separabilità delle variabili che esso esibisce è giustificata a partire da una proprietà differenziale di funzioni a più variabili della forma $\phi(x_1, ..., x_n\ z_1, ..., z_n) = \phi(x_1+z_1, ..., x_n+z_n)$ - e di connetterlo in tal modo a una generalizzazione dello stesso teorema di Lagrange del 1768. Ciò non era tuttavia ancora sufficiente per conferire alla "teoria delle serie" una unità per così dire intrinseca, che non dipendesse dal ricorso a strumenti esterni a tale teoria (almeno secondo la divisione di Euler), come il calcolo ai differenziali parziali. Fu proprio il tentativo di compiere un simile passo ulteriore che condusse Laplace a presentare all'*Académie* una nuova memoria,[125] la cui *ouverture* è in tal senso assolutamente esplicita:

> [...] [l]es géomètres [...] ont trouvé un grand nombre de beaux théorèmes et de méthodes ingénieuses, soit pour développer les fonctions en série, soit pour sommer les suites exactement ou par approximation; mais ils n'y sont parvenu que par des voies indirectes et particulières, et l'on ne peut douter que dans cette branche de l'analyse, comme dans toutes les autres, il y ait une manière générale et simple de l'envisager, dont les verités déjà connues dérivent, et qui conduise à plusieurs vérités nouvelles. La recherche d'une semblable méthode est l'objet de ce mémoire; celle à laquelle je suis parvenu est fondée sur la considération de ce que j'ai nomme *fonctions génératrices*: c'est un nouveau genre de calcul, que l'on peut nommer *calcul des fonctions génératrices*.[126]

---

[124] Cfr. *ivi*, p. 98. Sui tratta della lettera di Lagrange a Laplace del 8 settembre 1780 [*ivi*, pp. 97-9].

[125] Cfr. Laplace (1779).

[126] Cfr. *ivi*, p 207. Per quanto Laplace sia ritornato in numerose occasioni sulla propria teoria delle funzioni generatrici [cfr. a esempio Laplace (1809), (1812a), (1814a) e (1814b)], apportando a essa alcuni sviluppi, la struttura che essa assume nella memoria del 1779 resterà negli anni essenzialmente invariata. Tornerò sulla questione nella prossima appendice III.4-B..

I principi fondamentali di tale "calcolo" possono venir riformulati nei termini seguenti. Sia y_x (la notazione è di Laplace) "una funzione qualsiasi di x". Se data la serie[127]

$$(133) \qquad y_0 + y_1 t + y_2 t^2 + \ldots + y_x t^x + \ldots$$

si indica con u [= $u(t)$] la sua "somma", "ou *ce qui revient au même* [il corsivo è mio[128]], la fonction dont lé développement forme cette suite", allora si dirà che u [= $u(t)$] è la "*funzione generatrice* della variabile y_x".[129] Laplace chiarifica la propria definizione come segue:

> Une fonction génératrice d'une variable quelconque y_x, est donc généralement une fonction de t, qui développée suivant les puissances de t, a cette variable y_x pour coëfficient de t^x; et réciproquement, la variable correspondante d'une fonction génératrice, est le coëfficient de t^x dans le développement de cette fonction suivant les puissances de t.[130]

y_x è così il coefficiente generico di una serie intera e è quindi interpretabile come una funzione dell'indice x. In generale y_x può tuttavia essere una funzione di più variabili.[131] Se u è infatti una funzione non solo di t, ma anche di un'altra variabile z (per limitarsi al caso più semplice), $u = u(t, z)$, si avrà, centrando lo sviluppo su un punto qualsiasi $t = a$,

$$(134) \qquad u(t, z) = \varphi_0(a, z) + \varphi_1(a, z)\,[t-a] + \varphi_2(a, z)\,[t-a]^2 + \&c.$$

e quindi, per $a = 0$, $\varphi_x(0, z) = y_x = y_x(z)$.

Laplace non richiede d'altra parte che la serie (133) converga alla funzione $u(t)$. Riferendosi (implicitamente) alla nozione euleriana di "somma" di una serie (intera),[132] egli sembra intendere $u = u(t)$ come la funzione di cui la serie (133) esprime lo sviluppo formale in serie intera secondo le potenze di t, ottenuto per mezzo di uno degli usuali procedimenti (non differenziali) di sviluppo.[133] Sembrerebbe quindi che una funzione $u = u(t)$ debba essere detta, secondo Laplace, generatrice di una funzione (generata) $y_x = y(x)$ se e solo se sviluppando $u(t)$ in serie intera intorno al punto $t = 0$, attraverso un'opportuna composizione degli sviluppi in serie intera delle funzioni elementari che la compongono, si ottiene l'identità formale[134]

---

[127]Per indicare il carattere infinito della somma Laplace aggiunge dopo i secondi puntini il termine $y_\infty t^\infty$.

[128]Cfr. il precedente paragrafo II.2-A.β..

[129]Cfr. *ivi*, p. 212.

[130]Cfr. *ivi*.

[131]Laplace non esplicita una tale ovvia possibilità.

[132]Cfr. la precedente nota (128).

[133]Cfr. i precedenti paragrafi II.2.κ. e III. 3. *b*. δ..

[134]Si osservi che secondo il punto di vista euleriano (e laplaciano) tale identità formale implica la sussistenza di un aperto $(-\delta, \delta)$, tale che la condizione $t \in (-\delta, \delta)$ rende l'asso-

$$(135)\qquad u(t)=\sum_{x=0}^{\infty} y_x t^x \left[=\sum_{x=0}^{\infty}\varphi_x(0)\ [t\text{-}0]^x\right]$$

Una tale definizione pone a prima vista un problema di generalità, non essendo ovviamente possibile asserire che, assegnata una qualsiasi funzione $u = u(t)$, i metodi euleriani di sviluppo possano sempre condurre a un'identità della forma della (135), ovvero che ogni funzione $u = u(t)$ sia (formalmente) sviluppabile in una serie intera centrata sul punto $t = 0$. La generalità della teoria di Laplace non sembra tuttavia dipendere da una tale inaccettabile presupposizione. La funzione generica che è infatti oggetto di studio non è $u = u(t)$, ma $y_x = y(x)$. E' questa funzione che deve essere intesa come qualsiasi. Il riferimento alla funzione $u = u(t)$ non servirà nel corso della memoria che per introdurre l'antecedente *ipotetico* delle implicazioni che costituiranno i teoremi generali della teoria. Questi assumeranno infatti una forma generica differente dalla classica predicazione di una proprietà per tutti gli elementi di una data classe (o per l'elemento generico di questa): $\forall p\ [P(p)]$,[135] e risponderanno invece alla forma condizionale $Q(q) \Rightarrow P(p)$, segnando così una notevole novità rispetto alla precedente tradizione matematica. Tali teoremi verranno poi applicati in modo da "scaricare" la loro premessa ipotetica e non condurranno così che a risultati generali (della forma classica $\forall p\ [P(p)]$), i quali non verteranno che sulla funzione y_x.

Se tale semplice constatazione *a posteriori* risponde alla più ovvia perplessità sollevata dalla definizione di Laplace, essa sembra tuttavia produrne un'altra. Se la possibilità di intendere $u = u(t)$ come una funzione qualsiasi si scontra con la richiesta di sviluppabilità in una serie intera centrata sullo zero, la stessa possibilità riferita a $y = y_x$ sembra ben lontano dall'essere esente da difficoltà. In primo luogo tale funzione non è infatti introdotta che come funzione di un numero naturale, piuttosto che di una variabile a valori reali. In secondo luogo tale numero naturale non è altro che un indice che, se compare nella rappresentazione della forma universale del termine generico di una serie sviluppo, può benissimo scomparire nella sua forma particolare

---

ciazione fra la funzione e la serie una identità numerica [cfr. il precedente paragrafo II.2.κ.]. La trasposizione moderna della definizione di Laplace - secondo cui una funzione (a variabile reale) $u = u(t)$ è generatrice della funzione y_k: $\mathbf{N} \rightarrow \mathbf{R}$ se e solo se esiste un δ ($\delta \in \mathbf{R}^+$) tale che la condizione $t \in (-\delta, \delta)$ implica la convergenza della serie $\sum_{k=0}^{\infty} y_k t^k$ alla funzione $u = u(t)$ [cfr la nota (224) del precedente paragrafo III. 3. *d*. ξ.] - inverte quindi l'ordine logico sotteso dalla definizione originaria e è (rispetto a una nozione più ampia di funzione) restrittiva rispetto a questa.

[135] Si osservi che p è qui il simbolo per una classe di oggetti determinata e non una variabile vincolata dal solo quantificatore. Nonostante questo l'impiego di una formalizzazione come $\forall\alpha\ [p(\alpha) \Rightarrow P(\alpha)]$ sembra a me inadeguato per rappresentare asserzioni che vertono su oggetti determinati e non su possibili proprietà di oggetti assolutamente generici come delle variabili libere.

- qualora si passi da una funzione indeterminata $u = u(t)$ a una funzione specifica e si svolgano le operazioni, passando così da una rappresentazione indiretta a una rappresentazione diretta di una quantità[136] - o comunque comparire in tale rappresentazione in modo che la forma che questa assume non sia per nulla invariabile al variare del suo valore. Un esempio della prima situazione è dato dallo sviluppo della funzione $u(t) = \frac{1}{1-t}$, mentre un esempio della seconda è dato dallo sviluppo della funzione esponenziale $u(t) = e^t$, che è generatrice della funzione $y_x = 1/x!$ $(x \in \mathbf{N})$ la quale, intesa come forma analitica semplice,[137] non è ovviamente stabile al variare di x. A entrambe le difficoltà rispondono tuttavia, ancora una volta, le effettive applicazioni che Laplace presenta della propria definizione, le quali sembrano d'altra parte condurre alla necessità di una sua differente precisazione. Se per quanto riguarda la questione relativa al dominio della funzione y_x (che Laplace non sembra peraltro considerare che come una restrizione di una funzione originariamente assegnata relativamente all'intero campo reale, o a una sua opportuna porzione) vedremo come Laplace opererà una sorta di "interpolazione formale"; per ciò che riguarda il secondo punto, sarà la stessa natura dei teoremi generali, i cui conseguenti sono asserzioni relative a delle trasformate $\Phi(y_x)$ della funzione y_x (dove Φ indica un operatore definito su funzioni, quale a esempio l'operatore di differenza finita), che, combinata con opportune modalità applicative di questi (e in particolare allo scarico sistematico dell'antecedente), permetterà di giungere a risultati espressi in termini di identità formali, in cui la funzione $y = y_x$ può essere intesa (facendo astrazione dal procedimento dimostrativo) come una qualsiasi funzione $y = y(x)$.[138]

La prima conseguenza che Laplace trae dalla propria definizione è la seguente.

Teorema I: Se $u = u(t)$ è la funzione generatrice di y_x, allora la funzione generatrice di y_{x-r} $(r \in \mathbf{Z})$[139] è $[u(t)]t^r$.

136Cfr. il precedente paragrafo II.2.ι..

137Cfr. il precedente paragrafo II.2.θ..

138E' interessante osservare che, pur introducendo y_x come una "funzione" qualsiasi, Laplace non solo la indica nella definizione successiva come una "variabile", ma, passando alle funzioni generatrici delle trasformate di y_x, abbandona per queste - tranne che in rare occasioni [cfr. a esempio la prossima nota (149)] il termine "funzione" indicandole piuttosto o come delle "variabili" o come delle "quantità" o evitando assai spesso di qualificarle in termini generali. Ciò nonostante la definizione di Laplace introduce - almeno implicitamente - una potente generalizzazione della nozione di funzione, la quale sembra permettere di ampliarne l'estensione a delle famiglie di forme analitiche semplici (le quali non involvono, in quanto tali, la variabile indipendente e corrispondono quindi, rispetto a essa, a dei *valori* della funzione in questione) determinabili una per una per mezzo di un metodo *standard* (traducibile *a posteriori* in un'operazione) e dipendenti (proprio in quanto forme) dal *valore* della variabile.

139Tale restrizione è implicita nella dimostrazione di Laplace [cfr. *sotto*].

La dimostrazione che egli fornisce per tale teorema si riduce a una semplice osservazione:

> [...] car - egli scrive - il est visible que le coëfficient de t^x dans ut^r, est égal à celui de t^{x-r} dans u, et par conséquent égal à y_{x-r}.[140]

Non è difficile rendersi conto come, dietro l'apparente banalità di una tale constatazione, si nasconda una difficoltà relativa alla stessa definizione di "funzione generatrice" formulata qui sopra. Se si suppone che se $u(t)$ è la funzione generatrice di y_x, allora la funzione $\Lambda[u(t)]$ genera la serie $\Lambda\left(\sum_{x=0}^{\infty} y_x t^x\right)$ (dove Λ indica un'operazione algebrica eseguibile termine a termine su somme infinite), è allora chiaro che dall'ipotesi del teorema I segue che la funzione $[u(t)]t^r$ genera la serie $\sum_{x=0}^{\infty} y_x t^{x+r}$. Da qui Laplace trae che $[u(t)]t^r$ è la funzione generatrice di y_{x-r}. Le due serie

$$(136) \qquad \text{i)} \sum_{x=0}^{\infty} y_x t^{x+r} \; ; \; \text{ii)} \sum_{x=0}^{\infty} y_{x-r} t^r$$

non sono tuttavia fra loro identiche che in certi casi particolari nei quali alcuni opportuni coefficienti siano uguali a zero (o siano posti fra loro uguali). In particolare, esse sono identiche:

i) se $r > 0$ e i coefficienti $y_{-r}, y_{1-r}, ..., y_{-1}$ di (136)(i) sono uguali a zero;

ii) se $r < 0$ e i coefficienti $y_0, y_1, ..., y_{r-1}$ di (136)(ii) sono uguali a zero.

Questa è una restrizione relativa alla funzione generica y_x, la quale non può venire accettata in generale. Un modo per risolvere una tale difficoltà potrebbe essere quello di intendere la definizione di Laplace in un senso lato, considerando $u = u(t)$ come la funzione generatrice di y_x quando l'applicazione dei metodi euleriani di sviluppo conduce all'identità formale

$$(137) \qquad u(t) = \sum_{x=-\infty}^{\infty} y_x t^x \left[= \sum_{x=-\infty}^{\infty} \varphi_x(0) \; [t-0]^x \right]$$

Prese fra meno infinito e infinito, le due serie i cui termini generici sono $y_x t^{x+r}$ e $y_{x-r} t^r$ sono infatti fra loro identiche per ogni scelta dei coefficienti.

Le serie della forma $\sum_{x=-\infty}^{\infty} y_x t^x$ sono note come "serie di Laurent", essendo state studiate per la prima volta in termini espliciti da P. A. Laurent

[140] Cfr. *ivi*, p. 212.

in una memoria presentata all'*Académie* nel 1843.[141] E' chiaro che poiché nessuna funzione della forma $u(t) = [f(t)]t^{-n}$ (con $f(t)$ tale che il fattore t^{-n} non risulti eliminabile) è sviluppabile in una serie intera centrata sullo zero, una serie di Laurent determina in modo univoco il coefficiente y_x del suo termine generico, ovvero: non esiste alcuna serie equivalente a potenze intere (positive o negative) di t i cui coefficienti siano diversi da y_x.[142] Una serie di Laurent di una funzione $u = u(t)$ sviluppabile in una serie intera intorno al punto $t = 0$ è d'altra parte tale che la sua parte negativa si riduce alla serie 0+0+0+0+&c. e corrisponde quindi allo sviluppo in serie intera centrata sullo zero di tale funzione.[143] La definizione di funzione generatrice data per mezzo del ricorso a serie di Laurent costituisce quindi una generalizzazione della definizione data per mezzo del ricorso a usuali serie intere, riducendosi a essa ogni volta che la funzione generatrice $u = u(t)$ è svilup–pabile in una serie intera centrata sullo zero.

L'identificazione delle serie sviluppo con delle generiche serie di Laurent fornisce un'interpretazione assai elegante e assolutamente naturale delle dimostrazioni dei teoremi di Laplace concernenti il calcolo diretto delle funzioni generatrici (la ricerca delle funzioni generatrici date le funzioni generate). Al contrario tale interpretazione si presenta come assai problematica relativamente ai teoremi concernenti il calcolo inverso (la ricerca delle funzioni generate, date le funzioni generatrici). In particolare, essa rende impossibile dimostrare il prossimo teorema VIII, mentre rende la dimostrazione del prossimo teorema VII assai differente dall'*esquisse* presentato da Laplace, che pensava evidentemente a una procedura del tutto differente. Tali difficoltà sono dovute al fatto del tutto evidente che non è possibile definire una legge di moltiplicazione termine a termine fra serie di Laurent, la quale possa essere intesa come una naturale estensione della moltiplicazione fra polinomi. Una tale legge è viceversa necessaria per dimostrare il teorema VIII, mentre il teorema VII può essere dimostrato evitando di far ricorso a

---

[141] Cfr. Laurent (1843). La memoria di Laurent non fu mai pubblicata. Cfr. il rapporto di Cauchy in Cauchy (1882-1974), I ser., vol. VIII, pp. 115-17.

[142] Una serie di Laurent è detta convergente se le sue parti negativa e positiva convergono insieme, ovvero: $\sum_{x=-\infty}^{\infty} y_x t^x$ converge a $u_-(t) + u_+(t)$ per $1/\eta < |t| < \delta$ se e solo se $\sum_{x=-\infty}^{-1} y_x t^x$ converge a $u_-(t)$ per $|t| > 1/\eta$ mentre $\sum_{x=0}^{\infty} y_x t^x$ converge a $u_+(t)$ per $|t| < \delta$.

[143] Per rendersi conto di questo, seguendo un procedimento tipicamente settecentesco si ponga

$$u(t) = \&c. + K_{-3}t^{-3} + K_{-2}t^{-2} + K_{-1}t^{-1} + K_0 + K_1 t + K_2 t^2 + K_3 t^3 + \&c.$$

$$= W_0 + W_1 t + W_2 t^2 + W_3 t^3 + \&c.$$

Sarà allora facile trarre

$$\&c. + K_{-3}t^{-3} + K_{-2}t^{-2} + K_{-1}t^{-1} + (K_0 - W_0) + (K_1 - W_1)t + (K_2 - W_2)t^2 + (K_3 - W_3)t^3 + \&c. = 0$$

e quindi, secondo il metodo dei coefficienti indeterminati,

$$\&c.\ K_{-3} = 0,\ K_{-2} = 0,\ K_{-1} = 0,\ K_0 = W_0,\ K_1 = W_1,\ K_2 = W_2,\ K_3 = W_3,\ \&c.$$

essa solo a condizioni di introdurre delle opportune sostituzioni a cui Laplace non fa alcun cenno. L'interpretazione in questione rende inoltre ingiustificata l'introduzione delle costanti di integrazione nella funzione generatrice della funzione integrale generica ${}_1\Sigma^v y_x$.[144]

E' proprio il modo in cui Laplace introduce la funzione integrale di una funzione data che suggerisce d'altra parte una interpretazione alternativa, la quale conduce a riformulare la definizione di Laplace nei termini seguenti.

Definizione: Una funzione $F(t)$ è detta generatrice di $\Phi(y_x)$ (dove Φ è un operatore che agisce sulla funzione y_x dell'indice x) se e solo se essa è tale che, presi due opportuni valori relativi finiti o nulli α e β ($\alpha \leq \beta$) (i quali devono quindi esistere in quanto tali), i metodi euleriani di sviluppo conducono alla generica identità formale:

$$(138) \qquad F(t) = A_\alpha t^\alpha + A_{\alpha+1} t^{\alpha+1} + \ldots + A_{\beta-2} t^{\beta-2} + A_{\beta-1} t^{\beta-1} + \sum_{x=\beta}^{\infty} \Phi(y_x)\, t^x$$

dove A_α, $A_{\alpha+1}$,... $A_{\beta-2}$, $A_{\beta-1}$ sono degli opportuni coefficienti indipendenti da t. Se $\Phi(y_x) = y_x$ e $F(t)$ è tale che la (138) vale per le posizioni $\alpha = \beta = 0$, trasformandosi quindi nell'identità formale

$$(139) \qquad F(t) = \sum_{x=0}^{\infty} y_x\, t^x$$

allora la funzione $F(t)$ sarà detta *naturalmente generatrice* della funzione y_x.[145]

Il teorema I potrà allora venir riformulato nei termini seguenti.

Teorema I*: Se $u = u(t)$ è una funzione naturalmente generatrice di y_x, allora la funzione generatrice di y_{x-r} ($r \in \mathbf{Z}$) è $[u(t)]t^r$.

E la sua dimostrazione sarà assolutamente banale. Assunta l'identità formale

$$(140) \qquad u(t) = \sum_{x=0}^{\infty} y_x t^x$$

la quale esprime l'antecedente ipotetico dell'implicazione, si avrà infatti

---

[144]Nella prossima appendice III.4-A. presenterò le dimostrazioni dei principali teoremi enunciati da Laplace nel corso della sua memoria, così come esse possono venir ricostruite identificando le serie sviluppo con delle serie di Laurent (mostrando le difficoltà relative ai teoremi VII e VIII e alle costanti di integrazione).

[145]Tale nozione non è naturalmente introdotta da Laplace in termini espliciti.

$$
(141) \quad \begin{aligned}
\sum_{x=r}^{\infty} y_{x-r} t^{x} &= y_0 t^{r} + y_1 t^{r+1} + y_2 t^{r+2} + \&c. = t^{r}\left(y_0 + y_1 t + \&c.\right) \\
&= t^{r}\left(\sum_{x=0}^{\infty} y_x\, t^{x}\right) = t^{r}\ [u(t)]
\end{aligned}
$$

da cui il teorema segue o ponendo $\alpha = 0$, $\beta = r$ e $A_0 = A_1 = \ldots = A_{r-1} = 0$ (se r è un intero positivo) o ponendo (a esempio) $\alpha = \beta = r$ (se r è intero negativo).

Il secondo teorema di Laplace può poi essere riformulato nei termini seguenti:

Teorema II: Se $u = u(t)$ è la funzione generatrice di y_x, allora la funzione generatrice di ${}_1\Delta y_x = y_{x+1} - y_x$ è $[u(t)]\cdot[t^{-1}-1]$.

Ovvero:

Teorema II*: Se $u = u(t)$ è una funzione naturalmente generatrice di y_x, allora la funzione generatrice di ${}_1\Delta y_x = y_{x+1} - y_x$ è $[u(t)]\cdot[t^{-1}-1]$.

Assunta la (140) si avranno infatti (secondo la (141)) le identità formali

$$
(142) \quad \begin{aligned}
\sum_{x=0}^{\infty} \Delta y_x\, t^{x} &= \sum_{x=0}^{\infty} y_{x+1}\, t^{x} - \sum_{x=0}^{\infty} y_x\, t^{x} \\
&= -\, y_0\, t^{-1} + \sum_{x=-1}^{\infty} y_{x+1}\, t^{x} - \sum_{x=0}^{\infty} y_x t^{x} \\
&= [u(t)]\cdot t^{-1} - u(t) - y_0\, t^{-1} \\
&= [u(t)]\cdot\left[t^{-1} - 1\right] - y_0\, t^{-1}
\end{aligned}
$$

da cui il teorema segue ponendo $\alpha = -1$, $\beta = 0$ e $A_{-1} = y_0$.

Per quanto una tale dimostrazione diretta sia assolutamente naturale, il teorema II può anche essere tratto come una conseguenza del teorema I.[146] Una tale procedura dimostrativa ha il vantaggio di utilizzare un'inferenza che può essere generalmente riapplicata anche nelle dimostrazioni dei prossimi teoremi III-VI, i quali si presentano quindi anch'essi come delle conseguenze del teorema I. Per questo basta osservare che la precedente definizione è tale da implicare il seguente risultato di ordine generale (che Laplace non formula mai in termini espliciti):[147]

---

[146] Ecco come Laplace enuncia e giustifica il suo risultato [cfr. Laplace (1779), p. 212]:

Il suit de ces définition, que u étant la fonction génératrice de y_x, celle de y_{x-r} sera $u\cdot t^r$; car il est visible que le coëfficient de t^x dans $u\cdot t^r$, est égale à celui de t^{x-r} dans u, et par conséquent égale à y_{x-r}.

[147] La dimostrazione è assolutamente banale assumendo la (138).

Teorema A: Se F(t) e G(t) sono rispettivamente le funzioni generatrici di $\Phi(y_x)$ e $\Psi(y_x)$, allora F(t) + G(t) è la funzione generatrice di $\Phi(y_x) + \Psi(y_x)$.

Per trarre il teorema II basta allora porre $r = 1$ nel teorema I e sommare fra loro le funzioni generatrici di $\Phi(y_x) = y_x$ e $\Psi(y_x) = y_{x+1}$.[148]

III. 4. *d*. β. *Ulteriori risultati di ordine generale relativi al calcolo diretto delle funzioni generatrici*

Reinterpretata come sopra la definizione di funzione generatrice, non sarà difficile riformulare opportunamente gli enunciati e le dimostrazioni degli ulteriori teoremi di ordine generale che Laplace presenta relativamente al calcolo diretto.

Dal teorema II, ponendo ${}_1\Delta^{\nu}[y_x] = {}_1\Delta[\Delta^{\nu-1}(y_x)]$ ($\nu \in \{N-0\}$), é possibile dimostrare per induzione il risultato seguente.

Teorema III: Se $u = u(t)$ è la funzione generatrice di y_x, allora la funzione generatrice di ${}_1\Delta^{\nu}y_x$ è $[u(t)]\cdot[t^{-1}-1]^{\nu}$.

Ovvero:

Teorema III*: Se $u = u(t)$ è una funzione naturalmente generatrice di y_x, allora la funzione generatrice di ${}_1\Delta^{\nu}y_x$ è $[u(t)]\cdot[t^{-1}-1]^{\nu}$.

In effetti se $[u(t)]\cdot[t^{-1}-1]^{\nu-1}$ è la funzione generatrice di ${}_1\Delta^{\nu-1}y_x$, dal teorema II segue che $[u(t)]\cdot[t^{-1}-1]^{\nu}$ é la funzione generatrice di ${}_1\Delta[\Delta^{\nu-1}(y_x)] = {}_1\Delta^{\nu}y_x$. Assunto l'antecedente del teorema, il conseguente seguirà allora per le posizioni $\alpha = -\nu$ e $\beta = 0$.

Ponendo invece $\nabla y_x = a_0 y_x + a_1 y_{x+1} + a_2 y_{x+2} + \ldots + a_\mu y_{x+\mu}$ è facile trarre, assumendo la (140),

$$\begin{aligned}\sum_{x=0}^{\infty} \nabla y_x t^x &= a_0\left(y_0 + y_1 t + y_2 t^2 + \&c.\right) + a_1\left(y_1 + y_2 t + y_3 t^2 + \&c.\right) + \ldots \\ &\quad \ldots + a_\mu\left(y_\mu + y_{\mu+1} t + y_{\mu+2} t^2 + \&c.\right) \\ &= a_0\,[u(t)] + a_1 t^{-1}\left[u(t) - y_0\right] + \ldots \\ &\quad \ldots + a_\mu t^{-\mu}\left[u(t) - y_0 - y_1 t - \ldots - y_{\mu-1} t^{\mu-1}\right]\end{aligned} \tag{143}$$

[148]Tanto la dimostrazione diretta del teorema II che quella del teorema A mostrano la necessità di far riferimento nella definizione a due diversi valori α e β. Ciò permette infatti la composizione di risultati riferiti alle funzioni generatrici di differenti funzioni.

$$= [u(t)]\left(a_0 + a_1 t^{-1} + \ldots + a_\mu t^{-\mu}\right) - t^{-1}\left(a_1 y_0 + \ldots + a_\mu y_{\mu-1}\right) - \ldots$$

$$\ldots - t^{-\mu} a_\mu y_0$$

da cui, ponendo $\alpha = -\mu$ e $\beta = 0$ è facile trarre il nuovo teorema:

Teorema IV: Se $u = u(t)$ è la funzione generatrice di y_x, allora la funzione generatrice di ∇y_x è $[u(t)]\cdot[a_0 + a_1 t^{-1} + a_2 t^{-2} + \ldots + a_\mu t^{-\mu}]$.

Ovvero:

Teorema IV*: Se $u = u(t)$ è una funzione naturalmente generatrice di y_x, allora la funzione generatrice di ∇y_x è $[u(t)]\cdot[a_0 + a_1 t^{-1} + a_2 t^{-2} + \ldots + a_\mu t^{-\mu}]$.

Da qui non è poi difficile trarre per induzione il seguente risultato generale.

Teorema V: Se $u = u(t)$ è la funzione generatrice di y_x, allora la funzione generatrice di $\nabla^\nu y_x = \nabla[\nabla^{\nu-1} y_x]$ ($\nu \in \{N-0\}$) è $[u(t)]\cdot[a_0 + a_1 t^{-1} + a_2 t^{-2} + \ldots + a_\mu t^{-\mu}]^\nu$.

Ovvero:

Teorema V*: Se $u = u(t)$ è una funzione naturalmente generatrice di y_x, allora la funzione generatrice di $\nabla^\nu y_x = \nabla[\nabla^{\nu-1} y_x]$ ($\nu \in \{N-0\}$) è $[u(t)]\cdot[a_0 + a_1 t^{-1} + a_2 t^{-2} + \ldots + a_\mu t^{-\mu}]^\nu$.

Combinando i teoremi I, III e V Laplace deduce allora:

Teorema VI: Se $u = u(t)$ è la funzione generatrice di y_x, allora la funzione generatrice di $\Delta^\nu \nabla^\sigma y_{x-r}$ ($\nu, \sigma \in \{N-0\}$) è $[u(t)]\cdot[a_0 + a_1 t^{-1} + a_2 t^{-2} + \ldots + a_\mu t^{-\mu}]^\sigma \cdot [t^{-1} - 1]^\nu t^r$.

Ovvero:

Teorema VI*: Se $u = u(t)$ è una funzione naturalmente generatrice di y_x, allora la funzione generatrice di $\Delta^\nu \nabla^\sigma y_{x-r}$ ($\nu, \sigma \in \{N-0\}$) è $[u(t)]\cdot[a_0 + a_1 t^{-1} + a_2 t^{-2} + \ldots + a_\mu t^{-\mu}]^\sigma \cdot [t^{-1} - 1]^\nu t^r$.

Come è chiaro i teoremi II e III sono rispettivamente dei casi particolari dei teoremi IV e V, tratti secondo le posizioni $a_0 = -1$, $a_1 = 1$ e $a_2 = \ldots = a_\mu = 0$. Laplace lo sottolinea osservando che il teorema VI può essere generalizzato a una "funzione lineare"[149] qualsiasi di y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, &c., ovvero che se $\Gamma^\nu(y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, \text{\&c.}) = \nabla^\nu(y_x) = \Gamma[\nabla^{\nu-1}(y_x), \nabla^{\nu-1}(y_{x+1}), \text{\&c.}] = \Gamma[\Gamma^{\nu-1}(y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, \text{\&c.}), \Gamma^{\nu-1}(y_{x+1}, y_{x+2}, \text{\&c.}), \Gamma^{\nu-1}(y_{x+2}, \text{\&c.}), \text{\&c.}]$ è una qual-

[149] Ecco una delle "rare occasioni" cui ho fatto cenno nella precedente nota (138). Si noti tuttavia che la" funzione" non è qui direttamente una funzione di x, ma piuttosto delle funzioni di x: y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, &c..

siasi "funzione lineare" delle variabili y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, &c., $u(t)$ è la funzione (naturalmente) generatrice di y_x e $s(t) = \Gamma(1, t^{-1}, t^{-2}, \&c.)$, allora $[u(t)]\cdot[s(t)]^{\nu}$ è la funzione generatrice di $\nabla^{\nu}(y_x)$ (∇ "n'étant pas une quantité mais une caractéristique").[150] Essendo la forma di $\nabla(y_x)$ utilizzata nella (143) la forma generica di una funzione lineare delle variabili considerate, una tale osservazione non aggiunge in realtà alcuna informazione a quelle già contenute nel teorema VI, a meno che non si voglia intendere una "funzione lineare qualsiasi" delle variabili y_x, y_{x+1}, y_{x+2}, &c., come un polinomio *infinito* di grado uno di infinite variabili. Proprio questa sembra l'interpretazione intesa di Laplace che nel 1812, nella *Théorie analytique des probabilités*, si esprimerà in modo esplicito in tal senso.[151] Una tale estensione è tuttavia del tutto priva di dimostrazione.

Ben più rilevante è d'altra parte l'estensione che Laplace introduce surrettiziamente subito dopo:

> cela sera encore vrai - egli scrive -, en supposant ces puissances [gli esponenti di ∇] fractionnaires, et même incommensurables.[152]

Consideriamo il caso più semplice, ovvero il teorema I, e poniamo $\nabla(y_x) = y_{x+s}$, e quindi: $\nabla^2(y_x) = \nabla[\nabla(y_x)] = y_{x+2s}$, ..., $\nabla^{\nu}(y_x) = y_{x+\nu s}$. La possibilità di prendere ν come un valore reale corrisponde alla possibilità di estendere il teorema I al caso $\nu s = r \in \mathbf{R}$. La funzione $y_z = y_{x+\nu s} = y_{x+r}$ può così essere intesa come una funzione $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$. Da qui Laplace trae che se $u = u(t)$ é la funzione (naturalmente) generatrice di y_x allora $[u(t)]\cdot[t^{-\xi}-1]^{\nu}$ è la funzione generatrice della differenza finita ${}_{\xi}\Delta^{\nu}y_x$ ($\nu = 1, 2, ...$).[153] Benché tali estensioni del teorema I al caso $r \in \mathbf{R}$ e dei teoremi II e III al caso di differenze finite a ragione qualsiasi siano le sole generalizzazioni introdotte da Laplace richiamandosi all'estendibilità dei suoi risultati al caso di esponenti qualsiasi della "caratteristica" ∇, le quali abbiano un ruolo effettivo nelle parti successive della memoria, esse appaiono come assolutamente essenziali nell'economia della teoria, che perderebbe altrimenti una grande parte dell'interesse matematico che Laplace sembra assegnarle. Ciò nonostante questi non ritiene opportuno introdurre alcuna esplicita dimostrazione dei teoremi I e II generalizzati, non enunciandoli peraltro che implicitamente.[154]

Consideriamo in primo luogo il teorema I. Agendo in termini puramente formali la sua generalizzazione sembra dimostrabile solo a condizione di riferire la nozione di funzione generatrice a serie non intere, anche se tali

[150] Cfr. Laplace (1779), p. 213. Il passaggio di Laplace è per la verità piuttosto oscuro. L'interpretazione proposta si basa comunque sul passaggio corrispondente della *Théorie analytique des probabilités* [cfr. Laplace (1812a), pp. 11].

[151] Cfr. *ivi*.

[152] Cfr. Laplace (1779), p. 213.

[153] In verità Laplace non enuncia mai tali risultati in termine generali limitandosi a assumerli nel corso delle proprie applicazioni dei teoremi precedenti [cfr. a esempio *ivi*, p. 216].

[154] Cfr. la precedente nota (153).

che la successione degli esponenti proceda secondo una ragione unitaria, a partire da un valore reale qualsiasi.[155] Data la (140) si avrà infatti, per r qualsiasi ($r \in \mathbf{R}$)

$$(144) \qquad [u(t)]\cdot t^r = t^r \left(\sum_{x=0}^{\infty} y_x \, t^x \right) = y_0 t^r + y_1 t^{r+1} + y_2 t^{r+2} + \&c.$$

che introducendo una notazione opportuna potremmo scrivere sotto la forma

$$(145) \qquad [u(t)]\cdot t^r = \sum_{\eta=0+r}^{\infty+r} y_{\eta-r} \, t^\eta$$

Se una tale procedura suggerisce una semplice trasposizione della definizione precedente - la quale non consista che nell'intendere i valori α e β in (138) come dei qualsiasi valori reali, tali che la loro differenza β-α sia un numero naturale (eventualmente lo zero, come nel caso in questione, in cui basterà porre, per trarre il teorema I generalizzato, $\alpha = \beta = r$) - tale riformulazione si rivela del tutto inadeguata tanto a permettere la dimostrazione diretta del teorema II generalizzato che a garantire l'estendibilità del teorema A a funzioni generatrici qualsiasi intese nel nuovo senso. Date le identità formali

$$(146) \qquad \begin{aligned} &\text{i) } F(t) = A_\alpha t^\alpha + A_{\alpha+1} t^{\alpha+1} + \ldots + A_{\beta-1} t^{\beta-1} + \sum_{x=0+\beta}^{\infty+\beta} \Phi(y_x)\, t^x \\ &\text{ii) } G(t) = A_{\alpha'} t^{\alpha'} + A_{\alpha'+1} t^{\alpha'+1} + \ldots + A_{\beta'-1} t^{\beta'-1} + \sum_{x=0+\beta'}^{\infty+\beta'} \Psi(y_x)\, t^x \\ &\qquad [\beta-\alpha = n,\ \beta'-\alpha' = n';\ \ n, n' \in \mathbf{N}] \end{aligned}$$

la possibilità di esprimere la somma F(t) + G(t) per mezzo di uno sviluppo della stessa forma relativamente alla somma $\Phi(y_x) + \Psi(y_x)$ dipende dall'esistenza di due valori naturali m e m' tali che $\beta+m = \beta'+m'$, ciò che significa che la differenza $\beta-\beta' = m'-m$ debba essere un numero intero. Ora, se assumiamo la (140), la funzione generatrice della trasformata $y_{x+\xi}$ sarà, in base al teorema I generalizzato, $[u(t)]\cdot t^{-\xi}$ e la differenza delle funzioni generatrici di $y_{x+\xi}$ e y_x fornirà lo sviluppo

[155] Per trarre la stessa conclusione nel caso della prima interpretazione della definizione di funzione generatrice, nei termini di serie di Laurent, basta osservare che la (137) implica per ogni r ($r \in \mathbf{R}$) le identità

$$[u(t)]t^r = \&c.\ y_{-2}t^{r-2} + y_{-1}t^{r-1} + y_0 t^r + y_1 t^{r+1} + y_2 t^{r+2} + \&c.$$

$$= \sum_{x=-\infty}^{\infty} y_x \, t^{r-x} = \sum_{\eta=r-\infty}^{\infty-r} y_{\eta-r} \, t^\eta$$

$$(147) \qquad [u(t)]\cdot\left[t^{-\xi}-1\right]=\sum_{x=0-\xi}^{\infty-x} y_{x+\xi}\, t^{x}-\sum_{x=0}^{\infty} y_x\, t^{x}$$

che si trasformerà in uno sviluppo della forma richiesta solo a condizione che la differenza $(0-\xi) - 0 = -\xi$ sia espressa da un valore intero. La sola generalizzazione del teorema II che segue dalla nuova definizione è quindi tale da permettere il riferimento a differenze finite di una qualsiasi ragione *intera*.[156]

Per permettere la conclusione di Laplace dobbiamo allora modificare più radicalmente la definizione precedente di funzione generatrice, facendo riferimento a serie che procedono secondo una ragione costante, ma espressa da una valore ρ non naturale, a partire da un valore reale qualsiasi:

*Definizione**: Una funzione $F(t)$ è detta generatrice di $\Phi(y_x)$ (dove Φ è un operatore che agisce sulla funzione y_x dell'indice x) se e solo se essa è tale che, presi due opportuni valori reali finiti (di cui solo il primo può essere nullo) α e ρ e un opportuno valore naturale (eventualmente nullo) n (i quali valori devono quindi esistere in quanto tali), i metodi euleriani di sviluppo conducono alla generica identità formale:

$$(148) \qquad F(t) = A_\alpha t^{\alpha} + A_{\alpha+\rho} t^{\alpha+\rho} + \ldots + A_{\alpha+(n-1)\rho} t^{\alpha+(n-1)\rho} + \sum_{x=\alpha+n\rho}^{\infty+\alpha+n\rho}\!\!\rho\ \ \Phi(y_x)\, t^{x}$$

dove A_α, $A_{\alpha+\rho}$, ..., $A_{\alpha+(n-1)\rho}$ sono degli opportuni coefficienti indipendenti da t e il simbolo $\Sigma\rho$ indica una serie che procede secondo la ragione ρ. Se $\Phi(y_x) = y_x$ e $F(t)$ è tale che la (138) vale per le posizioni $\alpha = n = 0$, trasformandosi quindi nell'identità formale

$$(149) \qquad F(t) = \sum_{x=0}^{\infty}\!\rho\ \ y_x\, t^{x}$$

allora la funzione $F(t)$ sarà detta *naturalmente generatrice* della funzione y_x.

Data una tale definizione non sarà difficile dimostrare il teorema A, sotto la condizione che le due funzioni generatrici siano tali che i loro sviluppi rispet-

[156] Alla medesima conclusione si arriva ovviamente anche ponendo in luogo della (140) l'identità formale

$$u(t) = \sum_{x=0+\zeta}^{\infty+\zeta} y_x\, t^{x}$$

tino la condizione $\alpha-\alpha' = \rho m$ con m un opportuno numero intero (eventualmente lo zero). Assunta poi la (149) per la posizione $F(t) = u(t)$ sarà facile trarre

$$(150) \qquad [u(t)]\cdot t^{-\xi} = \sum_{x=-\xi}^{\infty-\xi} \rho\, y_{x+\xi}\, t^{x}$$

da cui la generalizzazione del teorema I segue per le posizioni $\alpha = -\xi$ e $n = 0$. Ritornando al teorema A e ponendo $F(t) = u(t)$ e $G(t) = [u(t)]\cdot t^{-\xi}$ si avranno le identità $\alpha = 0$ e $\alpha' = -\xi$ e quindi: $\alpha-\alpha' = \xi$. E' allora sufficiente prendere ξ uguale a ρ/m con m un qualsiasi numero intero per avere immediatamente una opportuna versione generalizzata del teorema II che corrisponde alla assunzione implicita di Laplace.

III. 4. *d.* γ. *Risultati generali relativi al calcolo inverso delle funzioni generatrici*

Risultati della stessa generalità possono essere ottenuti anche relativamente al calcolo inverso, ovvero alla determinazione della funzione generata, data la funzione generatrice. I due principali teoremi forniti da Laplace possono venir riformulati nei termini seguenti.

Teorema VII: Se $s = s(t)$ è una funzione qualsiasi di t, tale che la sua potenza ν-esima $[s(t)]^{\nu}$ possa essere sviluppabile in serie intera secondo le potenze di:
i) t^{-1},
ii) $(t^{-1}-1)$;
se $u(t)$ è la funzione generatrice di y_x e $[u(t)]\cdot[s(t)]^{\nu}$ quella di una nuova funzione $\Diamond^{\nu} y_x$ $(= \Diamond[\Diamond^{\nu-1}])$;
allora per trovare la funzione $\Diamond^{\nu} y_x$ è sufficiente sostituire:
i) y_{x+k} a t^{-k} ($k = 0, 1, 2,$ &c.) nello sviluppo di $[s(t)]^{\nu}$ secondo le potenze naturali di t^{-1},
ii) $\Delta^k y_x$ a $(t^{-1}-1)^k$ ($k = 0, 1, 2,$ &c.) nello sviluppo di $[s(t)]^{\nu}$ secondo le potenze naturali di $(t^{-1}-1)$.

Ovvero:

Teorema VII*: Se $s = s(t)$ ...;
se $u(t)$ è una funzione naturalmente generatrice di y_x, mentre $[u(t)]\cdot[s(t)]^{\nu}$ è la funzione generatrice della nuova funzione $\Diamond^{\nu} y_x$ $(= \Diamond[\Diamond^{\nu-1}])$;
allora ... .

Teorema VIII: Se $s = s(t)$ è una funzione qualsiasi di t, tale che la sua potenza ν-esima $[s(t)]^\nu$ possa essere sviluppabile in serie intera secondo le potenze di una funzione $r = r(t^{-1})$ di t^{-1};
se $u(t)$ è la funzione generatrice di y_x, $[u(t)]\cdot[r(t^{-1})]^\mu$ quella di una nuova funzione $\square^\mu y_x$ e $[u(t)]\cdot[s(t)]^\nu$ quella di un'ulteriore funzione $\Diamond^\nu y_x$ $(= \Diamond[\Diamond^{\nu-1}])$;
allora per trovare la funzione $\Diamond^\nu y_x$ è sufficiente sostituire $\square y_x$ a $r(t^{-1})$ in $s(t)$, sviluppare $[s(t)]^\nu$ secondo le potenze naturali di $\square y_x$ e sostituire nello sviluppo $\square^\mu y_x$ a $[\square y_x]^\nu$.

Ovvero:

Teorema VIII*: Se $s = s(t)$ ...;
se $u(t)$ è una funzione naturalmente generatrice di y_x, mentre $[u(t)]\cdot[r(t^{-1})]^\mu$ e $[u(t)]\cdot[s(t)]^\nu$ sono rispettivamente le funzioni generatrici di due nuove funzioni $\square^\mu y_x$ e $\Diamond^\nu y_x$ $(= \Diamond[\Diamond^{\nu-1}])$;
allora ... .

Come chiaro il teorema VII non è che un caso particolare del teorema VIII che si tratta quindi di dimostrare. Posta a questo scopo l'identità formale

$$(151) \qquad [s(t)]^\nu = \sum_{i=\zeta}^{\infty} K_i \left[r\left(t^{-1}\right) \right]^i$$

(dove ζ è un valore razionale opportuno), è facile trarne, secondo le ipotesi del teorema,

$$(152) \qquad \begin{aligned} [u(t)]\cdot[s(t)]^\nu &= \sum_{i=\zeta}^{\infty} K_i \, [u(t)]\cdot\left[\left(r(t^{-1}\right)\right]^i = \sum_{i=\zeta}^{\infty} K_i \left(\sum_{x=\gamma}^{\infty} \square^i \, y_x \, t^x \right) \\ &= \sum_{x=\gamma}^{\infty} \left(\sum_{i=\zeta}^{\infty} K_i \, \square^i \, y_x \right) t^x \end{aligned}$$

(dove γ è un valore razionale opportuno) e quindi:

$$(153) \qquad \Diamond^\nu \, y_x = \sum_{i=\gamma}^{\infty} K_i \, \square^i \, y_x$$

cui il teorema segue secondo la prima definizione e la posizione $\alpha = \beta = \gamma$.

Sia ora $w = w(t)$ la funzione generatrice dell'integrale finito ${}_1\Sigma^\nu y_x$ della funzione y_x corrispondente alla differenza ${}_1\Delta y_x$. Dal teorema III segue che $w(t)\ [t^{-1}-1]^\nu$ è la funzione generatrice di ${}_1\Delta^\nu[{}_1\Sigma^\nu y_x] = y_x$. Ponendo allora l'identità formale

$$(154)\qquad w(t) = \sum_{x=0}^{\infty} {}_1\Sigma^{\nu}\left[y_x\right] t^x$$

segue immediatamente

$$(155)\qquad [v(t)]\cdot\left[t^{-1} - 1\right]^{\nu} = A_{-\nu}t^{-\nu} + A_{-\nu+1}t^{-\nu+1} + \ldots + A_{-1}t^{-1} + \sum_{x=0}^{\infty} y_x\, t^x$$

e, quindi, supponendo la (140):

$$(156)\qquad v(t) = \frac{[u(t)]\, t^{\nu} + A_{-\nu} + A_{-\nu+1}t + \ldots + A_{-1}\, t^{\nu-1}}{(1 - t)^{\nu}}$$

Si potrà quindi enunciare il seguente teorema:

Teorema IX: Se $u = u(t)$ è la funzione generatrice di y_x, allora la funzione generatrice di $\Sigma^{\nu}y_x$ è

$$[u\,(t)]\cdot[t^{-1}-1]^{-\nu} + \frac{A_{-\nu} + A_{-\nu+1}t \ + \ldots + A_{-1}t^{\nu-1}}{(1 - t)^{\nu}}.$$

Ovvero:

Teorema IX*: Se $u = u(t)$ è una funzione naturalmente generatrice di y_x, allora la funzione generatrice di $\Sigma^{\nu}y_x$ è

$$[u\,(t)]\cdot[t^{-1}-1]^{-\nu} + \frac{A_{-\nu} + A_{-\nu+1}t \ + \ldots + A_{-1}t^{\nu-1}}{(1 - t)^{\nu}}.$$

Così se $u(t)$ è la funzione (naturalmente) generatrice di y_x, la funzione generatrice di ${}_1\Sigma^{\nu}y_x$ è, "facendo astrazione" dalle costanti (di integrazione) A_{-1}, A_{-2}, ..., $A_{-\nu}$, $[u(t)]\cdot[t^{-1}-1]^{\nu}$.

Dai teoremi III e IX Laplace trae la seguente conclusione:

> En faisant abstraction de [...] constantes [...] on aurait donc la fonction génératrice de $\Sigma^{\nu}y_x$, en changeant ν en $-\nu$ dans la fonction génératrice de $\Delta^{\nu}y_x$; et réciproquement, on aurait la variable correspondante de la fonction $u\cdot\left[\frac{1}{t} - 1\right]^{\nu}$ dans laquelle on suppose ν négatif, en changeant ν en $-\nu$ dans $\Delta^{\nu}y_x$, et en supposant que les différences négatives représentent des intégrales.[157]

[157]Cfr. *ivi*, p. 215.

III. 4. *d*. 8. *Applicazioni dei teoremi generali*

Il punto di vista operazionale già presente nelle memorie di Laplace del 1773 e del 1777 trova nella nuova teoria delle funzioni generatrici una formulazione esplicita e assolutamente generale. Il problema che tale teoria affronta è tuttavia un problema classico, riducendosi essenzialmente a quello dell'edificazione di una teoria unitaria e generalissima degli sviluppi delle funzioni in serie intere, di cui i teoremi I-IX dovrebbero costituire, nelle intenzioni di Laplace, i principi fondamentali. Tali risultati contengono inoltre una giustificazione *a priori* della regola algoritmica utilizzata da Lagrange nel 1772 per pervenire alle proprie formule compatte e anzi ne forniscono una generalizzazione riferita a certe classi di operatori reiterabili definiti su funzioni $y = y_x$.

Ciò detto è tuttavia opportuno sottolineare come nella memoria di Laplace non si trovino né un calcolo generale degli operatori, né una teoria la quale verta su operatori qualsiasi astrattamente definiti. Questi non fa che immergere in un quadro operazionale un insieme di risultati matematici particolari relativi a operatori specifici e, in particolare, alla differenza finita e al corrispondente integrale. L'idea di Laplace non è quindi quella di intendere il calcolo (diretto e inverso) delle differenze come un caso particolare di una calcolo generale degli operatori (come sarà invece il caso di Servois), ma piuttosto quella di intendere in termini operazionali il calcolo delle differenze. Tutta la teoria sembra costruita allo scopo di fornire un corrispondente algoritmico delle operazioni Δ^v e Σ^v, il quale possa essere utilizzato, anche nel caso in cui le differenze divengano infinitamente piccole, per trarre direttamente un'amplissima classe di sviluppi, fra cui ovviamente lo sviluppo in serie intera di ogni funzione espressa esplicitamente per mezzo di una forma analitica semplice (ovvero il "teorema" di Taylor).

E' proprio a questo obiettivo che Laplace dedica la parte largamente più consistente della sua memoria, la quale ne occupa i paragrafi III-XXIV. Non considererò qui che alcuni dei numerosi risultati che essa contiene, scegliendoli fra quelli che mantengono una relazione più stretta con gli argomenti discussi nel corso del presente capitolo.

Essendo in primo luogo (per ogni s intero)

$$(157)\qquad \begin{aligned}[u(t)]\cdot t^{-s} &= [u(t)]\cdot\left[1+\left(t^{-1}-1\right)\right]^{s}\\ &= [u(t)]\cdot\left[1+s\left(t^{-1}-1\right)+\frac{s(s-1)}{2!}\left(t^{-1}-1\right)^{2}+\&c.\right]\end{aligned}$$

si avrà, passando dalle funzioni generatrici alle funzioni generate,

$$(158)\qquad y_{x+s} = y_x + s\ {}_1\Delta y_x + \frac{s(s-1)}{2!}\ {}_1\Delta^2 y_x + \&c.$$

che, commenta Laplace, "servira à interpoler les suites dont les différences des termes vont décroissant".[158] Per dimostrare esplicitamente tale identità, ovvero per mostrare la legittimità di un tale passaggio dalle funzioni generatrici a quelle generate, basterà sostituire nella (157) le funzioni $[u(t)]\cdot t^{-s}$, $u(t)$, $[u(t)]\cdot[t^{-1}-1]$, $[u(t)]\cdot[t^{-1}-1]^2$, &c. con gli sviluppi determinati in base ai teoremi precedenti e porre uguale a zero (secondo il metodo dei coefficienti indeterminati) il coefficiente della potenza t^x a esponente generico. Se s non è intero o la ragione delle differenze vuole essere presa diversa dall'unità basta sviluppare la funzione $[u(t)]\cdot t^{-s}$ secondo l'equazione identica $[u(t)]\cdot t^{-s} =$ $[u(t)]\cdot\left[1+\left(t^{-\xi}-1\right)\right]^{s/\xi}$ e considerare le generalizzazioni dei teoremi II e III secondo opportune scelte di ξ e ρ relativamente a s o di s e ρ relativamente a ξ. Non sarà difficile, prendendo a esempio $\rho = \xi = s/n$ (con n un numero intero qualsiasi), riscrivere opportunamente la dimostrazione della (158) e trarre quindi per, ogni ξ reale e ogni n naturale, l'identità:

$$(159) \qquad y_{x+n\xi} = y_x + n\,{}_{\xi}\Delta y_x + \frac{n(n-1)}{2!}\,{}_{\xi}\Delta^2 y_x + \ldots + {}_{\xi}\Delta^n y_x$$

che, prendendo y_x come una qualsiasi funzione $y = y(x)$ non è altro che la formula d'interpolazione dimostrata da Taylor nel teorema III del *Methodus incrementorum*.[159]

Altri procedimenti - fondati su opportuni sviluppi della potenza t^s - forniscono differenti formule di interpolazione, le quali vengono così tutte riunite entro un solo risultato di ordine generale espresso nel linguaggio delle funzioni generatrici, alla cui teoria Laplace ha quindi ridotto la soluzione di *ogni* problema di interpolazione. Non analizzerò qui i risultati particolari che questi fornisce relativamente a tale soggetto nel corso dei paragrafi III-IX della sua memoria, i quali sono poi applicati alla soluzione di certe classi di equazioni differenziali, all'edificazione di una teoria generale delle serie ricorrenti e alla "trasformazione delle serie". Mi soffermerò invece sulle nuove dimostrazioni fornite da Laplace, nel quadro della propria teoria delle funzioni generatrici, delle formule compatte di Lagrange del 1772.[160]

Data la funzione $[u(t)]\cdot[t^{-\omega\Omega}-1]^{\lambda}$ $(\lambda \in \mathbb{N})$ l'equazione identica

$$(160) \qquad [u(t)]\cdot\left[t^{-\omega\Omega}-1\right]^{\lambda} = [u(t)]\cdot\left[\left(1+\left(t^{-\omega}-1\right)\right)^{\Omega}-1\right]^{\lambda}$$

---

[158]Cfr. *ivi*, p. 216. Per l'allusione alla convergenza della serie cfr. *sotto*. E' facile capire come adattando opportunamente il procedimento possano essere ottenuti, senza alcuna difficoltà, anche gli sviluppi di $\Delta^{\nu} y_x$ e $\nabla^{\nu} y_x$.

[159]Cfr. la formula (17) del precedente paragrafo III.2.*b*.α..

[160]Cfr. *ivi*, par. X, pp. 245-8.

indica come questa possa venire sviluppata secondo le potenze intere e positive di ($t^{-\omega}$ -1). Assunto che y_x è la funzione generatrice di $u(t)$ sarà allora facile, applicando il teorema VII generalizzato, trovare immediatamente il coefficiente $\Diamond^\lambda y_x$ di t^x nello sviluppo di $[u(t)]\cdot[t^{-\omega\Omega} -1]^\lambda$. Tenendo conto anche del teorema III generalizzato si avrà allora:

$$(161)\qquad \Diamond^\lambda y_x = {}_{\omega\Omega}\Delta^\lambda y_x = \left[\left(\left(1 + {}_\omega\Delta\, y_x\right)^\Omega - 1\right)^\lambda\right]_*$$

Considerando poi un qualsiasi esponente negativo e uguale a $-\lambda$ sarà facile trarre, "en faisant abstraction des constantes arbitraires"[161]:

$$(162)\qquad {}_{\omega\Omega}\Sigma^\lambda y_x = \left[\left(\left(1 + {}_\omega\Delta\, y_x\right)^\Omega - 1\right)^{-\lambda}\right]_*$$

Si consideri ora ω come una differenza infinitamente piccola riferita alla variabile x e si ponga quindi $\omega = dx$. La differenza finita ${}_\omega\Delta y_x$ si trasforma allora nel differenziale dy_x e se Ω é inteso come un valore infinito si può porre, alla maniera di Euler,[162] $\omega\Omega = \xi$ (con ξ una differenza finita relativa alla variabile x). La (161) e la (162) si trasformano allora nelle identità seguenti:

$$(163)\qquad \begin{array}{ll} \text{i)} & {}_\xi\Delta^\lambda y_x = \left[\left(\left(1 + dy_x\right)^\Omega - 1\right)^\lambda\right]_* \\ \text{ii)} & {}_\xi\Sigma^\lambda y_x = \left[\left(\left(1 + dy_x\right)^\Omega - 1\right)^{-\lambda}\right]_* \end{array}$$

Ponendo d'altra parte, per dz infinitamente piccolo, l'identità $\log(1+dz) = dz$ (ovvero, omettendo gli infinitamente piccoli di ordine superiore) si avrà

$$(164)\qquad \log\left(1 + dy_x\right)^\Omega = \Omega \log\left(1 + dy_x\right) = \Omega dy_x = \Omega\, dx\, \frac{dy_x}{dx} = \xi\, \frac{dy_x}{dx}$$

e quindi

[161]Cfr. *ivi*, p. 246.

[162]Cfr. i precedenti paragrafi III.2.*b*.β. e III.3.*c*.γ..

$$(165) \qquad \left(1 + dy_x\right)^{\Omega} = e^{\frac{dy_x}{dx}\xi}$$

ovvero, secondo la (163):

$$(166) \qquad \begin{aligned} &\text{i)} \quad {}_{\xi}\Delta^{\lambda} y_x = \left[\left(e^{\frac{dy_x}{dx}\xi} - 1\right)^{\lambda}\right]_* \\ &\text{ii)} \quad {}_{\xi}\Sigma^{\lambda} y_x = \left[\left(e^{\frac{dy_x}{dx}\xi} - 1\right)^{-\lambda}\right]_* \end{aligned}$$

che prendendo y_x come una qualsiasi funzione di x, $y = y(x)$ corrispondono ovviamente alla (64) e alla (65).[163]

Prendendo invece nella (161) e nella (162) Ω infinitamente piccolo e uguale a dx e ω finito e uguale a ξ (e quindi $\Omega\omega = dx$) e ponendo (omettendo ancora gli infinitamente piccoli di ordine superiore)

$$(167) \qquad \left(1 + {}_{\xi}\Delta y_x\right)^{dx} = e^{dx \log\left(1 + {}_{\xi}\Delta y_x\right)} = 1 + dx \log\left(1 + {}_{\xi}\Delta y_x\right)$$

sarà facile trarre:

[163] Ridimostrati i teoremi di Lagrange, Laplace presenta un metodo per generalizzarli. Una semplicissima applicazione è la seguente. Preso ∇y_x come nel teorema IV e posto $t^{-1} = z+1$, si avrà

$$\{u(t)\}\left[a_1 + a_2 t^{-1} + \ldots + a_\mu t^{-\mu}\right] = \{u(t)\}\left[a_1 + a_2(z+1) + \ldots a_\mu(z+1)^{\mu}\right]$$

$$= \{u(t)\}\left[a_1 + a_2 + \ldots + a_\mu\right] + \{u(t)\}\left[t^{-1} - 1\right]\left[a_2 + 2a_3 + \ldots + \frac{\mu(\mu-1)}{2!}a_\mu\right] +$$

$$+ \{u(t)\}\left[t^{-1} - 1\right]\left[a_3 + \ldots + \frac{\mu(\mu-1)(\mu-2)}{3!}a_\mu\right] + \ldots + \{u(t)\}\left[t^{-1} - 1\right]a_\mu$$

e quindi

$$\nabla y_x = K_0\, y_x + K_1\, {}_1\Delta y_x + K_2\, {}_1\Delta^2 y_x + \ldots K_\mu\, {}_1\Delta^{\mu} y_x$$

(con K_0, K_1, ..., K_μ degli opportuni coefficienti costanti), ovvero:

$$\nabla y_x = \left[K_0\, y_x + K_1\left(e^{\frac{dy_x}{dx}} - 1\right) + K_2\left(e^{\frac{dy_x}{dx}} - 1\right)^2 + \ldots + K_\mu\left(e^{\frac{dy_x}{dx}} - 1\right)^{\mu}\right]_*$$

$$(168)\qquad \begin{aligned} &\text{i)}\quad \frac{d^{\lambda} y_x}{dx^{1}} = \left[\left(\log\left(1 + {}_{\xi}\Delta y_x\right)\right)^{\lambda}\right]_{*} \\ &\text{ii)}\quad \int^{\lambda} y_x \, dx^{\lambda} = \left[\left(\log\left(1 + {}_{\xi}\Delta y_x\right)\right)^{-\lambda}\right]_{*} \end{aligned}$$

che per $y_x = y(x)$ non sono che la (78) e la sua corrispondente relativamente all'integrale.

Laplace ha così dimostrato contemporaneamente tanto le formule compatte di Lagrange, che la legittimità del passaggio dalle differenze agli integrali per mezzo di un'inversione del segno dell'esponente. Non solo, egli ha mostrato quale proprietà degli operatori Δ e d permette l'inferenza congetturata dallo stesso Lagrange nel 1772:

> On voit - egli scrive - [...] que ces analogies [le formule di Lagrange] tiennent à ce que les produits de la fonction u, génératrice de y_x, par les puissances successives de $\frac{1}{t} - 1$, sont les fonctions génératrices des différences finies successives de y_x, tandis que les quotiens de u, par ces mêmes puissances, sont les fonctions génératrices des intégrales finies de y_x.[164]

Benché generale l'esplicazione di Laplace non è tuttavia la sola possibile. In particolare resta aperto il problema di giustificare tanto l' "analogia di Leibniz" che l'inferenza di Lagrange in modo indipendente dalla nozione (in quanto tale estrinseca relativamente alla questione) di funzione generatrice, ovvero di indicare le proprietà formali degli operatori Δ, d, Σ e $\int$ che sono responsabili degli stessi risultati ottenuti entro la teoria delle funzioni generatrici. Sarà proprio questo il problema affrontato un quarto di secolo più tardi da Servois.

Come è evidente dalla ricostruzione precedente la dimostrazione di Laplace delle formule compatte di Lagrange è del tutto indipendente dalla presupposizione del "teorema" di Taylor, che si presenta anzi come un loro caso particolare. Il percorso argomentativo è così invertito rispetto a quello seguito tanto da Lagrange che dallo stesso Laplace nelle memorie del 1773 e 1777.

Per quanto tale "teorema" non sia mai enunciato in termini espliciti nella memoria del 1779, esso è tuttavia dimostrabile assai facilmente del tutto indipendentemente dalle formule di Lagrange e secondo un procedimento perfettamente analogo a quelli considerati fin qui. Data la funzione $[u(t)] \cdot t^{-\xi}$ si ponga l'equazione identica

164 Cfr. *ivi*, p. 248.

$$(169) \qquad [u(t)]\cdot t^{-\xi} = [u(t)]\cdot\left[1 + \left(t^{-\omega} - 1\right)\right]^{\xi/\omega}$$

Sotto la condizione che il rapporto ξ/ω sia espresso da un numero intero, la (159) assume allora la forma

$$(170) \qquad y_{x+\xi} - y_x = \frac{\xi}{\omega}\,{}_{\omega}\Delta y_x + \xi(\xi-\omega)\,\frac{{}_{\omega}\Delta^2 y_x}{2!\,\omega^2} + \ldots + {}_{\omega}\Delta^{\xi/\omega} y_x$$

da cui il "teorema" di Taylor segue ponendo ω infinitamente piccolo e uguale a dx e quindi ξ/ω infinito e $\xi = (\xi-\omega) = (\xi-2\omega) =$ &c..

Una tale dimostrazione del "teorema" di Taylor, la quale sembra la più semplice possibile entro il contesto della teoria delle funzioni generatrici, comporta, come è chiaro, delle esplicite presupposizioni infinitesimaliste di natura espressamente differenziale. Lo stesso Laplace utilizza, d'altra parte, presupposizioni simili nel dimostrare i teoremi di Lagrange del 1772. Tanto la dimostrazione del "teorema" di Taylor, che quella delle formule compatte di Lagrange riposano così sull'interpretazione leibniziana del *calcolo* come calcolo delle differenze infinitamente piccole. Da tale punto di vista la differenza rispetto alle memorie del 1773 e del 1777 - in cui le dimostrazioni degli stessi risultati non seguivano che dall'impiego dell'algoritmo del *calcolo*, indipendentemente da ogni sua interpretazione particolare - è quindi evidente. Se da una parte una teoria generale degli sviluppi in serie intere è stata ormai fondata, dall'altra l'integrazione in essa del *calcolo* e quindi il passaggio all'analisi superiore, dipende ancora da un presupposto concettuale legato alla concezione dell'infinito. Ciò nonostante, la distinzione fra la differenza infinitamente piccola dx della variabile indipendente, la quale fornisce i coefficienti dello sviluppo di Taylor, e quella finita, che produce la differenza della funzione espressa da tale sviluppo, è perfettamente chiara e non richiede, come nel caso della dimostrazione di Lagrange del 1772, alcun dubbio passaggio dal finito all'infinitamente piccolo e viceversa. Non è d'altra parte difficile comprendere come tale distinzione riposi peraltro sullo stesso presupposto utilizzato da Euler nel 1736, che si presenta ora nelle vesti dell'equiparazione del rapporto ξ/dx con un numero naturale infinito.

Presentati i teoremi di Lagrange, Laplace scrive:

> Les formules précédentes ne peuvent être d'usage que dans le cas où les différences finies et infiniment petites de y_x vont en décroissant".[165]

La preoccupazione che egli esprime con tali parole è chiaramente quella della convergenza, la quale si presenta ancora una volta come condizione *a posteriori* di applicabilità dei risultati formali alla determinazioni di identità nu-

---

[165]Cfr. *ivi*, p. 249.

meriche. Ciò detto è tuttavia necessario sottolineare che la laconica osservazione di Laplace segna una differenza essenziale rispetto alla tradizionale impostazione di origine newtoniana. Sviluppando le formule di Lagrange si giunge, come è stato più volte osservato, a una classe di "teoremi" i quali possono tutti venire interpretati come delle generalizzazioni del "teorema" di Taylor. In luogo di richiedere l'appartenenza di ξ a un intervallo opportuno, la quale garantisca una decrescenza sufficientemente veloce delle successive potenze intere di tale incremento, Laplace rivolge la sua attenzione ai coefficienti di forma differenziale che tali "teoremi" contengono. Basta una semplice analisi dello stesso "teorema" di Taylor, compiuta alla luce delle sue generalizzazioni per differenze finite di ordine superiore, per comprendere la portata di un tale cambio di riferimento. Posto $\lambda = 2$, la (166)(i) fornisce l'identità:[166]

$$(171) \qquad {}_{\xi}\Delta^2 y_x = \sum_{k=2}^{\infty} 2(2^{k-1}-1)\,\frac{\xi^k}{k!}\,\frac{d^k y_x}{dx^k}$$

Sostituendo nell'espressione del "teorema" di Taylor si ha così

$$(172) \qquad {}_{\xi}\Delta\, y_x = \frac{dy_x}{dx}\xi + \Delta^2 y_x \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{2(2^{k-1}-1)}$$

che esprime il resto di ordine due dello sviluppo di Taylor, sotto la forma del prodotto di una differenza finita per un fattore numerico. Ripetendo la medesima operazione relativamente alla differenza terza si avrà poi

$$(172) \qquad {}_{\xi}\Delta\, y_x = \frac{dy_x}{dx}\xi + \frac{d^2 y_x}{2!\,dx^2}\xi^2 + \Delta^3 y_x \sum_{k=3}^{\infty} \frac{1}{3(3^{k-1}-2^k+1)}$$

e così via. La convergenza a zero della successione delle differenze finite di ordine superiore si presenta così come una condizione sufficiente per la convergenza dello sviluppo di Taylor. Per quanto Laplace trasformi inopinatamente tale condizione in una condizione necessaria, è proprio all'analisi del resto che egli sembra volgere la sua attenzione, avviando così quel programma che attraverso Lagrange e la sua analisi del resto in forma integrale (ovvero nella forma di d'Alembert e Laplace[167]) porterà nel XIX secolo alla teoria moderna della convergenza. Questo non è tuttavia, nell'economia della sua memoria - e sopratutto dal suo punto di vista - che un prodotto marginale di una teoria che mostra nel contempo e prima di tutto come il

---

[166] Cfr. la (73) e la (75).

[167] Cfr. il precedente paragrafo III.4.*c*.β..

trattamento formale degli sviluppi in serie delle funzioni, esplicitamente inaugurato da Euler, possa giungere a notevoli risultati, anche in riferimento a questioni strettamente numeriche, come l'interpolazione o l'approssimazione per serie della soluzione (generale) di un'equazione differenziale. Sarà d'altra parte proprio una tale impostazione, la quale considera la valutazione numerica come un atto *a posteriori* rispetto alla determinazione delle forme analitiche che esprimono non solo certe quantità, ma anche meramente il risultato di certe operazioni, che porterà Lagrange a fornire nella *Théorie* la propria valutazione del resto dello sviluppo di Taylor, sulla cui base egli saprà fondare l'intera portata applicativa della propria teoria delle funzioni analitiche, facendo di essa un'alternativa compiuta e perfettamente legittima del calcolo differenziale leibniziano.[168]

APPENDICE III. 4-A.

Nella presente appendice riformulerò gli enunciati dei teoremi I-VII della precedente sezione III.4.*d*. in termini di serie di Laurent, facendo seguire a ognuno di essi una opportuna dimostrazione. Per quanto riguarda i teoremi VIII-IX indicherò invece la natura delle difficoltà connesse a una tale insoddisfacente interpretazione.

III. 4-A. α. *Teoremi relativi al calcolo diretto delle funzioni generatrici*

Siano v una variabile a valori interi e $f_v = f(v)$: $\mathbf{Z} \to \mathbf{R}$ una funzione di v. Diremo che una funzione $g(t)$: $\mathbf{R} \to \mathbf{R}$ è generatrice di f_v se vale la relazione

$$(1) \qquad g(t) \cong \sum_{v=-\infty}^{\infty} f_v t^v$$

la quale indica che la serie $\sum_{v=-\infty}^{\infty} f_v t^v$ è lo sviluppo formale della funzione $g(t)$ in una serie di potenze intere (negative e/o positive) della variabile t. In termini generali, sia il simbolo $\cong$ tale che

$$(2) \qquad g(t) \cong \sum_{v=-\infty}^{\infty} f_v t^v \Rightarrow \Gamma[g(t)] \cong \Gamma\left[\sum_{v=-\infty}^{\infty} f_v t^v\right]$$

dove Γ è un operatore algebrico definito su forme analitiche tanto finite che infinitarie.

[168]Cfr. il prossimo capitolo III.6..

Teorema A:

$$g(t) \cong \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} f_\nu t^\nu \Rightarrow [g(t)]\cdot t^{-r} \cong \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} f_{\nu-r}\, t^\nu \qquad [r \in \mathbf{Z}]$$

Dim.:

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} f_{\nu-r}\, t^\nu = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} f_{\nu-r}\, t^r\cdot t^{\nu-r} = t^r\cdot \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} f_{\nu-r}\, t^{\nu-r} = t^r\cdot \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} f_\nu\, t^\nu \cong t^r\cdot [g(t)]\,.$$

Teorema B:

$$g(t) \cong \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} f_\nu t^\nu \Rightarrow [g(t)]\cdot[t^{-1}-1] \cong \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \Delta f_\nu\, t^\nu \qquad [\Delta f_\nu = f_{\nu+1} - f_\nu]$$

Dim.:

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \Delta f_\nu\, t^\nu = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} f_{\nu+1}\, t^\nu - \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} f_\nu\, t^\nu \cong \text{(per A)}\ [g(t)]\cdot t^{-1} - g(t) = [g(t)]\cdot\left[t^{-1} - 1\right].$$

Teorema C:

$$g(t) \cong \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} f_\nu t^\nu \Rightarrow [g(t)]\cdot[t^{-1}-1]^n \cong \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \Delta^n f_\nu\, t^\nu \qquad [n \in \mathbf{N}]$$

Dim.[per induzione]:

Base. $n = 0$: Banale

$n = 1$: Data dal teorema B

Ipotesi. $n = m - 1$: $[g(t)]\cdot[t^{-1}-1]^{m-1} \cong \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \Delta^{m-1} f_\nu\, t^\nu$

Passo. $n = m$: $[g(t)]\cdot[t^{-1}-1]^{m-1}\cdot[t^{-1}-1] \cong \text{[per B e l'ip.]} \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \Delta\left(\Delta^{m-1} f_\nu\right) t^\nu = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \Delta^m f_\nu\, t^\nu.$

Teorema D:

$$g(t) \cong \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} f_\nu t^\nu \Rightarrow [g(t)]\cdot\left[a_0 + a_1 t^{-1} + a_2 t^{-2} + \ldots + a_\mu t^{-\mu}\right] \cong \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \nabla f_\nu\, t^\nu$$

$$\left[\nabla f_\nu = a_0 f_\nu + a_1 f_{\nu+1} + a_2 f_{\nu+2} + \ldots + a_\mu f_{\nu+\mu}\right]$$

Dim.:

$$\sum_{\nu=-\infty}^{\infty} \nabla f_\nu\, t^\nu = a_0 \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} f_\nu\, t^\nu + a_1 \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} f_{\nu+1}\, t^\nu + a_2 \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} f_{\nu+2}\, t^\nu + \ldots + a_\mu \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} f_{\nu+\mu}\, t^\nu$$

$$\cong \text{[per A]}\ a_0\, g(t) + a_1\, [g(t)]\cdot t^{-1} + a_2\, [g(t)]\cdot t^{-2} + \ldots + a_\mu\, [g(t)]\cdot t^{-\mu}$$

$$= [g(t)]\cdot\left[a_0 + a_1 t^{-1} + a_2 t^{-2} + \ldots + a_\mu t^{-\mu}\right].$$

Teorema E:

$$g(t) \cong \sum_{v=-\infty}^{\infty} f_v t^v \Rightarrow [g(t)]\cdot\left[a_0 + a_1 t^{-1} + a_2 t^{-2} + \ldots + a_\mu t^{-\mu}\right]^n \cong \sum_{v=-\infty}^{\infty} \nabla^v f_v t^v$$

Dim.: Analoga alla dimostrazione del teorema C.

Teorema F:

$$g(t) \cong \sum_{v=-\infty}^{\infty} f_v t^v \Rightarrow \begin{cases} [g(t)]\cdot\left[a_0 + a_1 t^{-1} + a_2 t^{-2} + \ldots + a_\mu t^{-\mu}\right]^s \cdot \left[t^{-1} - 1\right]^n . \; t^r \\ \qquad \cong \sum_{v=-\infty}^{\infty} \Delta^n \nabla^s f_{v-r} t^v \end{cases}$$

Dim.: Immediata dai teoremi A, C e E.

III. 4-A. β. *Teoremi relativi al calcolo inverso delle funzioni generatrici*

Risultati della stessa generalità possono essere ottenuti per il calcolo inverso delle funzioni generatrici (data la funzione generatrice, trovare la funzione generata).

Teorema G:

Sia $\Phi(t)$ una funzione qualunque di t, tale che una sua potenza qualsiasi $[\Phi(t)]^n$ $(n \in \mathbf{N})$ possa essere sviluppata in serie

a) secondo le potenze (intere positive o negative) di t^{-1};

b) secondo le potenze (intere positive o negative) di $(t^{-1}-1)$.

Sia $g(t)$ la funzione generatrice di f_v e, data la (1), si assuma la relazione

$$[g(t)]\cdot[\Phi(t)]^n \cong \sum_{v=-\infty}^{\infty} C^n\left(f_v\right) t^v \qquad \left[C^n\left(f_v\right) = C\left(C^{n-1}\left(f_v\right)\right)\right]$$

Per trovare il coefficiente $C^n\left(f_v\right)$ è allora sufficiente:

i) sostituire f_{v+k} a t^{-k} (k = &c., -2, -1, 0, 1, 2, &c.) nello sviluppo (a) di $[\Phi(t)]^n$;

ii) sostituire $\Delta^k f_v$ a $(t^{-1}-1)^k$ (k = &c., -2, -1, 0, 1, 2, &c.) nello sviluppo (b) di $[\Phi(t)]^n$.

Dim. :

(i): $$[g(t)]\cdot[\Phi(t)]^n \cong \sum_{v=-\infty}^{\infty} \left(f_v t^v [\Phi(t)]^v\right)$$

$$\cong \sum_{v=-\infty}^{\infty} \left(f_v t^v \sum_{k=-\infty}^{\infty} K_k t^{-k}\right) \quad \text{(con } K_k \text{ costante rispetto a } t \text{ per ogni } k\text{)}$$

$$\cong \sum_{v=-\infty}^{\infty} \left(f_{v+k} t^{v+k} \sum_{k=-\infty}^{\infty} K_k t^{-k}\right) \cong \sum_{v=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} K_k f_{v+k}\right) t^v \cong \sum_{v=-\infty}^{\infty} C^n\left(f_v\right) t^v$$

quindi: $C^n\left(f_v\right) \cong \sum_{k=-\infty}^{\infty} K_k f_{v+k}$.

Se si pone d'altra parte $[\Phi(t)]^n \cong \sum_{k=-\infty}^{\infty} K_k t^{-k}$ si avrà, sostituendo secondo (i):

$$C^n\left(f_v\right) \cong \sum_{k=-\infty}^{\infty} K_k f_{v+k}\,.$$

(ii):
$$[g(t)]\cdot[\Phi(t)]^n \cong \sum_{v=-\infty}^{\infty} \left(f_v t^v [\Phi(t)]^v\right)$$
$$\cong \sum_{v=-\infty}^{\infty} \left(f_v t^v \sum_{k=-\infty}^{\infty} K_k (t^{-1}-1)^k\right) \quad \text{(con } K_k \text{ costante rispetto a } t \text{ per ogni } k\text{)}$$
$$\cong \sum_{v=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(K_k f_v t^v \sum_{j=0}^{\infty} -(-)^j \binom{k}{j} t^{-j}\right)\right)$$
$$= \sum_{v=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(K_k \sum_{j=0}^{\infty} -(-)^j \binom{k}{j} f_{v+j}\right)\right) t^v$$
$$\cong \sum_{v=-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} K_k \Delta^k f_v\right) t^v \cong \sum_{v=-\infty}^{\infty} C^n\left(f_v\right) t^v$$

quindi: $C^n\left(f_v\right) \cong K_k \Delta^k f_v$.

Se si pone d'altra parte $[\Phi(t)]^n \cong \sum_{k=-\infty}^{\infty} K_k (t^{-1}-1)^k$ si avrà, sostituendo secondo (ii):

$$C^n\left(f_v\right) \cong \sum_{k=-\infty}^{\infty} K_k \Delta^k f_v\,.$$

Teorema H:

Sia $\Phi(t)$ una funzione qualunque di t, tale che una sua potenza qualsiasi $[\Phi(t)]^n$ ($n \in \mathbf{N}$) possa essere sviluppata in serie secondo le potenze (intere positive o negative) di una funzione $\psi(t)$ della stessa variabile t. Sia $g(t)$ la funzione generatrice di f_v e, assegnato un operatore $\square$, sia $[g(t)]\cdot[\varphi(t)]$ quella di $\square(f_v)$. Data la (1) si assuma inoltre la relazione

$$[g(t)]\cdot[\Phi(t)]^n \cong \sum_{v=-\infty}^{\infty} C^n\left(f_v\right) t^v \qquad \left[C^n\left(f_v\right) = C\left(C^{n-1}\left(f_v\right)\right)\right]$$

Per trovare il coefficiente $C^n\left(f_v\right)$ è allora sufficiente sostituire $\square(f_v)$ a $\psi(t)$ nello sviluppo di $[\Phi(t)]^n$ e quindi $[\square^k(f_v)]$ a $[\square(f_v)]^k$ (k = &c., -2, -1, 0, 1, 2, &c.).

La dimostrazione di un tale teorema, riformulata secondo le indicazioni di Laplace, risulta scorretta, richiedendo implicitamente l'impiego di una legge di moltiplicazione riferita alle serie considerate, la quale non è invece definibile relativamente alle serie di Laurent. E' chiaro infatti che i metodi espliciti impiegati nella dimostrazione del teorema G sono qui inapplicabili. Ponendo

$$(3) \qquad [\Phi(t)]^n \equiv \sum_{k=-\infty}^{\infty} K_k\,[\psi(t)]^k$$

si avrà infatti

$$(4) \qquad [g(t)]\cdot[\Phi(t)]^n \cong \sum_{k=-\infty}^{\infty} K_k\,[g(t)]\cdot[\psi(t)]^k \cong \sum_{k=-\infty}^{\infty} K_k \sum_{v=-\infty}^{\infty} \square^k\left(f_n\right)t^v$$

$$\cong \sum_{k=-\infty}^{\infty} C^n\left(f_v\right)t^k$$

da cui non è possibile trarre, come vorrebbe Laplace, l'identità:

$$(5) \qquad C^n\left(f_v\right) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} K_k \square^k\left(f_n\right)$$

D'altra parte se h(t) è la funzione generatrice di Σ^n (f_v) dal teorema C segue, assumendo (1),

$$(6) \qquad [h(t)]\cdot(t^{-1}-1)^n \cong \sum_{v=-\infty}^{\infty} f_n\,t^n \cong g(t)$$

e quindi:

$$(7) \qquad h(t) = [g(t]\cdot(x^{-1}-1)^{-n}$$

ciò che mostra come la definizione di funzione generatrice nei termini delle serie di Laurent impedisca di giustificare l'introduzione delle costanti di integrazione.

APPENDICE III. 4-B.

Scopo della presente appendice è quello di discutere sommariamente la riformulazione della teoria delle funzioni generatrici proposta da Laplace nel primo libro della sua *Théorie analytiques des probabilités*.

III. 4-B. α. *Premessa: l'analisi come linguaggio ben fatto*

Pubblicata in prima edizione a Parigi nel 1812, la *Théorie analytique des probabilités*[1] realizza il compimento di un progetto che Laplace aveva accarezzato fin dagli anni della propria giovinezza: applicare la nuova analisi delle funzioni a una riformulazione della teoria delle probabilità. I principali strumenti matematici (messi a parte quelli più elementari) che egli utilizza nel corso di tale tentativo vengono presentati nel primo libro, diviso a sua volta in due parti, precedute da una breve introduzione e costituite entrambe da rielaborazioni di precedenti memorie: la prima quella del 1779 sulla teoria delle funzioni generatrici, la seconda quella del 1782, "*sur les approximations des formules qui sont fonctions de très-grands nombres*"[2]. In quest'ultima Laplace aveva mostrato come il valore di certe formule, il quale diviene praticamente incalcolabile qualora le variabili che compaiono in esse assumano valori relativamente grandi (si pensi all'esempio dello sviluppo binomiale per un esponente intero sufficientemente grande[3]), possa essere approssimato attraverso la considerazione di opportune serie, la cui convergenza diviene tanto più rapida quanto più grande è il valore assegnato alle variabili in questione, serie che, a loro volta, possono venir considerate come sviluppi di integrali di funzioni di forma più semplice rispetto a quelle coinvolte nelle formule assegnate. La "teoria" presentata in tale memoria è ora intesa come una "estensione" della stessa teoria delle funzioni generatrici e i risultati cui essa perviene sono intesi come risultati relativi allo stesso "calcolo delle funzioni generatrici", che forma, a sua volta, "il fondamento della teoria delle probabilità".[4]

Collegandosi a una radicata tradizione illuminista, assai cara all'ambiente degli *Idéologues*,[5] Laplace lega il proprio tentativo all'ideale di un lin-

[1] Cfr. Laplace (1812a). La seconda edizione della *Théorie* [cfr. Laplace (1814a)] venne pubblicata due anni dopo. La sola novità sostanziale che essa presenta rispetto alla prima edizione è l'aggiunta di una lunga introduzione, in cui Laplace riformula in termini puramente discorsivi i principali risultati raggiunti nel corso della successiva trattazione matematica, introduzione che venne pubblicata lo stesso anno anche come *pamphlet* separato sotto il titolo di *Essai sur les principes philosophiques des probabilités* [cfr. Laplace (1814b)].

[2] Cfr. Laplace (1782).

[3] Come ricorda lo stesso Laplace, la questione del calcolo del coefficiente binomiale per un esponente intero molto grande era già stata affrontata da Stirling [cfr. Stirling (1730), prop. XXIII, pp. 119-24].

[4] Cfr. Lagrange (1812a), p. 1.

[5] Nel 1797 (probabilmente su iniziativa dell'*Idéologue* Laromiguière, e certamente grazie alla sua collaborazione [cfr. Condillac (1981), *Notice*, pp. XXXII-XXXIII et Dhombres (1982-83), p. 197] era stata pubblicata a Parigi *La langue des calculs* di Condillac [cfr. Condillac 1797], vero e proprio manifesto - spesso confuso e largamente opinabile - di una filosofia riduzionista, la quale affermava la riducibilità di "une science bien traitée" a "une langue bien faite" [cfr. *ivi*, p. 7], ovvero (secondo la massima per cui "toute langue est une méthode analytique, et toute méthode analytique est une langue [cfr. *ivi*, p. 1]) a un "metodo analitico" [sulla *Langue des calculs* di Condillac, in relazione al dibattito nella matematica settecentesca cfr. Dhombres (1982-83)]. Per ciò che riguarda

guaggio perfetto, capace non solo di esprimere una teoria scientifica in termini puramente astratti, ma anche di fornire, in quanto tale, un potente strumento euristico.[6]

> La langue de l'analyse - egli scrive nell'introduzione, riprendendo alcuni stralci della propria memoria del 1810 "*sur les intégrales définies et leur applications aux probabilités*"[7] -, la plus parfaite de toutes, étant par elle-même un puissant instrument de découverte; ses notations, lorsqu'elles sont nécessaires et heureusement imaginées, sont les germes des nouveaux calculs.- d'une langue bien faite, que ses notions les plus simples sont devenues souvent la source des théories les plus profondes.[8]

Tra le notazioni felicemente introdotte, quella che forse ha avuto la maggiore influenza sugli sviluppi della matematica - continua Laplace - è l'impiego di esponenti per indicare le potenze di una data base. Essa avrebbe infatti condotto Leibniz[9] a immaginare la possibilità di esponenti variabili, dando luogo così alle funzioni esponenziali e logaritmiche.[10]

> [...] par là - aggiungerà Laplace nella seconda edizione della Théorie, di due anni successiva - il a complété le système des élémens dont une fonction finie peut être composée. Car toute fonction finie explicite se réduit en dernière analyse, à des grandeurs simples, ajoutée ou sostraites les unes des autres multipliées ou divisées entr'elles, élevées à des puissances constantes ou variables. [...] Toutes les modifications de grandeurs que l'on peut concevoir aux exposans, se trouvent donc représentées par les quantités exponentielles, algébriques et logarithmiques. Ces quantités et leurs fonctions embarassent par conséquent, toutes les fonctions finies explicites; et les racines des équations formées des fonctions semblables embarassent toutes les fonctions finies implicites.[11]

Una funzione (finita) è quindi sempre riducibile a una forma analitica semplice, la quale tuttavia - sembra asserire Laplace - può essere a sua volta indicata implicitamente o indirettamente (per mezzo dell'indicazione dell'operazione che occorre compiere su una data forma per ottenere la forma in questione).[12]

---

la vicenda filosofica e politica degli *Idéologues*, il riferimento d'obbligo è a Moravia (1968) e (1974).

[6]E' importante osservare che, per quanto nebuloso, o forse proprio per questo, un tale ideale assunse fra la fine del XVIII secolo e l'inizio del XIX valenze anche profondamente diverse fra loro. Quella cui sembra dar credito Laplace, imitato in questo da tutti i principali matematici dell'epoca (e in particolare da Lagrange e Arbogast), non implica alcuna eliminazione dell'aspetto concettuale di una teoria matematica. Il linguaggio perfetto non sembra essere inteso da questi che come un opportuno mezzo espressivo di teorie costituite, in quanto tali, da connessioni fra "idee" [cfr. la citazione di cui alla nota (6) del precedente capitolo I.3.].

[7]Cfr. Laplace (1810), p. 282-3.

[8]Cfr. Laplace (1812a), p. 7.

[9]Il riferimento di Laplace è a Leibniz (1682).

[10]Non è naturalmente il caso di insistere sull'inaccettabilità storica della ricostruzione di Laplace, il cui interesse è di tutt'altra natura.

[11]Cfr. Laplace (1814a), p. 6. Ricordando le espressioni euleriane del seno e del coseno in termini di esponenziali immaginari, si confronti tale dichiarazione di Laplace con la definizione di forma analitica semplice proposta nel precedente paragrafo II.2.ε..

[12]Cfr. il precedente paragrafo II.2.ι..

III. 4-B. β. *Funzioni generatrici, formule di Lagrange e passaggio alle differenze infinitamente piccole*

Per quanto ciò non comporti alcuna sostanziale differenza nelle dimostrazioni dei teoremi, Laplace comincia il primo capitolo del primo libro con una definizione di funzione generatrice che risulta leggermente (ma significativamente) modificata rispetto a quella del 1779: data una funzione $y = y_x$ e formata la serie $y_0 + y_1 t + \ldots + y_x t^x$:

> on peut toujours concevoir une fonction de t, qui développée suivant les puissances de t donne cette suite: cette fonction est ce que je nomme *fonction génératrice* de y_x. [...] l'exposant de la puissance de t indique le rang que la variable y_x occupe dans la série que l'on peut concevoir prolongée indéfiniment à gauche, relativement aux puissances négatives de t.[13]

Una tale *possibilità* di prolungare la serie a sinistra *indefinitamente* (e non all'infinito) mi pare corrispondere alla possibilità di passare da funzioni naturalmente generatrici a funzioni generatrici qualsiasi, secondo la definizione proposta nel precedente paragrafo III.4.*d*. α..

Dato il teorema VII e sostituendo l'operatore generico ◊ con l'operatore $_1\Delta$ Laplace trae ora lo sviluppo di una differenza finita di ordine qualsiasi:

$$(1) \qquad \Delta^{\nu} y_x = y_{x+\nu} + \nu\, y_{x+\nu-1} + \frac{\nu(\nu-1)}{2!}\, y_{x+\nu-2} + \&c. \qquad [\nu \in \mathbb{N}]$$

risultato che gli aveva permesso di affermare, tre anni prima, nella memoria "*sur divers points d'analyse*", che l'oggetto del calcolo delle funzioni generatrici

> est de ramener au simple développement des fonctions, toutes les opérations relatives aux différences, et spécialement l'intégration des équations aux différences ordinaires ou partielles [...].[14]

Dimostrate poi le formule compatte di Lagrange, egli ne sottolinea il rapporto con il "teorema" di Taylor e ne fornisce una interessante generalizzazione. Considerando infatti differenti sviluppi in serie secondo le potenze di diverse funzioni intere di t^{-1}, è possibile trarre differenti teoremi analoghi che vertono su funzioni "derivate" qualsiasi:

> je nomme *dérivée* d'une fonction y_x -, scrive Laplace - toute quantité qui en dérive telle que $a_0 y_x + a_1 y_{x+1} + a_2 y_{x+2} + \&c.$. En regardant en suite cette fonction dérivée comme une nouvelle fonction que je désigne par y_x'; la quantité $a_0 y_x' +$

[13]Cfr. Laplace (1812a), p. 9.
[14]Cfr. Laplace (1809), p. 229.

$a_1 y_{x+1} + a_2 y_{x+2}$ + &c. sera une seconde dérivée de la fonction y_x; et ainsi de suite. Lorsque la fonction $a_0 y_x + a_1 y_{x+1}$ + &c. devient $-y_x + y_{x+1}$, la dérivée devient une différence finie.[15]

Tradotta in termini moderni, l'idea di Laplace è dunque quella di riformulare i teoremi di Lagrange relativamente all'operatore generico ∇, che è ora inteso come un operatore di "derivazione".[16] Una tale generalizzazione del concetto lagrangiano di "funzione derivata"[17] era d'altra parte corrente nel primo ventennio del XIX secolo e era già stata proposta, fra gli altri, da Arbogast[18] e Brunacci; quest'ultimo aveva dedicato a tale estensione un elegante *pamphlet* rimasto purtroppo quasi inavvertito.[19]

Indicate così assai sommariamente le modifiche più interessanti apportate da Laplace al proprio testo del 1779, è ora opportuno considerare due paragrafi completamente nuovi, aggiunti da questi in conclusione della prima parte del primo libro, uno riguardante il "passaggio dal finito all'infinitamente piccolo" nella teoria delle funzioni generatrici e l'altro relativo alla ricerca della funzione generatrice della soluzione di un'equazione alle differenze finite o infinitamente piccole.

Sulla prima questione Laplace era già tornato, dopo le *Leçons à l'école Normale de l'an III*, nell'introduzione della memoria del 1810 sugli integrali definiti.[20] L'estensione del calcolo delle funzioni generatrici alle differenze infinitamente piccole permette la trasformazione di un'equazione alle differenze finite in un'equazione differenziale, tratta sviluppando le differenze finite secondo le potenze successive delle corrispondenti differenze infinitamente piccole e omettendo gli infinitesimi di ordine superiore.

> Les quantités qu'on néglige dans ces passages du fini à l'infiniment petit - scrive Laplace -, semblent ôter au calcul infinitésimal, la rigueur des résultats géométriques. Mais pour lui la rendre, il suffit d'envisager les quantités que l'on conserve dans le développement d'une équation aux différences finies et de son intégrale, par rapport aux puissances de la différence indéterminée, comme ayant toutes pour facteur, la plus petite puissance dont on compare entre eux les coefficiens. Cette comparaison étant rigoureuse, le calcul différentiel qui n'est évidemment que cette comparaison même, a toute la rigueur des autres opérations algébriques.[21]

---

[15]Cfr. Laplace (1812a), p. 44.

[16]Un'ulteriore generalizzazione dei teoremi di Lagrange proposta da Laplace riguarda il passaggio a prodotti finiti di funzioni, a cui è possibile estendere, d'altra parte, l'intera teoria delle funzioni generatrici [cfr. *ivi*, pp. 45-9].

[17]Cfr. tanto la precedente sezione III.4.*a*. che il prossimo capitolo III.6..

[18]Cfr. Arbogast (1800).

[19]Cfr. Brunacci (1802). Mi permetto di rimandare, per alcune considerazioni sul libello di Brunacci, a Panza (1984), pp. 173-6.

[20]Cfr. Laplace (1810).

[21]Cfr. *ivi*, pp. 280-81.

L'idea di ricercare nel metodo dei coefficienti indeterminati una giustificazione indiretta del principio di omissione - o meglio, di alcune sue applicazioni - guida anche le considerazioni sull'argomento contenute nel primo libro della *Théorie analytiques des probabilités.* Ecco come Laplace si esprime in tale occasione:

> Le passage du fini à l'infiniment petit, consiste à négliger les différences infiniment petites, par rapport aux quantités finies, et généralement les infiniment petits d'un ordre supérieur, relativement à ceux d'un ordre inférieur. Cette omission semble ôter à ce passage la rigueur géométrique; mais pour se convaincre de son entière exactitude, il suffit de le considérer comme le résultat de la comparaison des puissances homogènes d'une variable indéterminée, dans le développement des termes d'une équation qui subsiste, quelle que soit cette indéterminée; car il est clair que les termes affectés de la même puissance, doivent se détruire mutuellement.[22]

L'esempio fornito da Laplace non consiste tuttavia che in una dimostrazione viziosa del "teorema" di Taylor a partire dalla (161), che, in quanto tale, non si riferisce che a differenze finite.

> Considéré comme résultat de la comparaison des termes indépendans de dx[23], ce théorème ne laisse aucun doute sur son exactitude rigoureuse, et il est visible [...] que cette comparaison revient à négliger les termes multipliés par dx et ses puissances relativement aux quantités finies: cette omission n'ôte donc rien à la rigueur du calcul différentiel. [...] l'omission des infiniment petits, relativement aux quantités finies n'est au fond qu'un moyen facile d'éliminer les termes superflus qui doivent disparaître dans le résultat final.[24]

Il raffinato apparato formale fornito dalla teoria delle funzioni generatrici e le stesse tecniche dimostrative fondate sull'impiego di un calcolo simbolico non conducono quindi in Laplace a abbandonare il paradigma classico per cui il *calcolo* non è che il risultato di un'opportuna estensione a differenze infinitamente piccole di un insieme di risultati relativi a differenze finite. Se l'algoritmo differenziale può infatti essere reinterpretato entro il quadro di una teoria delle differenze finite di ragione indeterminata, le sue applicazioni non possono che fondarsi su una reintroduzione di una concettualizzazione infinitesimalista.

> Ce rapprochement du calcul aux différences finies et du calcul différentiel - scrive Laplace -, met en évidence la rigueur des résultats de ce dernier calcul, et donne sa vrai métaphysique; mais ses applications à l'étendue, à la durée et au mouvement, supposent de plus, la principe des limites.[25]

---

[22] Cfr. Laplace (1812a), pp.70-1.

[23] Laplace considera nel corso della sua dimostrazione dx come una differenza finita (uguale a ω) della variabile indipendente cui corrisponde la differenza finita dy_x (uguale a $\omega\Delta y_x$) della funzione.

[24] Cfr. *ivi*, p. 72.

[25] Cfr. *ivi*, p. 73.

Le analisi contenute nel prossimo capitolo III.6. mostreranno come, quindici anni prima, Lagrange avesse dato alla stessa questione una risposta ben differente, che Laplace non sembra qui prendere in considerazione.

E' proprio attraverso la considerazione delle conseguenze del passaggio da una costruzione riferita a differenze finite a una costruzione riferita a differenze infinitamente piccole che Laplace affronta poi il classico problema delle corde vibranti.[26] La considerazione della sua dimostrazione ci porterebbe tuttavia troppo lontano dal limitato obiettivo della presente appendice.

III. 4-B. γ. *Teoria delle funzioni generatrici e equazioni alle differenze finite*

Il secondo dei paragrafi aggiunti da Laplace al proprio testo del 1779 ha come proprio scopo principale quello di indicare il legame fra la teoria delle funzioni generatrici e i risultati del 1782 relativi all'approssimazione delle formule che sono funzioni di grandi numeri, che questi aveva già preconizzato nella propria memoria del 1810 "sugli integrali definiti".

Dimostrato in primo luogo che se la funzione y_x è tale da soddisfare la condizione $\sum_{v=0}^{m} K_v y_{x+v} = 0$, allora la sua funzione generatrice ha la forma $\sum_{v=0}^{m-1} R_v t^v \Big/ \sum_{v=0}^{m} K_v t^{m-v}$ (dove le R_v ($v = 0, 1, \ldots, m-1$) sono delle costanti arbitrarie), Laplace fornisce un metodo generale che permette di passare dalla conoscenza delle funzioni generatrici di una data formula alle differenze finite all'espressione dell'integrale dell'equazione associata in termini di "quadrature definite". Data a esempio l'equazione $u(t, z) = \sum_{x=0}^{m} y_x(z)\, t^x$ si avrà, ponendo $t = e^{\omega\sqrt{-1}}$ e $u(e^{\omega\sqrt{-1}}, z) = U(\omega, z)$, moltiplicando entrambi i membri per $e^{-v\omega\sqrt{-1}}$ ($v \leq m$, $v \in \mathbb{N}$) e integrando:

$$(2) \qquad \int_{-\pi}^{\pi} U(\omega, z)\, e^{-v\omega\sqrt{-1}}\, d\omega = \int_{-\pi}^{\pi} \left[\sum_{x=0}^{m} y_x\, e^{-(v-x)\omega\sqrt{-1}} \right] d\omega$$

da cui, ricordandosi delle (69) del precedente paragrafo III.3.c.ζ. è facile trarre

[26] Cfr. il precedente paragrafo II.2.μ..

$$(3)\qquad \int_{-\pi}^{\pi} U(\omega, z)\, e^{-v\omega\sqrt{-1}}\, d\omega = 2\pi\, y_v$$

e quindi, in generale:

$$(4)\qquad y_x = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} U(\omega, z)\left[\cos x\omega - \sqrt{-1}\,\sin x\omega\right] d\omega$$

Il ricorso all'introduzione di quantità immaginarie è d'altra parte evitabile attraverso la presupposizione della forma dell'integrale cercato. Data a esempio l'equazione

$$(5)\qquad \sum_{v=x}^{x+m}\left(K_n\, y_x\right) + x\sum_{n=x}^{x+m}\left(R_n\, y_n\right) = 0$$

e supponendo l'identità generica

$$(6)\qquad y_x = \int_a^b t^{-x-1}\, T(t)\, dt$$

si avrà, sostituendo e operando convenientemente:

$$(7)\qquad 0 = -[T(t)]\cdot t^{-x}\left(\sum_{v=0}^{m} R_{x+v}\, t^{-v}\right) + \int_a^b t^{-x-1}\left[\begin{array}{l}[T(t)]\cdot\sum_{v=0}^{m} K_{x+v}\, t^{-v} + \\ + t\dfrac{d}{dt}\left([T(t)]\cdot\sum_{v=0}^{m} R_{x+v}\, t^{-v}\right)\end{array}\right] dt$$

Per determinare $T(t)$ è allora sufficiente eguagliare a zero (secondo una generalizzazione del metodo degli indeterminati) la somma posta in (7) fra parentesi quadre. Eguagliando a zero il primo addendo del secondo membro della stessa equazione si hanno poi $m+1$ limiti d'integrazione. Moltiplicando ognuno degli m integrali così risultanti per una costante arbitraria si avrà poi l'espressione esplicita di y_x.

Se $u(t\,,z) = \sum_{x=0}^{\infty} y_x(z)\,t^x$ la posizione $y_x = \int_a^b t^{-x}\,T(t)\,dt$ permette di trarre abbastanza agevolmente l'identità

$$(8) \qquad {}_{\xi}\Delta^{\lambda} y_x = \left[\frac{1}{t^x} - 1\right]^{\lambda} \int_a^b T(t)]\cdot t^{-x}\,dt$$

che esprime il legame fra la teoria delle funzioni generatrici e la ricerca della soluzione in forma integrale delle equazioni alle differenze finite.

III. 5.
LA SCUOLA COMBINATORIA TEDESCA E IL PROBLEMA DELLA POTENZA DI UN POLINOMIO (1778-1803)

III. 5. α. *Premessa*

L'atto di nascita della *Kombinatorischeschule*, raccolta intorno a C. F. Hindenburg tra gli ultimi vent'anni del XVIII secolo e il primo decennio del XIX, è costituito dalla pubblicazione di due memorie dello stesso Hindenburg, apparse entrambe nel 1778 e dedicate al problema dello sviluppo di una potenza di un polinomio qualsiasi, eventualmente infinito. Apparse separatamente sotto forma di *pamphlet*, la prima a Gottinga e la seconda a Lipsia,[1] queste subirono nel corso dell'anno successivo numerose modifiche e varie integrazioni e vennero riunite in un unico testo che, corredato da un'ampia prefazione, venne infine pubblicato sotto la forma di un vero e proprio trattato,[2] la cui struttura tematica mantiene, al di là delle distinzioni esplicite, l'originaria separazione fra una prima parte di natura esplicitamente storica (paragrafi I-XX), dedicata all'analisi dei differenti metodi di sviluppo di una potenza di un polinomio qualsiasi (finito o infinito) proposti nel corso del secolo, e una seconda parte (paragrafi XXI-XXVIII), dedicata alla presentazione di un metodo essenzialmente nuovo, combinatorio e non ricorsivo, capace di fornire direttamente un termine di ordine qualsiasi per lo sviluppo cercato.[3]

Se Hindenburg non fu certamente il primo né a cogliere la connessione fra il problema della potenza di un polinomio e quello della determinazione del numero delle differenti combinazioni possibili fra gli elementi di una opportuna sezione di **N**, né a avanzare l'esigenza di sostituire dei metodi ricorsivi per la costruzione di certi sviluppi con metodi diretti capaci di fornire un qualsiasi coefficiente dello sviluppo cercato, indipendentemente dalla considerazione dei coefficienti precedenti (o di alcuni di essi), è difficile negare che le sue ricerche segnino un importante *turn aut.* Invertendo l'impostazione di Euler - che più di altri aveva, nell'*Introductio*, insistito sul legame fra combinatoria e teoria delle serie,[4] fornendo una fondazione analitica della prima - Hindenburg propone, non solo di ricondurre la soluzione del problema della potenza di un polinomio a considerazioni prettamente combinatorie, ma giunge, nel corso degli anni, a prospettare l'ipotesi di una riconduzione

---

[1] Cfr. rispettivamente Hindenburg (1778a) e (1778b).

[2] Cfr. Hindenburg (1779).

[3] Una tale separazione tematica è resa d'altra parte esplicita dallo stesso titolo del trattato di Hindenburg, che non fa che ripetere i titoli delle due memorie del 1778.

[4] Cfr. la precedente sottosezione III.3.*d* (3).

alla combinatoria della stessa teoria delle serie e quindi dell'intero edificio dell'analisi post-euleriana e a rivendicare così un ruolo assolutamente centrale entro il *corpus* complessivo della conoscenza (e della pratica) matematica per delle vere e proprie *operazioni* combinatorie, comparabili alle usuali operazioni elementari di natura algebrica o trascendente.[5] Proprio questo ambizioso programma (che potremmo forse ritrovare in nuce, già all'inizio del secolo, in numerose memorie di A. de Moivre, certamente uno dei principali riferimenti di Hindenburg) costituì il cemento, spesso armato di sapiente retorica o perfino di veemenza ideologica, di una vera e propria scuola, che venne raccogliendosi intorno alla figura del maestro, alle sue indicazioni di ricerca e alle riviste da lui fondate.[6] Per quanto matematicamente assai compatta, la produzione dei combinatoristi hindenburghiani[7] (fra cui si potrebbero citare qui i nomi di H. Bürmann, C. H. Eschenbach, C. S. Klugel, J. F. Pfaff, M. von Prasse, H. A. Roth, I. K. Tetens, H. A. Töpfer e soprattutto di C. Kramp, senza dubbio, fra questi, il matematico di maggiore valore) può essere divisa in due differenti periodi, simbolicamente distinguibili fra loro dalla pubblicazione, nel 1800, e dalla successiva diffusione del *Calcul des dérivations* di Arbogast. Mentre il problema centrale del primo periodo fu senza dubbio quello della potenza di un polinomio, l'interesse per la generalizzazione dei procedimenti individuati nel corso delle ricerche relative a tale questione si trasformò, in modo assai netto dopo la pubblicazione del trattato di Arbogast - generalmente assunto come la più esplicita espressione del paradigma nemico - in quel programma di riformulazione combinatoria dell'intera teoria delle serie di cui ho più sopra parlato, il quale non poteva che portare con sé un vero e proprio progetto di eliminazione del *calcolo* (sia esso differenziale o delle funzioni derivate). I limiti cronologici entro i quali è ristretta la mia dissertazione, che si arresterà con il prossimo capitolo alla considerazione della teoria delle funzioni analitiche di Lagrange, senza abbordare il dibattito relativo alla generalizzazione delle nozioni di derivazione e funzione derivata (al quale Lagrange rimase, fino alla sua morte, essenzialmente estraneo[8]) mi suggeriscono di non dedicare il presente capitolo che all'analisi di un insieme di testi riconducibili al primo periodo e quindi essenzialmente incentrati sul problema dello sviluppo di una potenza di un polinomio qualsiasi.

---

[5] Cfr. Haas (1972), p. 403.

[6] Fra queste l'*Archiv der reinen und angewandten Mathematik* di cui fra il 1795 e il 1800 apparvero undici numeri.

[7] La letteratura secondaria dedicata alla *Kombinatorischeschule* è a mia conoscenza assai scarsa. Oltre al già citato articolo di Haas (dedicato al solo Hinbenburg) e al classico resoconto di E. Neto in Cantor (1880-1908) [sez. XXI, parte I (vol. IV, pp. 201-21)] cfr. a esempio Pensivy (1987-88), pp. 91-6.

[8] Tale estraneità mi permetterà di tenere conto nella mia analisi, senza introdurre alcuna forzatura, non solo della prima edizione della *Théorie* (apparsa nel 1797), ma anche della seconda (apparsa nel 1813 e solo localmente modificata) così come delle due edizioni (1801 e 1806) delle *Leçons sur les calcul des fonctions* che, benché successive al trattato di Arbogast, restano del tutto indipendenti dalla problematica affrontata in esso.

III. 5. β. *Potenze di un binomio e potenze di un polinomio*

Il problema dello sviluppo di una potenza di un polinomio qualsiasi è chiaramente quello della generalizzazione della formula del binomio al caso di basi polinomiali qualsiasi. La difficoltà relativa a tale estensione è duplice. In primo luogo si tratta di determinare la legge di formazione dei coefficienti successivi dello sviluppo cercato nel caso in cui la potenza considerata sia intera e positiva. In secondo luogo si tratta di dimostrare l'estendibilità di tale legge al caso di esponenti qualsiasi e indicarne le modalità. A differenza che nel caso di una semplice base binomiale, la intrinseca difficoltà della legge in questione (indipendentemente dalla natura dell'esponente) condusse i matematici settecenteschi a concentrare la loro attenzione sulla prima questione, intendendo la seconda come una questione collaterale, spesso neppure affrontata in termini espliciti. Come la determinazione della formula binomiale per un qualsiasi esponente reale è strettamente connessa alla soluzione del problema dello sviluppo in serie intera di una funzione di un binomio $f(z) = f(x+\xi)$, la determinazione di una forma opportuna per lo sviluppo di una potenza qualsiasi a base polinomiale è strettamente connessa alla soluzione del problema dello sviluppo in serie intera di una funzione di un polinomio (eventualmente infinito) $f(z) = f(\alpha_0 + \alpha_1 x + \alpha_2 x^2 + \&c.)$.[9] Fu così proprio l'emergere dell'interesse verso quest'ultimo problema che condusse Hindenburg e i propri discepoli a affrontare esplicitamente il problema dell'estensione delle proprie formule al caso di esponenti reali, riportando così la discussione a confrontarsi con una difficoltà analoga a quella posta nel corso di tutto il XVIII secolo dal teorema binomiale. Le connessioni fra il problema dello sviluppo di una potenza di un binomio e quello dello sviluppo di una potenza di un polinomio qualsiasi non devono tuttavia nascondere almeno due profonde differenze, che rendono la soluzione del secondo problema qualcosa di molto diverso da una semplice estensione della soluzione del primo. Tali differenze non riguardano infatti semplicemente la maggiore complessità della legge di formazione dei coefficienti dello sviluppo, ma vertono piuttosto sulla stessa natura di quest'ultimo.

La prima differenza è la seguente: mentre lo sviluppo di una potenza qualsiasi del binomio generico di primo grado $(w + x)$ fornisce la formula generale dello sviluppo binomiale, lo sviluppo di una potenza qualsiasi del polinomio generico di primo grado, eventualmente infinito, $(w + x + y + \&c.)$ - che può facilmente essere tratta per reiterazione dalla formula del binomio - non fornisce la formula generale dello sviluppo di una potenza di un polinomio qualsiasi. Fornito infatti lo sviluppo di $(w + x)^\theta$, basta porre le sostituzioni $w = \alpha_0$, $x = \alpha_1 z$ o $w = \alpha_0$, $x = \alpha_1 z^{\nu-\mu}$ per passare senza alcuna difficoltà allo svilup-

[9]Fu proprio l'estensione della formula combinatoria per lo sviluppo di una potenza qualsiasi di un polinomio al caso di una funzioni qualsiasi dello stesso polinomio che permise ai combinatoristi tedeschi di ritrovare gli sviluppi di Arbogast, espressi in forma combinatoria e diede quindi luogo alla polemica fra essi e gli analisti francesi di impostazione lagrangiana.

po di $(\alpha_0 + \alpha_1 z)^\theta$ o, più in generale, di $(\alpha_0 z^\mu + \alpha_1 z^\nu)^\theta = z^{\mu r} (\alpha_0 + \alpha_1 z^{\nu-\mu})^\theta$. Trascritto lo sviluppo secondo le sostituzioni, indicate si avrà immediatamente un nuovo sviluppo ordinato secondo le potenze di z, i cui coefficienti costanti saranno espressi da opportuni prodotti. Al contrario, fornito lo sviluppo di $(w + x + y + \&c.)^\theta$ tratto per reiterazione a partire dallo sviluppo del binomio, le sostituzioni $w = \alpha_0$, $x = \alpha_1 z$, $y = \alpha_2 z^2$, &c. non forniscono per nulla lo sviluppo di $(\alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \&c.)^\theta$ ordinato secondo le potenze di z; questo non può essere trovato che ricorrendo a un opportuno riordinamento. Per avere direttamente uno sviluppo in forma intera per una data potenza a base polinomiale $(\alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \&c.)^\theta$ è così necessario trovare una formula generale diversa da quella che fornisce lo sviluppo di $(w + x + y + \&c.)^\theta$.

La seconda differenza riguarda il passaggio da uno sviluppo finito a uno sviluppo espresso nei termini di una serie intera. Mentre nel caso del binomio tale passaggio non può che avvenire attraverso la considerazione di un esponente non naturale, nel caso di un polinomio esso può aver luogo *anche* attraverso la considerazione di una base polinomiale a sua volta costituita da una serie intera. Tale differenza, che da un punto di vista moderno apre il problema delle relazioni fra la convergenza della serie che costituisce la base e quella che costituisce lo sviluppo, non fu mai considerata come matematicamente significativo nel corso del XVIII secolo. Tutti i matematici dell'epoca consideravano infatti il caso di un polinomio infinito come assolutamente equivalente al caso di un polinomio di grado *arbitrario*, sul quale fosse possibile operare termine a termine. In particolare, assegnato un polinomio qualsiasi $a_1 + a_2 + ... + a_n$ e una formula di trasformazione di questo, che non richiedesse la considerazione del termine a_n in quanto ultimo termine, essi assumevano senza alcuna difficoltà l'estendibilità di tale formula al caso di polinomi infiniti. L'inessenzialità della considerazione di a_n come ultimo termine del polinomio $a_1 + a_2 + ... + a_n$ nel corso della determinazione dei termini successivi dello sviluppo di $(a_1 + a_2 + ... + a_n)^\theta$ suggerì così a tutti i matematici settecenteschi la possibilità di affrontare il problema dello sviluppo di una potenza a base polinomiale senza distinguere espressamente fra il caso finito e quello infinito e rappresentando genericamente il polinomio in questione per mezzo di notazioni ambigue come $a_1 + a_2 + a_3$ &c. o $\alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \&c.$. La legittimità di una tale impostazione non dipende affatto dalla possibilità di ritrovare, dietro i procedimenti matematici settecenteschi, un passaggio al limite nascosto regolato da un certo insieme di condizioni implicite, ma piuttosto dalla possibilità di determinare un quadro concettuale entro il quale un simile passaggio possa essere convenientemente omesso. Tale quadro è d'altra parte proprio quello di una teoria formale degli sviluppi in serie intera, connessa a un'attenzione *a posteriori* verso il problema della convergenza.

III. 5. γ. *Qualche soluzione non combinatoria del problema dello sviluppo di una potenza di un polinomio qualsiasi*

Dedicati i primi venti paragrafi del proprio trattato del 1779 alla presentazione e alla discussione dei differenti metodi elaborati nel corso del XVIII secolo per pervenire allo sviluppo di una potenza di un polinomio qualsiasi, Hindenburg propone nei paragrafi restanti un metodo essenzialmente diverso. Per quanto i limiti della mia dissertazione mi impediscano di addentrarmi nell'analisi dei primi paragrafi, sottoponendo le ricostruzioni di Hindenburg a una opportuna valutazione critica, qualche velocissimo cenno sul loro contenuto permetterà di comprendere il carattere di radicale novità della soluzione che questi prospetta.

Considerato un polinomio qualsiasi $a_1 + a_2 + ... + a_n$ Hindenburg mostra, in primo luogo, come una sua potenza qualsiasi possa essere scritta nei termini di potenze opportune delle sue ridotte parziali. Assunta infatti, per ogni ν ($\nu = 1, 2, ..., n$) la posizione $A_\nu = a_1 + a_2 + ... + a_\nu$ si avrà, senza alcuna difficoltà, richiamandosi alla formula del binomio:

$$\begin{aligned} A_\nu^\theta &= (a_1 + a_2 + ... + a_\nu)^\theta = (A_{\nu-1} + a_\nu)^\theta = \\ &= A_{\nu-1}^\theta + \binom{\theta}{1} A_{\nu-1}^{\theta-1} a_\nu + \binom{\theta}{2} A_{\nu-1}^{\theta-2} a_\nu^2 + \&c. \end{aligned} \tag{1}$$

e quindi, ponendo $\nu = n$ e sostituendo reiterativamente:

$$\begin{aligned} (a_1 + a_2 + ... + a_n)^\theta = A_1^\theta &+ \binom{\theta}{1} A_1^{\theta-1} a_2 + \binom{\theta}{2} A_1^{\theta-2} a_2^2 + \&c. \\ &+ \binom{\theta}{1} A_2^{\theta-1} a_3 + \binom{\theta}{2} A_2^{\theta-2} a_3^2 + \&c. \\ &... \\ &+ \binom{\theta}{1} A_{n-1}^{\theta-1} a_n + \binom{\theta}{2} A_{n-1}^{\theta-2} a_n^2 + \&c. \end{aligned} \tag{2}$$

L'assoluta semplicità di un tale metodo di sviluppo - per cui Hindenburg rimanda agli *Elementi* di Wolff e Segner[10] - è lo specchio del suo scarsissimo contenuto informativo. Lungi dal risolvere il problema, questo non fa infatti che prospettarne una possibile interpretazione, riducendolo alla ricerca degli sviluppi delle successive potenze a esponente θ-1, θ-2, &c. dei polinomi A_2, A_3,... A_{n-1} e alla determinazione della somma degli eventuali monomi simili

[10]Cfr., fra le altre edizioni, Wolff (1735-43), t. I, pp. 258 e segg. e Segner (1756-63), parte II, par. 259, p. 149-50. Per la ricostruzione di Hindenburg cfr. Hindenburg (1779), pp. 4-11.

che compaiono in (2) una volta che tali sviluppi siano stati eseguiti. Il caso più semplice in cui ci si possa trovare è ovviamente quello in cui l'esponente θ sia un numero naturale. Non solo lo sviluppo risulta in questo caso finito, ma i suoi termini potranno essere ordinati in gruppi di monomi sommabili fra loro, la cui forma potrà essere facilmente determinata *a priori*. Non si tratterà allora che determinare i fattori numerici per cui i differenti monomi dovranno essere moltiplicati. Il modo più semplice per giungere a tale risultato è quello di considerare il numero delle differenti permutazioni possibili di una successione di θ elementi non necessariamente distinti. E' per questa via che Johann e Jakob Bernoulli giunsero alla determinazione del cosiddetto coefficiente bernoulliano $\frac{\theta!}{p_1!\,p_2!\,...\,p_s!}$ del monomio $(a_i)^{p_1}(a_j)^{p_2}\,...\,(a_k)^{p_s}$ $(1 \leq s \leq \theta;\ 1 \leq i, j, ..., k \leq \theta;\ p_1 + p_2 + p_s = \theta)$ nello sviluppo di $(a_1 + a_2 + ... + a_n)^\theta$ $(\theta \in \mathrm{N})$.[11]

Se θ è un esponente non intero un tale procedimento è tuttavia inapplicabile e lo sviluppo deve quindi essere presentato sotto una forma essenzialmente diversa.[12] Per questo è tuttavia sufficiente ridurre il polinomio assegnato in forma binomiale, ottenendo l'ovvia identità

$$(3)\quad [a_1 + (a_2 + ... + a_n)]^\theta = a_1^\theta + \binom{\theta}{1} a_1^{\theta-1}\,[a_2 + ... + a_n] + \binom{\theta}{2} a_1^{\theta-2}\,[a_2 + ... + a_n]^2 + \&c.$$

a partire dalla quale è possibile trovare lo sviluppo cercato riapplicando il procedimento utilizzato nel caso di un esponente naturale.[13]

Se in tal modo è possibile pervenire abbastanza agevolmente alla costruzione di uno sviluppo opportuno per una potenza qualsiasi di un polinomio di grado uno di n differenti variabili, la cosa è assai più complessa qualora si cerchi lo sviluppo in serie intera della potenza di esponente θ di un polinomio qualsiasi (finito o infinito) di una variabile $\alpha_0 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \&c.$.[14] Tutti i metodi proposti per risolvere un tale problema nel corso del XVIII secolo non pervengono infatti alla soluzione che in termini ricorsivi, espri-

---

[11]Cfr. a esempio la lettera di Johann I Bernoulli a Leibniz del 8/18 giugno 1695 in Leibniz-Bernoulli (1735), XI, pp. 52-64 (particolarmente le pp. 54-5) [anche in Gerhardt (1849-63), vol. III, 179-90 (particolarmente le pp. 181-82)] e Jakob I Bernoulli (1744), t. II, n.o CIII, art. I, pp. 993-98 (particolarmente le pp. 994-96) [per la teoria bernoulliana delle combinazioni e permutazioni cfr. anche Jakob I Bernoulli (1713), parte II, pp. 72-137]. Lo stesso risultato fu ottenuto, per questa come per altre vie, da numerosi matematici successivi, fra cui Hindenburg cita: de Moivre (1697), Segner (1756-63), parte II, parr. 2442-44, pp. 136-7 e J. Castillon (1761), pp. 31-2. Per le ricostruzioni di Hindenburg cfr. Hindenburg (1779), pp. 13-39.

[12]Si noti la differenza con il caso del binomio, in cui il passaggio a esponenti non interi non comporta alcuna variazione della forma generale dello sviluppo, che viene semplicemente preso come infinito.

[13]Per questa estensione Hindenburg [cfr. Hindenburg (1779), pp. 39-43] rimanda a Kæstner (1758).

[14]Cfr. il precedente paragrafo III.5.β..

mendo il coefficiente generico dello sviluppo in funzione dei coefficienti precedenti. Fra gli altri Hindenburg presenta abbastanza dettagliatamente i metodi di de Moivre, Jakob Bernoulli, Colson e Kæstner.[15] Il primo e l'ultimo meritano un breve cenno.

Studiata la legge di formazione dei primi termini dello sviluppo di una potenza intera m (tratto per mezzo di una semplice moltiplicazione reiterata) nel caso in cui α_0 sia posto uguale a zero, de Moivre stabilisce una regola costruttiva capace di fornire abbastanza agevolmente il coefficiente generico K_ν di $z^{m+\nu}$ nello sviluppo cercato. Questo assumerà la forma di una somma finita di ν termini $U_{\nu,1}P_{\nu,1} + U_{\nu,2}P_{\nu,2} + \dots + U_{\nu,\nu}P_{\nu,\nu}$, dove $U_{\nu,i}$ $(i = 1, 2, \dots, \nu)$ - che de Moivre chiama "*uncia*"[16] - è un coefficiente numerico espresso in funzione dell'esponente m della potenza cercata e $P_{\nu,i}$ $(i = 1, 2, \dots, \nu)$ - che de Moivre chiama "prodotto" - è un prodotto formato da differenti potenze dei coefficienti β, γ, &c. della base polinomiale assegnata. Posto $K_1 = \alpha_0^m$ i "prodotti di K_ν $(\nu = 1, 2, \dots)$ si troveranno: moltiplicando i prodotti di $K_{\nu-1}$ per per α_2/α_1; quelli di $K_{\nu-2}$ - a eccezione di quelli contenenti una potenza non nulla di α_2 – per α_3/α_1; quelli di $K_{\nu-3}$ - a eccezione di quelli contenenti o una potenza non nulla di α_2 o la potenza nulla di α_2 e una potenza non nulla di α_3 - per α_4/α_1; quelli di $K_{\nu-4}$ - a eccezione di quelli contenenti o una potenza non nulla di α_2 o la potenza nulla di α_2 e una potenza non nulla di α_3 o le potenze nulle di α_2 e α_3 e una potenza non nulla di α_4 - per α_5/α_1; e così via. Le "*unciæ*" non saranno invece costituite che dal coefficiente bernoulliano corrispondente al prodotto a esse associato. Data tale regola non sarà difficile costruire i primi termini dello sviluppo di una qualsiasi potenza intera di un polinomio di grado qualunque senza termine noto:

$$(\alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z^3 + \&c.)^m =$$

$$= \alpha_1^m z^m + m\alpha_1^{m-1}\alpha_2 z^{m+1} + \left\{\begin{matrix} \dfrac{m(m-1)}{2!}\alpha_1^{m-2}\alpha_2^2 \\ +\dfrac{m}{1}\alpha_1^{m-1}\alpha_3 \end{matrix}\right\} z^{m+2} + \tag{4}$$

$$+ \left\{\begin{matrix} \dfrac{m(m-1)(m-2)}{3!}\alpha_1^{m-3}\alpha_2^3 \\ +\dfrac{m(m-1)}{1}\alpha_1^{m-2}\alpha_2\alpha_3 \\ +\dfrac{m}{1}\alpha_1^{m-1}\alpha_4 \end{matrix}\right\} z^{m-3} + \&c.$$

[15]Cfr. rispettivamente de Moivre (1697), Jakob J. Bernoulli (1744). t. II, n.o CIII, art. I, pp. 993-98 (particolarmente le pp. 96-8), Newton (1736), pp. 311-12 e Kæstner (1759).
[16]Cfr. il precedente paragrafo III.4.a.γ..

Data una tale formula, l'inessenzialità del carattere di numero naturale dell'esponente m ai fini della sua prosecuzione permette di *immaginare* la sua estendibilità al caso di esponenti non naturali

Del tutto diverso è l'approccio di Kæstner, il quale risolve il problema per un qualsiasi polinomio con o senza termine noto. Assunte le identità[17] $1 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \&c. = 1 + y$ e $(1 + y)^m = 1 + B_1 z + B_2 z^2 + \&c. = 1 + W$, si avrà, differenziando rispetto a y e dividendo per dz,

$$(5) \qquad m(1 + W)\,\frac{dy}{dz} = (1 + y)\,\frac{dW}{dz}$$

da cui, calcolando i rapporti differenziali e sostituendo è ovvio trarre:

$$(6) \qquad \begin{aligned} &m\left[1 + B_1 z + B_2 z^2 + \&c.\right]\cdot\left[\alpha_1 + 2\alpha_2 z + 3\alpha_3 z^3 + \&c.\right] = \\ &\qquad = \left[1 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \&c.\right]\cdot\left[B_1 + 2B_2 z + 3B_3 z^2 + \&c.\right] \end{aligned}$$

Da qui per il metodo degli indeterminati è facile trarre:

$$(7) \qquad \begin{aligned} &B_1 = m\alpha_1 \\ &B_2 = \frac{m-1}{2} B_1\alpha_1 + m\,\alpha_2 \\ &B_3 = \frac{m-2}{3} B_2\alpha_1 + \frac{2m-1}{3} B_1\alpha_2 + m\alpha_3 \\ &\&c. \end{aligned}$$

ciò che fornisce ricorsivamente i coefficienti dello sviluppo cercato.

Ciò che i metodi di de Moivre, Jakob Bernoulli, Colson e Kæstner hanno in comune è che essi determinano il termine v-esimo dello sviluppo cercato in funzione dei termini precedenti, ovvero forniscono una regola costruttiva che perviene alla determinazione di tale termine solo a partire dalla conoscenza dei termini di ordine inferiore. Fra essi, solo quello di de Moivre (il quale non è peraltro giustificato che induttivamente) fornisce una procedura *standard* per realizzare tale costruzione (mentre gli altri non fanno che indicarne la via). Il metodo di Kæstner appare d'altra parte come il più generale e non lascia nulla a desiderare per ciò che riguarda le sue giustificazioni, non impiegando che i principi elementari del calcolo differenziale (affiancati da un'applicazione del metodo degli indeterminati).[18] Tuttavia il ricorso al cal-

---

[17]Cfr. la prossima nota (21).

[18]Per tali giudizi cfr. il par. XX (pp. 67-9) di Hindenburg (1779) e il par. I (pp. 1-3) di Hindenburg (1778b).

colo differenziale sembra in un tale contesto artificioso, essendo riferito a un problema in se stesso estraneo alla problematica dell'analisi superiore.[19] Si può infatti pervenire alla determinazione dei coefficienti dello sviluppo cercato a partire semplicemente: i) dall'assunzione della regola del binomio; ii) dall'analisi del meccanismo di formazione dei coefficienti di uno sviluppo reiterato, ovvero dall'*analisi combinatoria*. In tal modo non solo si giunge al risultato cercato in modo più naturale, ma si può anche pervenire a fornire una determinazione non ricorsiva del coefficiente generico dello sviluppo.

Tali considerazioni, che si ritrovano, formulate tanto esplicitamente che implicitamente, lungo tutto il trattato di Hindenburg, danno luogo a qualcosa come delle "condizioni *a priori* di legittimità" per i metodi proposti in vista della soluzione del problema della potenza di un polinomio qualsiasi: esse contengono una sorta di critica filosofica dei principi rivolta alla tradizione precedente e tale da indicare una nuova e più opportuna direzione di ricerca.

III. 5. δ. *Il primo passo della soluzione di Hindenburg: la riduzione del problema generale al calcolo di opportuni coefficienti dello sviluppo in forma intera di certe potenze intere e positive di polinomi finiti*

Conseguentemente al proprio nuovo punto di vista Hindenburg formula il problema della potenza di un polinomio qualsiasi in termini essenzialmente diversi da quelli "classici". In luogo di intendere tale problema come quello della determinazione di uno sviluppo in forma intera, egli lo intende come quello della determinazione della forma del coefficiente generico di tale sviluppo. Il cambiamento di prospettiva conduce a impostare una soluzione fondata sulla ricerca delle relazioni che sussistono non fra differenti sviluppi (o fra forme intere e sviluppi associati), ma fra coefficienti di posto corrispondente in differenti sviluppi.

Assunta la posizione "kæsteriana"

$$(8) \qquad 1+\alpha_1 z+\alpha_2 z^2+\ldots+\alpha_v z^v = 1+y \qquad [v \in \mathbb{N}]$$

Hindenburg trae in effetti la relazione seguente[20]

$$(9) \qquad \left(1+\alpha_1 z+\alpha_2 z^2+\ldots+\alpha_v z^v\right)^m = (1+y)^m$$
$$= 1+B_1 z+B_2 z^2+\ldots+B_v z^v = 1+W$$

[19]Cfr. la precedente sezione III.3.*a*.. Per quanto Hindenburg non espliciti mai tale argomento di origine euleriana, esso sembra percorrere, sia pure reinterpretato entro un nuovo punto di vista (tendente a una riduzione dell'analisi tanto algebrica che superiore alla combinatoria), buona parte della sua produzione matematica.

[20]La lettera W - così come la lettera Z nella prossima formula (10) - indica qui una forma e non la quantità che questa rappresenta.

che, nonostante l'impiego dell'usuale simbolo di identità fra forme finite, non è certamente una relazione d'eguaglianza numerica (è del tutto evidente che lo sviluppo della potenza m-esima ($m \neq 1$) di un polinomio di grado ν non può infatti essere espresso a sua volta da un polinomio di grado ν).[21] Sviluppando la potenza del binomio e sostituendo si avrà inoltre (utilizzando ancora il simbolo di identità come sopra):[22]

$$
\begin{aligned}
(1+y)^m &= 1 + \binom{m}{1} y + \binom{m}{2} y^2 + \ldots + \binom{m}{\nu} y^\nu \\
&= 1 + \binom{m}{1}\left[\cancel{1} + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots + \alpha_\nu z^\nu\right] + \\
&\quad + \binom{m}{2}\left[\cancel{1} + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots + \alpha_\nu z^\nu\right]^2 + \\
&\quad \ldots \\
&\quad + \binom{m}{\nu}\left[\cancel{1} + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots + \alpha_\nu z^\nu\right]^\nu = 1 + Z
\end{aligned}
\tag{10}
$$

[21]Hindenburg utilizza la stessa notazione riferita a polinomi espressamente finiti di grado ν per ricostruire il metodo di Kæstner esposto nel precedente paragrafo III.5.γ.. Per ragioni di semplicità espositiva ho tuttavia preferito riformulare tale metodo in termini di polinomi di grado imprecisato.

[22]Utilizzando la notazione di Euler, Hindenburg indica i successivi coefficienti binomiali servendosi delle maiuscole gotiche $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}, \mathfrak{C}, \ldots, \mathfrak{N}$ (notazione che egli preciserà nel 1781, introducendo un indice indicante l'esponente della potenza considerata [cfr. Hindenburg (1781), p. XL]). Nella mia ricostruzione modificherò, in questo come in altri casi, la notazione di Hindenburg, facendo costantemente ricorso all'impiego di indici. Se è evidente che una tale correzione introduce una notevole semplificazione nelle formule di questi, senza un'opportuna precisazione essa può dare un'idea errata dello stadio di elaborazione del linguaggio matematico hindenburghiano. Ogni volta che le differenze mi parranno significative indicherò quindi in nota la notazione originale. Ciò detto vale tuttavia la pena di sottolineare che l'impiego di indici indicanti il posto di un certo termine in una successione non era per nulla estraneo (così come già a Euler, anche) a Hindenburg e ai matematici della sua scuola. Roth utilizzerà a esempio nel 1796 [cfr. Roth (1796)] il simbolo $\rho\overset{-\sigma}{\mathfrak{N}}$ per indicare il coefficiente binomiale $\binom{\rho}{n-\sigma}$. In un'opera, a mia conoscenza mai integralmente pubblicata [di cui alcuni frammenti si trovano in Hindenburg (1803), pp. 1-28], l' *Essai de carateristique combinatoire*, H. Bürmann sostenne d'altra parte che l'impiego della notazioni gotiche fu una delle ragioni della scarsa diffusione fuori dalla Germania della combinatoria hindenburghiana. Nello stesso saggio Bürmann presenta le idee generali di una nuova notazione combinatoria, il cui progetto non è che una parte di un più generale progetto di una scrittura simbolica universale, che Bürmann svilupperà, senza mai farne l'oggetto di una pubblicazione [cfr. a questo proposito Bürmann (1807) e in particolare l'esemplare segnato V 25081 della *Bibliotéque Nationale* di Parigi, in cui sono aggiunti a mano degli esempi della nuova scrittura]. L'interesse di Bürmann per una nuova notazione matematica è anche testimoniato dalla memoria inviata all'*Institut* nel 1798 (e dal suo successivo supplemento) in cui è utilizzato, a mia conoscenza per la prima volta, l'odierno simbolo di sommatoria completato dai propri indici [cfr. Bürmann (1798) e (s. d.)].

Dovendo determinare il coefficiente generico[23] B_v dello sviluppo in forma intera della potenza assegnata, Hindenburg assume la relazione W = Z e esprime quindi il termine $B_v z^v$ di tale sviluppo per mezzo della somma dei termini "omonimi" dello sviluppo del terzo membro della (10). Indicando[24] con ${}^r t_s$ l's-esimo termine della potenza y^r ($r, s = 1, 2, ..., v$) Hindenburg perviene così al seguente risultato (qui il simbolo d'identità torna a essere utilizzato come usualmente):

$$(11) \qquad B_v z^v = \binom{m}{1} {}^1t_v + \binom{m}{2} {}^2t_{(v-1)} + \binom{m}{3} {}^3t_{(v-2)} + \ldots + \binom{m}{v} {}^v t_1$$

che egli giustifica osservando che gli esponenti di z nelle potenze successive $y^1, y^2, ..., y^v$ costituiscono la successione

$$(12) \qquad \left\{ \begin{matrix} 1, 2, 3, \ldots, v \\ 2, 3, \ldots, v \\ 3, \ldots, v \\ \ldots \\ v \end{matrix} \right\}$$

Presentata la dimostrazione è ora necessario interpretarla. Se è infatti ovvio comprendere che il simbolo di identità non può essere inteso nella (9) e nella (10) (così come nella posizione W = Z) secondo il suo senso usuale (ciò che condurrebbe a considerare tali formule come banalmente errate), resta il problema di comprendere come tale simbolo possa essere inteso per assegnare un senso alla dimostrazione precedente e giustificare quindi la (11). L'interpretazione che proporrò mi pare perfettamente naturale e tale da cogliere il nucleo essenziale della proposta matematica di Hindenburg.

Per questo si ponga in primo luogo la (8) sotto la forma

$$(13) \qquad 1 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots + \alpha_v z^v + \&c. = 1 + y$$

in cui il simbolo &c. indichi una arbitraria continuazione (finita o infinita) della somma. Si consideri inoltre il polinomio finito $1 + B_1 z + B_2 z^2 + \ldots + B_v z^v = 1 + W$ (in 9) come la ridotta parziale di ordine v di un polinomio generico di grado vm, $1 + B_1 z + B_2 z^2 + \ldots + B_v z^v + \ldots + B_{vm} z^{vm}$. Introducendo la notazione $\Phi \overset{*}{=}_v \Psi$ per indicare un'identità delle ridotte parziali di ordine v dei polinomi di grado qualsiasi (finito o infinito) Φ e Ψ, potremmo riscrivere allora la (9) sotto la forma seguente:

---

[23]Hindenburg indica questo coefficiente con il simbolo λ_v nel 1778 e con quello $\Gamma^{(v)}$ nel 1779.

[24]La notazione è di Hindenburg.

$$
(14)\quad
\begin{aligned}
&\text{i)}\ \left[1+\alpha_1 z+\alpha_2 z^2+\ldots+\alpha_v z^v+{}^1R_v(z)\right]^m = (1+y)^m\\
&\text{ii)}\qquad = 1+B_1 z+B_2 z^2+\ldots+B_v z^v+{}^2R_{v,m}(z)\\
&\text{iii)}\qquad = 1+W+{}^2R_{v,m}(z)\\
&\text{iv)}\qquad *=_v 1+B_1 z+B_2 z^2+\ldots+B_v z^v = 1+W
\end{aligned}
$$

dove v è un indice variabile su un dominio finito o infinito e ${}^1R_v(z)$ e ${}^2R_{v,m}(z)$ sono dei resti opportuni costituiti da polinomi in z.

Allo stesso modo si avrà:[25]

$$
(15)\quad
\begin{aligned}
&\text{i)}\ (1+y)^m = 1+\binom{m}{1}y+\binom{m}{2}y^2+\ldots+\binom{m}{v}y^v+{}^3R_{v,m}(y)\\
&\text{ii)}\qquad = 1+Z+{}^3R_{v,m}(y)\\
&\text{iii)}\qquad *=_v 1+\binom{m}{1}y+\binom{m}{2}y^2+\ldots+\binom{m}{v}y^v = 1+Z
\end{aligned}
$$

Congiungendo (14) e (15) si avrà allora

$$
(16)\quad (1+y)^m = 1+W+{}^2R_{v,m}(z) = 1+Z+{}^3R_{v,m}(y)
$$

Essendo $y = y(z)$ possiamo indicare con $Z_v(z)$ la ridotta parziale di Z di ordine v relativamente alla variabile z. La (16) si trasforma allora nella nuova identità:

$$
(17)\quad (1+y)^m = 1+W+{}^2R_{v,m}(z) = 1+Z_v(z)+{}^3R_{v,m}(z)
$$

da cui è ovvio trarre

$$
(18)\quad
\begin{aligned}
&\text{i)}\ W = Z_v(z)\\
&\text{ii)}\ {}^2R_{v,m}(z) = {}^3R_{v,m}(z)
\end{aligned}
$$

Siccome l'esplicitazione di $Z_v(z)$ può essere assai complicata, la (18)(i) può essere sostituita dalla relazione seguente

[25] E' chiaro che se $v \leq m$ e $m \in$ N alcuni coefficienti binomiali saranno qui uguali a zero.

$$
(19) \qquad
\begin{aligned}
1 + B_1 z + B_2 z^2 + \ldots + B_\nu z^\nu \; {*}{=}_\nu \; 1 &+ \binom{m}{1}\left[\alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots + \alpha_\nu z^\nu\right] \\
&+ \binom{m}{2}\left[\alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots + \alpha_{\nu-1} z^{\nu-1}\right]^2 \\
&+ \binom{m}{3}\left[\alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots + \alpha_{\nu-2} z^{\nu-2}\right]^3 \\
&\ldots \\
&+ \binom{m}{\nu}\left[\alpha_1 z\right]^\nu
\end{aligned}
$$

La mia proposta è di interpretare la (9) nei termini della (14)(iv), la (10) nei termini della (15)(iii) e la posizione W = Z nei termini della (19), la quale è, ai fini delle dimostrazione di Hindenburg, del tutto analoga alla seguente identità generica

$$
(20) \qquad
\begin{aligned}
1 + B_1 z + B_2 z^2 + \ldots + B_\nu z^\nu \; {*}{=}_\nu \; 1 &+ \binom{m}{1}\left[H_{1,1} z + H_{2,1} z^2 + \ldots + H_{\nu,1} z^\nu\right] \\
&+ \binom{m}{2}\left[H_{1,2} z^2 + H_{2,2} z^3 + \ldots + H_{\nu-1,2} z^\nu\right] \\
&+ \binom{m}{3}\left[H_{1,3} z^3 + H_{2,3} z^4 + \ldots + H_{\nu-2,3} z^\nu\right] \\
&\ldots \\
&+ \binom{m}{\nu}\left[H_{1,\nu} z^\nu\right]
\end{aligned}
$$

(dove $H_{i,j}$ ($1 \leq i, j \leq \nu$; $i, j \in N$) è il coefficiente i-esimo della potenza y^j), la quale chiarisce il richiamo alla (12).

Dalla (20) è poi ovvio trarre (non applicando che la versione algebrica del metodo dei coefficienti indeterminati):

$$
(21) \qquad
\begin{aligned}
B_1 &= \binom{m}{1} H_{1,1} = m\alpha_1 \\
B_2 &= \binom{m}{1} H_{2,1} + \binom{m}{2} H_{1,2} \\
&\ldots \\
B_\nu &= \binom{m}{1} H_{\nu,1} + \binom{m}{2} H_{\nu-1,2} + \ldots + \binom{m}{\nu} H_{1,\nu}
\end{aligned}
$$

Modificando la notazione e moltiplicando i due membri per z^{ν} l'ultima di queste identità è esattamente la (11).

Il modo nel quale Hindenburg esemplifica il proprio risultato giustifica la mia interpretazione. Per trovare B_3 egli pone, secondo la (11)

$$(22) \qquad B_3 z^3 = \binom{m}{1} {}^1t_3 + \binom{m}{2} {}^2t_2 + \binom{m}{3} {}^3t_1$$

e interpreta ${}^1t_3$ come il terzo termine di $(\alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z^3)$, ${}^2t_2$ come il secondo termine dello sviluppo di $(\alpha_1 z + \alpha_2 z^2)^2$ e ${}^3t_1$ come la potenza $(\alpha_1 z)^3$, ciò che dà immediatamente l'identità:

$$(23) \qquad B_3 = m\alpha_3 + m(m\text{-}1)\ \alpha_1\alpha_2 + \frac{m(m\text{-}1)(m\text{-}2)}{3!}\alpha_3^3$$

La considerazione di basi polinomiali infinite (ovvero il passaggio al problema della potenza di una serie intera) o di esponenti non naturali non sembra comportare alcuna limitazione relativa alla dimostrazione e ai risultati di Hindenburg, che vanno semplicemente intesi nei termini di un insieme di associazioni formali fondate sui procedimenti euleriani di manipolazione e trasformazione delle serie intere. Intese come rappresentazioni compatte di certe forme analitiche, e non come simboli atomici per quantità, *y*, W e Z possono infatti associarsi tanto a serie convergenti che divergenti, in modo che la (11) continua a esprimere, anche in condizioni che comportano la divergenza di tutte o alcune delle serie considerate, il termine generico della serie operazionalmente associata (in modo univoco) alla forma assegnata. Nel procedimento di Hindenburg non vi è così alcun passaggio al limite nascosto; esso non si presenta che come la determinazione di certe conseguenze formali tratte dall'accettazione della regola del binomio (eventualmente generalizzata).

D'altra parte la (11) non si presenta ancora, in quanto tale, come una soluzione del problema della potenza di un polinomio qualsiasi, ma soltanto come una maniera di porlo. Tutto ciò che essa ci dice è che la forma del termine generico dello sviluppo di tale potenza non dipende dall'esponente m della potenza considerata che per i coefficienti binomiali che compaiono in esso, mentre dipende, per i restanti fattori dei suoi addenti, dalla forma dell's-esimo termine ($s = \nu, \nu\text{-}1, ..., 1$) delle potenze r-esime (con $r = 1$ se $s = \nu$, $r = 2$ se $s = \nu\text{-}1$, ..., $r = \nu$ se $s = 1$) dei polinomi $\alpha_1 z + \alpha_2 z^2 +... \alpha_s z^s$ e è quindi perfettamente determinabile - per ogni scelta di m e per ogni base polinomiale assegnata (sia essa finita o infinita) - in base al calcolo di opportuni coefficienti dello sviluppo in forma intera di certe potenze intere e positive di polinomi finiti. Così Hindenburg ha finora[26] che fornito una reinterpretazione del problema classico della potenza di un polinomio qualsiasi, traducendolo

[26]Cfr. Hindenburg (1778b), par. II e (1779), par. XXI.

nel problema della determinazione del termine generico di ordine ν dello sviluppo cercato e riducendo quest'ultimo al calcolo di ${}^{r}t_{s}$ per la posizione $r+s = \nu+1$. La questione cruciale è allora la seguente: è possibile indicare un algoritmo non ricorsivo che guidi l'esecuzione di tale calcolo per ogni scelta di s e ν? La proposta di Hindenburg è di affrontare tale questione ricorrendo all'ausilio dell'analisi combinatoria.[27]

III. 5. ε. *Il secondo passo della soluzione di Hindenburg: l'applicazione dell'analisi combinatoria al calcolo del termine generico di una potenza intera di un polinomio senza termine noto*

Dato un numero intero q non è difficile determinare ricorsivamente le classi delle λ-uple ordinate ($\lambda = 1, 2, \ldots, q$) $<q_1, q_2, \ldots q_\lambda>$ tali che $q_1 + q_2 + \ldots + q_\lambda = q$ e $q_1 \leq q_2 \leq \ldots \leq q_\lambda$, le quali forniscono una partizione di q in λ parti uguali o differenti fra loro. Nella precedente sezione III.3.*d.* (in particolare nella sottosezione III.3.*d* (3)) ho indicato il numero di tali partizioni per λ fissato con il simbolo $\overset{\lambda}{P}_q$; qui indicherò la classe delle λ-uple di numeri interi corrispondenti a esse con il simbolo ${}^{\lambda}\Pi_q$.[28] Data la classe ${}^{1}\Pi_q = \{<q>\}$ formata dal solo singoletto $<q>$, sarà facile costruire a partire da essa la classe ${}^{2}\Pi_q$:

$$(24) \qquad {}^{2}\Pi_q = \left\{<1, q-1>, <2, q-2>, <3, q-3>, \ldots, <\lfloor q/2 \rfloor, \lceil q/2 \rceil>\right\}$$

---

[27] Cfr. per ciò che segue i paragrafi III-IV (pp. 3-22) di Hindenburg (1778b) e i paragrafi XXII e XIII (pp. 71-100) di Hindenburg (1779). Le numerose aggiunte che distinguono i secondi dai primi non riguardano nessuno dei risultati essenziali presentati nella mia ricostruzione.

[28] Nella notazione della precedente sezione III.3.*d.* $\overset{\lambda}{P}_q$ sarà così il numero degli elementi della classe di λ-uple ${}^{\lambda}\Pi_q$ relativa a una scelta di q e λ. Una tale notazione non è naturalmente di Hindenburg che in luogo dei simboli ${}^{1}\Pi_q$, ${}^{2}\Pi_q$, ${}^{3}\Pi_q$ utilizza i simboli ${}^{q}A$, ${}^{q}B$, ${}^{q}C$, &c.. Per quanto riguarda i termini utilizzati va notato che, mentre il termine "λ-upla" non appartiene a Hindenburg - che parla piuttosto di "complessioni" (*complexiones*) - questi impiega espressamente il termine "classe" (*classis*) per riferirsi all'insieme delle "complessioni" relative a una certa scelta di q e λ. Così a ogni numero intero q corrisponderanno q classi di λ-uple ($\lambda = 1, 2, \ldots, q$), o "complessioni" a λ elementi, mentre a ogni coppia di numeri interi q e λ corrisponderà una sola classe ${}^{\lambda}\Pi_q$ di λ-uple, o "complessioni" a λ elementi, formata a sua volta da $\overset{\lambda}{P}_q$ elementi.

dove se q è pari $\lfloor q/2 \rfloor = \lceil q/2 \rceil = q/2$, mentre se q è dispari $\lfloor q/2 \rfloor = \dfrac{q-1}{2}$ e $\lceil q/2 \rceil = \dfrac{q+1}{2}$. Agendo sul secondo elemento delle coppie che costituiscono gli elementi di ${}^{2}\Pi_{q}$ si avrà, senza alcuna difficoltà:[29]

$$(25) \qquad {}^{3}\Pi_{q} = \left\{ \begin{array}{l} <1,\ 1,\ q-2>,\ <1,\ 2,\ q-3>,\ \ldots,\ <1, \lfloor \frac{q-1}{2} \rfloor, \lceil \frac{q-1}{2} \rceil> \\ \\ <2,\ 2,\ q-4>,\ <2,\ 3,\ q-5>,\ \ldots,\ <2, \lfloor \frac{q-2}{2} \rfloor, \lceil \frac{q-2}{2} \rceil> \\ \ldots \\ < \lfloor q/3 \rfloor, \lfloor q/3 \rfloor, \lceil q/3 \rceil> \end{array} \right\}$$

e così via.[30]

Trovate tutte le classi ${}^{r}\Pi_{s+r-1} \left(= {}^{\nu-s+1}\Pi_{\nu} = {}^{r}\Pi_{\nu} \right)$ $(r = 1, 2, \ldots, \nu;\ +s = \nu+1)$ associate a un numero fissato $q = \nu = s+r-1$, Hindenburg individua un insieme di sostituzioni algoritmiche opportune, le quali permettono di costruire, a partire da tali classi e secondo una procedura *standard*, i termini ${}^{r}t_{s} = H_{s,r}\, z^{\nu}$ che occorrono nel termine generico di ordine ν dello sviluppo di una potenza qualsiasi del polinomio assegnato. Per questo basta sostituire in tutte le r-uple di ogni classe i numeri naturali 1, 2, ..., s rispettivamente con i coefficienti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ di tale polinomio, moltiplicare fra loro gli elementi di ogni r-upla così ottenuta - in modo da trasformare ${}^{r}\Pi_{\nu}$ in una classe di monomi del tipo $\alpha_1^{p_1} \cdot \alpha_2^{p_2} \cdot \ldots \cdot \alpha_s^{p_s}$ (con $p_1+p_2+ \ldots +p_s = r$) - moltiplicare ciascuno di questi monomi per il corrispondente coefficiente polinomiale bernoulliano $\dfrac{r!}{p_1!\, p_2! \cdots p_s!}$, sommare fra loro i nuovi monomi così ottenuti e moltiplicare il risultato per z^{ν}.

Per giustificare una tale procedura basta osservare: i) che il termine

---

[29]Per giustificare un tale risultato basta osservare che, fissato il primo elemento della λ-upla che deve essere costruita a partire da una $(\lambda-1)$-upla data, il secondo elemento deve per definizione essere maggiore o uguale a questo; fissati i primi due elementi, il terzo deve essere maggiore o uguale al secondo; e così via.

[30]Per quanto le notazioni di Hindenburg non permettono a questi che di esemplificare un tale procedimento relativamente a una scelta arbitraria di q (q = 10), la generalizzazione è assolutamente banale.

$H_{s,r} = {}^r t_s / z^v$ in B_v corrisponde, secondo la (19), al coefficiente di z^v nello sviluppo in forma intera della potenza $\left[\alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots + \alpha_s z^s\right]^r$, il quale sarà formato dalla somma di tutti i monomi costituiti da un prodotto di r elementi uguali o distinti, scelti fra i coefficienti $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_s$ in modo che la somma degli indici sia costantemente uguale a v; ii) che il coefficiente polinomiale bernoulliano $\dfrac{r!}{p_1!\, p_2! \ldots p_s!}$ corrisponde al numero delle possibili permutazioni di una r-upla nella quale un certo elemento compare p_1 volte, un altro elemento p_2 volte, un terzo elemento p_3 volte, ..., un s-esimo elemento p_s volte.

Descritta la propria procedura costruttiva, Hindenburg la condensa nella formula seguente

$$(26) \qquad {}^r t_s = Q_r \cdot {}^r\Pi_{s+r-1} \cdot z^{s+r-1} \qquad \begin{pmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & \ldots \\ 1, & 2, & 3, & \ldots \end{pmatrix}$$

nella quale Q_r indica il "coefficiente polinomiale indefinito" relativo alla potenza r (e diverso per ogni elemento della classe di r-uple di numeri naturali per cui esso è moltiplicato), la matrice indica le sostituzioni che devono essere operate, mentre le leggi di moltiplicazione sono implicitamente definite dalla descrizione precedente.[31]

---

[31]Ecco come Hindenburg si esprime nei termini della propria notazione (si noti che Hindenburg utilizza qui le lettere greche ν e μ come io ho utilizzato le lettere latine r e s) [cfr. Hindenburg (1779), p. 93]:

$(\alpha z + \beta z^2 + \gamma^3 + \delta z^4 + \varepsilon z^5 \ldots + c^{(n)} z^n)^\nu$ Terminus indefinitus μ^{tus} generalis

$${}^\nu t_\mu = \mathfrak{A}\, {}^{\mu+\nu-1}\mathfrak{N}$$

ubi *Classis indefinita* $\mathfrak{N}$, pariter ac *Coefficiens Polynomialis indefinitus* $\mathfrak{A}$, per Seriei *y Exponentem* ν *unice determinatur*, sic ut, posito $\nu = 1, 2, 3, 4, 5, 6$, &c. *successive*, fiat $\mathfrak{N}$ = A, B, C, D, E, F, &c. [...] *respective*; quibus deinde *Classibus* comites adduntur *Coefficientes homonymi Polynomiales* $\mathfrak{a}, \mathfrak{b}, \mathfrak{c}, \mathfrak{d}, \mathfrak{e}, \mathfrak{f}$, &c..

Come si vede Hindenburg non presenta alcuna definizione esplicita della legge di moltiplicazione fra il coefficiente bernoulliano e la classe ${}^{\mu+\nu-1}\mathfrak{N}$ di ν-uple di numeri naturali, rinviando implicitamente alla propria descrizione del procedimento costruttivo; egli sottintende inoltre la moltiplicazione per $z^{\mu+\nu-1}$ e non specifica la regola di sostituzione, assumendo implicitamente le relazioni $\alpha \to 1$, $\beta \to 2$, &c. Sarà solo nel 1793 che, generalizzando il procedimento di Hindenburg e intendendolo, in quanto tale, come un algoritmo indipendente da una particolare regola di sostituzione, Roth introdurrà la specificazione di tale regola, aggiungendo la matrice che compare nella (26) [cfr. Roth (1793)]. Il suggerimento di Roth fu immediatamente accettato dallo stesso Hindenburg che a partire dal 1793 ne utilizzerà costantemente la notazione [cfr. Hindenburg (1793)]. E' evidente che nella mia notazione a indici la corrispondenza fra l'indice i di α_i e il numero a cui deve essere sostituito tale coefficiente non dipende che da una opportuna scelta della forma che esprime espresso il polinomio di partenza; é così chiaro che qualora questo sia inteso come il risultato di precedenti manipolazioni riferite a un polinomio dato e si presenti quindi sotto una forma diversa, in cui l'indice del coefficiente non corrisponda all'esponete della potenza della variabile a cui esso è

Un semplice esempio tratto dal testo di Hindenburg chiarirà il procedimento. Si cerchi il quinto termine dello sviluppo di y^6, il quale corrisponde al quinto termine dello sviluppo della potenza $(\alpha_1 z + \ldots + \alpha_5 z^5)^6$, ovvero il termine ${}^6t_5 = H_{5,6}z^{10}$, che compare come fattore nel quinto addendo del termine $B_{10}z^{10}$ dello sviluppo di una potenza polinomiale qualsiasi $(1 + \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \alpha_3 z^3 \ \&c.)^m$. Data la classe di 6-uple ${}^6\Pi_{10}$:

$$(27) \qquad {}^6\Pi_{10} = \left\{ \begin{matrix} \langle 1, 1, 1, 1, 1, 5 \rangle \\ \langle 1, 1, 1, 1, 2, 4 \rangle \\ \langle 1, 1, 1, 1, 3, 3 \rangle \\ \langle 1, 1, 1, 2, 2, 3 \rangle \\ \langle 1, 1, 2, 2, 2, 2 \rangle \end{matrix} \right\}$$

si operino le sostituzioni $\begin{pmatrix} \alpha_1, & \alpha_2, & \alpha_3, & \ldots \\ 1, & 2, & 3, & \ldots \end{pmatrix}$ pervenendo alla classe di monomi $\left\{ \alpha_1^5\alpha_5 \,;\, \alpha_1^4\alpha_2\alpha_4 \,;\, \alpha_1^4\alpha_3^2 \,;\, \alpha_1^3\alpha_2^2\alpha_3 \,;\, \alpha_1^2\alpha_2^4 \right\}$. Moltiplicando ognuno di tali monomi per z^{10} e per il corrispondente coefficiente polinomiale bernoulliano e sommando fra loro i nuovi monomi così ottenuti si avrà allora:

$$(28) \qquad \begin{aligned} {}^6t_5 &= \left(\frac{6!}{5!}\alpha_1^5\alpha_5 + \frac{6!}{4!}\alpha_1^4\alpha_2\alpha_4 + \frac{6!}{4!\,2!}\alpha_1^4\alpha_3^2 \ \frac{6!}{3!\,2!}\alpha_1^3\alpha_2^2\alpha_3 + \frac{6!}{2!\,4!}\alpha_1^2\alpha_2^4 \right) z^{10} \\ &= \left(6\,\alpha_1^5\alpha_5 + 30\,\alpha_1^4\alpha_2\alpha_4 + 15\,\alpha_1^4\alpha_3^2 \ \ 60\,\alpha_1^3\alpha_2^2\alpha_3 + \cancel{30}\,\alpha_1^2\alpha_2^4 \right) z^{10} \quad 15 \end{aligned}$$

Data la (26) sarà peraltro ovvio derivarne la forma generale dello sviluppo tanto di una potenza intera di un polinomio senza termine noto,

$$(29) \qquad \begin{aligned} y^r &= \left(\alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \ldots + \alpha_v z^v + \&c. \right)^r = \\ &= Q_r \left[{}^r\Pi_r z^r + {}^r\Pi_{r+1} z^{r+1} + {}^r\Pi_{r+2} z^{r+2} + \&c. \right] \\ & \qquad\qquad \begin{pmatrix} a_1, & a_2, & a_3, & \ldots \\ 1, & 2, & 3, & \ldots \end{pmatrix} \quad [r \in \mathrm{N}] \end{aligned}$$

che di una potenza qualsiasi di un polinomio qualunque,[32]

---

associato, anche la regola di sostituzione sarà differente.

[32]Cfr. Hindenburg (1778b), par. V, pp. 22-7 e (1779), par. XXV, pp. 113-20.

$$
\begin{aligned}
(1+y)^m &= \left(1+\alpha_1 z+\alpha_2 z^2+\ldots+\alpha_v z^v+\&c.\right)^m \\
&= 1+B_1 z+B_2 z^2+\ldots+B_v z^v+\&c. \\
&= 1+\left[\binom{m}{2} Q_1\,{}^1\Pi_1\right] z+ \\
&\quad +\left[\binom{m}{1} Q_1\,{}^1\Pi_2+\binom{m}{2} Q_2\,{}^2\Pi_2\right] z^2 \\
&\quad \ldots \\
&\quad +\left[\binom{m}{1} Q_1\,{}^1\Pi_v+\binom{m}{2} Q_2\,{}^2\Pi_v+\ldots+\binom{m}{v} Q_v\,{}^v\Pi_v\right] z^v \\
&\quad +\&c.
\end{aligned} \tag{30}
$$

$$\begin{pmatrix} a_1, & a_2, & a_3, & \ldots \\ 1, & 2, & 3, & \ldots \end{pmatrix} \quad [m \in \mathbf{R}]$$

ovvero:

$$B_v z^v=\left[\binom{m}{1} Q_1\,{}^1\Pi_v+\binom{m}{2} Q_2\,{}^2\Pi_v+\ldots+\binom{m}{v} Q_v\,{}^v\Pi_v\right] z^v \tag{31}$$

$$\begin{pmatrix} a_1, & a_2, & a_3, & \ldots \\ 1, & 2, & 3, & \ldots \end{pmatrix} \quad [m \in \mathbf{R}]$$

Come è chiaro, il passaggio dalla (11) alla (31) è del tutto indipendente dalla natura dell'esponente m della potenza assegnata; la generalità accordata alla (30) e alla (31) relativamente alla natura dell'esponente m non è così che una banale conseguenza di una analoga generalità accordata alla regola del binomio. E' proprio grazie all'assunzione di tale generalità e alla semplice posizione (13) che è possibile ridurre il problema dello sviluppo di una potenza qualsiasi (naturale o non naturale) di un polinomio qualunque al problema della determinazione di certi coefficienti nello sviluppo di opportune potenze intere e positive di opportuni polinomi finiti. Un procedimento analogo permette d'altra parte di fornire lo sviluppo in serie intera di una funzione qualsiasi di un polinomio qualunque ordinato rispetto alle potenze di una sola variabile, una volta che si sia assunto lo sviluppo in serie intera della stessa funzione riferita a una variabile y o a un binomio $1+y$.[33] Per questo basterà infatti porre la (13), scrivere lo sviluppo in serie intera della funzione data relativamente a y e sostituire le successive potenze intere di tale variabile con le corrispondenti potenze intere di opportune ridotte del polinomio in questione, ottenendo un'identità analoga alla (19); da qui sarà poi ovvio trarre un'opportuna espressione del termine generico dello sviluppo cercato, la quale non differirà dalla (11) che per la sostituzione dei coef-

[33]Cfr. Hindenburg (1779), par. XXIV (pp. 100-13). Tale paragrafo è aggiunto *ex novo* nel 1779 e non ha quindi alcun corrispondente in (1778b).

ficienti binomiali con altri coefficienti numerici dipendenti dalla funzione considerata. Il richiamo alla (26) permetterà così l'immediata determinazione di tale termine e fornirà quindi la soluzione del problema. Assunto a esempio lo sviluppo in serie intera della funzione esponenziale e posta la (13) si avrà, senza alcuna difficoltà:[34]

$$
\begin{aligned}
e^{\alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \&c.} &= e^y = 1 + y + \frac{1}{2!} y^2 + \dots + \frac{1}{\nu!} y^\nu + \&c. \\
&*=_\nu\ 1 + \left[\alpha_1 z + \dots + \alpha_\nu z^\nu\right] \\
&\quad + \frac{1}{2!}\left[\alpha_1 z + \dots + \alpha_{\nu-1} z^{\nu-1}\right]^2 \\
&\quad \dots \\
&\quad + \frac{1}{\nu!}\left[\alpha_1 z\right]^\nu
\end{aligned}
\tag{32}
$$

da cui è ovvio trarre:

$$
\begin{aligned}
e^{\alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \&c.} &= 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[{}^1t_\nu + \frac{1}{2!}\,{}^2t_{\nu-1} + \frac{1}{3!}\,{}^3t_{\nu-2} + \dots + \frac{1}{\nu!}\,{}^\nu t_1 \right] \\
&= 1 + \sum_{\nu=1}^{\infty}\left[H_{\nu,1} + \frac{1}{2!} H_{\nu-1,2} + \frac{1}{3!} H_{\nu-2,3} + \dots + \frac{1}{\nu!} H_{1,\nu} \right] z^\nu
\end{aligned}
\tag{33}
$$

e quindi, secondo la (26):

$$
e^{\alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \&c.} = 1 + \alpha_1 z + \left[\alpha_2 + \frac{1}{2}\alpha_1^2\right] z^2 + \left[\alpha_3 + \alpha_1\alpha_2 + \frac{1}{6}\alpha_1^3\right] z^3 + \&c.
\tag{34}
$$

Benché un tale procedimento sia banalmente generalizzabile e possa quindi fornire, a partire dall'assunzione dello sviluppo di Taylor di una funzione qualsiasi, la forma generale dello sviluppo in serie intera di una qualsiasi funzione di un polinomio, Hindenburg non compie questo passo, limitandosi a fornire nella sua memoria alcuni significativi esempi come il precedente. La ragione di una tale mancata generalizzazione risiede senza dubbio in una sorta di ritrosia a fare ricorso, nella teoria delle serie, a strumenti e nozioni di carattere differenziale. Il ricorso agli sviluppi euleriani e alle conseguenze delle loro composizioni permette d'altra parte di ritrovare, tramite il procedimento descritto qui sopra, ognuno degli sviluppi particolari che il

[34] L'esempio è di Hindenburg [cfr. *ivi*, pp. 108-09].

ricorso al "teorema" di Taylor e all'algoritmo differenziale non fa che rinchiudere in una formula di ordine generale.

III. 5. ζ. *La dimostrazione funzionale di Euler-Segner-Roth del teorema generalizzato del binomio*[35]

Intesi da un punto di vista "fondazionale" i risultati raggiunti da Hindenburg nel proprio trattato del 1779 non si presentano che come delle conseguenze algoritmiche del teorema generalizzato del binomio, tratte attraverso il ricorso a opportune considerazioni di natura combinatoria. Benché questi disponesse senza dubbio di una vasta scelta fra diverse dimostrazioni possibili di tale teorema (su cui far poggiare, in ultima istanza, l'intero edificio della propria teoria), alle quali egli sarebbe stato certamente disposto a concedere fiducia - almeno in attesa di dimostrazioni migliori - egli non avrebbe certo potuto pretendere di qualificare l'analisi combinatoria come una branca autonoma della matematica, riducendo a essa l'intera teoria delle serie, senza poter fornire una dimostrazione di questo stesso teorema, la quale potesse qualificarsi, essa stessa, almeno in un qualche senso, come combinatoria.

In particolare Hindenburg non avrebbe certo potuto richiamarsi a una dimostrazione differenziale del teorema del binomio, fra cui la più semplice è certamente quella che considera quest'ultimo come un caso particolare del "teorema" di Taylor e lo dimostra applicando alla funzione particolare $f(x) = (1+x)^m$ ($m \in \mathbf{R}$) il procedimento newtoniano per differenziazioni successive.[36] Fra le dimostrazioni non differenziali (o "elementari", come esse venivano chiamate nel XVIII secolo) una particolarmente interessante, di natura espressamente funzionale, ma espressamente limitata al caso di esponenti razionali, era stata fornita da Euler pochi anni prima che Hindenburg pubblicasse le sue prime memorie.[37]

Ponendo, per ogni n,

$$[n] = 1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \&c. \tag{35}$$

si avrà, per ogni n e m,

$$\begin{aligned}[n]\cdot[m] &= \left[1 + nx + \frac{n(n-1)}{2!}x^2 + \&c.\right]\left[1 + mx + \frac{m(m-1)}{2!}x^2 + \&c.\right] \\ &= 1 + (n+m)x + \frac{(n+m)(n+m-1)}{2!}x^2 + \&c. \\ &= [n+m]\end{aligned} \tag{36}$$

[35]Cfr. Pensivy (1987-88), pp. 124-29.

[36]Cfr. a esempio Euler (1755), pp. 359-62.

[37]Cfr. Euler (1774) [cfr. la nota (86) del precedente paragrafo II.2.κ.].

e quindi, per ogni *r* intero e positivo:

(37) $[m]^r = [m]^{r-1}[m] = [rm]$

Se anche *m* è un intero positivo si avrà allora, assumendo la regole del binomio ristretta a esponenti naturali,

(38)
$$\left[\frac{m}{r}\right]^r = [m] = (1 + x)^m$$
ovvero:
$$\left[\frac{m}{r}\right] = (1+x)^{m/r} = 1 + \frac{m}{r}x + \frac{\left(\frac{m}{r}\right)\left(\frac{m}{r} - 1\right)}{2!}x^2 + \&c.$$

ciò che dimostra l'estendibilità della regola binomiale a esponenti razionali positivi. Essendo d'altra parte $[0] = 1$, da (36) segue, per *m* naturale:

(39)
$$[m]\cdot[-m] = (1 + x)^m \cdot [-m] = [0] = 1$$
ovvero:
$$[-m] = (1 + x)^{-m}$$

ciò che conclude la dimostrazione di Euler.

L'eleganza di una tale dimostrazione non fu una ragione sufficiente a convincere Euler dell'opportunità della sua estensione al caso di esponenti non razionali. Quando, due anni più tardi, si pose il problema di fornire una dimostrazione non differenziale del teorema binomiale, la quale si estendesse anche al caso di esponenti reali, forse guidato da una sorta di "saggezza intuitiva",[38] egli cambiò infatti, la propria impostazione, tornando sostanzialmente alla dimostrazione di Æpinus.[39] La stessa "saggezza intuitiva" non diresse per contro l'operato di Segner, di cui l'*Académie de Berlin* pubblicò postuma, nella sua raccolta del 1777, una memoria[40] nella quale il teorema del binomio generalizzato al caso di esponenti reali è dimostrato in un modo assai simile a quello utilizzato da Euler nella memoria 1774 (la quale non è peraltro citata).

Ponendo per ogni *n* e per *b* "generaliter" minore di *a*,

[38]Cfr. Dhombres (1986a), p.152.

[39]Cfr. Euler (1787) [cfr. la nota (85) del precedente paragrafo II.2.κ.].

[40]Cfr. Segner (1777).

$$(40)\qquad a^n S = a^n\left[1 + n\left(\frac{b}{a}\right) + \frac{n(n-1)}{2!}\left(\frac{b}{a}\right)^2 + \&c.\right] = $$
$$= a^n + na^{n-1}b + \frac{n(n-1)}{2!}a^{n-2}b + \&c.$$

Segner trae, per ogni m e n, $a^m S \cdot a^n S = a^{m+n} S$ e quindi:

$$\text{i)}\ \frac{a^m S}{a^n S} = a^{m-n} S$$
$$(41)\qquad \text{ii)}\ (a^m S)^p = a^{pm} S \qquad [p \in \mathrm{N}]$$
e quindi per $m = r/p$
$$\text{iii)}\ \sqrt[p]{a^r S} = a^{r/p} S \qquad [p \in \mathrm{N}]$$

Essendo per definizione $a^1 S = aS = (a+b)$, si avrà, secondo la regola del binomio ristretta a esponenti naturali, $(aS)^p = a^p S = (a+b)^p$ ($p \in \mathrm{N}$). Presi due numeri naturali p e q, dalla (41)(i) e dalla (41)(iii) seguono allora rispettivamente

$$(42)\qquad \begin{aligned} &\text{i)}\ (a+b)^{p-q} = a^{p-q} S \\ &\text{ii)}\ (a+b)^{q/p} = a^{q/p} S \end{aligned}$$

che, non richiedendo alcuna condizione sulla grandezza rispettiva di p e q, permettono di trarre il teorema per ogni esponente razionale (positivo o negativo). L'estensione al caso di esponenti reali è giustificata poi da un argomento informale:

> Numerus autem irrationales, dummodo realis sit, cum semper possit tanquam fractus denominatoris infinite magni: poterit p in eadem æquatione [$a^p S = (a+b)^p$] etiam numerum quemvis irrationalem denotare.[41]

La dimostrazione di Euler e Segner è tradotta in un linguaggio combinatorio da H. A. Roth nel 1796.[42] Se l'idea di Euler e Segner era stata quella di costruire un'algebra funzionale delle serie binomiali, fondata sull'assunzio-

---

[41] Cfr. *ivi*, p. 41.

[42] Cfr. Roth (1796). Roth non cita la memoria di Euler del 1774 e non fa riferimento che in una nota finale a quella di Segner del 1777, per affermare di esserne venuto a conoscenza solo dopo la redazione del proprio lavoro. Egli cita invece, in quanto sostanzialmente combinatoria, anche se differente dalla propria, la dimostrazione di Segner presentata nel paragrafo 255 dell'*Analisi finita* [cfr. Segner (1756-63), parte II, par. 255, pp. 145-47].

ne della (36) intesa come una ovvia conseguenza degli usuali procedimenti analitici di manipolazione termine a termine delle serie intere,[43] l'idea di Roth è quella di dimostrare la (36) nel contesto di un'algebra generale del coefficiente binomiale $\binom{\lambda}{\nu}$, originariamente inteso - per $\lambda, \nu \in \mathbf{N}$ - come il numero delle possibili permutazioni di una complessione composta da due "lettere" *a* e *b*, di cui la prima ripetuta λ-ν volte e la seconda ν volte, e esteso, in seguito, operazionalmente, al caso di un esponente λ non naturale.[44] Questi dimostra in primo luogo le identità seguenti ($r, s \in \mathbf{N}$; n, m qualsiasi):

$$\text{(43)}\quad \begin{array}{l} \text{i) } s\binom{n}{s} = (n-s+1)\binom{n}{s-1}; \\ \text{ii) ii) } s(s-1)\binom{n}{s} = (n-s+1)(n-s+2)\binom{n}{s-2}; \\ \&c. \end{array}$$

e

$$\text{(44)}\quad \begin{array}{l} \text{i) } r\binom{n}{s}\binom{m}{r-s} = (n-s+1)\binom{n}{s-1}\binom{m}{r-s} + (m-r+s+1)\binom{n}{s}\binom{m}{r-s-1} \\ \text{ii) } r\binom{n}{1}\binom{m}{r-s} = n\binom{m}{r-1} + (m-r+2)\binom{n}{1}\binom{m}{r-2} \end{array}$$

Mentre le (43) sono facilmente verificabili, la (44)(i) deriva moltiplicando i due membri della (43)(i) per $\binom{m}{r-s}$ e sommando membro a membro l'identità risultante con l'altra identità tratta da quest'ultima sostituendo *m* con *r-s*, *n* con *m* e *m* con *n*; la (44)(ii) è poi una ovvia conseguenza della (44)(i) per la posizione $s = 1$. Utilizzando tali identità Roth trae poi la relazione seguente

$$\text{(45)}\quad \binom{m}{s}+\binom{n}{1}\binom{m}{s-1}+\binom{n}{2}\binom{m}{s-2}+\ldots+\binom{n}{s-1}\binom{m}{1}+\binom{n}{s}=\binom{m+n}{s}$$

da cui la (36) segue come un'ovvia conseguenza. La dimostrazione della (45) può essere ricostruita come un'induzione completa su *s*, la cui base è banalmente fornita dall'identità $\binom{m}{1}\binom{n}{1}=\binom{m+n}{1}$.[45] Assumendo infatti la (45) per *s*

---

[43]Si noti che se non è dedotta dalla (45) [cfr. *sotto*] la (36) non è che una generalizzazione induttiva fondata sulla considerazione dei primi coefficienti.

[44]Utilizzo qui per semplicità la notazione moderna, il luogo della pesante notazione gotica di Roth [cfr. la precedente nota (22)].

[45]E' curioso che Roth creda opportuno verificare la (45) anche per il caso $s = 2$, ciò che è ovviamente inessenziale ai fini della dimostrazione.

$= r-1$ e osservando che:

$$
(46)\quad
\begin{aligned}
& r\binom{m}{r} = (m-r+1)\binom{m}{r-1} && \text{[per (43)(i)]}\\
& r\binom{n}{1}\binom{m}{r-1} = n\binom{m}{r-1} + (m-r+2)\binom{n}{1}\binom{m}{r-2} && \text{[per (44)(ii)]}\\
& r\binom{n}{2}\binom{m}{r-2} = (n-1)\binom{n}{1}\binom{m}{r-2} + (m-r+3)\binom{n}{2}\binom{m}{r-3} && \text{[per (44)(i): s=2]}\\
& \dots \\
& r\binom{n}{r-1}\binom{m}{1} = (n-r+2)\binom{n}{r-2}\binom{m}{1} + m\binom{n}{r-1} && \text{[per (44)(ii)]}\\
& r\binom{n}{r} = (n-r+1)\binom{n}{r-1} && \text{[per (43)(i)]}
\end{aligned}
$$

si avrà (sommando le (46) membro a membro):

$$
(47)\quad
\begin{aligned}
& r\left[\binom{m}{r} + \binom{n}{1}\binom{m}{r-1} + \dots + \binom{n}{r-1}\binom{m}{1} + \binom{n}{r}\right] = \\
& = (n+m-r+1)\left[\binom{m}{r-1} + \binom{n}{1}\binom{m}{r-2} + \dots + \binom{n}{r-2}\binom{m}{1} + \binom{n}{r-1}\right] = \\
& = (n+m-r+1)\binom{m+n}{r-1} = r\binom{n+m}{r} \qquad \text{[per (43)(i)]}
\end{aligned}
$$

che, corrispondendo alla (45) per $s = r$, conclude la dimostrazione. Dimostrata la (45) e tratta da essa la (36), la dimostrazione di Roth segue in modo analogo a quella di Segner, giustificando il passaggio a esponenti non razionali per mezzo del seguente argomento informale:

> Numeri irrationales atque trascendentes *reales* per numeros rationales tam accurate exprimi possunt, ut error quacunque quantitate minore evadat.[46]

Il modo in cui Roth interpreta la propria dimostrazione (ma credo si possa affermare che la cosa valga anche per Euler e Segner) è perfettamente chiaro dalla seguente osservazione che egli presenta in guisa di conclusione:

> Series hic proposita [si tratta dello sviluppo binomiale di $(y+z)^q$] convergit, si valor z intra fines $+y$ atque $-y$ concluditur. Si vero q est integer positivus series abrumpit, atque etiam usum præbet, si z extra fines $+y$ atque $-y$ cadit.[47]

Tutto ciò che Euler, Segner e Roth hanno dimostrato è che se si intende sviluppare formalmente in una serie intera la potenza $(1+z)^m$ (dove m è un

[46] Cfr. Roth (1796), p. 11.
[47] Cfr. *ivi*, p. 12.

esponente reale qualsiasi), si devono scegliere i successivi coefficienti C_ν (ν = 0, 1, 2, ...) secondo la legge seguente: $C_0 = \binom{m}{0} = 1$, $C_1 = \binom{m}{1}$, $C_2 = \binom{m}{2}$, &c.. Ciò non significa per nulla che la potenza $(1+z)^m$ è per ogni m e per ogni x numericamente uguale a una serie così costruita. La determinazione delle condizioni sotto le quali una tale identità numerica ha luogo è estranea alla dimostrazione del teorema generalizzato del binomio, così come questo è inteso nel corso del XVIII secolo.[48]

III. 5. η. *Un esempio dei progressi della combinatoria hindenburghiana: ancora sullo sviluppo in forma intera di una potenza di un polinomio qualsiasi senza termine noto.*

L'interesse della dimostrazione di Euler-Segner-Roth nel contesto dell'evoluzione della scuola combinatoria tedesca risiede nel fatto che essa permette di rendere i risultati di Hindenburg relativi alle potenze di un polinomio (così come quelli connessi relativi alla trasformazione, il ritorno e la moltiplicazione delle serie, che non potranno essere discussi qui) indipendenti non solo dall'impiego del calcolo differenziale, ma anche da ogni considerazione analitica, non riconducibile ai più elementari principi dell'algebra o al metodo funzionale inaugurato da Euler.[49] Lo stesso *pamphlet* di Hindenburg del 1779 deve d'altra parte la sua rilevanza matematica, più che ai risultati che in esso sono ottenuti, al metodo in cui essi sono dimostrati e al "punto di vista" che esso instaura. E' in questo senso che esso può venire considerato come l'atto di fondazione di una "scuola"; la storia di tale scuola è la storia degli sviluppi e delle generalizzazioni di tale metodo e del punto di vista che si accompagna a esso. I limiti della mia ricostruzione mi impediscono di affrontare, anche solo superficialmente, le vicende di una tale evoluzione, lasciandomi semplicemente la possibilità di qualche esempio.[50]

Uno abbastanza significativo è costituito da una reinterpretazione della (29), proposta dallo stesso Hindenburg nel 1795.[51] Come è chiaro, tale formula esprime in forma differente, e nel caso di esponenti interi positivi, il medesimo risultato espresso dalla (4), la quale risale, come abbiamo visto, a una memoria di de Moivre del 1697. La riformulazione che essa propone per tale risultato deve tuttavia aver lasciato Hindenburg insoddisfatto; tornando sull'argomento più di quindici anni più tardi, questi presenta infatti un nuovo procedimento combinatorio capace di condurre a un'ulteriore riformula-

[48] Cfr. il precedente paragrafo II.2.κ..

[49] Cfr. Dhombres (1986a), pp. 150 e segg. e (1987b).

[50] Fra i principali lavori di Hindenburg che non saranno presi in considerazione nel seguito cfr. Hindenburg (1781) - in cui è presentata una teoria generale della combinatoria, indipendente da ogni sua applicazione particolare - e Hindenburg (1796-1800) (di cui il primo volume venne pubblicato anche separatamente come Hindenburg (1796)) - che presenta un *abregé* della combinatoria hindenburghiana.

[51] Cfr. Hindenburg (1795).

zione di questo.

A tale scopo Hindenburg presenta un procedimento atto a generare continuativamente, tramite la costruzione di opportune matrici, tutte le λ-uple (λ=1, 2, 3, ...) delle classi $\overset{\lambda}{\Pi}_{\rho}$ (ρ = 1, 2, 3, ...) indipendentemente dalla determinazione completa delle classi a cui esse appartengono; ciò lo conduce a risolvere le classi di λ-uple di numeri naturali che occorrono nella (29) in somme di opportune sottoclassi (sulle quali è definito lo stesso procedimento per sostituzione definito sulle classi cui esse appartengono), le quali compaiono così, una per una, nella forma generale dello sviluppo. Per questo si assuma una matrice di partenza Γ_1 composta da una sola riga a sua volta composta dal solo elemento "1" e si definisca come segue un procedimento costruttivo capace di produrre una nuova matrice Γ_{i+1} a partire da una qualsiasi matrice assegnata Γ_i. Data la matrice Γ_i si riscriva tale matrice e: i) si prolunghi a sinistra ognuna delle sue righe aggiungendo l'elemento "1"; ii) si consideri la matrice così ottenuta, che diremo $*\Gamma_i$, e la si prolunghi in basso aggiungendo tutte le nuove righe che possono essere costruite riscrivendo successivamente tutte le righe di $*\Gamma_i$ in cui il secondo e il terzo elemento non siano fra loro uguali, ma ponendo in luogo dei loro primi due elementi un solo nuovo elemento ottenuto sommando fra loro tali due primi elementi (ogni riga deve qui essere idealmente considerata come continuata a destra da una ripetizione indefinita dell'elemento "0", in modo da possedere comunque almeno tre elementi). Un tale procedimento darà luogo alla seguente successione di matrici:

$$
\begin{array}{ll} 1 & \rho=1 \end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{ll} 1\;1 & \rho=1 \\ 2 & \rho=2 \end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{ll} 1\;1\;1 & \rho=1 \\ 1\;2 & \rho=2 \\ 3 & \rho=3 \end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{ll} 1\;1\;1\;1 & \rho=1 \\ 1\;1\;2 & \rho=2 \\ 1\;3 & \rho=3 \\ 2\;2 & \\ 4 & \rho=4 \end{array}
\longrightarrow
$$

(48)

$$
\begin{array}{ll} 1\;1\;1\;1\;1 & \rho=1 \\ 1\;1\;1\;2 & \rho=2 \\ 1\;1\;3 & \rho=3 \\ 1\;2\;2 & \\ 1\;4 & \rho=4 \\ 2\;3 & \\ 5 & \rho=5 \end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{ll} 1\;1\;1\;1\;1\;1 & \rho=1 \\ 1\;1\;1\;1\;2 & \rho=2 \\ 1\;1\;1\;3 & \rho=3 \\ 1\;1\;2\;2 & \\ 1\;1\;4 & \rho=4 \\ 1\;2\;3 & \\ 1\;5 & \rho=5 \\ 2\;2\;2 & \\ 2\;4 & \\ 3\;3 & \\ 6 & \rho=6 \end{array}
\longrightarrow
\quad \&c.
$$

che Hindenburg qualifica come "involuzioni lessicografiche". E' chiaro che ognuna di tali matrici contiene tutte le matrici precedenti - le quali sono evidenziate per mezzo dell'introduzione di opportune linee verticali - e esibisce quindi, a destra di ogni linea verticale, tutte le λ-uple ($\lambda=1, 2,\dots \rho$) di numeri naturali di somma ρ ($\rho = 1, 2, \dots$), ordinate fra loro indipendentemente dalla classe a cui appartengono. Se indichiamo ora con[52] ${}^{1}\Lambda_{\rho}, {}^{2}\Lambda_{\rho}, {}^{3}\Lambda_{\rho}$, &c. le classi di λ-uple di numeri naturali che comprendono come elementi tutte le righe della matrice ρ-esima che iniziano rispettivamente con gli elementi "1", "2", "3", &c.,[53] definiamo le moltiplicazioni su tali classi come nella (29), relativamente alla nuova regola di sostituzione, e indichiamo con[54] $\binom{r}{\lambda}Q_{\lambda}$ il prodotto dei coefficienti binomiale e polinomiale, riferiti a ogni elemento delle classi ${}^{1}\Lambda_{\rho}, {}^{2}\Lambda_{\rho}, {}^{3}\Lambda_{\rho}$, &c. e definiti rispetto a un indice λ che indica il numero di elementi che compongono la λ-upla che costituisce l'elemento considerato di tali classi,[55] la (4) può riscriversi sotto la forma seguente:

$$
\begin{aligned}
(49)\qquad & \left(\alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \alpha_v z^v + \ \&c.\right)^r = \\
& = \alpha_1^r z^r + \binom{r}{\lambda} Q_\lambda\, \alpha_1^{r-\lambda}\left[{}^{1}\Lambda_1\right] z^{r+1} \\
& \quad + \binom{r}{\lambda} Q_\lambda\, \alpha_1^{r-\lambda}\left[{}^{1}\Lambda_2 + {}^{2}\Lambda_2\right] z^{r+2} \\
& \quad + \dots \\
& \quad + \binom{r}{\lambda} Q_\lambda\, \alpha_1^{r-\lambda}\left[{}^{1}\Lambda_{2v} + {}^{2}\Lambda_{2v} + \dots + {}^{v}\Lambda_{2v} + {}^{2v+1}\Lambda_{2v}\right] z^{r+2v}
\end{aligned}
$$

---

[52] I simboli utilizzati da Hindenburg sono rispettivamente ${}^{\rho}\mathbf{A}, {}^{\rho}\mathbf{B}, {}^{\rho}\mathbf{C}$, &c..

[53] Posto $\rho = 6$ avremo a esempio

$$
\begin{aligned}
{}^{1}\Lambda_6 &= \left\{<1,1,1,1,1,1>, <1,1,1,1,2>, <1,1,1,3>, <1,1,4>, <1,2,3>, <1,5>\right\} \\
{}^{2}\Lambda_6 &= \left\{<2,2,2>, <2,4>\right\} \\
{}^{3}\Lambda_6 &= \left\{<3,3>\right\} \\
{}^{4}\Lambda_6 &= \varnothing \\
{}^{5}\Lambda_6 &= \varnothing \\
{}^{6}\Lambda_6 &= \left\{<6>\right\}
\end{aligned}
$$

[54] Il simbolo di Hindenburg è ${}^{r}\mathfrak{A}\, a^{*-1}$.

[55] Si osservi che in tal modo il valore dell'indice λ varia (tanto nei coefficienti numerici che nell'esponente di α_1) a seconda dell'elemento delle classi ${}^{i}\Lambda_{j}$ $(i, j \in \mathbf{N})$ a cui è riferita la moltiplicazione.

$$+\binom{r}{\lambda} Q_\lambda \, \alpha_1^{r-\lambda} \left[{}^{1}\Lambda_{2\nu+1} + {}^{2}\Lambda_{2\nu+1} + \ldots + {}^{\nu}\Lambda_{2\nu+1} + {}^{2\nu+1}\Lambda_{2\nu+1} \right] z^{r+2\nu+1}$$

$+ \&c.$

$$\begin{pmatrix} \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4, \ldots \\ 1, \; 2, \; 3, \; \ldots \end{pmatrix}$$

Anche mettendo a parte ogni giudizio riferito alla legittimità della dimostrazione di de Moivre (che è certamente largamente insoddisfacente, riducendosi a una semplice induzione a partire dai primi termini), il nuovo metodo possiede, agli occhi di Hindenburg, dei notevoli vantaggi rispetto a quello del predecessore, di cui questi elenca esplicitamente i difetti:

> [i] Quod leges (*a*), (*b*) [si tratta delle leggi ricorsive di de Moivre per la formazione dei successivi coefficienti della (4)] propositæ, verbis quidem satis claris per se, non autem formula idonea analytico-combinatoria exponantur.
> [ii] Quod Coefficientes, ubi *Exponens r numerus* est *integer positivus*, prolixius determinentur. Nempe, casus iste specialis, si tractetur per formulam universalem (cui æquivalent Moivreana ratio) ambagibus sit obnoxius. [...]
> [iii] Quod Coefficiens exhiberi nullus possit, nisi simul et *praecedentes singuli expositi* sint, ad primum usque $\overset{r}{\alpha}_1$ inclusive, et formula adeo Coefficientem sistens *generalis* nulla appareat.[56]

Nessuna di tali osservazione appare tuttavia sufficiente per affermare la superiorità dei metodi combinatori; questa sembra piuttosto asserita da Hindenburg *per principio*. Per quanto questi abbia infatti introdotto una notazione compatta, quest'ultima non rinvia che a un procedimento costruttivo, almeno altrettanto laborioso quanto quello di de Moivre, il quale, peraltro, lungi dall'eliminare qualsiasi forma di recursione, non fa che scaricare il momento ricorsivo sulla costruzione delle successive matrici (48).[57] Questo era d'altra parte il caso anche della (29), la quale tuttavia appare, se confrontata con la (4), troppo povera di informazioni rispetto alla natura dello sviluppo,

---

[56]Cfr. *ivi*, p. IX.

[57]Resta tuttavia il fatto che mentre il passaggio dalla (49) alla (4) è banale, questo non è il caso del passaggio inverso; ciò potrebbe venire inteso come un indice di una più alta informazione contenuta nella formula di Hindenburg relativamente a quella di de Moivre. Lo stesso ragionamento vale, d'altra parte, anche per la (29). Anche qualora r sia infatti inteso come un esponente naturale generico, fornita la classe ${}^{r}\Pi_{r}$ = {<1, 1,... (r volte)..., 1>} non è difficile costruire successivamente a partire da essa le classi ${}^{r}\Pi_{r+1}$, ${}^{r}\Pi_{r+2}$, &c. rispettivamente uguali a {<1, 1,... (r-1 volte)..., 1, 2>}, {<1, 1,... (r-1 volte)..., 1, 3>}, {<1, 1,... (r-2 volte)..., 1, 2, 2>}, &c.. Così, mentre le classiche forme analitiche non manifestano il processo combinatorio che le ha generate, le formule combinatorie, esprimendo tale processo, contengono le forme analitiche che ne sono l'esito finale. La superiorità che Hindenburg assegna ai propri procedimenti sembra in ultima istanza riconducibile a tale asimmetria.

di cui essa mostra la forma in termini molto poco precisati, accontentandosi di indicarne alcune proprietà e lasciandone altre del tutto nascoste. Il progresso che la (49) segna rispetto alla (29) non è tuttavia solo questo; esso risiede anche nel fatto che mentre quest'ultima formula involve dei simboli definiti solo nel caso in cui r sia un esponente intero positivo, la prima mantiene il suo senso per ogni assegnazione di valore all'esponente r, anche se, derivando in ultima istanza dalla stessa (29) - o comunque dalla considerazione di moltiplicazioni successive - richiede in tal caso una nuova dimostrazione.

III. 5. θ. *La dimostrazione di von Prasse del teorema generalizzato del binomio*

I nuovi procedimenti combinatori introdotti da Hindenburg nel 1795 vennero utilizzati nel 1803 da M. von Prasse per fornire una nuova dimostrazione del teorema generalizzato del binomio.[58]

Assegnato un numero naturale q, si costruisca la matrice q-esima Γ_q della successione (48), la quale esibisce tutte le λ-uple ($\lambda = 1, 2, ..., q$) di numeri naturali che compongono le classi $\overset{\lambda}{\Pi}_{\rho}$ ($\rho = 1, 2, ..., q$) e si formi, a partire da essa, una nuova matrice Γ'_q che comprenda, oltre a tutte le righe di Γ_q, anche tutte le loro possibili permutazioni e, dopo aver compiuto le sostituzioni $\begin{pmatrix} \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, ... \\ 1, 2, 3, ... \end{pmatrix}$ e trasformato ogni riga in un corrispondente monomio, si moltiplichi ognuno di tali monomi per un fattore numerico costituito dall'ultimo elemento della λ-upla di numeri naturali da cui esso è stato generato. Se indichiamo la somma di tutti i monomi così costruiti a partire dalla matrice Γ_q con il simbolo[59] Ξ_q avremo, a esempio, per $q = 5$:

[58]Cfr. von Prasse (1803a).

[59]Utilizzando una notazione decisamente sovrabbondante, von Prasse indica tale somma con il simbolo $j^n \underset{(\alpha, \beta, ..., \nu)}{\mathfrak{Z}}$ (dove l'indice n svolge una funzione analoga a q nella mia notazione, il fattore generico j indica l'avvenuta moltiplicazione di ogni monomio per il fattore numerico stabilito e la successione $(\alpha, \beta, ..., \nu)$ esprime i coefficienti letterali che compaiono in tali monomi).

(50)
$$
\begin{array}{lllll}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 2 & \\
1 & 1 & 3 & & \\
1 & 2 & 2 & & \\
1 & 4 & & & \\
2 & 3 & & & \\
5 & & & &
\end{array}
\longrightarrow
\begin{array}{lllll}
1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\
1 & 1 & 1 & 2 & \\
1 & 1 & 2 & 1 & \\
1 & 1 & 3 & & \\
1 & 2 & 1 & 1 & \\
1 & 2 & 2 & & \\
1 & 3 & 1 & & \\
1 & 4 & & & \\
2 & 1 & 1 & 1 & \\
2 & 1 & 2 & & \\
2 & 2 & 2 & & \\
2 & 2 & 1 & & \\
2 & 3 & & & \\
3 & 1 & 1 & & \\
3 & 2 & & & \\
4 & 1 & & & \\
5 & & & &
\end{array}
\longrightarrow
\left\{
\begin{array}{l}
1.\alpha_1^5 + 2.\alpha_1^3 a_2 + 1.\alpha_1^3\alpha_2 + \\
3.\alpha_1^2 \alpha_3 + 1.\alpha_1^3 \alpha_2 + 2.\,\alpha_1 \alpha_2^2 + \\
1.\alpha_1^2 \alpha_3 + 4.\,\alpha_1\alpha_4 + 1.\alpha_1^3 \alpha_2 + \\
2.\alpha_1 \alpha_2^2 + 1.\alpha_1 \alpha_2^2 + 3.\alpha_2 \alpha_3 + \\
1.\alpha_1^2 \alpha_3 + 2.\alpha_2 \alpha_3 + 1.\alpha_1 \alpha_4 + \\
5.\alpha_5
\end{array}
\right\} =
$$

$$
= \left\{ \alpha_1^5 + 5\,\alpha_1^3 \alpha_2 + 5\,\alpha_1^2 \alpha_3 + 5\,\alpha_1 \alpha_2^2 + 5\,\alpha_1 \alpha_4 + 5\,\alpha_2 \alpha_3 + 5\,\alpha_5 \right\} = \Xi_5
$$

Data una tale costruzione non sarà difficile provare che per ogni ν vale l'identità seguente:

$$
(51) \qquad \Xi_\nu = \Xi_{\nu-1}\,\alpha_1 + \Xi_{\nu-2}\,\alpha_2 + \ldots + \Xi_2\,\alpha_{\nu-2} + \Xi_1\,\alpha_{\nu-1} + \nu\,\alpha_\nu
$$

Assumendo d'altra parte lo sviluppo in serie intera del logaritmo naturale di un binomio $(1\text{-}y)$ e ponendo $y = \alpha_1 z + \alpha_2 z^2 +$ &c., è facile derivare, secondo la (29):

(52)
$$
\log\left[1 - \left(\alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \&c.\right)\right] = Q_1\,{}^1\Pi_1\,z + \left\{ \begin{array}{l} Q_1\,2\,{}^1\Pi_2 \\ Q_2\,\frac{2}{2}\,{}^2\Pi_2 \end{array} \right\} \frac{z^2}{2} + \ldots +
$$

$$
+ \left\{ \begin{array}{l} Q_1\,\nu\,{}^1P_\nu \\ Q_2\,\frac{\nu}{2}\,{}^2P_\nu \\ \ldots \\ Q_\nu\,\frac{\nu}{n}\,{}^nP_\nu \end{array} \right\} \frac{z^\nu}{\nu} + \&c.
$$

(in cui i polinomi tratti dalle diverse righe delle matrici racchiuse fra parentesi graffe vanno intesi come sommati fra loro). Essendo poi, secondo le definizioni di Hindenburg e von Prasse,

$$(53)\qquad \nu\begin{Bmatrix} Q_1\ {}^1\Pi_\nu \\ Q_2 \frac{2}{2}\ {}^2\Pi_\nu \\ \dots \\ Q_n \frac{1}{n}\ {}^\nu\Pi_\nu \end{Bmatrix} = \Xi_\nu$$

la (52) può essere posta sotto la forma seguente:

$$(54)\qquad \log\left[1 - \left(\alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \&c.\right)\right] = -\left[\Xi_1 z + \Xi_2 \frac{z^2}{2} + \dots + \Xi_\nu \frac{z^\nu}{\nu}\right]$$

che von Prasse utilizza, insieme alla (51), come base per la propria dimostrazione.

Ponendo infatti l'identità generica

$$(55)\qquad (1-z)^m = 1 - \left[\alpha_1 z + \alpha_2 z^2 + \&c.\right]$$

e ricordando che $\log (1-x)^m = m \log (1-x)$ si avrà, passando ai logaritmi, sviluppando $\log(1-z)$ in serie intera e sfruttando la (54),

$$(56)\qquad m\left[z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \dots + \frac{z^\nu}{\nu} + \&c.\right] = \left[\Xi_1 z + \Xi_2 \frac{z^2}{2} + \dots + \Xi_\nu \frac{z^\nu}{\nu}\right]$$

I coefficienti generici α_1, α_2, &c. dovranno quindi essere tali da soddisfare le condizioni

$$(57)\qquad m = \Xi_1 = \Xi_2 = \dots = \Xi_\nu = \&c.$$

che forniscono, secondo la (51), la seguente successione di identità:

$$(58)\qquad \begin{aligned} & m = \Xi_1 = \alpha_1 \\ & m = \Xi_1 \alpha_1 + 2\alpha_2 = m\alpha_1 + 2\alpha_2 \\ & m = \Xi_2 \alpha_1 + \Xi_1 \alpha_2 + 3\alpha_3 = m\alpha_1 + m\alpha_2 + 3\alpha_3 \\ & \dots \\ & m = \Xi_{\nu-1} \alpha_1 + \Xi_{\nu-2} \alpha_2 + \dots + \nu\alpha_\nu = m\alpha_1 + m\alpha_2 + \dots + \nu\alpha_\nu \\ & \&c. \end{aligned}$$

Sottraendo membro a membro ognuna di tali equazioni alla successiva sarà allora ovvio trarre successivamente:

$$\alpha_1 = m$$

$$0 = m^2 - m + 2\alpha_2 \qquad \alpha_2 = -\frac{m(m-1)}{2!}$$

(59) $$0 = \alpha_2\,[m-2] + 3\alpha_3 \qquad \alpha_3 = \frac{m(m-1)(m-2)}{3!}$$

$$\ldots \qquad \ldots$$

$$0 = \alpha_{v-1}\,[m-(n-1)] + v\alpha_v \qquad \alpha_v = -\alpha_{v-1}\frac{[m-(n-1)]}{n} = (-)^{v+1}\binom{m}{v}$$

$$\&c. \qquad \&c.$$

ciò che conclude la dimostrazione.

Dopo aver fornito la propria dimostrazione von Prasse l'analizza. Essa si fonda sulla presupposizione della (55) e su quella dello sviluppo in serie intera della funzione logaritmica e si estende a ogni valore di m per cui valga l'identità $\log\,(1-x)^m = m \log\,(1-x)$.

La prima presupposizione corrisponde chiaramente alla assunzione dell'esistenza di uno sviluppo in serie intera per una potenza binomiale. Per giustificare tale assunzione von Prasse mostra che la posizione

(60) $$(1-z)^m = 1 - \alpha_1 z^{a_1} - \alpha_2 z^{a_2} - \&c. = 1-v$$

implica, attraverso un passaggio al logaritmo, il successivo sviluppo e il calcolo delle potenze intere positive di $v = v(z)$, l'identità:

(61) $$\begin{aligned}\log\,(1-z)^m &= \log\,(1-v) = -\left[v + \frac{v^2}{2} + \frac{v^3}{3} + \&c.\right] \\ &= -\left[\left(\alpha_1 z^{a_1} + \alpha_2 z^{a_2} + \&c.\right) + \frac{1}{2}\left(\alpha_1 z^{a_1} + \alpha_2 z^{a_2} + \&c.\right)^2 + \&c.\right] \\ &= -\left[\alpha_1 z^{a_1} + \alpha_2 z^{a_2} + \&c. + \frac{1}{2}\alpha_1^2 z^{2a_1} + \alpha_1\alpha_2 z^{a_1+a_2} + \&c. + \&c.\right] \\ &= m \log\,(1-z) \\ &= -m\left[z + \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} + \&c.\right]\end{aligned}$$

che legittima le posizioni $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, &c. utilizzate nella (55). Essendo possibile trarre gli sviluppi in forma intera delle potenze intere positive di un polinomio qualsiasi dalla semplice assunzione della regola del binomio ristretta al caso di esponenti naturali, la legittimità della prima presupposizione di von Prasse dipende unicamente dalla legittimità della presupposizione dello sviluppo in serie intera della funzione logaritmica. La prima presupposizione si riduce quindi alla seconda.

Se quest'ultima potrebbe introdurre il sospetto di un circolo vizioso - essendo usuale il passaggio inverso, dal teorema generalizzato del binomio allo sviluppo del logaritmo[60] - questo viene immediatamente meno non appena si osservi: i) che la costruzione di quest'ultimo sviluppo può seguire un percorso che, pur restando estraneo all'impiego del *calcolo*,[61] non richiede

---

[60]Questa era stato a esempio il percorso di Euler nell'*Introductio* [cfr. il precedente paragrafo II.I.3.c.γ.]. Una dimostrazione analoga, la quale evita tuttavia il ricorso a ogni presupposizione di carattere infinitesimalista, è quella fornita da A. Burja nel 1801 [cfr. Burja (1801)]. Da $(1+z)^x = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{x}{k} z^k$ si ha, calcolando i coefficienti binomiali e ordinando secondo le potenze di x:

$$(1+z)^x = 1 + Ax + \frac{A^2}{2!}x^2 + \frac{A^3}{3!}x^3 + \&c. \qquad \left[A = z - \frac{z^2}{2} + \frac{z^3}{3} - \&c.\right]$$

Ponendo $B = (a-1) - \frac{(a-1)^2}{2!} + \frac{(a-2)^3}{3!} - \&c.$ si avrà allora:

$$a^x = 1 + Bx + \frac{B^2}{2!}x^2 + \frac{B^3}{3!}x^3 + \&c.$$

che fornisce lo sviluppo di un esponenziale qualsiasi e che Euler aveva dimostrato nel 1748, attraverso il ricorso a un'esplicita presupposizione infinitesimalista. Da qui basta porre $a^x = y$ (ovvero: $x = \log_a y$) per avere

$$y - 1 = Bx + \frac{B^2}{2!}x^2 + \frac{B^3}{3!}x^3 + \&c.$$

e quindi, supponendo $x = \log_a y = K_1(y-1) + K_2(y-1)^2 + \&c.$

$$y - 1 = \left[BK_1\right](y-1) + \left[BK_2 + \frac{B^2}{2}K_1^2\right](y-1)^2 + \&c.$$

ovvero, secondo il metodo dei coefficienti indeterminati,

$$BK_1 = 1 \qquad K_1 = \frac{1}{B}$$

$$BK_2 + \frac{B^2}{2}K_1^2 = 0 \qquad K_2 = -\frac{1}{2B}$$

$$\&c. \qquad \&c.$$

Se y è posto uguale a $1+v$ si avrà allora, sostituendo,

$$\log_a(1+v) = \frac{1}{B}\left[v - \frac{1}{2}v^2 + \frac{1}{3}v^3 - \&c.\right]$$

che è lo sviluppo cercato.

[61]E' ovvio che l'impiego di strumenti differenziali rende immediata la costruzione dello sviluppo del logaritmo [cfr. per un esempio il precedente paragrafo II2.κ.], slegandola (almeno in termini immediati) dalla presupposizione del teorema binomiale. Esso com-

altra assunzione se non quella del teorema binomiale ristretto a esponenti interi (positivi o negativi); ii) che, sotto una tale restrizione, il teorema binomiale può a sua volta essere dimostrato senza alcun richiamo allo sviluppo del logaritmo e in modo del tutto indipendente dall'apparato matematico della precedente dimostrazione. Per evitare ogni circolo vizioso von Prasse propone allora di dimostrare i seguenti teoremi l'uno successivamente all'altro, nell'ordine indicato: i) il teorema del binomio per esponenti interi positivi; ii) il teorema del binomio per esponenti interi negativi; iii) il teorema dello sviluppo di una potenza intera (positiva o negativa) di un polinomio qualsiasi; iv) il teorema dello sviluppo in serie intera del logaritmo di $(1 \pm z)$; v) il teorema dello sviluppo in serie intera del logaritmo di un polinomio qualsiasi; vi) il teorema generalizzato del binomio (per esponenti qualsiasi); vii) il teorema dello sviluppo di una potenza qualsiasi di un polinomio qualsiasi. A fronte della precedente dimostrazione dello stesso von Prasse e dei risultati di Hindenburg discussi nei paragrafi precedenti, i soli passaggi problematici lungo un tale percorso sono quelli che permettono di approdare a (ii) e a (iv), a partire rispettivamente da (i) e da (i)-(iii).

Per assicurare il il primo di tali passaggi von Prasse fa ricorso a una prova per induzione sul valore assoluto dell'esponente, la cui base è fornita da una semplice applicazione della regola di Mercator[62] allo sviluppo della frazione $\frac{1}{1-z} = (1-z)^{-1}$. Ponendo infatti per ipotesi ($m = -\mu-1$; $\mu \in \{N-0\}$)

$$(62)\qquad \begin{aligned}(1-z)^{-\mu-1} &= 1 - \binom{-\mu-1}{1} z + \binom{-\mu-1}{2} z^2 + \dots + (-)^{\nu} \binom{-\mu-1}{\nu} z^{\nu} + \&c.\\ &= 1 + \binom{\mu+1}{\mu} z + \binom{\mu+2}{\mu} z^2 + \dots + \binom{\mu+\nu}{\mu} z^{\nu} + \&c.\end{aligned}$$

si avrà, moltiplicando entrambi i membri per $(1-z)^{-1}$ e ricorrendo alla base induttiva:

$$(63)\qquad \begin{aligned}(1-z)^{-\mu-2} &= 1 + \left[\binom{\mu+1}{\mu} + 1\right] z + \left[\binom{\mu+2}{\mu} + \binom{\mu+1}{\mu} + 1\right] z^2 + \dots +\\ &\quad + \left[\binom{\mu+\nu}{\mu} + \binom{\mu+\nu-1}{\mu} + \dots + \binom{\mu+1}{\mu} + 1\right] z^{\nu} + \&c.\\ &= 1 + \binom{-\mu-2}{1} z + \binom{-\mu-2}{2} z^2 + \dots + \binom{-\mu-2}{\nu} z^{\nu} + \&c.\end{aligned}$$

che conclude la dimostrazione di (ii).

Intendendo il teorema del binomio come l'esibizione di uno sviluppo

porta tuttavia il venir meno del carattere "elementare" della dimostrazione di von Prasse e quindi la perdita di tutto il suo interesse matematico.

[62]Cfr. il precedente paragrafo II.2.κ..

formale, una tale dimostrazione è assolutamente accettabile, non essendo in nessun modo necessario richiamarsi a questo stesso teorema per giustificare il procedimento costruttivo particolare di Mercator.

Il problema che resta aperto è allora quello del passaggio da (ii) a (iv). Per questo von Prasse rimanda a una propria precedente memoria, pubblicata anch'essa a Lipsia nel 1803.[63] Ecco come egli dimostra in essa lo sviluppo della funzione logaritmica.[64] Posta l'identità generica $\log_a(1+x) = K_1x + K_2x^2 + \ldots + K_{\nu+1}x^{\nu+1}$ + &c. si avrà anche, sostituendo x con $\frac{\nu}{1+x}$:

$$
\begin{aligned}
\log_a\left(1+\frac{v}{1+x}\right) &= K_1\frac{v}{1+x} + K_2\frac{v^2}{(1+x)^2} + \ldots + K_{v+1}\frac{v^v}{(1+x)^{v+1}} + \&c. \\
&= K_1v(1+x)^{-1} + K_2v^2(1+x)^2 + \ldots + K_{v+1}v^{v+1}(1+x)^{v+1} + \&c. \\
&= K_1v\left[1+\binom{-1}{1}x+\binom{-1}{2}x^2+\ldots+\binom{-1}{v+1}x^{v+1} + \&c.\right] + \\
(64) \qquad &\quad + K_2v^2\left[1+\binom{-2}{1}x+\binom{-2}{2}x^2+\ldots+\binom{-2}{v+1}x^{v+1} + \&c.\right] + \\
&\quad + \ldots + \\
&\quad + K_{v+1}v^{v+1}\left[1+\binom{-v-1}{1}x+\binom{-v-1}{2}x^2+\ldots+\binom{-v-1}{v+1}x^{v+1} + \&c.\right] + \\
&\quad + \&c.
\end{aligned}
$$

Sommando i due sviluppi sarà allora ovvio trarre:

$$
\begin{aligned}
&\log_a(1+x) + \log_a\left(1+\frac{v}{1+x}\right) = \log_a(1+x)\left(1+\frac{v}{1+x}\right) = \log_a(1+x+v) = \\
&= + K_1\left[x+v+\binom{-1}{1}vx+\binom{-1}{2}vx^2+\ldots+\binom{-1}{v+1}vx^{v+1} + \&c.\right] + \\
(65) \quad &\quad + K_2\left[x^2+v^2+\binom{-2}{1}v^2x+\binom{-2}{2}v^2x^2+\ldots+\binom{-2}{v+1}v^2x^{v+1} + \&c.\right] + \\
&\quad + \ldots + \\
&\quad + K_{v+1}\left[x^{v+1}+v^{v+1}+\binom{-v-1}{1}v^{v+1}x+\binom{-v-1}{2}v^{v+1}x^2+\ldots+\binom{-v-1}{v+1}v^{v+1}x^{v+1} + \&c.\right] + \\
&\quad + \&c.
\end{aligned}
$$

Essendo anche, d'altra parte,

[63] Cfr. von Prasse (1803b).
[64] Cfr. *ivi*, par. 4, pp. 7-8.

$$\log_a(1+x+v) = \log_a[1+(x+v)]$$

$$(66)\qquad \begin{aligned} &= K_1(x+v) + K_2(x+v)^2 + \dots + K_{v+1}(x+v)^{v+1} + \&c. \\ &= K_1x + K_2x^2 + \dots + K_{v+1}x^{v+1} + \&c. \\ &+ v\left[K_1 + \binom{2}{1}K_2x + \binom{3}{2}K_3x^2 + \dots + \binom{v+1}{v}K_{v+1}x^v + \&c.\right] \\ &+ \&c. \end{aligned}$$

é ovvio trarre, confrontando (65) e (66) e applicando il metodo dei coefficienti indeterminati:

$$(67)\qquad \begin{aligned} &+ K_1 + \binom{-1}{1}vx + \binom{-1}{2}K_1x^2 + \dots + \binom{-1}{v+1}K_1x^{v+1} + \&c. = \\ &= K_1 + \binom{2}{1}K_2x + \binom{3}{2}K_3x^2 + \dots + \binom{v+1}{v}K_{v+1}x^v + \&c. \end{aligned}$$

Da qui, applicando ancora il metodo dei coefficienti indeterminati, é così facile trarre le identità seguenti:

$$(68)\qquad \begin{aligned} &\binom{2}{1}K_2 = \binom{-1}{1}K_1, \text{ ovvero: } K_2 = \frac{\binom{-1}{1}K_1}{\binom{2}{1}} = -\frac{K_1}{2} \\ &\binom{3}{2}K_3 = \binom{-1}{2}K_1, \text{ ovvero: } K_3 = \frac{\binom{-1}{2}K_1}{\binom{3}{2}} = -\frac{K_1}{3} \\ &\dots \\ &\binom{v+1}{v}K_{v+1} = \binom{-1}{v}K_1, \text{ ovvero: } K_{v+1} = \frac{\binom{-1}{v}K_1}{\binom{v+1}{v}} = (-)^v\frac{K_1}{v+1} \\ &\&c. \end{aligned}$$

che esprimono lo sviluppo cercato.

Tornando allora alla dimostrazione dello sviluppo binomiale proposta da von Prasse, é a questo punto facile osservare come essa consista nel provare che il teorema del binomio ristretto a esponenti interi (positivi o negativi) implica, di per se stesso, la propria generalizzazione; in altre parole: se il teorema del binomio vale per esponenti interi tanto positivi che negativi, allora esso vale per esponenti qualsiasi.

Quello che non è ancora precisato è tuttavia ciò che deve qui essere inteso per "esponenti qualsiasi". Se infatti la relazione log $(1+z)^m = m$ log $(1+z)$ è banalmente verificata per $m \in \mathbf{Q}$, essa può legittimamente venire estesa anche al caso di m reale o immaginario? Se la risposta è positiva anche il teorema del binomio potrà, secondo von Prasse, essere considerato come dimostrato per esponenti tanto reali che immaginari. Benché la pratica matematica settecentesca avesse assunto la relazione precedente per $m \in \mathbf{C}$ come una semplice estensione operazionale di questa stessa relazione per $m \in \mathbf{Q}$, von Prasse si pone così il problema di sottoporre a verifica la legittimità di tale estensione, legando a essa la stessa estensione a esponenti reali o immaginari della propria dimostrazione del teorema binomiale.

Per quanto riguarda il caso di m reale, l'argomento proposto da von Prasse si fonda sulla possibilità di esprimere ogni "numero" irrazionale "per mezzo di una serie". Dal punto di vista moderno, ci aspetteremmo naturalmente che il riferimento implicito sia qui a serie convergenti di "numeri razionali". Questo non sembra tuttavia il caso. All'intuizione senza dubbio corretta di una possibile trattazione matematica dei valori irrazionali per mezzo del ricorso a serie (o successioni) opportune, non fa infatti seguito in von Prasse, modesto matematico dei primi anni del XIX secolo, una piena consapevolezza del fatto che un tale suggerimento possa risultare fecondo solo a condizione che esso sia connesso a una aritmetizzazione dell'analisi che, spostando l'attenzione dalle forme analitiche ai valori numerici che partecipano a un continuo, porti a intendere le serie (o le successioni) come composte da numeri e non da forme. Indicata genericamente la strada di una dimostrazione, Von Prasse si limita infatti a presentare un esempio che, nella sua evidente inadeguatezza, mi pare davvero significativo. Essendo, per lo sviluppo in serie del coseno,

$$
\begin{aligned}
(1-x)^{\cos\varphi} &= (1-x)^{1-\frac{\varphi^2}{2!}+\frac{\varphi^4}{4!}-\&c.} \\
&= (1-x)\cdot(1-x)^{-\frac{\varphi^2}{2!}}\cdot(1-x)^{\frac{\varphi^4}{4!}}\cdot\&c.
\end{aligned}
\tag{69}
$$

si avrà anche, secondo von Prasse,

$$
\begin{aligned}
\log(1-x)^{\cos\varphi} &= \log(1-x) - \frac{\varphi^2}{2!}\log(1-x) + \frac{\varphi^4}{4!}\log(1-x) - \&c. \\
&= \log(1-x)\left[1-\frac{\varphi^2}{2!}+\frac{\varphi^4}{4!}-\&c.\right] = (\cos\varphi)[\log(1-x)]
\end{aligned}
\tag{70}
$$

E' tuttavia ovvio osservare che nella generalità dei casi l'irrazionalità di $m =$

cos φ si accompagna all'irrazionalità di φ = arc cos m; la (70) conduce dunque alla conclusione voluta solo attraverso un evidente circolo vizioso. Per uscire dalla difficoltà occorre così considerare l'esponente m come un *numero* irrazionale ζ, definito come il *limite* di una *serie numerica* a *termini razionali* $\sum_{k=0}^{\infty} q_k$, ripetendo il ragionamento di von Prasse a partire dall'*identità numerica* $\zeta = \sum_{k=0}^{\infty} q_k$. La differenza fra i due procedimenti (che, come si vede, non riguarda in alcun modo la struttura formale dell'argomento) segna a mio parere un confine che verrà consapevolmente valicato solo qualche lustro più tardi, realizzando in tal modo una svolta radicale nei confronti dell'analisi settecentesca.

Per quanto riguarda poi i valori immaginari dell'esponente, von Prasse pone dapprima l'identità generica $\log y^{\sqrt{-1}} = \left(a + b\sqrt{-1}\right) \log y$, a partire dalla quale egli cerca di determinare i coefficienti reali a e b. Per questo basta osservare che

$$(71) \qquad y^{\sqrt{-1}} = e^{\log y^{\sqrt{-1}}} = e^{\left(a + b\sqrt{-1}\right)\log y} = y^{a + b\sqrt{-1}}$$

che non può valere che secondo le sostituzioni $a = 0$ e $b = 1$. Essendo possibile ripetere lo stesso ragionamento nel caso in cui l'esponente sia posto uguale a $w\sqrt{-1}$ ($w \in \mathbf{R}$) si avrà allora ($v, w \in \mathbf{R}$):

$$(72) \qquad \log y^{v + w\sqrt{-1}} = \log y^{v} + \log y^{w\sqrt{-1}} = \left(v + w\sqrt{-1}\right) \log y$$

Ciò permette a von Prasse di concludere la propria memoria affermando di aver dimostrato il teorema del binomio per esponenti tanto reali che immaginari.

III. 6.
LA TEORIA LAGRANGIANA DELLE FUNZIONI ANALITICHE
(1797-1813)

III. 6. *a*.
UNA TEORIA DI TRASFORMAZIONI FORMALI

III. 6. *a*. α. *Premessa: una riduzione della quantità alla forma*

La *Théorie des fonctions analytiques*[1] e le successive *Leçons sur le calcul des fonctions*[2] sono certamente due fra i testi matematici più citati e discussi dagli storici e più attentamente studiati dai matematici. E' forse per questo che i giudizi superficiali e imprecisi sulla teoria che essi presentano sono così numerosi e purtroppo così largamente condivisi. Uno dei più sorprendenti è certamente quello di E. T. Bell (per cui "Euler's almost total capitulation to the seductions of formalism is one of the unexplained mysteries in mathematics"[3]): lo scopo di Lagrange sarebbe, stato secondo Bell, di liberarsi del "formalismo euleriano", benché, presupponendo la possibilità di rappresentare ogni funzione per mezzo di una serie intera, egli sia caduto in "another kind of formalism".[4]

Per quanto gli studi più seri non siano rimasti al livello di sconcertante superficialità dell'opera di Bell, il motivo dominante della maggior parte dei giudizi critici sulla teoria lagrangiana è stato per lungo tempo costituito dall'accusa di aver inopinatamente presupposto l'esistenza di uno sviluppo in serie di Taylor per ogni funzione: siccome secondo Lagrange la derivata di una funzione $f(x)$ non è che il coefficiente di ξ nello sviluppo in serie intera di $f(x+\xi)$, la fondazione del *calcolo* che questi propone non si riferisce che alle

---

[1]Cfr. Lagrange (1797), I ed. e (1813), II ed..

[2]Cfr. Lagrange (1801), I ed. e (1806a), II ed.. La seconda edizione riprende senza rilevanti modificazioni il testo delle lezioni I-XIII e XV-XX della prima edizione (la quale consta appunto di venti lezioni). Mentre le lezioni XV-XIX (I ed.) sono semplicemente trasposte, con poche modificazioni, nelle lezioni XIV-XVIII (II ed.), la lezione XX (I ed.) è divisa in due parti, le quali costituiscono le lezioni XIX e XX (II ed.). Il testo della lezione XIV (I ed.) è invece ripreso con notevoli modificazioni all'inizio della lezione XXI (II ed.), la quale è peraltro completata con l'aggiunta di una trattazione completamente nuova, così come è nuovo il testo delle lezione XXII (II ed.) [le lezioni XXI e XXII (II ed.) furono pubblicate separatamente come Lagrange (1806b)]. Le aggiunte così distribuite riguardano tutte il calcolo delle variazioni, ovvero la sua reinterpretazione all'interno della teoria delle funzioni analitiche.

[3]Cfr. Bell (1940), p. 265. Cfr. la citazione di Bell contenuta nel precedente paragrafo II.2.α..

[4]Cfr. *ivi*, p. 267.

funzioni che soddisfanno tale presupposizione e è quindi inaccettabile. Ecco un giudizio la cui apparente evidenza matematica nasconde un'imprecisione storica tutt'altro che marginale. Citerò qui,[5] come esempio, un passaggio di M. Kline, che peraltro è sicuramente fra i più equilibrati:

> Actually Lagrange's assumption that a function can be expanded in a power series is one weak point in the scheme. The criteria now known for such an expansion involve the existence of derivatives, and this is what Lagrange sought to avoid. His arguments to justify the power series only added to the confusion about which functions can be so expanded. Even if such an expansion is possible, Lagange shows how to calculate the coefficients only if we can get the first one, that is, $f'(x)$; and here he does the same crude thing his predecessors did. Finally, the question of convergence of the series is really non discussed.[6]

Ciò che rende un'affermazione come questa palesemente inaccettabile sul piano storico è l'implicito riferimento alle nozioni moderne di funzione e di sviluppo di una funzione in serie intera. Se, cancellando le differenze, si utilizzano tali nozioni per leggere le dimostrazioni e ricostruire gli argomenti di Lagrange, non si può che concludere asserendo non solo la loro incontestabile inadeguatezza, ma perfino la loro evidente ingenuità e sorprendersi quindi del credito di cui abbiano goduto. Al contrario, se lo sforzo interpretativo è teso a riportare alla luce i concetti originari che si celano dietro un linguaggio tecnico non troppo differente dal nostro e a legarli alla vicenda intellettuale che li ha originati, il quadro che si disegna assai presto rende inadeguate e ingenue le conclusioni precedenti, smantellando la loro apparente inappellabilità.[7] Lo scopo del presente capitolo è proprio quello di compiere una tale operazione, insieme storica e filosofica, richiamandosi per questo alle analisi svolte nei capitoli precedenti e alle conclusioni cui esse hanno condotto.[8]

---

[5]Cfr. fra gli altri anche Boyer (1939), p. 260.

[6]Cfr. Kline (1972), p. 432.

[7]Fra i più lavori più recenti in cui è finalmente emerso un giudizio più attento sulla teoria di Lagrange cfr. Ovaert (1976) [in cui il lettore potrà peraltro trovare un'interessante raccolta di citazioni] e Fraser (1987).

[8]Una ricostruzione precisa e dettagliata della "storia esterna" della *Théorie* e delle *Leçons*, la quale risulti fondata su documenti di prima mano, sembra allo stato attuale delle ricerche assai difficile da realizzare, così come appare difficile riunire la totalità dei manoscritti di Lagrange che siano in qualche modo connessi all'evoluzione della sua teoria. Per parte mia non affronterò qui nessuna delle due questioni, sulle quali altri studiosi stanno peraltro lavorando [la riunificazione e la pubblicazione di una parte dei manoscritti di Lagrange costituisce a esempio uno degli obiettivi dell'attuale progetto di ricerca di L. Pepe, di cui si confronti fra gli altri, Pepe (1986b)], limitandomi alla considerazione dei testi editi e in particolare delle due edizioni della *Théorie* e delle *Leçons*. Il secondo di questi testi costituisce peraltro un "commentario e un supplemento" della prima edizione della *Théorie* [cfr. la presentazione della ristampa della prima ed. delle *Leçons* nel XII *cahier* del *Journal de l'Ecole Polytechnique*], al quale Lagrange rinvia, per ulteriori chiarimenti, anche nella seconda edizione [cfr. Lagrange (1813), *Avertissement*], che benché localmente modificata non presenta aggiunte particolarmente rilevanti. Nella mia presentazione seguirò quindi il testo della prima edizione della *Théorie*, segnalando tanto le integrazioni contenute nelle *Leçons* che i cambiamenti introdotti nella seconda edizione. Per quel che riguarda la "storia esterna" di tale trattato mi limiterò a osservare come sia lo stesso Lagrange a legare la redazione di questo a delle "circostanze particolari" che lo condussero a "sviluppare i principi generali del-

Vista alla luce della vicenda storica dell'analisi settecentesca, la teoria delle funzioni analitiche di Lagrange si presenta come il definitivo compimento del programma euleriano:[9] il *calcolo* è finalmente non solo pienamente integrato alla "teoria delle serie" (in modo che il passaggio dall' "analisi

---

l'analisi" [cfr. Lagrange (1797), p. 5 e (1813), p. 5]. Tale testimonianza pare confermata fra l'altro da una nota relativa al pensionamento di Lagrange, pubblicata nel terzo volume (1814) della *Correspondance sur l'Ecole Polytechnique* [fasc. 1, p. 93] nella quale troviamo la dichiarazione seguente:

> Le deux ouvrages de ce célebre géométre, la *Théorie des fonctions analytiques* et le *Calcul des fonctions*, ont été le sujet des leçons qu'il a donnés à l'*Ecole Polytechnique*, en 1795, 1796 et 1799. Il fut nommé professeur dans cet établissement, à l'époque de sa fondation (1794). Depuis l'année 1799, il n'a plus professé.

Mentre la corrispondenza fra il corso del 1799 e le *Leçons* è attestata dalla presentazione della già citata ristampa della prima edizione di tale trattato (che tuttavia comparve originariamente fra i volumi contenenti le lezioni previste, ma mai professate, all'*Ecole Normale de l'an III*, pubblicati insieme alla seconda edizione del resoconto delle lezioni effettivamente impartite [cfr. Ec. Norm. III (1800-01)]), non vi è alcuna testimonianza analoga per la *Théorie*. Nella biblioteca de l'*Ecole des Ponts et Chaussées* [ms. 1323] sono conservati alcuni quaderni manoscritti contenenti i resoconti di alcune lezioni impartite da Lagrange all'*Ecole Polytechnique* fra il 1796 e il 1797. Fra queste una (impartita fra il 5 e il 16 *messidor, an* VIII [23/6 - 4/7, 1797]) reca il titolo: *Leçon servant de préface à l'ouvrage nouvellement imprimé, intitulé: Théorie des fonctions analytiques* [cfr. Pepe (1986b), p. 19 e 28-36 (che pubblica tale lezione)]; essa è tuttavia la sola espressamente dedicata ai principi del *calcolo*. Per contro nel secondo *cahier* del *Journal de l'Ecole Polytechnique* (*Nivôse, an IV* [22/12/1795 - 20/1/1796]) de Prony commenta un "cours élémentaire d'analyse fait par Lagrange" a l'*Ecole Polytechnique* (a partire dal 5 *Prairial, an IV* [25/5/1795]), dove questi avrebbe esposto "une matière qui n'appartient qu'à lui seul, et qui a pour objet la démonstration des principes fondamentaux du calcul différentiel et intégral" [cfr. de Prony (1796), p. 208]. De Prony annuncia inoltre la prossima pubblicazione di tale corso nel quarto numero dello stesso *Journal* [la prima ed. della *Théorie* è costituita dal nono *cahier* del *Journal*]. Tutto ciò contrasta peraltro con il fatto che negli archivi dell'*Ecole Polytechnique*, oggi perfettamente ordinati [cfr. Grattan-Guinness (1986)], non si trovi alcun cenno a un qualsiasi corso di Lagrange.

[9] Una lettura contrapposta che ha cercato di indagare i legami fra la teoria delle funzioni analitiche e la successiva evoluzione matematica è stata fornita da J. V. Grabiner, secondo la quale [cfr. Grabiner (1981), pp. 37 e 45]:

> The contribution of the *Fonctions analytiques* to the rigorisation of analysis lies not in Lagrange's specific definition of the derivative as coefficient of the linear term in the Taylor series, but in other things: in taking rigour seriously; in demolishing most older views; in the exemple he set of thoroughly working out the received results of the calculus from his definitions; and in developing the techniques necessary to carry this out. [...]
>
> [...] *Fonctions analytiques* differed from its predecessors in a crucial respect: it was intended primarily to establish the rigor of the calculus rather than to derive new results [...].

Se senza dubbio alcune dimostrazioni di Lagrange (in particolare quelle riferite all'inquadramento del resto [cfr. la prossima sezione III.6.*d*.]) prospettano la tecnica delle diseguaglianze, ciò è davvero poco per giustificare una tesi che, cancellando differenze davvero radicali e richiamandosi a un concetto quanto mai vago come quello di rigore, fa di Lagrange un precursore di Cauchy [per una critica più specifica alla tesi di Grabiner cfr. Fraser (1987), p. 52]. E' strano che J. Grabiner dedichi un intero volume alle innovazioni matematiche apportate da Cauchy, senza insistere sulle profonde differenze fra la sua concezione dell'analisi e quella settecentesca, le quali conducono a pensare quello che ella sembra intendere come "rigore" in modo non solo diverso, ma per molti versi opposto.

algebrica" all' "analisi superiore" sia il più naturale), ma esso è reso perfettamente indipendente da ogni considerazione legata alla natura propria di certe quantità particolari o al valore di certe differenze e è elegantemente reinterpretato, tanto nei suoi fondamenti che nelle sue applicazioni, entro una teoria delle trasformazioni formali che presiede a un passaggio opportunamente regolato da funzioni a funzioni. E' in questo senso che deve leggersi a mio avviso l'indiscutibile riduzionismo lagrangiano; quella che con buone ragioni è stata intesa come una riduzione dell'analisi superiore - e con essa della geometria delle curve e delle superfici e della stessa meccanica - all'algebra delle serie intere sembra presentarsi sotto le vesti particolari di una completa e definitiva riduzione del *calcolo* alla teoria delle trasformazioni delle forme analitiche.[10] Nella stessa nozione di funzione - che aveva mantenuto per tutto il XVIII secolo un'essenziale ambiguità - sembra ormai prevalere, salvo che in pochi contesti, il riferimento a pure forme analitiche, le cui capacità rappresentative sono solo marginalmente evocate nell'edificazione della teoria generale, per tornare a svolgere un ruolo essenziale solo nel momento applicativo, che è peraltro governato da un unico teorema fondamentale che esibisce la *forma* del resto dello sviluppo in serie intera di una funzione qualsiasi, fornendo in tal modo l'indispensabile connessione fra una teoria delle forme e la trattazione analitica di determinati sistemi di quantità. Il principale atto di riduzione a cui è possibile ricondurre l'intero edificio matematico e filosofico della teoria delle funzioni analitiche sembra essere così una riduzione della quantità alla forma,[11] una risoluzione della

---

[10]Ecco come lo stesso Lagrange si espresse il 5 *messidor an* V, presentando la *Théorie* nel corso di una lezione all'*Ecole Polytechnique* [cfr. Pepe (1986b), pp. 28-31; cfr. la precedente nota (8)]:

> Le défaut de tems m'a empèché de faire une préface à l'ouvrage qui vient de paraitre sur les fonctions. On verra, en le lisant, qu'il a deux objects principaux. Le premier de débarasser le calcul différentiel des considérations métaphysiques d'infiniment petits, ou de quantités évanuissantes ou de fluxions, le second de rattacher ce calcul au reste de l'algèbre de manière à ne faire du tout qu'une seule méthode.
>
> [...] mon second object était de lier cette nouvelle feconde branche d'analyse [il *calcolo*] à l'autre en faisant voire que tout pouvait se réduire à de simples transformations, tandisque les autres méthodes par les procédés qu'elles employent, en font véritablement un objet à part. [...]
>
> On reconnait aprés une étude, un peu suivie de l'algèbre, que tout le calcul se reduit à de simples transformations, à mettre sous une forme différent [*sic*] un résultat donné d'une autre manière. Or le calcul des fonctions n'est autre chose qu'une transformation fort simple: il est vrai que le résultats qu'on obtient par là ont une application très heureuse et fort naturelle à la géométrie et à la mécanique; mais ils en sont évidentement [*sic*] tout à fait indépendants. Ce calcul n'a donc rien qui le distingue de l'algèbre proprement dite. Aussi en retenant cette expression, mais l'employant dans toute l'étendue qu'elle doit avoir: j'avais à composer un traité d'algèbre, et c'est un ouvrage qui nous manque.

[11]Ecco come si è espresso C. Fraser [cfr. Fraser (1987), p. 44]:

> The key point in understanding the passagge from a function f(x) to its derived function f'(x) is that the relation in question is one if *algebraic form*. Lagrange's theory should be contrasted here with the modern calculus, where the derivative of f(x) is defined at each numerical value of x by a limit process. In the modern calculus the relationschip of the derivative to its parent function in essentially *arithmetic*.

nozione di funzione a uno dei corni di quell'opposizione fra forma e quantità che l'aveva così a lungo contraddistinta.

III. 6. *a*. β. *Definizioni e nozione di funzione*

La *Théorie* è aperta da una definizione esplicita del termine "funzione" che - anche a fronte di numerosi cambiamenti nell'organizzazione dei primi paragrafi, intervenuti fra la prima e la seconda edizione - si ripresenta in quest'ultima inalterata e nella medesima posizione iniziale:

> On appelle *fonction* d'une ou pluisieurs quantités, toute expression de calcul dans laquelle ces quantités entrent d'une manière quelconque, mêlées ou non avec d'autres quantités qu'on regarde comme ayant des valeurs données et invariables, tandis que les quantités de la fonction peuvent recevoir toutes les valeurs possibles.[12]

Nelle *Leçons* Lagrange aggiunge a questa stessa definizione[13] un'altra, terminologicamente molto differente:

> [...] à la naissance du calcul différentiel, on n'avait pas encore une idée assez étendue de ce qu'on entend par *fonction*.
>
> Les premiers analystes n'avaient employé ce mot que pour désigner les différentes puissances d'une même quantité; on en a ensuite étendu la signification à toute quantité formée d'une manière quelconque d'une autre quantité; et il est aujourd'hui généralement adopté pour exprimer que la valeur d'une quantité dépende, suivant une loi donnée, d'une ou de plusieurs autres quantités données.[14]

Nella seconda edizione della *Théorie* egli chiarifica invece la prima definizione, specificando che una funzione di una certa variabile, designata dalle "caratteristiche" f o F poste davanti a tale variabile, è una "quantité dépendante de cette variable, e qui varie avec elle suivant une loi donnée".[15]

Confrontate le une con le altre, tali definizioni possono mettere in difficoltà più di un interprete. In particolare, chi accettassse l'idea di una contrapposizione fra due diverse nozioni di funzione, entrambe operanti nella seconda metà del settecento - la prima riconducibile all'idea di una forma

---

Quella che Fraser qualifica come la "forma algebrica" di una relazione fra funzioni (in quanto contrapposta a una "forma aritmetica") mi pare reinterpretabile come la natura puramente operazionale di tale relazione, la quale sussiste fra due forme analitiche che sono una la trasformata dell'altra.

[12]Cfr. Lagrange (1797), p. 1 e (1813), p. 1. Cfr. il precedente paragrafo II.2.η.. Lagrange aveva già presentato una definizione assai simile a questa una quarantina di anni prima, nei suoi *Principi di analisi sublime*, risalenti al periodo torinese [cfr. Pepe (1986a), p. 75]:

> Chiamasi [...] generalmente funzione di una o più quantità variabili una espressione algebraica [*sic*!] comunque composta di esse variabili e di quali si vogliono altre costanti.

[13]Cfr. Lagrange (1801), p. 6 e (1806a), p. 6.

[14]Cfr. *ivi*, p. 4 e 4.

[15]Cfr. Lagrange (1813), p. 7.

analitica, la seconda a quella di una legge di dipendenza fra due quantità[16] - sarebbe di fronte a esse nella necessità di spiegare un tanto radicale cambio di orientamento che, tanto nelle *Leçons* che nella seconda edizione della *Théorie*, si verifica nello spazio angusto di poche righe.

Un tale cambio di orientamento è tuttavia soltanto illusorio. Anche Lagrange, come l'Euler delle *Institutiones* o della memoria del 1765 sulle "funzioni discontinue",[17] sembra parlare di funzione non tanto in riferimento a una legge di relazione, ma a una forma che esibisce concretamente tale relazione o a una quantità il cui valore è determinato da tale legge. Se le definizioni precedenti sono fra loro aporetiche, esse non lo sono allora che per l'insistenza che le caratterizza da una parte sulla concezione di una funzione come una forma e dall'altra sulla concezione di una funzione come quantità.[18] Se è così un'ambiguità "classica" che si ripresenta inalterata nelle definizioni generali, il riferimento a una legge che governa la dipendenza fra le quantità in gioco sembra richiamare l'attenzione del lettore al fatto che una quantità non è una funzione di un altra che a condizione che tale legge sussista come tale (ovvero la dipendenza non sia puramente accidentale o sottomessa ai capricci del caso o a una volontà superiore e imprevedibile). Ma che cosa può essere inteso, in un contesto strettamente analitico come quello di Lagrange, come una manifestazione certa di una legge di dipendenza? Detto in altri termini, che cosa può fornire la demarcazione fra un accadimento regolato e un altro accidentale, permettendo di ritrovare, caso per cas, quella distinzione metafisicamente così chiara (e perfino originaria), ma ontologicamente così oscura? La risposta non è certamente difficile: il solo criterio possibile è quello che rinvia a un legame espresso o esprimibile per mezzo di una forma che rappresenti una quantità nei termini di un altra: "espresso" significa che tale forma è data; "esprimibile" indica che essa può in linea di principio venir determinata a partire dai dati che sono stati forniti, ovvero dalle equazioni che li contengono. In entrambi i casi la presenza di una funzione è così garantita dalla presentazione di un'identità esplicita fra termini analitici; nel primo caso la stessa funzione è presentata esplicitamente, nel secondo essa lo è solo implicitamente, ma pur sempre per mezzo di una scrittura esplicita. Lette in tal modo le chiarificazioni e le aggiunte che Lagrange introduce nelle *Leçons* e nella seconda edizione della *Théorie* relativamente alla propria definizione originaria rispondono all'intenzione di insistere sul carattere esplicito della forma analitica che esprime o costituisce una funzione, sul suo rinviare a operazioni analitiche note e chiaramente determinate.

Se una funzione può allora essere genericamente indicata per mezzo di un simbolo atomico opportuno, di una "caratteristica" introdotta a questo

[16] Cfr. il precedente paragrafo II.2.η..

[17] Cfr. il precedente paragrafo II.2.v..

[18] Si osservi che, seguendo un costume assai diffuso - e non solo nel XVIII secolo - Lagrange impiega il termine "quantità" in almeno due sensi distinti: sia per indicare ciò che è rappresentato da un simbolo atomico o da una forma analitica, che per indicare il simbolo atomico stesso, come è a esempio evidente nella prima delle definizioni precedenti.

scopo, essa è una funzione solo a condizione che tale caratteristica indichi una scrittura analitica esplicita, la cui indeterminatezza (attuale) comporta la non determinatezza della funzione. Tale insistenza sul carattere esplicito della scrittura analitica che esprime una funzione si accompagna a una sottintesa assunzione del carattere intrinsecamente singolare di tale scrittura. La legge che questa esprime deve essere intrinsecamente una: essa non deve trasformarsi arbitrariamente nel corso stesso del suo operare.

> It cannot be emphasized too strongly - scrive Fraser - that in the 18th century the calculus was a calculus of functions given by single enalytical expressions. It is this conception that is at the base of the *Leçons*.
> In Lagrange's world of algebraic analysis a function $y = f(x)$ is given by a single analyical expression. This expression is constructed from variables and constants using the operations of analysis. The relation between y and x is indicated by the series of operations schematized in $f(x)$. Each function $f(x)$ possesses a well-defined, unchanging algebraic form.[19] It is the algebraic form of $f(x)$ that distinguishes it from other functions and determines its properties.[20]

Per quanto Fraser abbia senza dubbio ragione nell'insistere sul fatto che la nozione lagrangiana di funzione, intesa come "espressione analitica singolare", sia la stessa nozione a partire dalla quale si era costruito l'intero edificio dell'analisi settecentesca, è pur vero che Euler aveva introdotto fin dal 1765 un vocabolario apertamente contrastante con tale punto di vista, parlando di "*funzioni* discontinue" in riferimento a "curve", le quali non siano "determinate" lungo tutto il loro corso da una "stessa equazione".[21] Sebbene egli non lo dichiari mai esplicitamente, Lagrange sembra concepire la propria teoria come fondata sul rigetto di una tale estensione tanto del termine che del concetto di funzione. L'analisi è la scienza delle forme singolari, le quali si caratterizzano per l'assenza di ogni condizione che determini e restringa per mezzo di una posizione arbitraria il dominio di una qualche variabile o il

---

[19]Il termine "algebrico" non è ovviamente contrapposto qui a "trascendente" e non indica altro se non che la "forma" in questione è costituita da una stringa ben formata di simboli scelti in un alfabeto finito. Nel linguaggio in cui mi sono fino a qui espresso, essa è quindi qualificabile come una "forma analitica" [cfr. la precedente nota (11)]. Fraser non fa qui che riprendere una terminologia già impiegata da J. L. Ovaert secondo il quale "Lagrange tient à préciser le caratère *algébrique* de la notion de fonction" [cfr. Ovaert (1976), p. 172]. A sostegno di tale affermazione Ovaert cita il seguente passaggio della prima lezione "sul calcolo delle funzioni" [cfr. Lagrange (1801), p. 4 e (1806a), p. 4]:

> [...] on doit regarder l'algèbre comme la science des fonctions, et il est aisé de voir que la résolution des équations ne consiste en général qu'à trouver les valeurs des quantités inconnues en fonctions déterminées des quantités connues. Ces fonctions représentent alors les différentes opérations qu'il faut faire sur les quantités connues pour obtenir les valeurs de celles que l'on cherche, et elles ne sont proprement que le dernier résultat du calcul.
> Mais, en algèbre, on ne considère les fonctions qu'autant qu'elles résultent des opérations de l'arithmétique, généralisées et transportées aux lettres, au lieu que dans le calcul des fonctions proprement dit, on considère les fonctions qui résultent de l'opération algébrique du développement en série, lorsqu'on attribue à une ou à plusieurs quantités de la fonction, des accroissemens indéterminés.

[20]Cfr. Fraser (1987), p. 41.

[21]Cfr. il precedente paragrafo II.2.v..

significato di un qualche simbolo. Le trasformazioni che essa studia sono relative a tali forme e non possono quindi dipendere da condizioni esterne né per la validità delle identità cui mettono luogo, né per la scelta delle stringhe simboliche a cui esse devono venir riferite in questa o quella circostanza.

Se la lettura della *Théorie* e delle *Leçons* mostra con indiscutibile evidenza che questo è il punto di vista di Lagrange, la sua semplice esibizione lascia aperto il problema della ragione *a priori* su cui esso si fonda, dell'esigenza "filosofica" cui esso risponde. Questa sembra essere la stessa già avanzata da Euler: quella di una teoria astratta e generale delle quantità. Una tale teoria non può permettersi di trattare i propri oggetti introducendo a tale scopo sia pure un solo "scampolo di interpretazione", quale quello che appare implicitamente in una scrittura come la seguente

$$(1) \qquad f(x) = \begin{cases} x^3 & x \leq 0 \\ \sin x & x \geq 0 \end{cases}$$

Se la differenza formale fra le due identità $0^3 = 0$ e $\sin 0 = 0$ che forniscono il valore $f(0)$ giustifica - in termini esplicitamente aristotelici[22] - la qualifica di *discontinuo* per l'oggetto che tale scrittura rappresenta, è il carattere metalinguistico delle specificazioni $x \leq 0$ e $x \geq 0$ che sembra impedire a Lagrange (come già all'Euler delle *Institutiones*) di intendere tale scrittura come (l'espressione di) una funzione, intesa come oggetto di studio dell'analisi, scienza generale e astratta delle quantità. Il punto chiave da cui la concezione lagrangiana sembra trarre la sua origine più profonda è allora quella equiparazione fra generalità e operatività puramente simbolica (o sintattica, come diremmo oggi), che già sembra emergere, prima ancora che in Euler, nei primi manoscritti newtoniani.[23]

Se la richiesta di singolarità, precisata nei termini dell'assenza di ogni specificazione metalinguistica riferita al dominio delle variabili o al significato dei simboli, permette di fissare un confine preciso fra ciò che non può essere una funzione e ciò che al contrario può esserlo, essa non è ancora sufficiente a selezionare, fra l'insieme delle scritture analitiche, quelle che meritano la qualifica di funzioni. La prima questione riguarda le scritture infinite e in particolare le serie intere, le quali non sembrano, in quanto tali, considerate da Lagrange come delle funzioni, ma piuttosto come delle rappresentazioni di queste. Così come a ogni funzione corrisponde una e una sola serie intera, ogni serie intera può essere considerata come "lo sviluppo di un'espressione finita",[24] ovvero di una funzione. Se l'esibizione di una serie

---

[22]Per Aristotele [cfr. in particolare la *Fisica*] è continuo ciò i cui estremi "sono una e una medesima cosa", ovvero sono non solo ἅμα ma anche ἕν. Per la nozione di continuità nella *Fisica* di Aristotele mi permetto di rinviare al secondo capitolo di Panza (1989).

[23]Cfr. in particolare il *De Analysi* [ora in Whiteside (1967-81), vol. II, pp. 206-47] e il *De Methodis Fluxionum* [ora *ivi*, vol. III, pp. 32-353]. Mi permetto di rinviare ancora, per alcune considerazioni relative a tale questione, al capitolo III di Panza (1989)].

[24]Cfr. Lagrange (1797), p. 55 e (1813), p. 76:

corrisponde quindi all'esibizione di una funzione, quest'ultima non mette capo che a una rappresentazione indiretta e può in molte circostanze porre il problema della determinazione della funzione cui essa rinvia. La seconda questione riguarda le forme analitiche finite, ma non semplici, le quali, oltre a non fornire che delle rappresentazioni indirette di una quantità,[25] contengono simboli operazionali non riconducibili agli "elementi" originari dell'algebra.[26] Anche in tal caso Lagrange sembra restio a usare con piena legittimità la qualifica di funzioni, la quale è piuttosto riservata alle forme analitiche semplici in cui queste forme non semplici si trasformano, una volta che siano state compiute le operazioni che sono in esse indicate.

III. 6. *a. γ. Canoni di composizione e statuto degli elementi: l'ideale di una genealogia matematica*

Se accettiamo tali ulteriori esclusioni come proprie a determinare l'estensione della nozione lagrangiana di funzione, dobbiamo concluderne che una funzione non è per Lagrange (così come per Euler) che una composizione realizzata a partire da un insieme dato di funzioni elementari. L'esibizione esplicita di una forma analitica $y = f(x)$ non è tuttavia la sola modalità che può venir utilizzata per introdurre una funzione. Per questo è possibile ricorrere anche a delle equazioni opportune $F(x, y) = 0$, ovvero a delle equazioni in cui non compaiano che forme analitiche già qualificate, in quanto tali, come funzioni:

> Les fonctions x^m, a^x, $\log_a x$, sin x et cos x [27] - scrive Lagrange - [...] peuvent être regardées comme les fonctions simples analytiques d'une seule variable. Toutes les autres fonctions de x se composent de celles-là par addition, soustraction, multiplication ou division, ou sont données en général par des équations dans lesquelles entrent des fonctions de ces mêmes formes.[28]

[...] on peut toujours regarder une expression en série comme le développement d'une expression finie.

E' difficile pensare che Lagrange si riferisca qui a ogni somma infinita, comunque costruita. A parte il caso di serie a termini scelti arbitrariamente, l'esempio della serie $1 + 2!x + 3!x^2 + \&c.$ (citata da Lacroix nella seconda edizione del suo *Traité* [cfr. Lacroix (1810-19), vol. 1, p. 11]) mostra che è possibile costruire delle serie intere perfettamente regolari che non sono lo sviluppo di alcuna "espressione finita" (e non convergono per alcun valore della variabile diverso da zero). Tali serie sono semplicemente escluse da Lagrange dal dominio dell'analisi come forme illegittime: la loro considerazione non appartiene a una scienza generale e astratta delle quantità.

[25] Cfr. il precedente paragrafo 2.II.ι..

[26] Cfr. *sotto*.

[27] Come già Euler, Lagrange considera tanto il seno che il coseno come delle funzioni elementari e non fa invece alcun cenno alle funzioni trigonometriche inverse.

[28] Cfr. Lagrange (1797), p. 28 e (1813), pp.25-26. Ecco invece come Lagrange si esprime nelle *Leçons* [cfr. Lagrange (1801), lez. VI, p. 36 e (1806a), lez. VI, p. 47]:

> Les fonctions que nous venons de considérer dans les trois dernières leçons [le funzioni x^m, a^x, $\log_a x$, sin x et cos x], sont comme les élémens dont se composent toutes les fonctions qu'on peut former par des opérations algébriques.

Presa alla lettera, tale assunzione esclude la possibilità di esprimere una funzione (o una famiglia di funzioni[29]) per mezzo di un'equazione differenziale ordinaria o ai differenziali parziali, a meno che non si intendano le scritture y', y", &c. come abbreviazioni di forme analitiche (ancora) indeterminate, ma già intese come funzioni. Che sia proprio questa l'interpretazione intesa di Lagrange o che semplicemente si debba considerare l'assunzione precedente come imprecisa, resta il fatto che l'esclusione delle equazioni differenziali dal novero delle equazioni che forniscono un'esibizione implicita di una classe di funzioni (o, in linguaggio più lato, di una funzione) è in via generale difficilmente asseribile dal punto di vista di Lagrange. Se una funzione non può così qualificarsi, in quanto tale, che come una composizione finita di elementi non scomponibili, i quali costituiscono un alfabeto finito compiutamente e perfettamente determinabile, essa può venir esibita, oltre che esplicitamente, anche indirettamente - per mezzo di una forma analitica non semplice, come una forma differenziale o una serie - o implicitamente - per mezzo dell'assegnazione di certe condizioni che essa deve soddisfare, ovvero di certe equazioni (algebriche o differenziali[30]) di cui essa è soluzione (eventualmente accompagnate da opportune condizioni iniziali che permettano una caratterizzazione univoca).

Se una tale determinazione del concetto di funzione chiarisce sotto molti aspetti il punto di vista di Lagrange, apre anche numerosi problemi, due dei quali si presentano per così dire come intrinsecamente connessi a essa: il primo riguarda i canoni che la composizione degli elementi assegnati deve rispettare; il secondo lo statuto stesso di tali elementi, la loro natura tanto ontologica che gnoseologica.

Per quanto Lagrange non faccia riferimento che a leggi di composizione che potremmo qualificare come strettamente algebriche, parlando semplicemente di "addizione, sottrazione, moltiplicazione e divisione", è chiaro che l'orizzonte delle funzioni lagrangiane non può venir limitato a costrutti simbolici che indicano la connessione delle funzioni elementari per mezzo di tali operazioni. Ciò che è al contrario essenziale è la possibilità di ogni funzione elementare di riferirsi a variabili costituite a loro volta da funzioni qualsiasi. Le funzioni elementari possono quindi comporsi operando su se stesse, oltre che sulle loro composizioni. Le funzioni lagrangiane vengono così a identificarsi compiutamente come le forme analitiche semplici. Benché Lagrange sembri infatti negare (al pari di Euler) che una costante possa qualificarsi come una funzione[31] (di una variabile qualsiasi), egli non esclude ovviamente la possibilità di comporre le funzioni elementari con addendi o

---

[29]Cfr. il precedente paragrafo II.2.λ..

[30]Benché Lagrange non affronti mai la questione in termini espliciti, né nella *Théorie*, né nelle *Leçons*, sembra opportuno introdurre anche le equazioni funzionali (nel nostro senso) fra le esibizioni implicite di una funzione o di una classe di funzioni.

[31]Benché questa sia una ovvia conseguenza della definizione generale, è evidente come quest'ultima sia, sotto tale aspetto, contraddittoria con la considerazione della derivata di ogni funzione come una funzione. Il contrasto è a esempio chiaro nella dimostrazione funzionale del teorema del binomio, fornita da Lagrange nelle *Leçons* [cfr. il prossimo paragrafo III.6.*c*.β.] in cui questii considera K come una funzione derivata, $F'(m) = K$ e ne cerca la primitiva.

fattori costanti, i quali possono intendersi come una sorta di elementi ausiliari non funzionali, ma tali da poter intervenire nel processo di composizione.

Precisate le leggi di composizione, si tratta di chiarire la natura degli elementi su cui esse operano, intesi da una parte come funzioni a tutti gli effetti (e anzi come funzioni di statuto privilegiato) e dall'altra come entità introdotte *a priori* rispetto alla definizione stessa di funzione. La filosofia profondamente illuminista che pervade l'opera di Lagrange impedisce a questi di considerare tali elementi come semplici *dati*, introdotti convenzionalmente per mezzo di un atto di forza. Al contrario essi derivano, come ogni altra funzione, da una genealogia, sia pure di natura essenzialmente diversa da quella che conduce da essi ai propri composti. Non solo, tale genealogia istituisce fra essi una gerarchia, che, lungi dall'essere semplicemente legata all'ordine della loro apparizione, prevede una partecipazione delle funzioni precedenti all'atto di generazione delle funzioni successive. Se Lagrange non ripete, né nella *Théorie*, né nelle *Leçons*, la fiaba di Condillac che aveva cercato di descrivere la genesi della scienza matematica per mezzo di un operare analogico a partire dal "linguaggio d'azione",[32] egli è un figlio assolutamente ortodosso di quella tradizione di pensiero in cui tale fiaba si inseriva del tutto naturalmente. Dal contare all'aggiungere e togliere quantità le une alle altre e quindi alle idee astratte del sommare e del sottrarre e poi del moltiplicare e del dividere; dall'operare su numeri, all'idea delle leggi di questo operare e quindi all'algebra elementare; dalle potenze intere a quelle frazionarie, e da queste all'esponenziale e al logaritmo: la linea genealogica di un processo - che è edificazione del sapere, ma anche sua giustificazione e prova, architettonica intrinseca del suo manifestarsi, del suo essere, come della sua *giusta*esposizione, oggetto stesso della ricerca metafisica[33] - rimane indiscutibilmente sullo sfondo dei trattati di Lagrange.

Come già era avvenuto per Euler, il problema principale appare allora quello della natura delle funzioni circolari, del loro inserimento entro una genealogia matematica che rifiuta per principio di considerare la geometria come parte di sé[34] (intendendola piuttosto come un'applicazione successiva), ma che non può evitare di giungere presto o tardi a trattare con almeno alcuni dei prodotti che essa ha storicamente fornito.[35] Se nella seconda edi-

[32]Cfr. Condillac (1797).

[33]Sulla nozione illuminista di "metafisica" come "epistemologia genetica" cfr. fra gli altri Gusdorf (1971), pp. 232-49.

[34]Il "rifiuto" della geometria come teoria matematica pura è solo in parte un'esito interno di un dibattito strettamente matematico (che la mia dissertazione cerca di ricostruire). Esso è certamente connesso anche alla stessa filosofia illuminista, alla sua esaltazione dell' "analisi" (in senso filosofico) e del carattere linguistico del conoscere e della scienza, di cui Condillac fu - nella sua confusa ma efficace retorica filosofica - il principale e più ascoltato paladino [oltre al già citato (1797) - pubblicato postumo per iniziativa degli *Idéologues* (cfr. la nota (4) del precedente paragrafo III.4-B.δ.) - cfr. a esempio Condillac (1746), (1775) - in particolare i volumi III e IV - e (1796), anch'esso postumo]. L'indagine sulle connessioni fra l'evoluzione della filosofia illuminista e la sua riformulazione e ripresa da parte degli *Idéologues* e il programma scientifico dell'analisi matematica settecentesca non si presenta per ovvie ragioni nella mia dissertazione che come un progetto proposto a future ricerche.

[35]Sull' ambigua natura dalle funzioni circolari cfr. il precedente paragrafo III.3.*c*. α..

zione della *Théorie* Lagrange proporrà di risolvere la difficoltà all'origine, tagliando il nodo gordiano e introducendo le funzioni circolari come composizioni di esponenziali immaginari, egli non farà in tal modo che riprospettarla sotto una nuova forma, non potendo fornire alcuna ragione *a priori* per giustificare il trattamento privilegiato di tali funzioni, non più elementari.

Funzioni circolari a parte, la teoria di Lagrange si presenta così come saldamente ancorata a un ideale epistemologico che J. Vuillemin ha qualificato come un'ideale "genetico" in matematica.[36] La tesi di Vuillemin è che un tale ideale sia stato smantellato già all'inizio del XIX secolo dall'irruzione nella matematica di quella che egli qualifica come "l'analisi astratta", la quale si caratterizza proprio per il suo vertere su un insieme di concetti non riducibili geneticamente alle operazioni dell'algebra elementare. La teoria delle funzioni analitiche sarebbe allora il prodotto più maturo e finalmente compiuto di un ideale genealogico a cui Lagrange sembra voler ricondurre non solo l'intero edificio dell'analisi (tanto quella algebrica che quella trascendente), ma anche la geometria e la meccanica, intese come applicazioni particolari della teoria delle funzioni. Se l'ambizione di esaustività è intrinsecamente connaturata a un tale programma - il quale si qualifica essenzialmente proprio per un'esigenza di fondazione che si presenta come esigenza di riconduzione di *ogni* regione, per quanto piccola, del sapere matematico a una origine comune - essa è insieme la ragione principale del fascino intellettuale che esso ha esercitato e della sua debolezza, delle sue intrinseche difficoltà. Non è solo l'ampiezza dell'obiettivo che fa qui ostacolo (ciò che non produrrebbe che una difficoltà contingente), ma piuttosto, da una parte, l'aporia insanabile fra storia e genealogia dei concetti e, dall'altra, l'impossibilità di principio di una metafondazione che rispetti i canoni che la stessa fondazione prescrive. Lagrange si trova così in una situazione assai simile a quella in cui si sono trovati, cento anni più tardi, non pochi logici e filosofi che hanno cercato, sia pure a partire da prospettive diverse (ma non così radicalmente distanti), di dare una risposta positiva alla cosiddetta "crisi dei fondamenti": da una parte le matematiche storicamente costruite, così come le modalità oggettive di tale costruzione, appaiono più ricche di quanto possa sopportare ogni ideale genealogico e riduzionista, dall'altra l'atto stesso della ricostruzione dell'edificio matematico rimane in quanto tale estraneo alla linea genealogica che esso vuole imporre e manifesta una modalità di costruzione degli oggetti che compongono tale edificio che è essenzialmente differente da quella che si asserisce essere la sola legittima (o addirittura possibile).[37]

---

[36]Cfr. Vuillemin (1962), p. 64.

[37]Ecco come già nel 1860 si esprimeva C. de Freycinet che, pure nella sua ingenuità epistemologica, mi pare cogliere con lucidità un punto essenziale [cfr. de Freycinet (1860), pp. XV e 259]:

> Tout en accordant à la *Théorie des fonctions analytiques* et au *Calcul des fonctions* de Lagrange, le tribut d'admiration dû à ces œuvres immortelles, je n'ai pu m'empêcher d'en combattre la pensée dominante. L'entreprise de ramener l'Analyse infinitésimale à un point de vue purement algébrique et de suppléer une conception naturelle par des artifices de calcul, à définitivement échoué contre les impossibilité de l'application. [...]

III. 6. *a*. δ. *Sviluppabilità e convergenza*

Il pilastro che regge l'intera costruzione della teoria delle funzioni analitiche è il *teorema* che asserisce che ogni funzione è sviluppabile in una serie intera centrata su un punto generico x del suo dominio di definizione.[38] Lagrange è il primo a porsi il problema di *dimostrare* in generale tale verità, che era stata assunta a lungo come un'evidenza stabilita *a priori* all'edificazione della stessa "teoria delle serie", che dopo l'*Introductio* di Euler era stata generalmente giustificata richiamandosi alla sviluppabilità delle funzioni elementari e assumendo la componibilità dei loro sviluppi e che si presenta invece nella *Théorie* sotto la forma di un teorema. E' proprio la dimostrazione di un tale teorema che conduce Lagrange a dichiarare per la prima volta in modo esplicito che la sviluppabilità in serie intera di ogni funzione può, in alcuni casi, venir meno qualora la variabile indipendente assuma dei particolari valori isolati, che pure partecipano al dominio di definizione della funzione considerata, ovvero non sia intesa come una generica "quantità variabile", ma venga sostituita da alcune particolari costanti.[39] L'ovvietà di alcuni degli esempi che possono essere portati per illustrare una tale situazione[40] - che Lagrange riferisce con tutta evidenza alla definibilità dei coefficienti dello sviluppo e non certamente alla convergenza della serie o alla sua convergenza alla funzione - rende del tutto naturale pensare che questi non faccia in tal modo che rendere esplicita una convinzione largamente diffusa nel XVIII secolo, anche se mai non soltanto esplicitata, ma neppure giustificata *a priori* e in via generale.

Una tale giustificazione è al contrario fornita dalla dimostrazione di Lagrange, la quale *assume* che ogni funzione $f(x+\xi)$ possa venir sviluppata in una serie di potenze razionali dell'incremento ξ, $\sum_{k=0}^{\infty} A_k\, \xi^{\alpha_k}$ (dove gli A_k (k = 0, 1, 2, &c.) sono dei coefficienti indipendenti da ξ e $\alpha_k \in Q$) e mostra che gli

Voilà donc des notions naturelles qui par être convenablement précisées nécessitent la connaissance préalable du développement des fonctions en séries: comme si l'idée de la vitesse, et celle de la force n'étaient pas, dans notre esprit, antérieurs à l'étude de algèbre! Que cette Science soit indispensable pour *calculer* les valeurs de la vitesse et de la force accélératrice d'un mouvement donné, cela se conçoit: mais qu'elle serve à les définir, c'est ce qui nous semble un renversement de la logique.

[38] Il termine "dominio di definizione" è qui inteso per riferirsi al dominio di valori che la variabile indipendente può assumere senza rendere la funzione infinita. Lagrange lascia ovviamente implicita una tale condizione, la quale verrà esplicitata da Ampère nella sua memoria del 1806 [cfr. Ampère (1806)], su cui cfr. Volkert (1989).

[39] Cfr. Il prossimo paragrafo III.6.*a*.ε..

[40] Il più semplice di tali esempi è probabilmente quello della funzione $f(x) = \sqrt{x}$ che, sviluppata in una serie intera centrata su x, fornisce l'identità $f(x+\xi) = \sqrt{x} + \frac{1}{2\sqrt{x}}\xi - \frac{1}{8x\sqrt{x}}\xi^2 +$ &c., il cui secondo membro risulta non definito [nel linguaggio dell'epoca: diviene infinito] per $x = 0$.

esponenti α_k (k = 0, 1, 2, &c.) non possono che essere dei numeri naturali, salvo nel caso in cui la scelta di opportuni valori di x conduca all'eliminazione di alcuni radicali nel passaggio da f(x+ξ) a f(x). Anche indipendentemente dalla considerazione dei passaggi particolari di una tale dimostrazione (che verrà dettagliatamente analizzata nel prossimo paragrafo III.3.b.β.), è facile capire quale sia la principale difficoltà cui essa deve, almeno implicitamente, trovare una risposta. Se infatti si può intendere la proprietà di sviluppabilità in serie intera di una data funzione nei termini dell'esistenza di un procedimento formale di costruzione della serie sviluppo - il quale sia riconducibile a un'applicazione del metodo di sviluppo per determinazione dei coefficienti o consista comunque in un'opportuna estensione infinitaria delle usuali operazioni algebriche - risulta difficile, mantenendo una tale interpretazione, immaginare una dimostrazione generale che verta su una funzione assolutamente generica e assicuri, *a priori* da ogni considerazione di carattere differenziale e dalla presa in conto di un qualsiasi sviluppo particolare, la sviluppabilità in serie intera di tutte le funzioni. Per comprendere la natura di una tale difficoltà è sufficiente riflettere sull'ambiguità che accompagna lo stesso metodo di sviluppo per determinazione dei coefficienti, il quale presuppone un'identità generica, la cui legittimità è garantita solo *a posteriori*, grazie ai risultati cui si è condotti operando su questa stessa identità. Il problema è infatti proprio quello dello statuto dell'identità di partenza: ciò che Lagrange vuole dimostrare è che - se il simbolo atomico x rappresenta una generica quantità variabile - tale identità è legittimamente assumibile per ogni funzione f(x+ξ). Ma che cosa significa che tale identità sia legittimamente assumibile? E' evidente che per rispondere a tale domanda non è possibile riferirsi a nessun metodo particolare di determinazione dei coefficienti, il quale la presupponga - come è invece il caso di un procedimento di sviluppo fondato sulla composizione degli sviluppi delle funzioni elementari. Prima ancora di immaginare una dimostrazione particolare per il proprio teorema, Lagrange deve quindi dare a esso un senso; e per questo egli non può chiedere aiuto a una tradizione matematica fondata in ultima istanza sull'eliminazione di tale difficoltà, ovvero su quella stessa ambiguità che si tratta ora di sciogliere. La risposta che questi fornisce non è tuttavia soltanto implicita, ma anche elusiva. Spostando indietro la difficoltà, egli assume l'identità generica $f(x+\xi) = f(x) + \sum_{k=1}^{\infty} A_k \xi^{\alpha_k}$ (dove f(x) è una funzione qualsiasi), ipotizza che per un dato valore naturale di k ($k = n$) l'esponente $\alpha_k = \alpha_n$ sia un numero frazionario o intero negativo e conclude che nel primo caso la serie avrebbe su C un numero di valori superiore alla funzione f(x+ξ) di cui essa è sviluppo (posto che la variabile x non sia sostituita con un valore opportuno) e che nel secondo essa (un suo addendo) diverrebbe infinita(o) per x = 0, quale che sia il valore di ξ, mentre la funzione f(0+ξ) = f(ξ) non potrebbe esserlo che per opportuni valori di ξ. La prova del teorema consiste allora nel negare legittimità alla posizione iniziale nel caso in cui si verifichino tali circostanze e a concludere che essa non può quindi venir considerata "in generale"[41] legittima che qualora i coefficienti α_k $(k = 1, 2, ...)$ siano tutti dei numeri naturali. Tutto ciò che Lagrange ci dice è allora che il segno di identità debba essere inteso fra una forma finita e una serie come il simbolo di una relazione che viene meno qualora i due *relata* siano nelle condizioni reciproche indicate nel corso della dimostrazione.

Il modo più ovvio e naturale per render conto di una tale proprietà della relazione di identità fra una funzione e il proprio sviluppo in serie di potenze sembra quello di pensarla originariamente come un'identità numerica ristretta a una circonferenza di diametro indeterminato, ma finito, e centro nel punto $\xi = 0$. Se accettiamo tale interpretazione dobbiamo allora concludere che Lagrange ha invertito l'implicazione euleriana, scambiando l'effetto con la causa. Se è certamente difficile intendere diversamente la dimostrazione con cui questi apre la *Théorie*, ciò non implica che egli abbia ormai abbandonato un punto di vista formale; al contrario, il problema della teoria delle funzioni analitiche[42] è proprio quello di determinare delle procedure e delle relazioni strettamente formali che soddisfino la condizione di identità su un intervallo e possano quindi dar luogo a una teoria generale e universalmente applicabile. Il richiamo a una (implicita) definizione di natura aritmetica serve per fondare una teoria strettamente formale che non ritrova la propria valenza aritmetica che nelle proprie applicazioni particolari.

Una tale interpretazione potrebbe forse venir contestata richiamandosi al fatto che Lagrange presenta, fin dai primi paragrafi della *Théorie*,[43] un teorema che asserisce che per ogni funzione $f(x+\xi)$ il suo sviluppo in serie intera è tale che "è sempre possibile" fissare un valore δ (reale e maggiore di zero) tale che per ogni $|\xi| < \delta$ "un termine qualunque della serie sia maggiore della somma di tutti i termini seguenti",[44] affermando che un tale teorema "debba essere considerato come uno dei principi fondamentali della teoria". La mia risposta a una tale obiezione fa perno su due differenti argomenti. Il primo di essi riguarda la collocazione del teorema in questione nell'edificio della teoria lagrangiana. Alla luce di un'analisi non superficiale, questa si mostra infatti assai diversa da quella che si potrebbe supporre considerando semplicemente la posizione che esso assume nella *Théorie*. Già sottolineando il carattere fondamentale di tale teorema, Lagrange insiste d'altra parte sulle applicazioni del *calcolo* e egli crede opportuno aggiungere nella seconda edi-

---

[41]Cfr. Il prossimo paragrafo III.6.*a*.ε..

[42]Per quanto questo sia perfettamente ovvio dalla lettura dei trattati di Lagrange, vale forse la pena di osservare che in essi le "funzioni analitiche" non sono intese come una classe particolare di funzioni fra altre. L'aggettivo non è qui impiegato che per sottolineare il fatto che il termine "funzione" è inteso come riferito a un'espressione analitica e non a entità specifiche, come grandezze geometriche o meccaniche. Per Lagrange non esistono quindi funzioni non analitiche, a meno che il termine "funzione" non venga inteso in modo del tutto diverso dal suo e del tutto estraneo alla tradizione dell'analisi settecentesca.

[43]Cfr. Lagrange (1797), par. 14, pp. 11-2 e (1813), par. 6, pp. 14-5.

[44]Per una più precisa interpretazione dell'enunciato di tale teorema e della sua dimostrazione cfr. il prossimo paragrafo III.6.*d*.γ..

zione del suo trattato che le difficoltà relative alla dimostrazione che egli ne ha fornito[45] potranno venir sciolte attraverso la considerazione dei risultati generali relativi all'inquadramento del resto. Tale dichiarazione fa d'altra parte eco alla differente posizione assunta dal teorema nelle *Leçons*, in cui esso non è enunciato che nella lezione IX,[46] come conseguenza del teorema del resto, il quale è presentato come uno strumento indispensabile per poter impiegare lo sviluppo di $f(x+\xi)$ "per avere il valore della funzione in certi casi particolari", e come principio di mediazione fra la teoria formale delle funzioni derivate e le sue applicazioni geometriche e meccaniche. Il secondo argomento riguarda il contenuto del teorema in questione.[47] Per quanto molti interpreti abbiano letto quest'ultimo come una dichiarazione di convergenza della serie sviluppo, Lagrange sembra infatti avere perfettamente compreso che la proprietà che esso asserisce, non solo è essenzialmente diversa dalla convergenza della serie, ma non può neppure implicarla, e non può così che presentarsi come un risultato relativo alla valutazione dell'errore compiuto sostituendo una data funzione con una ridotta parziale di ordine stabilito del proprio sviluppo formale: esso ci assicura che è "sempre possibile" scegliere un valore sufficientemente piccolo di ξ affinché tale errore sia minore (in valore assoluto) dell'ultimo addendo considerato.[48]

---

[45]Cfr. ancora il prossimo paragrafo III.6.*d*.γ..

[46]Cfr. Lagrange (1801), pp. 78-9. e (1806a), pp. 105. La prosa di Lagrange è in verità anche in tal caso piuttosto ambigua:

> On a par-là - egli scrive, riferendosi al teorema del resto - une démonstration rigoureuse de cette proposition qu'on s'était contenté de supposer jusqu'ici; savoir, que dans le développement d'une fonction, on peut donner à la variable suivant laquelle est ordonné le développement, une valeur assez petite pour qu'un terme quelconque de la série soit plus grand que la somme de tous ceux qui le suivent [...].

Ciò che non è per nulla chiaro è il ruolo che secondo Lagrange una tale presupposizione implicita avrebbe giocato nell'edificazione della teoria delle funzioni derivate - così come essa è presentata nelle *Leçons* - prima di venire esplicitata nella lezione IX. La mia tesi è che, assunta la legittimità della posizione $f(x+\xi) = \sum_{k=0}^{\infty} A_k \xi^k$, la determinazione dell'algoritmo delle funzioni derivate e delle sue "applicazioni puramente analitiche" sia del tutto estranea al risultato contenuto in tale teorema e non si fondi che sull'equiparabilità dello sviluppo generico, posto in forma opportuna, con gli sviluppi formali di Euler [cfr. su questo punto la prossima sezione III.6.*c*.].

[47]Cfr. *ivi*, p. 66 e p. 88.

[48]Tale lettura è implicitamente contraddetta da J. L. Ovaert [cfr. Ovaert (1976), pp. 181-2], che, dopo aver citato la dimostrazione delle *Leçons* [cfr. il prossimo paragrafo ζ] e aver rilevato in essa una confusione fra asintoticità e convergenza di uno sviluppo, presenta il controesempio costituito dalla serie, divergente per ogni ξ, $\xi - \xi^2 + 2!\xi^3 - 3!\,\xi^4 + \&c.$, che già Lacroix avrebbe sommato formalmente "à l'aide de l'intégrale $e^{x^{-1}} \int_0^x \frac{e^{-t^{-1}}}{t}\,dt$ sans s'apercevoir qu'il s'agit d'un contre-exemple au théorème de Lagrange", cosa che Laguerre non proverà che ottant'anni più tardi. Anche nel caso in cui si voglia sostenere che lo scopo di Lagrange nell'enunciare il proprio teorema fosse stato quello di asserire la convergenza dello sviluppo in serie intera di ogni funzione

Anche indipendentemente dalla risposta all'obiezione considerata, compiere tale distinzione sembra peraltro essenziale per comprendere la struttura interna della teoria di Lagrange. Se la presupposizione iniziale di convergenza permette di assegnare un senso alla nozione di sviluppo indipendente da ogni particolare metodo che permetta di costruire una determinata serie intera a partire da una funzione assegnata, la proprietà asserita dal teorema citato – la quale si riduce in ultima istanza all'asintoticità di uno sviluppo formale - permette di pervenire a una valutazione del resto e regge l'intero complesso delle applicazioni della teoria delle funzioni derivate. Se compiamo tale distinzione lo schema generale dell'argomento di Lagrange può essere ricostruito nei termini che seguono.

Data una qualsiasi funzione incrementata $f(x+\xi)$, in cui x è la variabile indipendente e ξ è un suo incremento indipendente diverso da zero, si assume l'esistenza di una serie della forma generica $\sum_{k=0}^{\infty} A_k \xi^{\alpha_k}$ ($\alpha_k \in Q$, $A_k = A_k(x)$), la quale converga alla funzione $f(x+\xi)$ - posto che ξ appartenga a un disco di diametro indeterminato, ma comunque finito - e possa venir qualificata come lo sviluppo in serie di potenze razionali centrata sul punto $\xi = 0$ della funzione assegnata. Se l'appartenenza di ξ al disco di convergenza permette di stabilire un'identità numerica fra ogni funzione $f(x+\xi)$ e tale sviluppo, tale identità potrà essere formalmente estesa e resa indipendente da ogni

---

$f(x+\xi)$ per $0 < |\xi| < \delta$, l'osservazione di Ovaert risulta tuttavia difficilmente comprensibile. Lacroix non fa infatti che associare (per mezzo di un metodo euleriano fondato sull'impiego delle differenze finite) la serie $1 - 2! + 3! - 4! + \&c.$ a un valore che corrisponde a quello trovato per mezzo dell'identità [cfr. Borel (1928), pp. 54-5]

$$1 - 2! + 3! - 4! + \&c. = \int_0^{\infty} \frac{t\, e^{-t}}{1+t}\, dt$$

che deriva, a sua volta, dal risultato generale di Laguerre [cfr. Laguerre (1879)]:

$$\int_0^{\infty} \frac{e^{-t}}{\xi+t}\, dt = e^{\xi} \int_{\xi}^{\infty} \frac{e^{-t}}{t}\, dt = \cfrac{1}{\xi + 1 - \cfrac{1}{\xi + 3 - \cfrac{4}{\xi + 5 - \cfrac{9}{\xi + 7 + \&c.}}}}$$

Intesa una funzione come una forma analitica semplice, la contraddittorietà fra i risultati di Lacroix e Laguerre-Borel e la convergenza dello sviluppo in serie intera di ogni "funzione" $f(x+\xi)$ per $0 < |\xi| < \delta$ è largamente discutibile. La nozione lagrangiana di funzione come forma analitica semplice rende d'altra parte assai difficile costruire dei controesempi alla presupposta convergenza alla funzione di ogni sviluppo formale valutato su un intervallo opportuno, i quali facciano leva, al contrario, sulla possibilità di esibire funzioni il cui sviluppo formale sia, su opportuni domini, convergente a altre funzioni. Il caso generalmente citato della funzione $f(x) = e^{-x^{-2}}$ non manifesta infatti che una funzione il cui sviluppo si comporta in modo anomalo qualora esso sia centrato su un punto estraneo al dominio di definizione delle funzione (a meno che questa non venga opportunamente prolungata, per mezzo di una procedura non certamente lagrangiana).

condizione riferita al valore dell'incremento. La serie in questione non può tuttavia soddisfare *in generale* (ovvero indipendentemente dalla scelta di opportune assegnazioni di valori alla variabile x) alla condizione di convergenza che la caratterizza che a condizione di essere una serie intera, la quale può così venire ordinata secondo gli esponenti crescenti delle potenze intere di ξ. L'identificazione formale degli sviluppi generici $\sum_{k=0}^{\infty} B_k \xi^k$ e $\sum_{k=0}^{\infty} A_k (\xi+\omega)^k$ ($B_k = B_k(x+\omega)$, $A_k = A_k(x)$; $k = 0, 1, 2,$ &c.)) di due funzioni qualsiasi $f((x+\omega)+\xi)$ e $f(x+(\xi+\omega))$ mostra inoltre - indipendente da ogni altra considerazione - che i coefficienti A_k ($k = 0, 1, 2,$ &c.) dello sviluppo di $f(x+\xi)$ possono essere posti sotto la forma generica di un prodotto $\frac{1}{k!}f^{(k)}(x)$, dove: $f^{(k)}(x) = \Phi[f^{(k-1)}(x)]$, $f^{(0)}(x) = f(x)$ e Φ indica l' "operazione" che conduce da $f(x)$ a $f^{(1)}(x) = A_1$. Indipendentemente dalla considerazione di ogni metodo particolare che possa condurre alla costruzione (individuazione) di uno sviluppo in serie di potenze per una funzione data si può così dimostrare che *ogni* funzione $f(z)$ possiede uno sviluppo in serie intera centrato su un punto generico x del suo intervallo di definizione, $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} (z-x)^k$, il quale è per ipotesi convergente a tale funzione posto che la differenza $z-x$ appartenga a un disco opportuno centrato sullo zero. Tale proprietà caratterizza d'altronde gli stessi sviluppi euleriani definiti formalmente in base alla loro costruibilità per composizione a partire dagli sviluppi associati alle funzioni elementari; la serie intera generica che rappresenta lo sviluppo in serie intera (nel senso di Lagrange) di una qualsiasi funzione assegnata può così essere formalmente identificata con il corrispondente sviluppo euleriano. Tale identificazione riferita alle funzioni elementari permette di stabilire dei particolari algoritmi che conducono da queste funzioni ai successivi coefficienti della serie sviluppo, mentre lo studio dei meccanismi di composizione di generiche serie intere porta a unificare tali algoritmi in un insieme di regole di trasformazione che portano da ogni funzione assegnata $f(x)$ alla funzione $f'(x)$, che costituisce il primo coefficiente del suo sviluppo in serie intera, e corrispondono alle regole del *calcolo*. Quest'ultimo è così interpretato come un'algoritmo che conduce, per mezzo di reiterate applicazioni, da ogni funzione alle successive funzioni derivate che compaiono come fattori nei coefficienti del suo sviluppo in serie intera. L'impiego di tale algoritmo permette di operare sull'identità generica che associa una funzione arbitraria alla ridotta parziale del proprio sviluppo formale completata da un resto[49] indeterminato, per ottenere, tanto

[49] Uno dei problemi interpretativi più complessi comportati dalla *Théorie* e dalle *Leçons* è costituito dalla caratterizzazione precisa dell'oggetto matematico al quale Lagrange si riferisce parlando di "resto" di una serie sviluppo. Egli sembra infatti altalenare fra due punti di vista fra loro essenzialmente diversi: il primo che qualifica il "resto" come la differenza fra una funzione data e una ridotta parziale di ordine stabilito del suo sviluppo formale, il secondo che lo intende invece come la continuazione della serie

una caratterizzazione generale della forma analitica di tale resto (che ne esprima i rapporti con la ridotta parziale associata e con la funzione da cui tale ridotta è generata), che una valutazione numerica di questo, resa possibile per mezzo di un inquadramento entro limiti fissati, determinabili in generale tramite lo studio del comportamento numerico della funzione generatrice e delle sue derivate. Questi ultimi risultati, associati a un'analisi delle condizione di convergenza delle serie particolari, presiedono alle notevoli applicazioni della teoria delle funzioni derivate - la quale è tuttavia, sul piano strettamente analitico, perfettamente estranea a ogni considerazione relativa tanto alla convergenza degli sviluppi considerati che alla valutazione del resto e non si presenta che come una teoria di certe trasformazioni formali.

III. 6. *a*. ε. *La separazione fra "formale" e "numerico"*

Per quanto la mia schematica ricostruzione - che verrà precisata nelle prossime sezioni III.6.*b*. - III.6.*d*. per mezzo di analisi più dettagliate delle dimostrazioni e degli argomenti di Lagrange - non mi pare corrispondere che sotto alcuni aspetti a quella proposta da J. L. Ovaert, essa mi sembra giustificare l'adesione a una delle tesi centrali che questi ha difeso nel suo saggio, parlando di separazione, nella teoria di Lagrange, fra "formale" e "numerico". Tale separazione sembra intendesa da Ovaert in due sensi: in primo luogo essa riguarda l'impianto stesso della teoria, che si sviluppa attraverso la determinazione di un insieme di risultati che riguardano relazioni prettamente formali fra certe funzioni e fra funzioni e serie intere, i quali trovano differenti applicazioni successive grazie al teorema del resto, che costituirebbe un vero e proprio "principio di passaggio dal formale al numerico";[50] in secondo luogo essa è più localmente riferita all'attenzione che Lagrange porterebbe a redigere le proprie dimostrazioni dei risultati di ordine generale senza ricorrere a alcuna sostituzione di valori particolari alle variabili in gioco, ma riferendosi esclusivamente alla forma delle espressioni considerate.[51] Entrambe questi aspetti della separazione fra "formale" e "numerico"

---

sviluppo oltre un ordine dato. Discuterò dettagliatamente il problema nella prossima sezione III.6.*c*..

[50]Cfr. Ovaert (1976), pp. 175-77.

[51]Cfr. *ivi*, p. 173. Secondo Ovaert tale preoccupazione si sarebbe precisata in Lagrange "nel corso degli anni" e sarebbe assai più pressante nelle *Leçons* che nella *Théorie*. Purtroppo Ovaert si riferisce alle *Leçons*, citando un'edizione del 1808 [*sic*] come se questa fosse la sola, mentre è facile rendersi conto che - salvo le parti relative al calcolo delle variazioni - il testo delle *Leçons* resta sostanzialmente immutato fin dalla loro prima edizione avvenuta nel 1801 e risalente a lezioni impartite nel 1799. Se fra la prima edizione della *Théorie* e le *Leçons* vi sono senza dubbio differenze locali anche rilevanti, esse sembrano corrispondere più a una maggiore attenzione verso alcuni aspetti della teoria a dispetto di altri, che a una lenta maturazione avvenuta "nel corso degli anni".

sono tipici dell'analisi settecentesca post-euleriana (e sono stati documentati nei precedenti capitoli della mia dissertazione). Essi sembrano però precisarsi entro la teoria delle funzioni analitiche in una forma nuova.

Per quanto riguarda il primo punto è facile comprendere come - anche messa a parte la tensione che percorre i trattati di Lagrange fra l'ideale di riduzione della quantità alla forma e la necessità di riferirsi implicitamente alla nozione stessa di convergenza per fondare lo stesso trattamento formale degli sviluppi in serie intera[52] - la separazione in questione si presenti assai più drammaticamente entro una teoria che nega la stessa interpretazione del *calcolo* come una teoria di differenze, di limiti o di velocità, riconducendo questo a un puro algoritmo di trasformazioni formali. Se infatti il passaggio dai risultati generali alle loro applicazioni nell'ambito dell'analisi algebrica richiede una ovvia interpretazione di certe lettere come quantità particolari, questo stesso passaggio nell'ambito dell'analisi superiore richiede l'interpretazione dell'algoritmo del *calcolo* come un algoritmo che conduce, a esempio, da ordinate a tangenti o da velocità a accelerazioni. Se questo passaggio è banale qualora tale algoritmo sia inteso come l'algoritmo delle differenze infinitamente piccole o dei limiti di certi rapporti, esso è molto più difficile qualora questo sia inteso come un algoritmo di pure trasformazioni formali. E' in tal senso che il teorema del resto svolge una funzione essenziale nel passaggio dal "formale" al "numerico". Il seguente brano, con il quale Lagrange apre la sua nona lezione "*sur le calcul des fonctions*" mi sembra chiarire perfettamente la situazione:

> Toute fonction $f(x+\xi)$ se développe [...] dans la série $f(x) + \xi f'(x) + \frac{\xi^2}{2} f''(x) + \frac{\xi^3}{3!} f'''(x) + \&c.$, laquelle va naturellement à l'infini, à moins que les fonctions dérivées de $f(x)$ ne deviennent nulles, ce qui a lieu lorsque $f(x)$ est une fonction rationnelle et entière de x.
> Tant que ce développement ne sert qu'à la génération des fonctions dérivées, il est indifférent que la série aille à l'infini ou non [ovvero che sia o meno convergente]; il l'est aussi, lorsqu'on ne considère le développement que comme une simple transformation analytique de la fonction; mais si on veut l'employer pour avoir la valeur de la fonction dans les cas particuliers, comme offrant une expression d'une forme plus simple à la raison de la quantité ξ qui se trouve dégagée de dessous la fonction, alors ne pouvant tenir compte que d'un certain nombre plus ou moins grand de termes, il est important d'avoir un moyen d'evaluer le reste de la série qu'on néglige, ou du moins de trouver des limites de l'erreur qu'on commet en négligeant ce reste.
> La détermination de ces limites est sour-tout d'une grande importance dans l'application de la théorie des fonctions à l'analyse des courbes et à la mécanique, pour pouvoir donner à cette application la rigueur de l'ancienne géométrie [...].[53]

[52]Cfr. i precedenti paragrafi III.6.*a*.α. e III.6.*a*.δ..

[53]Cfr. Lagrange (1801), pp. 65-6 e (1806a), p. 88.

Il secondo aspetto della separazione fra "formale" e "numerico" è presentato da Fraser nei termini seguenti:

> The centrality of the notion of algebraic form in Lagrange's analysis is further reflected in the methods of justification he employs in the *Léçons*. He prefers demonstrations that make no assumption concerning the individual values of the variables in question. An analytical relation may fail at isolated values; a "rigorous" demostration is one that establishes its general, algebraic correctness.[54]

Per quanto Fraser si riferisca qui (come Ovaert[55]) esplicitamente alle *Leçons*, la preoccupazione che egli descrive mi pare conseguire più che da una scelta "stilistica" o da un'attenzione all'omogeneità o alla precisione delle proprie dimostrazioni, da una concezione della matematica, la quale deriva a sua volta, sotto questo aspetto, da una "metafisica" della *generalità* che appare profondamente diversa da quella accettata nelle scienze moderne. La diversa concezione del rapporto fra forma e quantità che contraddistingue l'analisi settecentesca nei confronti di quella moderna, si accompagna e si compenetra qui a una diversa concezione del rapporto fra il generale e il particolare, che a me pare di diretta derivazione aristotelica. Se una tale situazione appare già chiaramente in alcuni passaggi dell'*Introductio*,[56] essa si presenta in Lagrange in modo ancora più esplicito e carico di conseguenze. Per illustrarla mi limiterò alla considerazione di un solo esempio, cui ho già peraltro fatto cenno nel precedente paragrafo III.6.a.δ..

Nel dimostrare che ogni funzione $f(x+\xi)$ è sviluppabile in una serie intera centrata su un punto generico x del suo dominio di definizione, Lagrange fa riferimento alla proprietà di ogni funzione $f(x)$ di mantenere inalterato il numero dei propri radicali e la "loro natura", qualora si operi in essa la sostituzione di $x+\xi$ a x. Tale proprietà, egli specifica, ha tuttavia luogo solo "tant que x et ξ sont des quantités indéterminées".[57] La conclusione cui egli perviene è cosi "générale et rigoreuse tant que x et ξ demeurent indéterminées; mais elle cesserait de l'être, si on donnait à x des valeurs déterminées";[58] in tal caso lo stesso teorema può d'altra parte essere contraddetto: lo sviluppo in serie di potenze di $f(x_0+\xi) = f(\xi)$ può contenere delle potenze frazionarie di ξ. Il modo più naturale per interpretare tale situazione è, dal nostro punto di vista, quello di riformulare il teorema nei termini di una legge valida per ogni valore di x diverso da alcuni valori isolati: ogni funzione $f(x+\xi)$ è tale che per ogni punto x del suo dominio di definizione - salvo che per alcuni punti isolati (o, se si preferisce: salvo che per un insieme numerabile di punti) - essa è sviluppabile in una serie intera centrata sul punto x. Il modo di ragionare di Lagrange mi pare tuttavia mal rispecchiato da una simile formulazione, la quale fa implicitamente riferimento a una

---

[54] Cfr. Fraser (1987), p. 44.

[55] Cfr. la precedente nota (51).

[56] Cfr. il precedente paragrafo III.3.a.γ..

[57] Cfr. Lagrange (1797), p. 7 e (1813), p. 8.

[58] Cfr. *ivi*, pp. 8 e 9.

nozione di variabile come elemento arbitrario di una collezione (piucchenumerabile) di valori e afferma di una proprietà P che tutti gli elementi (valori) di tale collezione, salvo alcuni elementi (valori) isolati, godono di P. Per Lagrange, così come già per Euler, una variabile sembra al contrario essere intesa, in termini analitici, come il *genus* di *ogni quantità*: non come elemento arbitrario di una collezione di *valori* particolari, ma come l'ipostatizzazione universale e concreta della proprietà stessa che accomuna tutte le quantità e fa di esse non delle quantità particolari, ma delle rappresentazioni specifiche di un genere. Ora, è proprio sulle variabili intese in questo secondo senso e sulle loro funzioni che vertono a mio parere i teoremi di Lagrange e in particolare il teorema sullo sviluppo di ogni funzione in serie intera.[59] Un'ipotesi che noi esprimeremmo oggi per mezzo dell'asserzione di forma universale $\forall x P(x)$, la quale sarebbe contraddetta dall'asserzione singolare $P(a)$ è espressa dal punto di vista di Lagrange per mezzo dell'*asserto singolare* $P(x)$, il quale non è per nulla contraddetto dall'asserto, altrettanto singolare, ma di ordine diverso, $P(a)$ e può, anche in presenza di una verifica di quest'ultimo, assumere la qualifica di teorema *generale*. Quest'ultimo non farebbe allora che predicare una proprietà di una sorta di entità ideale e non degli oggetti particolari che cadono sotto di essa. La dimostrazione di un tale teorema assume la forma di un argomento che verte sui caratteri universali di tale entità, presa nella sua natura di entità essenzialmente non determinata sotto ogni altro rispetto, ovvero di *tale entità in quanto tale*. E' proprio tale specificazione: "in quanto tale", che palesa l'origine aristotelica - e non platonica[60] - di un tale punto di vista. Se la scienza fosse puramente scienza delle idee, una tale specificazione non sarebbe infatti necessaria: ogni idea non potrebbe essere null'altro che ciò che è "in quanto tale". Al contrario se la scienza è scienza di tali entità ideali e *quindi*, scienza degli oggetti particolari che cadono sotto di esse, la specificazione è essenziale e serve per chiarire che il riferimento è all'entità ideale e non agli oggetti particolari. Entità ideali e oggetti particolari, pur appartenendo qui a due diversi domini ontologici, mantengono fra loro un rapporto su cui verte il potere esplicativo di una scienza. Tuttavia un enunciato riferito all'entità ideale non è semplicemente una raccolta (una congiunzione) di enunciati riferiti agli oggetti particolari che cadono sotto di essa. Il passaggio dall'una agli altri corrisponde infatti al venir meno della proprietà essenziale che contraddistingue la prima in quanto tale, ovvero la sua radicale indeterminatezza. Ora, se si è d'accordo nel sostenere che ogni entità ideale è un costrutto intellettuale realizzato dall'uomo a fini rappresentativi, si può sostenere che la sua idoneità dipenda dal fatto che ogni oggetto particolare rispecchia in qualche modo le proprietà che la caratterizzano. Così se ci formiamo l'idea di uomo come "bipide implume" e capitiamo di fronte a un mutilo possiamo convincerci dell'inidoneità della

---

[59] Secondo Lacroix (cfr. Lacroix (1797), vol. 1, p. 232) la forma di serie intera dello sviluppo di una qualsiasi funzione di $x+\xi$, "quoique vraie en général, ne sauroit convenir à certaines cas particuliers".
[60] Cfr. la citazione di Chevalier contenuta nel precedente paragrafo III.3.a.γ..

nostra produzione, la quale ci aveva condotti a sostenere che "ogni uomo ha due gambe". Tuttavia le relazioni fra entità ideali e oggetti particolari possono venire intesi in modo diverso e si potrebbe a esempio sostenere che lo zoppo in questione lo è solo *accidentalmente* e non produce quindi alcun controesempio al nostro asserto *generale*. Se torniamo ora al caso della dimostrazione di Lagrange, ci accorgiamo che essa verte su entità ideali assai caratteristiche. Una forma analitica è infatti una rappresentazione di una quantità, la quale possiede delle proprietà che non possono venir rispecchiate da alcuna quantità particolare isolatamente presa. Per realizzare tale rispecchiamento occorre riferirsi alle relazioni che una quantità mantiene con altre quantità. Se assegnamo tuttavia alle quantità dei valori stabiliti ,questa possibilità viene meno: ogni forma si trasforma essa stessa in un valore o in una famiglia di valori in cui non vi è più traccia della forma originaria. Così per essere scienza delle quantità, la teoria delle forme deve essere indipendente da ogni riferimento a valori particolari.

> Lorsqu'on envisage une fonction relativement à une des quantités qui la composent - scrive Lagrange -, on fait abstraction de la valeur de cette quantité, et on ne considère que la manière dont elle entre dans la fonction, c'est-à-dire, dont elle est combinée avec elle-même et avec les autres quantités. Ainsi la fonction est censée demeurer la même, tandis que cette quantité varie d'une manière quelconque.[61]

La determinazione dei valori di certe quantità, ovvero la sostituzione di certi valori a certe variabili, produce così un accidente di cui la scienza delle quantità non può tenere conto. Tali accidenti possono tuttavia essere, per così dire, regolati e rispecchiare certe proprietà della forma originaria. A esempio, una forma radicale indica un'operazione a uscita multipla che è rispecchiata dalla pluralità dei valori in cui essa trasmuta per mezzo di una certa sostituzione. E' proprio su tale proprietà delle relazioni fra forme e valori che verte la dimostrazione di Lagrange. La regolarità degli accidenti prodotti dalla sostituzione è tuttavia tale da manifestarsi qui solo qualora la collezione di valori prodotti dalla sostituzione è esibita in astratto, senza che sia preclusa alcuna ripetizione (in modo che i valori di $\sqrt{x}$ per la sostituzione $x = 0$ siano, a esempio, $-0 = 0$ *e* $+0 = 0$), ovvero considerando ogni esito come un valore in se stesso e non come un determinato valore di una collezione già stabilita. Ciò non è tuttavia possibile quando ciò di cui è questione sono delle relazioni operazionali (e non puramente combinatorie). Così se la pluralità degli esiti di una sostituzione qualsiasi della variabile complessa z nella forma $[\phi(z)]\sqrt[m]{\varphi(z)}$ rispecchia la natura stessa di tale forma, tale rispecchiamento viene immediatamente meno qualora z assuma dei valori tali da rendere nulla o $\phi(z)$ o $\varphi(z)$, ciò che "distrugge il radicale".[62] L'accidente è qui allora caratterizzato da una perdita della capacità di rispecchiamento del carattere *essenziale* della forma da cui è sorto e produce così un caso anomalo. Per

---

[61] Cfr. Lagrange (1801), p. 5 e (1806a), p. 5.

[62] Cfr. il prossimo paragrafo III.6.c.η..

quanto il *teorema generale* assicuri così la sviluppabilità in serie intera di ogni funzione relativamente a un punto generico del suo dominio di definizione, ciò non implica che per alcuni punti particolari le cose non stiano in questo modo. La generalità del teorema indica che esso si riferisce a forme (e non a punti, né arbitrari né particolari), mentre l'esito anomalo di alcune sostituzioni non è in senso stretto che un'eccezione a un *altro* (presunto) *teorema* (o meglio *metateorema*) che asserisce che *ogni* sostituzione di una valore particolare alla variabile principale produce un esito numerico che rispecchi le proprietà espresse dal teorema generale. Così mentre l'asserto di forma singolare $P(x)$ è vero (in quanto riferito alla variabile x intesa come forma generica), l'asserto universale $\forall x\, P(x)$ è falso (in quanto riferito a *tutti* i valori particolari che x può assumere). E' solo quest'ultimo asserto che necessita di una precisazione per trasformarsi in un teorema. Il primo costituisce al contrario, esso stesso, l'enunciato di un teorema perfettamente corretto. E' proprio in tal modo che io credo debbano essere riformulati e intesi i teoremi che costituiscono la componente puramente formale della teoria di Lagrange (precedente a ogni applicazione e indipendente da essa) e in particolare il teorema sullo sviluppo di ogni funzione in serie intera: non come asserti universali condizionati da clausole opportune, ma come asserti singolari riferiti a forme generiche.

Oltre a apparire più consona all'epistemologia di Lagrange, una tale interpretazione conduce a dissolvere, in molte occasioni, la presunta ambiguità fra riferimento al campo reale e riferimento al campo complesso nella trattazione lagrangiana delle funzioni. Intesa come pura forma, una funzione non sembra infatti riferirsi a nessun dominio di valori. E' solo l'applicazione dei teoremi *generali* che richiede la specificazione del riferimento, la quale è peraltro spesso evidente dalla semplice considerazione del contesto. Il solo punto veramente delicato è costituito allora, da questo punto di vista, dal teorema del resto, a cui il ruolo di connessione fra risultati generali e loro applicazioni particolari conferisce una sorta di "natura intermedia" che pone difficili problemi interpretativi.[63]

III. 6. *a*. *ζ*. *Fondazione del calcolo e riunificazione di analisi algebrica e analisi superiore*

Secondo J. L. Ovaert lo scopo di Lagrange, tanto nella *Théorie* che nelle *Leçons*, sarebbe quello di presentare e difendere "una thèse au sense philosophique du terme".[64] Benché il contenuto di tale tesi resti nel saggio di Ovaert largamente imprecisato, sembra chiaro che questi voglia intendere con ciò che lo scopo di Lagrange sia quello di avanzare la proposta di una nuova fondazione del "calcolo differenziale e integrale".[65] Una tale lettura, per quanto generalmente accettata, sembra a me largamente discutibile. In

[63] Affronterò la questione nella prossima sezione III.6.*d*..
[64] Cfr. Ovaert (1976), p. 159.
[65] Cfr. *ivi*.

primo luogo, insistendo sulla novità della "fondazione" di Lagrange e isolandola dal contesto evolutivo dell'analisi settecentesca, essa conduce a trascurare i profondi legami fra la "tesi" che questi difende e la tradizione stessa a cui questa si ispira e impedisce di individuare il carattere essenziale della nuova teoria, la quale fornisce una compiuta integrazione del *calcolo* all'ideale euleriano di una teoria delle forme analitiche e realizza una naturale saldatura fra analisi algebrica e analisi superiore, giungendo a un'organica riunificazione dell'intera conoscenza matematica (meccanica e geometria comprese[66]). In secondo luogo, facendo esplicito riferimento al "calcolo differenziale e integrale", essa cancella il carattere essenziale della proposta di Lagrange, che consiste, più che in una rifondazione di una teoria già data, nella presentazione di una nuova teoria, capace di amplissime applicazioni e retta da regole algoritmiche che sono riconosciute soltanto *a posteriori* come analoghe a quelle del *calcolo*: ciò che è rifondato non è così il calcolo differenziale e integrale - il quale è al contrario eliminato dalla scena matematica - ma il *calcolo*,[67] inteso come puro aggregato algoritmico.

Il nucleo essenziale della tesi di Lagrange consiste a mio avviso in una implicita eliminazione di ogni interpretazione del *calcolo* che faccia ricorso a nozioni di natura extra-analitica e nella proposta di un'interpretazione di questo in quanto teoria di certe trasformazioni formali. Ciò che sembra a questi inaccettabile nelle impostazioni precedenti non è tanto il ricorso a nozioni "oscure" o "imprecise", quali quelle di differenziale, flussione o limite - come spesso è stato sostenuto - ma il fatto che, impiegando tali nozioni, si faccia riferimento a entità in senso stretto come *non analitiche*, si rinvii a concetti in quanto tali estranei al semplice contesto di una teoria generale e astratta delle relazioni formali, fondati, in ultima istanza, sulla considerazione di proprietà specifiche di certe particolari grandezze o collezioni di grandezze. Proprio questa intrinseca non generalità sembra a Lagrange un'ostacolo insormontabile sulla strada di una effettiva unificazione della conoscenza matematica, unificazione che non può certo prescindere dalla riunificazione fra analisi algebrica e analisi superiore. La teoria delle funzioni analitiche si impone così come il solo *mezzo* adeguato per pervenire a un tale obiettivo, obiettivo che costituisce a mio parere lo scopo ultimo a cui gli sforzi di Lagrange sono indirizzati.

Intesa in tal senso, la teoria lagrangiana non può neppure qualificarsi, come spesso è stato proposto, come una rifondazione del *calcolo* basata su una preventiva dimostrazione del "teorema" di Taylor (genericamente indicata in molte occasioni come "algebrica"). Il contenuto essenziale di tale teorema consiste infatti, a seconda delle interpretazioni, o nella caratteriz-

[66] Nel presente capitolo non considererò che la teoria generale delle funzioni analitiche, intesa come teoria di certe trasformazioni formali, trascurando ogni sua possibile applicazione e mi limiterò quindi alla prima parte della *Théorie*, lasciando a altre analisi la parte successiva, che Lagrange dedica a una riformulazione in termini di funzioni analitiche dei principi fondamentali della tanto teoria delle curve e delle superfici che della meccanica dei sistemi discreti [per ciò che riguarda la meccanica mi permetto d'altra parte di rinviare a Panza (1990)].

[67] Cfr. il precedente paragrafo II.1. η..

zazione dei successivi coefficienti dello sviluppo in serie intera di ogni funzione come rapporti differenziali, flussioni o limiti di certe differenze o nell'esibizione dell'algoritmo particolare che permette di pervenire alla determinazione tali coefficienti, intesi come tali.[68] Nel primo senso tale "teorema" non ha alcun posto nella nuova teoria, la quale non dispone per principio delle nozioni necessarie per enunciarlo. Nel secondo, esso è una conseguenza della determinazione dell'algoritmo delle funzioni derivate e non certo un suo presupposto. La fondazione del *calcolo* proposta da Lagrange è quindi del tutto indipendente dal "teorema" di Taylor. E' anzi proprio l'eliminazione di tale teorema - inteso nel primo dei due sensi precedenti - o una sua reinterpretazione in quanto conseguenza della determinazione degli sviluppi delle funzioni elementari, che costituisce la chiave attraverso la quale Lagrange perviene a coronare il programma di Euler, grazie a una riunificazione non artificiosa di analisi algebrica e analisi superiore.[69]

---

[68]La prima interpretazione corrisponde a esempio a una dimostrazione, come quella dello stesso Taylor, fondata su un passaggio all'infinitamente piccolo (o al limite), a partire da una formula di interpolazione; la seconda consegue invece alla classica dimostrazione di Newton-Stirling-Maclaurin, la quale mostra come l'impiego di un certo algoritmo definito sulle funzioni algebriche permetta di determinare univocamente i coefficienti di uno sviluppo generico applicato a una funzione qualsiasi [cfr. il precedente capitolo III.2.].

[69]Ciò non significa tuttavia che la dimostrazione di Taylor non possa essere reinterpretata entro il contesto della teoria delle funzioni analitiche. Una tale reinterpretazione è fornita da Lagrange nella XIX lezione della prima edizione delle *Leçons* [cfr. Lagrange (1801), p. 257; cfr. anche (1806a), lez. XVIII, p. 313], nel quadro di una discussione della proposta di fondazione del *calcolo* in quanto teoria dei limiti di opportuni rapporti fra differenze finite. L'argomento prende avvio dalla presentazione di una dimostrazione classica del "teorema" di Taylor: data la (22) del precedente paragrafo III.2.*b*.β., si tratta di porre la posizione $n\Delta x = \xi$, di sostituire le differenze finite con le corrispondenti differenze infinitamente piccole e di equiparare infine fra loro le quantità ξ, $(\xi - dx)$, $(\xi - 2dx)$, &c.. Tale equiparazione, osserva Lagrange, per quanto necessaria per la correttezza del risultato, non è tuttavia accettabile [essa non deriva da nessuna regola di trasformazione formale] e non può neppure essere intesa come un'omissione di quantità infinitesime [cfr. *ivi*]:

> [...] comme les coefficients de Δx dans les facteurs successifs [...] vont en augmentant continuellement, il est visible que, quelque petit que soit Δx, il se trouvera à la fin multiplié par un coefficient si grand, que sa valeur pourra devenir comparable à celle de ξ [...].

Per evitare una simile difficoltà, dopo aver operato la sostituzione $n\Delta x = \xi$, occorre porre nella (22) [par. III.2.*b*.β.],, la differenza Δx uguale a zero e determinare i successivi rapporti indeterminati del tipo 0/0 che scaturiscono da tale posizione, per mezzo della regola seguente (che costituisce evidentemente la versione lagrangiana della regola di l'Hôpital [cfr. il prossimo paragrafo III.6.*c*.η.]: se, data una certa sostituzione (o assegnazione di valore), un rapporto determinato fra due funzioni della stessa variabile si trasforma nel rapporto indeterminato 0/0, il suo valore sarà quello del rapporto fra le funzioni derivate nelle quali si operi la stessa sostituzione (assegnazione di valore). Essendo infatti, per ogni ν ($\nu \in N$), $\Delta^{\nu}y(x) = \sum_{k=0}^{\nu} (-)^{k} \binom{\nu}{k} y\left[x + (\nu - k)\Delta x\right]$ si avrà, considerando le successive differenze finite come delle nuove funzioni di Δx, prendendo le derivate rispetto a tale variabile e ricordando che $f'_x(x+z) = f'_z(x+z)$:

E' in un tale quadro che devono leggersi a mio avviso le brevi considerazioni "storiche" con le quali Lagrange apre la *Théorie*, le quali, lungi dal mettere in dubbio la correttezza o la legittimità interna delle diverse proposte fondazionali, insistono sulla loro inidoneità relativamente all'ideale di una naturale organizzazione genealogica del sapere matematico:

> [...] *Leibnitz*, les *Bernoulli*, *l'Hopital* &c. [...] contens d'arriver par les procédés de ce calcul [il calcolo differenziale] d'une manière prompte et sûre à des résultats exacts, [...] ne se sont point occupés d'en démontrer les principes. [...]
> [L'idea di intendere le] quantités qui entrent réellement dans le calcul [...] [come] les limites des rapports des différences finies ou indefinies [...] quoique juste en elle-même, n'est pas assez claire pour servir de principe à une science dont la certitude doit être fondée sur l'évidence.[70] [...]

$$\left[\frac{\Delta y(x)}{\Delta x}\right]_{\Delta x=0} = \left[\frac{y'_{\Delta x}(x+\Delta x)}{1}\right]_{\Delta x=0} = y'_x(x)$$

$$\left[\frac{\Delta^2 y(x)}{\Delta x^2}\right]_{\Delta x=0} = \left[\frac{y'_{\Delta x}(x+2\Delta x) - y'_{\Delta x}(x+\Delta x)}{\Delta x}\right]_{\Delta x=0} = \left[\frac{2y''_{\Delta x}(x+2\Delta x) - y''_{\Delta x}(x+\Delta x)}{1}\right]_{\Delta x=0} = y''_x(x)$$

&c.

che, sostituendo, permette ovviamente di trarre la (57) del precedente paragrafo III.4.*b*.β. (per $u=y$). Una tale dimostrazione non fornisce tuttavia che una prova viziosa di quest'ultima formula, dalla cui considerazione derivano ovviamente le regole algoritmiche impiegate nel corso della prova. Tutto ciò che Lagrange dimostra è così che, date tali regole, la (22) [par. III.2.*b*.β.] implica la (57) [par. III.4.*b*. β.], la quale non può peraltro essere trasformata in una versione del "teorema" di Taylor nei termini della teoria delle funzioni derivate, che una volta che il confronto con gli sviluppi di Euler abbia determinato compiutamente l'algoritmo di tali funzioni. L'interesse che Lagrange assegna alla propria dimostrazione è d'altra parte tale da essere del tutto compatibile con una simile limitazione [cfr. la prossima nota (70)].

[70] Il giudizio di Lagrange sulla fondazione del *calcolo* per mezzo della teoria dei limiti è largamente precisato nelle *Leçons* [cfr. Lagrange (1801), lez. XIX, pp. 242-63 e (1806a), lez. XVIII, pp. 291-326], che riportano il testo dell'ultima lezione che questi pronunciò all'*Ecole Polytechnique* nel 1799 [cfr. l'*avertissement* che precede la ristampa della prima edizione delle *Leçons*, nel XII *chaier* del *Journal de l'Ecole Polytechnique*, p. 1: la nota di Serret nel vol. X delle *Œuvres* di Lagrange [cfr. Lagrange (1867-92), vol. 10, p. 5] è a questo proposito errata (cfr. la precedente nota (2))].

> [...] l'analogie qu'on a cru pouvoir établir - scrive Lagrange [cfr. Lagrange (1801), p. 243 e (1806a), p. 292] - entre le calcul aux différences infiniment petites et le calcul aux différences finies, est plus apparente que réelle [...]; car, dans celui-ci, on considère les différens termes de la progression comme représentés par une même fonction de quantités différentes d'un terme à l'autre, et les équations aux différences finies ne sont que des équations entre ces mêmes fonctions: au lieu que les équations différentielles, ou aux différences infiniment petites, sont essentiellement entre des fonctions différentes de la même variable, mais dérivées les unes des autres par des règles fixes et uniformes [...].
> Ainsi le calcul qu'on a nommé *aux différences finies*, n'est proprement que le calcul des suites, et ne peut être assimilé au calcul différentiel qui est essentiellement le calcul des fonctions dérivées.

Lagrange utilizza qui chiaramente [secondo un uso ancora in voga fra i matematici, ma che gli storici non dovrebbero permettersi] il termine "calcolo differenziale" e i suoi derivati per riferirsi al *calcolo* e agli oggetti algoritmici che occorrono in esso. La sua tesi è, così, che l'interpretazione fornita entro la teoria delle funzioni analitiche svela

[La compensazione degli errori] est ce qu'on peut faire voir aisément dans des exemples, mais dont il serait peut-être difficile de donner une démonstration générale.

[...] *la méthode des fluxions* [...] s'accorde pour le fond et pour les opérations, avec le calcul différentiel, et n'en diffère que par la métaphysique qui paraît en effet plus claire, parce que tout le monde a ou croit avoir une idée de la vîtesse. Mais, d'une côté, introduire le mouvement dans un calcul qui n'a que des quantités algébriques pour objet, c'est y introduire une idée étrangère, et qui oblige à regarder ces quantités comme des lignes parcourues par un mobile; de l'autre, il faut avouer qu'on n'a pas même une idée bien nette de ce que c'est que la vîtesse d'un point à chaque instant, lorsque cette vîtesse est variable; et on peut voir par le savant Traité des fluxions de *Maclaurin*, combien il est difficile de démontrer rigoureusement la méthode des fluxions, et combien d'artifices particuliers il faut employer pour démontrer les différentes parties de cette méthode.

[...] [La] méthode purement analytique [di Landen[71]] [...] évite à la vérité les infiniment petits, et les quantités évanouissantes; mais les procédés et les applications du calcul sont embarrassans et peu naturels[...].[72]

---

la "vera" natura (la "vera metafisica" nel senso di d'Alembert) del *calcolo* indicandone l'algoritmo come un canone che dirige un opportuno passaggio da funzioni a funzioni. Così inteso, il *calcolo* è allora strutturalmente diverso dal calcolo delle differenze finite che studia invece delle relazioni esistenti fra diversi *valori* della *medesima* funzione.

[...] dans le passage supposé du fini à l'infiniment petit - egli continua [*ivi*, p. 251 e p. 304] -, les fonctions changent réellement de nature, [...] $\frac{dx}{dy}$ qu'on emploie dans le calcul différentiel, est essentiellement une fonction différente de la fonction y, tandis que la différence dx a une valeur quelconque, aussi petite qu'on voudra, cette quantité n'est que la différence de deux fonctions de la même forme [diremmo meglio: di due valori della stessa funzione]; d'où l'on voit que si le passage du fini à l'infiniment petit peut être admis comme moyen mécanique de calcul, il ne peut servir à faire connaître la nature des équations différentielles, qui consiste en ce qu'elles donnent des rapports entre les fonctions primitives et leurs dérivées.

Il presunto passaggio dal finito all'infinitamente piccolo non è così che una rappresentazione metaforica di un passaggio da funzione a funzione, il quale - ben più legittimamente del primo - si presenta come un "salto" che "rompe la legge di continuità" [cfr. *ivi*, p. 244 e p. 293]:

Je ne disconviens pas qu'on puisse, de cette manière [passando agli infinitamente piccoli], démontrer la légitimité des résultats du calcul différentiel [cfr. *sopra*]; mais, quoique cette marche paraisse directe et naturelle, le passage du fini à l'infini exige toujours une espèce de saut, plus ou moins forcé, qui rompt la loi de continuité, et change la forme des fonctions.

E' per indicare la natura di tale passaggio da funzione a funzione che Lagrange prende in considerazione la dimostrazione proposta da Taylor per il proprio "teorema" [cfr. la precedente nota (69)], nella cui riformulazione il passaggio per "lo stato 0/0" indica in effetti "un cambiamento di funzione". Il nucleo del programma di Lagrange è proprio qui: laddove i suoi predecessori vedevano un procedimento algoritmico che permette il passaggio da certe quantità caratterizzate dalla loro natura particolare (quantità finite) a altre quantità anch'esse caratterizzate dalla loro natura particolare (quantità infinitamente piccole), questi vede una trasformazione meramente formale, un passaggio da forma a forma, che non è altro che il passaggio da una rappresentazione di una quantità perfettamente generica a un'altra rappresentazione di una quantità perfettamente generica.

[71] Cfr. Landen, (1758) e (1764).

[72] Cfr. Lagrange (1797), pp. 2-4 e (1813), pp. 3-4. Qualche ulteriore osservazione storica è presentata da Lagrange nella parte finale della XVIII lezione della seconda edizione delle *Leçons* (la quale non compare nella prima edizione) [cfr. Lagrange (1806a), pp. 321-26].

Per quanto riguarda le origini della propria proposta, Lagrange cita, oltre la propria memoria del 1772 e il manoscritto di Arbogast del 1789, anche l'erronea dimostrazione di Newton della proposizione X del secondo libro dei *Principia* nella loro prima edizione,[73] nella quale - pur compiendo un errore che lo stesso Lagrange mostrerà essere indipendente dall'impiego del "metodo delle serie"[74] - sarebbe avanzatae l'idea di risolvere un problema meccanico (data la traiettoria percorsa da un corpo dotato di una certa velocità iniziale in un mezzo resistente, determinare la resistenza puntuale del mezzo) tramite la considerazione di opportune serie intere i cui coefficienti rappresentano determinate quantità geometriche o meccaniche.[75] Per quanto l'effettiva cogenza di un tale riferimento relativamente alla proposta matematica contenuta nella teoria delle funzioni analitiche sia ampiamente discutibile, l'esplicito richiamo a Newton - rafforzato da un'analisi serrata della sua dimostrazione e da una riformulazione di questa nel quadro della nuova teoria - è a mio avviso assai significativo e indica la consapevolezza di un debito intellettuale profondo che riguarda, più che una singola dimostrazione, la concezione stessa dell'analisi.[76]

III. 6. *b*.
SVILUPPO IN SERIE INTERA DI UNA FUNZIONI QUALSIASI

III. 6. *b*. α. *Obiettivi e struttura dell'argomento di Lagrange*

La teoria delle funzioni analitiche di Lagrange è una teoria generale dei rapporti fra una funzione data $y = f(x)$ - che è detta "primitiva" - e le funzioni che intervengono nello sviluppo in serie intera di $f(x+\xi)$ secondo le potenze di ξ - che sono dette "derivate" della funzione assegnata. Il presupposto su cui si fonda tale teoria e che la funzione incrementata $f(x+\xi)$ possa essere associata a una serie di potenze frazionarie dell'incremento ξ secondo l'identità:

$$(2) \qquad f(x+\xi) = f(x) + p_1\xi^{\alpha_1} + p_2\xi^{\alpha_2} + p_3\xi^{\alpha_3} + \&c. \qquad [\alpha_k \in Q,\ k = 1, 2, \ldots]$$

Data la (2) Lagrange dimostra che tale identità non può aver luogo in generale che nel caso in cui gli esponenti α_k siano dei numeri naturali, i quali

[73]Cfr. Newton (1687), pp. 260-69.

[74]Cfr. Lagrange (1797), pp. 241-51 e (1813), parte III, cap. IV, pp. 334-49).

[75]In realtà Newton non ricorre all'impiego di opportune serie intere che per rappresentare analiticamente una soluzione già raggiunta in termini geometrici. Per un'analisi della dimostrazione di Newton e della sua correzione proposta da Lagrange nella *Théorie* mi permetto di rinviare a Panza (1988).

[76]Cfr. Panza (1989), capp. 3 e 6.

possono venire ordinati in una successione crescente. Il problema che egli si pone è allora quello di determinare le relazioni algoritmiche che intercorrono fra la funzione f(x) e le successive funzioni p_1, p_2, p_3, &c. della stessa variabile. Nel corso della propria dimostrazione Lagrange fa delle tacite assunzioni relative alle proprietà della relazione simboleggiata nella (2) per mezzo del segno di identità, la quale non è tuttavia mai compiutamente caratterizzata;[77] egli dice che la serie che costituisce il secondo membro di tale identità è costruibile a partire dalla stessa funzione f($x+\xi$) tramite l'impiego di "operazioni algebriche"[78] e presuppone implicitamente che tale costruzione sia univoca.

Per quanto il punto di vista di Lagrange sia esplicitamente formale, sembra difficile interpretare la (2) come una qualsiasi associazione formale, semplicemente caratterizzata dalle regole costruttive dei coefficienti successivi dello sviluppo. Una tale interpretazione non è infatti possibile che a condizione di conoscere *a priori* le relazioni algoritmiche che intercorrono fra la primitiva f(x) e i coefficienti in questione. La relazione espressa dalla (2) deve così venir caratterizzata in altro modo, indicando la proprietà che la serie deve possedere (indipendentemente dal processo che conduce alla sua costruzione) per poter essere associata alla funzione f($x+\xi$) secondo tale relazione. Il problema sarà allora quello di trarre da tali proprietà (che possono venire trasposte in proprietà della relazione stessa) le leggi costruttive che permettono il passaggio da f(x) alle p_k (k = 1, 2, ...). Il modo apparentemente più semplice per interpretare la (2), il quale sia compatibile con i diversi passaggi della dimostrazione di Lagrange, è di caratterizzare la serie in base alla sua proprietà di convergere alla funzione f($x+\xi$) su un disco centrato sul punto $\xi = 0$ e con diametro δ, *a priori* non (ancora) determinato, ma comunque finito. Se, parlando di "operazioni algebriche", egli si riferisce ai procedimenti euleriani di sviluppo, fondati su opportune estensioni delle legge dell'algebra (oltre che su opportuni artifici di natura particolare[79]), Lagrange non sembra intendere tali procedimenti che come un mezzo atto a pervenire alla costruzione di una serie che è univocamente caratterizzata *a priori* relativamente a essi dalla proprietà di convergenza alla funzione. La *démarche* che egli prospetta è quindi contrassegnata da una distinzione fra caratterizzazione della serie sviluppo - determinazione delle condizioni cui essa deve sottostare per essere intesa come uno sviluppo di f($x+\xi$) - e individuazione di

---

[77]Nella seconda edizione della *Théorie* Lagrange si esprime come segue [cfr. Lagrange (1813), p. 2]:

> En général, quelle que soit la fonction primitive, algébrique ou non, elle peut toujours être developpée ou censée developpée de la même manière, et donner ainsi naissance à des fonctions dérivées.

L'ambiguità di una tale presunta chiarificazione è assolutamente sintomatica della mancanza di chiarezza sull'interpretazione che deve essere assegnata alla (2).

[78]Cfr. Lagrange (1801), p. 8 e (1806a), p. 8.

[79]Mi riferisco ovviamente alla determinazione dello sviluppo delle funzioni trascendenti elementari su cui cfr. la precedente sezione III.3.*c*..

tale serie.[80] I procedimenti euleriani non presiedono che all'individuazione della serie. Il compito di dimostrarne *a priori* e in termini generali l'esistenza e la forma è assegnato a un argomento indipendente da essi che verrà analizzato nel corso della presente sezione.

Interpretato in tal modo, l'argomento di Lagrange perde ogni possibilità di giustificare l'unicità dello sviluppo richiamandosi all'univocità dei procedimenti costruttivi degli sviluppi delle funzioni elementari (*ivi* compresa la potenza del binomio) e alla proprietà di conservazione dell'unicità propria delle leggi di composizione di serie intere.[81] Una tale unicità è tuttavia richiesta come condizione per poter comparare la forma generica dello sviluppo con i diversi sviluppi euleriani, identificando le funzioni p_k (k = 1, 2, ...) con i successivi coefficienti di questi ultimi e traendo da qui l'algoritmo delle funzioni derivate. Venuta meno tale possibilità, Lagrange non sembra tuttavia intenzionato a cercare una dimostrazione alternativa, la quale potrebbe a esempio essere fornita dalla considerazione di due operatori qualsiasi che godano delle sole proprietà necessarie a rendere possibile la determinazione dei coefficienti dell'identità generica

(3) $f(x+\xi) = f(x) + p_1\xi + p_2\xi^2 + p_3\xi^3 + \&c.$

intesa come una opportuna specificazione della (2).[82]

---

[80]Tale separazione sembra essere considerata da Lagrange (anche indipendentemente dalla specifica interpretazione della (2) da cui essa è resa in particolare possibile) come una condizione di fondatezza ("non gratuità") delle conclusioni raggiunte.

Mais pour ne rien avancer gratuitement - egli scrive [cfr. Lagrange (1797), p. 7 e (1813), p. 8] -, nous commencerons par examiner la forme même de la série qui doit représenter le développement de toute fonction $f(x)$, lorsqu'on y substitue $x+\xi$ à la place de ξ, et que nous avons supposée ne devoir contenir que des puissances entières et positives de ξ.

Cette supposition se vérifie en effet par le développement des différentes fonctions connues; mais personne, que je sache, n'a cherché à la démontrer *a priori* [...].

[81]Si osservi che per quanto Euler faccia amplissimo impiego - tanto nella costruzione degli sviluppi delle funzioni elementari, che nella loro composizione - del metodo dei coefficienti indeterminati, il quale non è che una trasposizione algoritmica dell'unicità, i suoi argomenti non divengono per questo circolari, una volta che si definisca lo sviluppo semplicemente come l'esito di una costruzione regolata.

[82]Considerati due operatori Φ e Ψ che godono delle proprietà seguenti

$$\text{i) } u = v \Rightarrow \Phi(u) = \Phi(v)\,; \quad u = v \Rightarrow \Psi(u) = \Psi(v)$$

$$\text{ii) } \Phi(u + v + \&c.) = \Phi(u) + \Phi(v) + \&c.\,; \quad \Psi(u + v + \&c.) = \Psi(u) + \Psi(v) + \&c.$$

$$\text{iii) } \Phi\left(K\xi^n\right) = K\,[\varphi(n)]\,\xi^{n-1},\ \varphi(0) = 0\,; \quad \Psi\left(K\xi^n\right) = K\,[\psi(n)]\,\xi^{n-1},\ \psi(0) = 0 \qquad [n \in N]$$

(con K un coefficiente indipendente da ξ) si avrà rispettivamente, presupponendo la (3) e ripetendo relativamente a tali operatori la classica dimostrazione di Newton-Stirling-Maclaurin del "teorema" di Taylor [cfr. il precedente capitolo III.2.]:

$$\text{i) } f(x+\xi) = f(x) + \frac{\Phi[f(x)]}{\varphi(1)}\xi + \frac{\Phi^2[f(x)]}{[\varphi(2)]\cdot[\varphi(1)]}\xi^2 + \frac{\Phi^3[f(x)]}{[\varphi(3)]\cdot[\varphi(2)]\cdot[\varphi(1)]}\xi^3 + \&c.$$

$$\text{ii) } f(x+\xi) = f(x) + \frac{\Psi[f(x)]}{\psi(1)}\xi + \frac{\Psi^2[f(x)]}{[\psi(2)]\cdot[\psi(1)]}\xi^2 + \frac{\Psi^3[f(x)]}{[\psi(3)]\cdot[\psi(2)]\cdot[\psi(1)]}\xi^3 + \&c.$$

Egli assune al contrario, indipendentemente da ogni giustificazione, l'applicabilità del metodo dei coefficienti indeterminati e cerca, per mezzo di esso, e a partire dalla (3), di caratterizzare compiutamente sul piano formale l'operatore di sviluppo, la cui unicità è quindi supposta.[83]

III. 6. *b*. β. *La dimostrazione del carattere intero della serie sviluppo*

Ciò che Lagrange deve quindi fare in primo luogo è giustificare il passaggio dalla (2) alla (3). Nella prima edizione della *Théorie* egli si limita a dimostrare che gli esponenti α_k $(k = 1, 2, ...)$ non possono in generale[84] essere frazionari, mentre nelle *Leçons* e nella seconda edizione della *Théorie* aggiunge un ulteriore argomento contro la possibilità che essi siano negativi (argomento che è d'altra parte implicito in alcuni passaggi successivi della stessa prima edizione[85]). Ecco il primo di tali argomenti:

> [...] il est clair que les radicaux de ξ ne pourraient venir que des radicaux renfermés dans la fonction primitive $f(x)$, et il est clair en même temps que la substitution de $x+\xi$, au lieu de x, ne pourrait ni augmenter ni diminuer le nombre de ces radicaux ni en changer la nature, tant que x et ξ sont des quantités indéterminées. D'un autre côté, on sait par la théorie des équations, que tout radical a autant de valeurs différentes qu'il y a d'unités dans son exposant, et que toute fonction irrationnelle a par conséquent autant de valeurs différentes qu'on peut faire de combinaisons des différentes valeurs des radicaux qu'elle renferme. Donc si le développement de la fonction $f(x+\xi)$ pouvait contenir un terme de la forme $p_\nu \xi^{m/n}$, la fonction $f(x)$ serait nécessairement irrationnelle, et aurait par

---

Sostituendo nei coefficienti di (i) f(x) con lo sviluppo (ii) per la posizione $\xi = 0$ si avrà allora:

$$\text{i)}\quad \frac{\Phi[f(x)]}{\varphi(1)} = \frac{1}{\varphi(1)}\left[\Phi\left(f(x)\right) + \Phi\left(\frac{\Psi[f(x)]}{\psi(1)}\xi\right) + \Phi\left(\frac{\Psi^2[f(x)]}{[\psi(2)]\cdot[\psi(1)]}\xi^2\right) + \&c.\right]_{\xi=0} = \frac{\Psi[f(x)]}{\psi(1)}$$

$$\text{ii)}\quad \frac{\Phi^2[f(x)]}{[\varphi(2)]\cdot[\varphi(1)]} = \frac{1}{[\varphi(2)]\cdot[\varphi(1)]}\left[\Phi^2\left(f(x)\right) + \Phi^2\left(\frac{\Psi[f(x)]}{\psi(1)}\xi\right) + \Phi^2\left(\frac{\Psi^2[f(x)]}{[\psi(2)]\cdot[\psi(1)]}\xi^2\right) + \&c.\right]_{\xi=0}$$

$$= \frac{\Psi^2[f(x)]}{[\psi(2)]\cdot[\psi(1)]}$$

&c.

Se i due operatori sono supposti tali da fornire un esito univoco, qualora essi vengano applicati a una funzione qualsiasi, ciò permette di concludere a favore dell'unicità dello sviluppo, rendendo possibile l'applicazione del metodo dei coefficienti indeterminati.

[83] L'argomento di Lagrange può quindi ricostruirsi in modo schematico nei termini seguenti. Assunta la (2) (intesa come ho chiarito più sopra e riferita a una funzione qualsiasi), si dimostra che essa non può in generale aver luogo che sotto la forma della (3) e si assume che per ogni funzione $f(x)$ esista una sola collezione di funzioni associate $\{p_1, p_2, p_3, ...\}$ che la soddisfino e la cui legge di costruzione formale può essere compiutamente determinata in base al confronto fra la (3) e gli sviluppi euleriani e all'applicazione del metodo dei coefficienti indeterminati.

[84] Cfr. il precedente paragrafo III.6.*a*.ε..

[85] Cfr. a esempio l'inizio del paragrafo 11 [Lagrange (1797), p. 8].

conséquent un certain nombre de valeurs différentes, qui serait le même pour la fonction $f(x+\xi)$, ainsi que pour son développement. Mais ce développement étant représenté par la série $f(x) + p_1 \xi + p_2 \xi^2 + \&c. + p_\nu \xi^{m/n} + \&c.$, chaque valeur de $f(x)$ se combinerait avec chacune des n valeurs du radical $\sqrt[n]{\xi^m}$; de sorte que la fonction $f(x+\xi)$ développée, aurait plus de valeurs différentes que la même fonction non développée, ce qui est absurde.

Cette démonstration est générale et rigoureuse tant que x et ξ demeurent indéterminées; mais elle cesserait de l'être, si on donnait à x des valeurs déterminées; car il serait possible que ces valeurs détruisissent quelques radicaux dans $f(x)$, qui pourrait néanmoins subsister dans $f(x+\xi)$.[86]

Ecco invece il secondo argomento:

[...] si parmi les termes de ce développement [quello indicato dalla (2)], il y en avait un de la forme $\frac{p_\mu}{\xi^m}$, m étant un nombre entier positif, en faisant $\xi = 0$, ce terme deviendrait infini; donc la fonction $f(x+\xi)$ devrait devenir infinie lorsque $\xi = 0$; par conséquent il faudrait que $f(x)$ devînt infinie, ce qui ne peut avoir lieu que pour des valeurs particulières de x.[87]

La prima osservazione che vale la pena di fare a fronte di un tale argomento riguarda la sua forma logica, che lo qualifica come una dimostrazione per assurdo fondata sulla tautologia proposizionale $A \Rightarrow [(\neg B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow B]$. Assunta la (2) - che potremmo indicare come A - Lagrange mostra che se gli esponenti non sono naturali - ciò che potremmo indicare con $\neg B$ - allora A è, (in generale) falsa e da qui conclude che gli esponenti devono (in generale) essere naturali.

Se accettiamo come legittima una dimostrazione per assurdo, fondata in ultima istanza sul *tertium non datur*, non possiamo avanzare alcun dubbio su tale dimostrazione, il quale non riguardi la correttezza della prova che permette di asserire l'implicazione $\neg B \Rightarrow \neg A$. E' nel corso di tale prova che Lagrange introduce la precisazione relativa all'indeterminatezza di x, che si presenta nella (2) come il centro dello sviluppo. La conclusione asserisce così che se il centro dello sviluppo resta indeterminato,[88] allora una *qualsïasi* funzione è sviluppabile in una serie intera. Se traduciamo tale conclusione in un linguaggio più compatibile con i moderni punti di vista matematici, essa asserisce che *per ogni* funzione $f(z)$ e *per ogni* punto x del suo dominio di definizione, *salvo che per alcuni* punti isolati, *esiste* una serie intera ordinata secondo le potenze della differenza $z-x$ che fornisce lo sviluppo della funzione $f(z)$. Accettando l'interpretazione proposta per la (2) si dovrà allora affermare che *per ogni* funzione $f(z)$ e *per ogni* punto x del suo dominio di definizione, *salvo che per alcuni* punti isolati, *esiste* una serie intera ordinata secondo le potenze della differenza $z-x$ che converge a $f(z)$ su un disco di

[86]Cfr. Lagrange (1797), pp. 7-8 e (1813), pp. 8-9; cfr. anche (1801), p. 8-9 e (1806a), pp. 9-10.

[87]Cfr. Lagrange (1813), p. 9; cfr. anche (1801), p. 9 e (1806a), p. 10.

[88]Cfr. il precedente paragrafo III.6.a.ε..

centro x e raggio positivo. Fatta salva la clausola che comporta l'esclusione di alcun punti isolati, una tale conclusione è strettamente più forte della presupposizione utilizzata da Newton nel 1692 per dimostrare la propria versione del "teorema" di Taylor,[89] la quale asseriva che *per ogni* funzione f(z) e *per ogni* punto z del suo dominio di definizione *esiste* un punto x e uno sviluppo in serie intera ordinata secondo le potenze della differenza z-x che converge a f(z) su un disco di centro x e raggio finito, comprendente il punto z. Mentre Newton non sembra infatti fissare il centro dello sviluppo, il punto chiave della conclusione di Lagrange consiste in una quantificazione universale che verte - oltre che sulla funzione f(z) - anche sul centro dello sviluppo, che risulta quindi fissato *a priori* rispetto alla scelta di z. Se analizziamo la dimostrazione che questi fornisce ci accorgiamo inoltre assai facilmente che essa non contiene alcun argomento a favore di una generalizzazione tanto forte, la quale è piuttosto ereditata dalla supposizione della (2) e dalla sua interpretazione intesa. Al contrario essa si presenta sotto una forma tale da rendere necessaria l'esclusione di alcuni punti isolati dal dominio del quantificatore universale riferito a x, ciò che diminuisce la forza della generalizzazione e permette di giungere a una conclusione che, per quanto strutturalmente differente da quella di Newton, si pone come questa al riparo da facili controesempi.

Per quanto le "eccezioni" a cui Lagrange sembra pensare riguardino la definibilità in certi punti isolati delle funzioni coefficienti[90] - piuttosto che la

---

[89]Cfr. i precedenti paragrafi III.2.a.δ. e II.2-B.δ..

[90]Un esempio un poco più sofisticato di quello presentato nella precedente nota (40) e che mostra assai bene il genere di situazioni dalle quali Lagrange vuole porsi al riparo è dato dalla funzione $f(z) = e^{\sqrt{z}}$, il cui sviluppo euleriano per $z = x+\xi$ può essere calcolato come segue:

$$
\begin{aligned}
e^{\sqrt{x+\xi}} &= 1 + (x+\xi)^{1/2} + \frac{(x+\xi)}{2!} + \frac{(x+\xi)^{3/2}}{3!} + \frac{(x+\xi)^{2}}{4!} - \&c. \\
&= 1 + \left[x^{1/2} + \frac{1}{2}x^{-1/2}\xi - \frac{1}{8}x^{-3/2}\xi^2 + \frac{1}{16}x^{-5/2}\xi^3 + \&c.\right] \\
&\quad + \left[\frac{1}{2}x + \frac{1}{2}\xi\right] \\
&\quad + \left[\frac{1}{3!}x^{3/2} + \frac{3}{2\cdot 3!}x^{1/2}\xi + \frac{3}{8\cdot 3!}x^{-1/2}\xi^2 - \frac{1}{16\cdot 3!}x^{-3/2}\xi^3 + \&c.\right] \\
&\quad + \left[\frac{1}{4!}x^2 + \frac{2}{4!}x\xi + \frac{1}{4!}\xi^2\right] \\
&\quad + \&c. \\
&= \left[1 + x^{1/2} + \frac{1}{2!}x + \frac{1}{3!}x^{3/2} + \frac{1}{4!}x^2 + \&c.\right] \\
&\quad + \frac{1}{2}\left[x^{-1/2} + 1 + \frac{3}{3!}x^{1/2} + \frac{4}{4!}x + \&c.\right]\xi \\
&\quad + \frac{1}{8}\left[-x^{-3/2} + \frac{3}{3!}x^{-1/2} + \frac{8}{4!} + \&c.\right]\xi^2
\end{aligned}
$$

nullità del raggio di convergenza o la possibilità di concepire funzioni il cui sviluppo euleriano converga localmente a una funzione diversa dalla funzione generatrice $f(z) = f(x_0+\xi) = f(\xi)$ - l'esclusione di un'opportuna collezione di punti isolati permette di evitare un'ampia classe di controesempi di natura essenzialmente diversa - costruiti per mezzo di un prolungamento con continuità di $f(x)$ e delle sue derivate - anche senza ricorrere all'argomento che insiste sull'incompatibilità di una tale procedura con la nozione lagrangiana di funzione.[91] Il primo a presentare una classe di presunti controesempi di questo tipo fu, come è noto, A. L. Cauchy, il quale dedicò alla questione una breve memoria comparsa nel 1822 sul bollettino della *Societé Philomatique*.[92] Si consideri per questo una funzione $\phi(z) = e^{-1/\psi(z)}$, con $\psi(z)$ una qualsiasi funzione di z di classe C^∞ nell'origine, la quale risulti strettamente positiva per $z \neq 0$ e uguale a zero per $z = 0$, e se ne calcolino le successive derivate secondo le note procedure algoritmiche:[93]

$$\begin{aligned} &\phi'(z) = e^{-1/\psi(z)} \cdot [\psi(z)]^{-2} \cdot \psi'(z) \\ (4) \qquad &\phi''(z) = e^{-1/\psi(z)} \cdot [\psi(z)]^{-4} \cdot [\psi'(z)]^2 \\ &\qquad + e^{-1/\psi(z)} \Big[-2[\psi(z)]^{-3} \cdot [\psi'(z)]^2 + [\psi(z)]^{-2} \cdot [\psi''(z)] \Big] \\ &\&c. \end{aligned}$$

Prolungando tali funzioni con continuità nel punto $z = 0$ si avrà ovviamente: $\phi'(0) = \phi''(0) = \&c. = 0$. Ponendo $x = 0$, sostituendo ϕ a f e anticipando le note conclusioni di Lagrange la (3) si trasforma allora nella falsa identità:

$$(5) \qquad \phi(\xi) = e^{-1/\psi(\xi)} = 0 \qquad \Big[|\xi| < \delta;\ \delta > 0 \Big]$$

$$= e^{\sqrt{x}} + \frac{1}{2\sqrt{x}} e^{\sqrt{x}} \xi + \frac{1}{8x}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{x}}\right) e^{\sqrt{x}} \xi^2 + \&c.$$

Per quanto tale sviluppo risulti non definito per $x = 0$, ciò non impedisce di calcolare lo sviluppo di $f(0+\xi) = f(\xi) = e^{\sqrt{\xi}}$. Sostituendo nella prima delle precedenti identità si ha infatti

$$f(0+\xi) = e^{\sqrt{\xi}} = 1 + \xi^{1/2} + \frac{\xi}{2!} + \frac{\xi^{3/2}}{3!} + \frac{\xi^2}{4!} + \&c.$$

che come si vede contiene delle potenze frazionarie di ξ.

[91] Cfr. la precedente nota (48).

[92] Cfr. Cauchy (1822) [cfr. anche, per una concisa riformulazione del medesimo argomento, Cauchy (1823), p. 152].

[93] Benché Cauchy presenti il proprio "controesempio" sotto la forma di una classe di funzioni rispondenti alla definizione precedente, egli non ragiona che su un solo caso particolare fornito dalla notissima funzione $f(z) = e^{-1/x^2}$.

Benché la (5) venga generalmente citata per indicare l'erroneità dell'argomento di Lagrange, essa non solo non è per nulla contraddittoria con la lettera del suo teorema, ma non corrisponde neppure al "controesempio" effettivamente proposto da Cauchy. Data la funzione $\phi(z)$, definita come sopra, questi costruisce infatti la nuova funzione $\chi(z) = \phi(z) + \varphi(z)$, definendo $\varphi(z)$ come una qualsiasi funzione di z sviluppabile intorno all'origine in una serie intera convergente e *ivi* "equivalente" alla somma di tale serie. Riscrivendo la (3) per $x = 0$ e sostituendo χ a f si avrà allora:

$$\chi(\xi) = \phi(\xi) + \varphi(\xi) = 0 + \varphi(0) + \varphi'(0)\,\xi + \frac{\varphi''(0)}{2!}\xi^2 + \&c. = \varphi(\xi) \qquad \left[|\xi| < \delta;\ \delta > 0\right] \tag{6}$$

> Il suit de ces remarques - commenta Cauchy - qu'à une seule série, même convergente, correspondent une infinité de fonctions différentes les unes des autres. Il n'est donc pas permis de substituer indistinctement les séries aux fonctions, et pour être assuré de ne commettre aucun erreur, on doit borner cette substitution au cas où les fonctions, étant développables en séries convergentes, sont équivalentes aux sommes de ces séries. Dans toute autre hypothèse, les séries ne peuvent être employées avec une entière confiance qu'autant qu'elles se trouvent réduites à un nombre fini de termes, et complétées par des restes dont on connait les valeurs exactes ou approchées.[94]

Queste parole (che costituiscono l'atto di nascita della nozione moderna di analiticità) rendono del tutto manifesta la radicale differenza fra la concezione dell'analisi fatta propria da Cauchy e quella che presiede invece alla teoria di Lagrange: mentre quest'ultimo concepisce infatti la relazione fra funzioni e sviluppi come una relazione fra forme analitiche e pensa una particolare assegnazione di valore relativamente alla sua proprietà di modificare o meno le forme considerate in modo ritenuto essenziale - scartando i casi isolati in cui questa eventualità si verifica - il primo appare essenzialmente preoccupato dell'equivalenza numerica fra una funzione e la serie generata formalmente da essa e fa di un comportamento locale il sintomo di una globale non equiparabilità. Anche accettando di considerare la $\phi(z)$ e la $\chi(z)$ come delle funzioni genuine valutabili nel punto $z = 0$, appare così possibile, dal punto di vista di Lagrange, rispondere all'obiezione di Cauchy, indicandone la non cogenza rispetto all'argomento prospettato. Per rendersi conto di ciò è d'altra parte sufficiente ripetere tale argomento relativamente alla funzione $\phi(z)$, osservando come esso conduca perfettamente e senza alcun intoppo alla determinazione delle successive funzioni derivate.[95]

---

[94] Cfr. Cauchy (1822), p. 50.

[95] Considerando il caso particolare fornito dalla posizione $\psi(x) = x^2$ si avrà infatti, calcolando lo sviluppo euleriano di $\phi(x+\xi)$:

Ciò detto, torniamo a considerare la dimostrazione e in particolare l'argomento prospettato da Lagrange per giustificarne l'implicazione chiave, $\neg B \Rightarrow \neg A$. Questo si fonda con tutta evidenza sulle proprietà della relazione che la (2) asserisce aver luogo fra una funzione e il proprio sviluppo in serie di potenze razionali e che indicherò nel seguito con il simbolo $\mathfrak{R}$. Nei precedenti paragrafi III.6.*a*.δ. e III.6.*b*.α. ho sostenuto che il modo più semplice per render conto delle assunzioni comportate da tale argomento è quello di interpretare $\mathfrak{R}$ come una relazione di associazione fra una funzione e una serie a essa convergente su un disco di diametro non nullo. Si tratta ora di analizzare più in dettaglio queste assunzioni, le quali possono riformularsi nei termini seguenti.

> Se u è un'espressione analitica finita e v una serie di potenze e vale la relazione $\mathfrak{R}(u, v)$, allora:
> i) se u è n-forme, nel senso di Euler,[96] (relativamente a C), allora anche v è n-forme (relativamente a C) e viceversa;
> ii) se qualche termine di v diviene infinito per qualche *opportuna*[97] assegnazione di valori, allora anche u deve divenirlo per le stesse assegnazioni di valori.

Per quanto sia la (i) che la (ii) si richiamino esplicitamente ai valori assunti dall'espressione analitica considerata per qualche assegnazione di valori alle variabile che la compongono, il contesto dell'argomento di Lagrange sembra render chiaro come questi interpreti le proprietà in esse coinvolte come delle proprietà inerenti esclusivamente alla forma di tali espressioni. Mentre tale interpretazione è tuttavia perfettamente legittima riguardo a (i) - essendo la multiformità (relativamente a C) una proprietà inerente all'*operazione* indicata da una certa forma e indipendente dai suoi esiti particolari -

---

$$e^{-(x+\xi)^{-2}} = e^{-1/x^2} + p_1\xi + p_2\xi^2 + \&c. = e^{-\left[x^{-2} - 2x^{-3}\xi + 3x^{-4}\xi^2 - \&c.\right]}$$

$$= \left(e^{-x^{-2}}\right)\cdot\left(e^{2x^{-3}\xi}\right)\cdot\left(e^{-3x^{-4}\xi^2}\right)\cdot \&c.$$

$$= e^{-1/x^2}\left(1 + 2x^{-3}\xi + 2x^{-6}\xi^2 + \&c.\right)\cdot\left(1 - 3x^{-4}\xi^2 + \&c.\right)\cdot \&c.$$

$$= e^{-1/x^2} + 2\,e^{-1/x^2}x^{-3}\,\xi + e^{-1/x^2}\left[2x^{-6} - 3x^{-4}\right]\xi^2 + \&c.$$

e quindi, secondo il metodo dei coefficienti indeterminati:

$$p_1 = f'(x) = \left(e^{-1/x^2}\right)' = 2\,e^{-1/x^2}x^{-3}$$

$$p_2 = f''(x) = \frac{1}{2!}\left(e^{-1/x^2}\right)'' = e^{-1/x^2}\left[2x^{-6} - 3x^{-4}\right]$$

&c.

[96] Cfr. il precedente paragrafo III.3.*a*.δ..

[97] Cfr. *sotto*.

essa si presenta più problematica riguardo a (ii) - in cui più che a una proprietà di un'operazione si fa riferimento all'esito particolare che essa produce. Non solo: perché l'argomento di Lagrange sia esente da facili controesempi, è assolutamente necessario inserire la clausola che restringe le assegnazioni di valori prese in conto dalla (ii) a una certa classe di assegnazioni *opportune*. Per rendersi conto della necessità di tale clausola e comprendere il criterio che deve presiedere alla selezione di una tale classe, è sufficiente considerare il preteso "controesempio" presentato da Fraser, secondo il quale l'identità

$$(7) \qquad \frac{1}{x+\xi} = \frac{1}{\xi} - \frac{x}{\xi^2} + \frac{x^2}{\xi^3} - \frac{x^3}{\xi^4} + \&c.$$

mostrerebbe il caso di un' "espansione" la quale contiene delle potenze negative di ξ senza rendere infinita la funzione generatrice per $\xi = 0$.[98] Non è infatti difficile rendersi conto che lo sviluppo indicato dalla (7) corrisponde allo sviluppo euleriano della funzione $f(z) = 1/z$ centrato sul punto ξ, il quale non convergerà che nel caso in cui x appartenga a un disco centrato sullo zero e di diametro uguale a $|\xi|$. La posizione $\xi = 0$ corrisponde quindi alla determinazione di un centro particolare per lo sviluppo e non alla scelta di un valore dell'incremento che è qui costituito da x. Per evitare il "controesempio" in questione non è tuttavia possibile ricorrere a una clausola simile a quella utilizzata per escludere valori frazionari dell'esponente, la quale renderebbe qui illegittima la particolare assegnazione di valore su cui regge l'argomento di Lagrange. Ciò che occorre fare è piuttosto specificare che in (ii) l'assegnazione di valori riguarda l'incremento della variabile principale della funzione considerata rispetto al centro dello sviluppo. Così come essa é intesa da Lagrange, la (ii) asserisce allora che se u è una funzione di z e v è una serie di potenze centrata su un punto $z = x$ e vale la relazione $\Re(u,v)$, allora: se qualche termine di v diviene infinito per una qualche assegnazione di valore alla differenza $(z\text{-}x)$, anche u deve divenirlo per le stesse assegnazioni di valori. Così interpretata la (ii) si mostra strutturalmente diversa dalla (i). Posto che z e gli esponenti della differenza $(z\text{-}x)$ restino infatti finiti i termini di v non possono divenire infiniti sotto tali condizioni che nel caso in cui x sia uguale a z e l'esponente della differenza sia negativo. Se questo è il caso, la serie non può tuttavia convergere alla funzione su un disco centrato sul punto $z = x$; la premessa dell'implicazione non può così verificarsi che nel caso in cui la relazione $\Re(u,v)$ non abbia luogo e quindi l'assunzione di (2) implica essa stessa la falsità di tale premessa,[99]

[98] Cfr. Fraser (1987), p. 51.

[99] Si noti che anche intendendo (2) in termini puramente formali, come espressione della costruttibilità della serie a partire dalla funzione non si potrebbero comunque accettare, pena la perdita di ogni interesse matematico nel contesto in cui Lagrange si

comportando l'impossibilità che un termine di v divenga negativo e escludendo quindi, a fronte dell'ovvia legittimità della posizione $z = x$, la possibilità di esponenti negativi. Benché, così inteso, l'argomento impiegato da Lagrange per escludere la possibilità di esponenti negativi sia quindi inattaccabile (e anzi ridondante in alcune sua parti) e tale da non richiedere alcuna esclusione di valori isolati della variabile x relativamente al dominio di definibilità della funzione, esso è anche indissociabile dalla considerazione del comportamento numerico di certe funzioni (forme) per una particolare e stabilita assegnazione di valore all'incremento ξ, il quale non può quindi continuare a essere qualificato come una pura forma.

Per concludere la nostra analisi torniamo ora alla prima parte dell'argomento di Lagrange, la quale esclude, in generale, la possibilità di sviluppi a potenze frazionarie dell'incremento. In essa l'impiego della (i) è anticipato da due assunzioni che non abbiamo fino qui discusso: la prima asserisce che se lo sviluppo presenta delle potenze frazionarie di ξ, allora f(x) deve contenere dei radicali; la seconda che ogni radicale di ordine n (posto che il radicando non sia nullo) possiede su C n valori distinti.

Consideriamo innanzitutto la seconda fra queste assunzioni. A sostegno di essa Lagrange richiama genericamente la "teoria delle equazioni", riferendosi evidentemente al teorema che asserisce che l'equazione $x^n - \zeta = 0$ ($n \in \mathrm{N}$, $\zeta \in \mathrm{C}$) possiede su C n soluzioni distinte (dette radici del numero complesso ζ), le quali sono individuate dalla formula $x_k = \rho e^{\theta_k \sqrt{-1}}$, dove ρ e θ_k rispondono alle posizioni $\zeta = \rho^n e^{\vartheta\sqrt{-1}}$ e $\theta_k = \dfrac{\vartheta + 2k\pi}{n}$ ($k = 0, 1, ..., n$-1). Già nel 1803 Woodhause[100] osservò che la dimostrazione di un tale teorema richiede la posizione dell'identità euleriana $(\cos\theta + \sqrt{-1}\sin\theta) = e^{\theta\sqrt{-1}}$, la quale deriva a sua volta dagli sviluppi di esponenziale, seno e coseno.[101] E' chiaro che la viziosità cui fa cenno Woodhouse non sorge che qualora si intenda sostenere la premessa di Lagrange con l'esibizione effettiva delle radici di ζ, piuttosto che giustificarla richiamandosi più generalmente al teorema fondamentale dell'algebra (ogni equazione algebrica di grado n ha n radici, reali o immaginarie), teorema che, al di là delle dimostrazioni possibili o di quelle effettivamente proposte, era intesa nel Settecento come una "verità" fondamentale, premessa all'intero edificio dell'analisi.[102] Proprio per questo l'osservazione pone il dito su una piaga ben più grande di quella costituita da un semplice

muove, regole costruttive che non comportino la convergenza alla funzione su un disco opportuno tranne che per valori isolati di x.

[100]Cfr. Woodhause (1803), p. XIX. Non faccio qui riferimento che a una delle numerose osservazioni critiche nei confronti della teoria di Lagrange contenute nel testo di Woodhause, la cui analisi dettagliata è tuttavia esclusa dai limiti della presente dissertazione.

[101]Cfr. la (69) del precedente paragrafo III.3.c.ζ..

[102]L'esempio dell'*Introductio* di Euler è a questo proposito significativo.

passo falso di natura locale e riguarda il progetto stesso dell'analisi euleriana che impiegava fra i propri fondamentali presupposti una "verità" che non sembrava dimostrabile che a condizioni di argomenti sofisticati e di natura tutt'altro che elementare.

Veniamo ora alla prima delle due assunzioni precedenti. Nel ripresentare il proprio argomento nella prima edizione delle *Leçons*, Lagrange specifica che esso non si riferisce che a funzioni "algebriche"[103] e aggiunge in conclusione:

> Nous sommes donc assurés que f(x) exprimant une fonction quelconque de x algébrique, la fonction f($x+\xi$) peut, généralement parlant, se développer en une série de cette forme, f(x) + $\xi p_1 + \xi^2 p_2 + \xi^3 p_3 + \xi^4 p_4$ + &c. dans laquelle p_1, p_2, p_3, &c. seront de nouvelles fonctions de x dérivées de la fonction primitive f(x).
> Si la fonction f(x) n'est pas algébrique, on peut néanmoins supposer que le développement de f($x+\xi$) soit en général de la même forme, en regardant comme des exceptions particulières les cas où ce développement contiendrait d'autres puissances de ξ que des puissances positives et entières. Ainsi, quelle que soit la fonction f(x), nous ne considérerons que les fonctions p_1, p_2, p_3, &c. résultantes du développement de f($x+\xi$) suivant les puissances ξ, ξ^2, ξ^3,&c..[104]

Assente dalla prima edizione della *Théorie*, una tale precisazione verrà prontamente cancellata da Lagrange nella seconda edizione delle *Leçons*[105] senza venire rintrodotta nella seconda edizione della *Théorie*. Benché l'ultima osservazione faccia pensare che Lagrange intenda anche qui riferirsi a "eccezioni" locali, relative a certi punti isolati, egli deve aver valutato l'inutilità di una tale restrizione del proprio argomento concedendo a esso, dopo un primo ripensamento, una completa fiducia.[106] Per rendere in ogni modo più sicura la propria dimostrazione, Lagrange avrebbe d'altra parte potuto riformularla rendendola del tutto indipendente dalla considerazione della forma radicale, come unico fattore possibile di polidromicità. Essa sembra infatti riducibile alla semplice osservazione seguente. Se la serie $p_1\xi^{\alpha_1} + p_2\xi^{\alpha_2} + p_3\xi^{\alpha_3}$ + &c. contiene delle potenze frazionarie, essa sarà certamente polidroma relativamente a C; sia m ($m > 1$) il numero di valori

[103]Cfr. Lagrange (1801), lez. II, p. 8 e (1806a), p. 9:

> Je vais d'abord démontrer que dans, la série résulte du développement d'une fonction algébrique f($x+\xi$), il ne peut se trouver aucune puissance fractionnaire de ξ, à moins qu'on ne donne à x des valeurs particuliéres.

Lo stesso passaggio si ritrova anche nelle due edizioni della *Théorie* e nella seconda edizione delle *Leçons* : l'attributo "algébrique" e in tutti e tre i casi assente [cfr. Lagrange (1797), p. 7, (1813), p. 8 e (186a), p. 9].

[104]Cfr. Lagrange (1801), pp. 9-10.

[105]Cfr. Lagrange (1806a), p. 10, dove non compare che la prima frase del brano citato, nella quale il termine "algébrique" è peraltro omesso.

[106]Ciò rende difficile pensare che Lagrange si riferisca a questa parte del proprio ragionamento nell'asserire, in entrambe le edizioni della *Théorie*, l'adattabilità alle sole funzioni algebriche della propria dimostrazione del teorema (già citato nel precedente paragrafo III.6.a.δ.) che afferma la generale possibilità di assegnare a ξ un valore abbastanza piccolo per rendere ogni termine dello sviluppo di f($x+\xi$) maggiore della somma di tutti i termini seguenti [cfr. il prossimo paragrafo III.6.d.γ.].

complessi che essa può assumere per ogni assegnazione di valori a x e ξ. Sia ora n ($n \geq 1$) il numero di valori complessi che può assumere la funzione generatrice $f(x)$ per ogni assegnazione di valore a x. Ponendo $x = a$ e $\xi = b$ ($|b| < \delta$) la serie sviluppo assumerà così $n \cdot m$ valori complessi ($n \cdot m > n$), mentre $f(x+\xi) = f(a+b) = f(c)$ non ne potrà assumere in generale che n, ciò che contraddice la clausola (i) relativa alla natura di $\mathfrak{R}$.

III. 6. *b*. γ. *Un argomento estraneo alla costruzione dell'algoritmo delle funzioni derivate*

Dopo aver dimostrato la (3) - e aver stabilito in tal modo la forma generale dello sviluppo in una serie di potenze razionali centrata sul punto $z = x$ di una funzione qualsiasi $f(z)$ - Lagrange presenta un ulteriore argomento allo scopo dichiarato di "vedere più in particolare ciò in cui tale sviluppo consiste e ciò che significa ciascuno dei suoi termini".[107]

> On voit d'abord - egli scrive - que si on cherche dans cette fonction [$f(x+\xi)$] ce qui est indépendant de la quantité ξ, il n'y a qu'à faire $\xi = 0$, ce qui la réduit à $f(x)$. Ainsi $f(x)$ est la partie de $f(x+\xi)$, qui reste lorsque la quantité ξ devient nulle; de sorte que $f(x+\xi)$ sera égale à $f(x)$, plus à une quantité qui doit disparaître en faisant $\xi = 0$, et qui sera par conséquent, ou pourra être censée multipliée par une puissance positive de ξ: et comme nous venons de démontrer que dans le développement de $f(x+\xi)$ il ne peut entrer aucune puissance fractionnaire de ξ, il s'ensuit que la quantité dont il s'agit ne pourra être multipliée que par une puissance positive et entière de ξ; elle sera donc de la forme ξP_1; P_1 étant une fonction de x et ξ, qui ne deviendra point infinie lorsque $\xi = 0$.[108]

Ponendo allora:

$$(8) \qquad f(x + \xi) = f(x) + \xi P_0 \qquad \left[P_0 = P_0(x, \xi);\ 0 < |P_0(x, 0)| < \infty\right]$$

sarà facile trarre:

$$(9) \qquad P_0(x, \xi) = \frac{f(x+\xi) - f(x)}{\xi}$$

Essendo P_0 una nuova funzione di x e ξ, essa potrà essere posta sotto la forma $P_0(x, 0) + Q_0(x, \xi)$, dove $Q_0(x, \xi)$ si annulla per la posizione $\xi = 0$. Ragionando come sopra, Lagrange può allora porre

$$(10) \qquad P_0(x, \xi) = P_0(x, 0) + \xi P_1(x, \xi) \qquad \left[0 < |P_1(x, 0)| < \infty\right]$$

---

[107]Cfr. Lagrange (1797), pp. 8-13 e (1813), pp. 9-16. Nulla di analogo si trova nelle *Leçons*.

[108]Cfr. *ivi*, p. 8 e pp. 9-10.

e quindi, reiterando il ragionamento:

$$
\begin{aligned}
f(x+\xi) &= f(x) + \xi\, P_0(x, 0) + \xi^2\, P_1(x, \xi) \qquad \left[0 < |P_1(x, 0)| < \infty\right] \\
(11) \qquad &= f(x) + \xi\, P_0(x, 0) + \xi^2\, P_1(x, 0) + \xi^3\, P_2(x, \xi) \\
&\qquad\qquad\qquad\qquad \left[0 < |P_2(x, 0)| < \infty\right] \\
&\&c.
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
& P_1(x, \xi) = \frac{P_0(x, \xi) - P_0(x, 0)}{\xi} \\
(12) \qquad & P_2(x, \xi) = \frac{P_1(x, \xi) - P_1(x, 0)}{\xi} \\
& \&c.
\end{aligned}
$$

Ponendo $P_0(x, 0) = p_1 = p_1(x)$, $P_1(x, 0) = p_2 = p_2(x)$, &c. Lagrange trae allora dalla (9) e dalla (12):[109]

$$
\begin{aligned}
& p_1 = p_1(x) = \left[\frac{f(x+\xi) - f(x)}{\xi}\right]_{\xi=0} \\
& p_2 = p_2(x) = \left[\frac{P_1(x, \xi) - p_1(x)}{\xi}\right]_{\xi=0} = \\
(13) \qquad & = \left[\frac{\dfrac{f(x+\xi) - f(x)}{\xi} - \left[\dfrac{f(x+\omega) - f(x)}{\omega}\right]_{\omega=0}}{\xi}\right]_{\xi=0} \\
& \&c.
\end{aligned}
$$

Il procedimento di Lagrange pone due problemi connessi fra loro, il primo legato al ruolo che esso occupa nell'edificio complessivo della teoria

[109]In realtà Lagrange non presenta le (13) che relativamente agli esempi particolari che egli fornisce per illustrare la (11) e la (12) [$f(x) = 1/x$ e $f(x) = \sqrt{x}$], dopo aver impiegato i simboli p_1, p_2, &c. come semplici notazioni per le funzioni $P_1(x, 0)$, $P_2(x, 0)$, &c., senza alcun riferimento alla (3). Per un'esplicazione del procedimento di Lagrange cfr. *sotto*.

delle funzioni analitiche, il secondo alla legittimità delle inferenze di cui si compone.

Benché esso sia stato generalmente presentato come una componente dell'argomento che conduce dalla (2) alla determinazione dell'algoritmo delle funzioni derivate, non è infatti per nulla chiaro ciò che tale presunto sottoargomento potrebbe dimostrare nell'economia generale di tale costruzione. Una risposta possibile potrebbe essere quella che individua lo scopo di Lagrange nella determinazione delle caratteristiche funzionali dei coefficienti p_1, p_2, &c. che compaiono in (3), ovvero nella dimostrazione della loro natura di funzioni di x indipendenti da ξ. Una breve riflessione ci fa tuttavia comprendere che se tale natura non fosse già presupposta nella (2), il passaggio da questa alla (3) sarebbe fondato su un argomento banalmente inadeguato, essendo sempre possibile, nel caso in cui p_1, p_2, &c. fossero delle funzioni di ξ, che le potenze non naturali di tale incremento si componessero opportunamente con il loro coefficiente evitando le conseguenze indesiderate messe in luce da Lagrange.

Una diversa ipotesi interpretativa potrebbe proporre di intendere il nuovo argomento come una dimostrazione alternativa della (3). Tale ipotesi sembra tuttavia contrastare con l'evidenza testuale costituita dall'esplicito richiamo di Lagrange alla dimostrazione di quest'ultima identità nel corso dell'argomento che conduce alla (8). Chi volesse intendere tale richiamo come inessenziale sarebbe d'altra parte nella difficoltà di giustificare altrimenti la posizione di Lagrange, che, indipendentemente dalla (3) e dall'argomento impiegato per asserirla, si scontrerebbe con ovvi controesempi costituiti da funzioni come $F(x, \xi) = [\upsilon(x, \xi)] \log (1+\xi)$ o $G(x, \xi) = [\upsilon(x, \xi)] \xi^a$ $(0 < |\upsilon(x, 0)| < \infty, a \in Q-N)$.[110] Assumendo la (3), la (8) non deriva viceversa che dalla semplice posizione $P_1 = P_1(x, \xi) = p_1 + p_2\xi +$ &c. (in cui è ovvio assumere $0 < |p_1| < \infty$). Se questo è il caso, le posizioni $P_1(x, 0) = p_1 = p_1(x)$, $P_2(x, 0) = p_2 =$

[110]Una medesima difficoltà è posta anche dalla (10) (e dalle identità successive della stessa specie), la quale non sembra poter seguire che dalla posizione $P_0 = P_0(x, \xi) = p_1 + p_2\xi +$ &c.. Nella propria ricostruzione dell'argomento di Lagrange, Fraser [cfr. Fraser (1987), pp. 42-3] ha presentato il ragionamento in questione come una parte della dimostrazione di (3), fondata su un lemma implicito che asserisce che se $g(x, \xi)$ è una funzione di x e ξ e $g(x, 0) = 0$, allora $g(x, \xi) = \xi^\alpha h(x, \xi)$ $(\alpha > 0; 0 < |h(x, 0)| < \infty)$. L'argomento discusso nel precedente paragrafo III.6.*b*.β. non servirebbe allora che a giustificare la posizione $\alpha = 1$. Una tale ricostruzione presenta tuttavia due differenti difficoltà. In primo luogo essa non spiega la necessità di un argomento supplementare (a parte quello discusso nel precedente paragrafo III.6.*b*.β.) per passare dalla (2) alla (3). In secondo luogo essa fa dipendere la dimostrazione di Lagrange da un lemma inutilmente forte che lo stesso Fraser contraddice per mezzo dell'esempio della funzione $g(e, \xi) = e^{-1/\xi^2}$, il cui prolungamento, pur annullandosi per $\xi = 0$, non può essere posto sotto la forma $\xi^\alpha h(e, \xi)$. Lo stesso problema non sorge qualora si accetti di giustificare la (8), la (10) e tutte le identità successive richiamandosi alla (3), la quale può legittimare la fattorizzazione senza richiedere implicitamente la sviluppabilità di ogni funzione in una serie intera centrata proprio sull'origine.

$p_2(x)$, &c. non corrispondono che a una banale sostituzione e non sono dunque per nulla convenzionali (come il linguaggio di Lagrange potrebbe invece far supporre[111]). Tuttavia, intese la (8), la (10) e la (11) come semplici conseguenze della (3) per tali sostituzioni, la (9) e la (12) si presentano, senza un ulteriore precisazione relativa al valore di ξ,[112] come delle mere scritture formali, peraltro perfettamente contenute nella (3) (di cui non sarebbero che una semplice ritrascrizione), le quali non farebbero che suggerire un procedimento costruttivo (di natura ricorsiva) delle funzioni coefficienti, di cui le (13) fornirebbero un'esplicita illustrazione. Non solo la giustificazione delle (13) sarebbe tuttavia in questo caso difficilmente affrancabile da una qualche sorta di teoria dei limiti, ma lo stesso procedimento costruttivo che queste suggeriscono non sarebbe applicabile in generale che a condizione di disporre di un metodo generale per calcolare la funzione $\psi(x) = \left[\dfrac{\varphi_x(\xi)}{\phi_x(\xi)}\right]_{\xi=0}$ (con $\varphi_x(0) = \phi_x(0) = 0$), la cui ricerca non potrebbe peraltro essere coronata da successo che a condizione di disporre di un metodo indipendente di sviluppo in serie intera applicabile a ogni funzione particolare. Se la (8) è così intesa come una mera conseguenza della (3), non sembra esserci alcuna alternativa alla franca ammissione che riconosce il carattere strettamente inessenziale dell'argomento in questione, rispetto all'edificio complessivo della teoria delle funzioni derivate, intesa come una pura costruzione formale. Tale argomento dovrebbe allora o qualificarsi come una sorta di *excursus*, la cui eliminazione non porterebbe alcun scompenso nell'organizzazione generale della costruzione matematica di Lagrange o come parte di un argomento successivo all'edificazione della teoria formale e connesso piuttosto alle sue applicazioni particolari.

La seconda di queste ipotesi pare d'altra parte confermata dal proseguo del ragionamento di Lagrange che, nel sottolineare i pregi del proprio "metodo" (evidentemente il metodo costruttivo contenuto nelle (13) - che questi illustra per mezzo dei due semplici esempi costituiti dalle funzioni algebriche $f(x) = 1/x$ e $f(x) = \sqrt{x}$) insiste sul fatto che esso permette di "ne développer la série qu'autant qu'on veut, et de donner la valeur exacte du reste".[113] Se la pretesa di Lagrange è in quanto tale difficilmente giustificabile,[114] essa rende evidente come l'attenzione di questi sia rivolta, piuttosto che alle (13), alle riformulazione della (3) nei termini delle (11) e alla esplicita esibizione della forma dei "resti" di ordine successivo che esse

[111]Cfr. la precedente nota (109).

[112]E' chiaro che Lagrange assume implicitamente che la convergenza della (3) comporti la convergenza alla funzione, ciò che sembra d'altra parte essere garantito dalla limitatezza delle nozione lagrangiana di funzione [cfr. la precedente nota (48)].

[113]Cfr. Lagrange (1797), p. 11 e (1813), p. 13.

[114]La stessa natura del "metodo" rende infatti evidente che tutto ciò che questo permette di calcolare è la differenza fra la funzione e i primi ν termini del suo sviluppo, ciò che è sempre possibile fare qualora si disponga di un qualsiasi procedimento costruttivo di determinazione dei coefficienti.

rendono possibile. Dopo aver mostrato infatti come calcolare il "resto" di ordine uno dello sviluppo di $f(x) = \sqrt{x}$ egli scrive:

> Mais le principal avantage de la méthode que nous avons exposée, consiste en ce qu'elle fait voir comment les fonctions p_1, p_2, p_3, &c. résultent de la fonction principale $f(x)$, et sur-tout en ce qu'elle prouve que les restes $\xi P_0, \xi P_1, \xi P_2$, &c. sont des quantités qui doivent devenir nulles lorsque $\xi = 0$; d'où l'on tire cette conséquence importante, que dans la série $f(x) + p_1\xi + p_2\xi^2 + p_3\xi^3 +$ &c. qui naît du développement de $f(x+\xi)$, on peut toujours prendre ξ assez petit pour qu'un terme quelconque soit plus grand que la somme de tous les termes qui le suivent; et que cela doit avoir lieu aussi pour toutes les valeurs plus petites de ξ.[115]

L'intero ragionamento precedente potrebbe essere allora inteso come una sorta di preparazione per la dimostrazione di un tale teorema, il quale ne costituirebbe quindi la conclusione naturale.

Se accettiamo quest'ultima lettura - che a me pare peraltro la più soddisfacente[116] - siamo portati a intendere l'argomento di Lagrange come una sorta di anticipazione della problematica relativa alle applicazioni dell'algoritmo delle funzioni derivate allo studio di particolari sistemi di quantità. Se ciò giustifica un rinvio di un giudizio più preciso, non impedisce di trarre almeno una conclusione relativa al procedimento formale di cui tale argomento si serve. Per poter sostenere infatti che la possibilità di diminuire indefinitamente il valore della "quantità" $\xi P_0, \xi P_1, \xi P_2$, &c. implica la possibilità di rendere ogni termine della (3) minore della "somma di tutti i termini successivi" Lagrange deve identificare, non solo formalmente, i "resti" $\xi P_0, \xi^2 P_1, \xi^3 P_2$, &c. che completano le (11) con il prosieguo della serie esibita dalla (3), ciò che egli fa d'altra parte in termini assolutamente espliciti. I numerosi problemi posti da una tale identificazione non solo formale verranno esaminati nella prossima sezione III.6.*d*.. Qui è sufficiente osservare come essa risolva ogni difficoltà relativa alla giustificazione della (8), facendo di essa una semplice conseguenza della (3). Il successivo passaggio dalla (8) alla (9) e l'intero prosieguo del procedimento appare allora giustificabile asserendo *a priori* la convergenza della (3) su un dominio opportuno e intendendo tanto la (9) che le (12) come delle identità formali generalmente convertibili in identità numeriche per mezzo di una limitazione della variazione di ξ a un tale dominio (e dell'esclusione di isolate assegnazioni di valore alla variabile x).[117]

---

[115] Cfr. Lagrange (1797), pp. 11-2 e (1813), p. 14. Cfr. il precedente paragrafo III.6.*a*.δ..

[116] Si osservi a questo proposito che l'assenza nelle *Leçons* di ogni analogo dell'argomento precedente [cfr. la precedente nota (107)] si accompagna a una differente collocazione del teorema citato, che è presentato come una conseguenza del più noto "teorema del resto" [cfr. il precedente paragrafo III.6.*a*.δ.].

[117] Cfr. la precedente nota (112).

III. 6. *b*. δ. *Una forma opportuna per lo sviluppo in serie intera di una funzione qualsiasi: la riproposizione dell'argomento del 1772 e la dimostrazione di Poisson del 1805*

Dimostrata la (3), Lagrange deve porla in una forma tale che i coefficienti dipendenti dalla natura della funzione primitiva f(x) (e quindi dalla variabile x) siano derivabili l'uno dall'altro secondo un'operazione reiterabile e indipendente dal loro ordine. Egli utilizza a questo scopo il medesimo argomento già impiegato nella memoria del 1772 per passare dalla (52) del precedente paragrafo III.4*b*.β. alla (57) dello stesso paragrafo e riscrive la (3) sotto la forma:[118]

$$(14) \qquad f(x+\xi) = f(x) + f'(x)\,\xi + \frac{f''(x)}{2!}\xi^2 + \frac{f'''(x)}{3!}\xi^3 + \&c.$$

in cui f(x) è la funzione *primitiva* e f'(x), f''(x), f'''(x), &c. le sue *derivate* prima, seconda, terza, &c. e l'apice "'" indica un'operazione definita su ogni funzione e i cui caratteri algoritmici dovranno venir determinati in base al confronto fra la (14) e gli sviluppi euleriani. Per un'analisi della dimostrazione di tale identità non resta quindi che rinviare al precedente paragrafo III.4*b*.β.. Qui non discuterò che una dimostrazione alternativa, proposta da Poisson nel 1805,[119] la quale permette di trarre formalmente la (14) direttamente dalla (2), senza passare per la (3), la cui giustificazione *a priori* pone, come abbiamo visto, non poche difficoltà.

Per rendere esplicito l'argomento di Poisson e identificarne i presupposti poniamo nella (2) $f(x) = f_{0,0}(x)$, $p_1 = p_1(x) = f_{1,0}(x)$, $p_2 = p_2(x) = f_{2,0}(x)$, &c. e $\alpha_1 = \alpha_{1,0}$, $\alpha_1 = \alpha_{2,0}$, &c. e indichiamo rispettivamente con $f_{\nu,\mu}(x)$ e con $\alpha_{\nu,\mu}$ (ν, $\mu \in \mathbf{N}$, $\nu \geq 1$) il coefficiente di ordine μ e il corrispondente esponente di ξ nello sviluppo in serie intera di una funzione $f_{\nu,0}(x)$. Sostituendo successivamente nella (2) 2ξ a ξ e $x+\xi$ a x si avrà allora, rispettivamente:

$$\text{i) } f_{0,0}(x+2\xi) = f_{0,0}(x) + 2^{\alpha_{1,0}} f_{1,0}(x)\,\xi^{\alpha_{1,0}} + 2^{\alpha_{2,0}} f_{2,0}(x)\,x^{\alpha_{2,0}} + \&c.$$

$$(15) \qquad \begin{aligned} \text{ii) } f_{0,0}(x+2\xi) &= f_{0,0}(x+\xi) + f_{1,0}(x+\xi)\,\xi^{\alpha_{1,0}} + f_{2,0}(x+\xi)\,\xi^{\alpha_{2,0}} + \&c. \\ &= f_{0,0}(x) + f_{1,0}(x)\,\xi^{\alpha_{1,0}} + f_{2,0}(x)\,\xi^{\alpha_{2,0}} + \&c. \\ &\quad + f_{1,0}(x)\,\xi^{\alpha_{1,0}} + f_{1,1}(x)\,\xi^{\alpha_{1,0}+\alpha_{1,1}} + f_{1,2}(x)\,\xi^{\alpha_{1,0}+\alpha_{1,2}} + \&c. \\ &\quad + f_{2,0}(x)\,\xi^{\alpha_{2,0}} + f_{2,1}(x)\,\xi^{\alpha_{2,0}+\alpha_{2,1}} + f_{2,2}(x)\,\xi^{\alpha_{2,0}+\alpha_{2,2}} + \&c. \end{aligned}$$

[118] Cfr. Lagrange (1797), pp. 13-5, (1813), pp. 17-8, (1801), pp. 10-2 e (1806a), pp. 10-3.

[119] Cfr. Poisson (1805).

Ora, secondo Poisson i termini della (2) possono venire ordinati in modo che gli esponenti razionali $\alpha_{1,0}$, $\alpha_{2,0}$, $\alpha_{3,0}$, &c. formino una successione (strettamente) crescente e questo è sufficiente per legittimare il passaggio dalla (15) all'identità finita

$$(16)\qquad 2^{\alpha_{1,0}} f_{1,0}(x) = 2\, f_{1,0}(x)$$

che non può ovviamente aver luogo se sotto la condizione $\alpha_{1,0} = \alpha_1 = 1$. Il passaggio dalla (15) alla (16) si fonda come è chiaro su un'applicazione del metodo dei coefficienti indeterminati, la quale conduce all'equiparazione dei coefficienti di ξ^{α_1} in (15)(i) e (15)(ii). Perché una tale applicazione sia legittima è tuttavia necessario assicurarsi che nessuno dei nuovi esponenti che compaiono nella (15)(ii), ma non nella (15)(i) - ovvero: $\alpha_{1,0}+\alpha_{1,1}$, $\alpha_{1,0}+\alpha_{1,2}$, &c.; $\alpha_{2,0}+\alpha_{2,1}$, $\alpha_{2,0}+\alpha_{2,2}$, &c.; &c. - possa essere uguale a $\alpha_{1,0}$. Per questo la condizione di crescenza della successione degli esponenti non è chiaramente sufficiente e deve essere sostituita da una condizione più forte. Il modo più naturale per legittimare l'inferenza di Poisson è di intendere la sua presupposizione di crescenza come una presupposizione di crescenza dei valori assoluti dei termini di una successione, la quale è assunta come composta da termini tutti positivi o tutti negativi. Una tale presupposizione non sembra tuttavia giustificabile in termini generali e *a priori*, a meno di non ricorrere a un argomento analogo a quello impiegato da Lagrange per dimostrare la non negatività degli esponenti della (2). Assunto tale argomento gli esponenti della (2) potranno essere supposti come tali da costituire una successione crescente a termini positivi e il problema sarà allora quello di mostrare: i) che tali esponenti sono naturali; ii) che le funzioni coefficienti p_1, p_2, &c. possono scriversi sotto la forma indicata dalla (14). L'obiettivo di Poisson è quello di fornire un argomento che, a partire da tale premessa, provi *nello stesso tempo* entrambe le conclusioni.

Dimostrato che il primo esponente della (2) non può che essere l'unità, è possibile applicare una tale conclusione al caso dello sviluppo di una funzione potenza. Ponendo $f(x) = x^m$, $p_k = \rho_k$ $(k = 1, 2, ...)$ $\alpha_k = a_k$ si avrà allora

$$(17)\qquad (x+\xi)^m = x^m + \xi\, \rho_1(x) + \xi^{a_2} \rho_2(x) + \xi^{a_3} \rho_3(x) + \&c.$$

e quindi, ponendo $\xi = xz$ e dividendo per x^m:

$$(18)\qquad (1+z)^m = 1 + \frac{z}{x^{m-1}}\,p_1(x) + \frac{z^{a_2}}{x^{m-a_2}}\,p_2(x) + \frac{z^{a_3}}{x^{m-a_3}}\,p_3(x) + \&c.$$

Confrontando la (18) con la (17), dopo aver posto in quest'ultima $x = 1$ e $\xi = z$, è facile concludere che il rapporto $\frac{p_1(x)}{x^{m\ 1}}$ deve essere indipendente da x e che il coefficiente $p_1(x)$ deve quindi assumere la forma di un prodotto $[\psi(m)]x^{m-1}$ (con $\psi(m)$ una opportuna funzione di m[120]). Tornando alla (17) si avrà allora:

$$(19)\qquad (x+\xi)^m = x^m + \xi\,\psi(m)\,x^{m-1} + \xi^{a_2}\,p_2(x) + \xi^{a_3}\,p_3(x) + \&c.$$

Ritornando ora alla (2), sostituendo successivamente in essa x con $x+\omega$ e ξ con $\xi+\omega$ e impiegando la stessa notazione utilizzata nella (15), si avrà, sfruttando la (19) e ricordandosi che $\alpha_1=1$:

$$
\begin{aligned}
&\text{i) } f[x+(\xi+\omega)] = f_{0,0}(x) + f_{1,0}(x)\,(\xi+\omega) + f_{2,0}(x)\,(\xi+\omega)^{\alpha_2} + f_{3,0}(x)\,(\xi+\omega)^{\alpha_3} + \&c.\\
&\qquad = \left[f_{0,0}(x) + f_{1,0}(x)\,\xi + f_{2,0}(x)\,\xi^{\alpha_2} + f_{3,0}(x)\,\xi^{\alpha_3} + \&c.\right]\\
&\qquad + \omega\left[f_{1,0}(x) + f_{2,0}(x)\,\psi(\alpha_2)\,\xi^{\alpha_2-1} + f_{3,0}(x)\,\psi(\alpha_3)\,\xi^{\alpha_3-1} + \&c.\right]\\
&\qquad + \omega^{a_2}\left[f_{2,0}(x)\,p_2(\xi) + f_{3,0}(x)\,p_3(\xi) + \&c.\right]\\
(20)\quad &\qquad + \&c.\\
&\text{ii) } f_{0,0}[(x+\omega)+\xi] = f_{0,0}(x+\omega) + f_{1,0}(x+\omega)\,\xi + f_{2,0}(x+\omega)\,\xi^{\alpha_2} + \&c.\\
&\qquad = \left[f_{0,0}(x) + f_{1,0}(x)\,\xi + f_{2,0}(x)\,\xi^{\alpha_2} + f_{3,0}(x)\,\xi^{\alpha_3} + \&c.\right]\\
&\qquad + \omega\left[f_{1,0}(x) + f_{1,1}(x)\,\xi + f_{2,1}(x)\,\xi^{\alpha_2} + f_{3,1}(x)\,\xi^{\alpha_3} + \&c.\right]\\
&\qquad + \omega^{\alpha_2}\left[f_{2,0}(x) + f_{1,2}(x)\,\xi + f_{2,2}(x)\,\xi^{\alpha_2} + f_{3,3}(x)\,\xi^{\alpha_3} + \&c.\right]\\
&\qquad + \&c.
\end{aligned}
$$

[120] Cfr. *sotto*.

Avendo supposto la successione $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\}$ come una successione crescente di razionali positivi e avendo dimostrato in generale che il primo termine di tale successione è per ogni funzione uguale a uno, Poisson può supporre che gli esponenti a_2, a_3, &c. che compaiono in (20)(ii) e che derivano dallo sviluppo della funzione particolare $f(x+\xi) = (x+\xi)^m$ siano tutti diversi da 1. Equiparando gli sviluppi (20)(i) e (20)(ii) e applicando il metodo dei coefficienti indeterminati sarà allora facile trarre l'identità:

$$\text{(21)}\quad \begin{aligned} & f_{1,0}(x) + f_{2,0}(x)\,\psi(\alpha_2)\,\xi^{\alpha_2 - 1} + f_{3,0}(x)\,\psi(\alpha_3)\,\xi^{\alpha_3 - 1} + \&c. \\ & \qquad = f_{1,0}(x) + f_{1,1}(x)\,\xi + f_{2,1}(x)\,\xi^{\alpha_2} + f_{3,1}(x)\,\xi^{\alpha_3} + \&c. \end{aligned}$$

che secondo Poisson non può avere luogo per ogni ξ che a condizione che le due serie siano fra loro uguali termine a termine, secondo l'ordine indicato. Equiparando i termini dello stesso ordine nella (21), sarà allora facile trarre:

$$\text{(22)}\quad \begin{array}{ll} \text{i)} & \begin{array}{ll} \alpha_2 - 1 = 1; & \alpha_2 = 2 \\ \alpha_3 - 1 = \alpha_2; & \alpha_3 = 3 \\ \alpha_4 - 1 = \alpha_3; & \alpha_4 = 4 \\ \&c. & \&c. \end{array} \\ \\ \text{ii)} & \begin{array}{ll} f_{2,0}(x)\,\psi(\alpha_2) = f_{1,1}(x)\,; & f_{2,0}(x) = \dfrac{f_{1,1}(x)}{\psi(\alpha_2)} \\ f_{3,0}(x)\,\psi(\alpha_3) = f_{2,1}(x); & f_{3,0}(x) = \dfrac{f_{2,1}(x)}{\psi(\alpha_3)} \\ f_{4,0}(x)\,\psi(\alpha_4) = f_{3,1}(x); & f_{4,0}(x) = \dfrac{f_{3,1}(x)}{\psi(\alpha_4)} \\ \&c. & \end{array} \end{array}$$

Essendo, nella mia notazione, $f_{1,1}(x)$ il primo coefficiente dello sviluppo di $f_{1,0}(x) = p_1(x)$, $f_{2,1}(x)$ il primo coefficiente dello sviluppo di $f_{2,0}(x) = p_2(x)$, $f_{3,1}(x)$ il primo coefficiente dello sviluppo di $f_{3,0}(x) = p_3(x)$, &c., è chiaro dalle (22) tanto che gli esponenti della (2) sono costituiti dai successivi numeri naturali, quanto che i suoi coefficienti possono essere scritti sotto la forma di rapporti a denominatore costante (e indipendente dalla funzione considerata), i cui numeratori derivano l'uno dall'altro secondo quella stessa operazione che conduce da una funzione $f(x)$ al primo coefficiente dello sviluppo in serie intera della funzione associata $f(x+\xi)$. Se ψ è quindi riconosciuta come la funzione identità, la (22) corrisponde alla (14).[121]

Sebbene il procedimento di Poisson non fornisca alcun argomento che permetta di riconoscere la ψ come la funzione identità, questi pone già nella (19) $\psi(m) = m$, richiamandosi apertamente alla "formula del binomio". Se ciò non implica necessariamente il carattere circolare della prova, è evidente che senza un argomento indipendente a favore di una tale identificazione, la dimostrazione di Poisson non può qualificarsi come un argomento *a priori* da ogni metodo particolare di sviluppo, come è invece il caso per quella di Lagrange. Questa non è tuttavia la sola difficoltà in cui essa sembra coinvolta. Un'altra sembra sorgere dalla considerazione del passaggio da (21) a (22) che Poisson può giustificare soltanto assumendo che un'identità formale fra due serie di potenze razionali $B_1z^{\beta_1} + B_2z^{\beta_2} + \&c.$ e $C_1z^{\gamma_1} + C_2z^{\gamma_2} + \&c.$ non possa aver luogo per ogni z che a condizione che ogni esponente della prima serie sia uguale a un esponente della seconda serie e viceversa (è infatti chiaro che essendo la successione $\{\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \ldots\}$ una successione crescente di razionali positivi, allora o $\alpha_2 - 1 = 1$, $\alpha_3 - 1 = \alpha_2$, &c. o esiste almeno un esponente della seconda serie che non è uguale a nessun esponente della prima serie). Il passaggio dalla (21) alla (22) si compone quindi di due momenti distinti: in primo luogo si tratta di equiparare fra loro uno a uno gli esponenti delle due serie, in secondo luogo si tratta di operare secondo una semplice applicazione del metodo dei coefficienti indeterminati.[122] Benché il presupposto che giustifica il primo fra tali procedimenti debba essere necessariamente più forte di quello che presiede al secondo (il quale si riduce, come è chiaro, a un'assunzione di unicità), Poisson non fornisce alcun argomento a sostegno dell'inferenza in questione, sulla quale riposa d'altra parte buona parte del peso della dimostrazione.[123]

Tali difficoltà sembrano essere il prezzo pagato da Poisson per ottenere una dimostrazione che, a differenza di quella di Lagrange, sia - almeno apparentemente - di natura completamente formale, evitando il riferimento ai valori assunti da certe forme analitiche. Proprio tale caratteristica della dimostrazione - la quale pare sotto questo rispetto convenire perfettamente al programma lagrangiano - rende tuttavia estrinseca la giustificazione delle necessarie limitazioni cui la (14) deve essere sottoposta e che Lagrange aveva invece ritrovato come una condizione di validità del suo stesso argomento. Ecco come Poisson si esprime su tale questione, in conclusione della sua memoria:

---

[121] Poisson scrive in verità la (14) utilizzando la notazione differenziale e riconosce in essa il "teorema" di Taylor. Egli non fornisce tuttavia alcun argomento per identificare le "funzioni derivate" con i successivi rapporti differenziali e non affronta in alcun modo i problemi "fondazionali" connessi alla proposta di Lagrange.

[122] Cfr. a questo proposito la ricostruzione della dimostrazione di Poisson proposta da Lacroix in (1810-19), vol. 1, pp. 160-3.

[123] Lo stesso silenzio si ritrova d'altra parte nella citata ricostruzione di Lacroix [cfr. la precedente nota (122)].

J'ai démontré rigoureusement que les exposans de ξ, dans le développement de $f(x+\xi)$, doivent être la suite de nombres naturels 1, 2, 3, 4, &c.; c'est en effet une propriété inhérente aux fonctions de la somme de deux variables comme $f(x+\xi)$, mais il n'en est pas de même des fonctions d'une seule variable; et l'on peut s'assurer par des exemples, que ces fonctions ne peuvent pas toutes se développer suivant les puissances entières et positives de la variables: or si dans $f(x+\xi)$, on donne à x une valeur particulière, $f(x+\xi)$ ne sera plus qu'une fonction de la seule variable ξ; il pourra donc arriver que son développement suivant les puissances de ξ n'ait pas la forme générale que nous avons démontrée; d'où l'on voit *a priori* que la formule de Taylor devra se trouver en défaut pour certaines valeurs particulières de x.[124]

Per quanto sia chiaro che Poisson - sottolineando la differenza fra lo sviluppo di una funzione in una serie intera centrata su un punto generico del suo dominio di definizione e lo sviluppo della medesima funzione in una serie intera centrata sullo zero[125] (ovvero su un punto stabilito *a priori*) - si riferisca alla possibilità che alcune funzioni non siano sviluppabili in una serie intera centrata su alcuni punti isolati del loro dominio di definizione, è significativo il fatto che egli non sappia indicare nella propria dimostrazione alcuna inferenza che sarebbe bloccata da una determinazione particolare del valore di x. Il carattere *a priori* dell'esplicazione dei "difetti" della "serie di Taylor" è così soltanto illusorio. Perché una tale esplicazione sia d'altra parte possibile è necessario uscire da un'ambito strettamente formale e prendere in considerazione lo stesso comportamento numerico di una funzione, valutato sull'intero piano complesso. Se il programma epistemologico di Lagrange è costruito sull'eliminazione di principio di una simile prospettiva, la stessa pratica matematica di questi sembra saper discernere le situazioni in cui una tale considerazione si impone come necessaria, anche all'interno di una genuina teoria delle forme analitiche. Il tentativo di Poisson che si qualifica al contrario come esplicitamente teso a riportare la dimostrazione della (14) a un puro procedimento formale è così destinato a un insuccesso che visto con occhi moderni appare come alquanto significativo.

III. 6. *c*.
L'ALGORITMO DELLE FUNZIONI DERIVATE

III. 6. *c*. α. *Il primo passo verso la determinazione dell'operatore di sviluppo: la ricerca del coefficiente di ordine uno negli sviluppi in serie intera delle funzioni elementari*

La dimostrazione della (14), i cui coefficienti risultano derivabili l'uno dall'altro secondo reiterate applicazioni della medesima *operazione*, che non risulta ancora determinata, conclude la prima parte dell'edificio teorico di Lagrange. Benché tale dimostrazione appaia ora assai più dettagliata e pre-

[124] Cfr. Poisson (1805), p. 55.

[125] Cfr. la parte conclusiva della precedente nota (110).

cisa che nella memoria del 1772, la sola differenza sostanziale che essa introduce dal punto di vista dei risultati riguarda l'esplicita caratterizzazione della (14) come uno sviluppo centrato su un punto generico del dominio di definizione della funzione primitiva $f(x)$, la cui forma può non corrispondere allo sviluppo in serie di potenze (qualsiasi) di questa stessa funzione, qualora la variabile x assuma certi valori isolati. Ciò che segna invece una profonda differenza fra il programma tratteggiato nel 1772 e la sua realizzazione, tanto nella *Théorie* che nelle *Leçons*, e che costituisce il vero e proprio atto di nascita di una nuova teoria matematica è la procedura per mezzo della quale Lagrange perviene, nella seconda parte della sua teoria, alla determinazione algoritmica dell'operatore che conduce successivamente dalla funzione primitiva alle sue derivate. Mentre nel 1772 egli aveva infatti cercato di dimostrare, a partire dalla (14), considerata come una formula differenziale *in nuce*, l'identità generale $f^{(\nu)}(x) = \dfrac{d^{\nu} f}{dx^{\nu}}$ (in cui $\dfrac{d^{\nu} f}{dx^{\nu}}$ è chiaramente inteso come un rapporto differenziale), Lagrange indaga ora le caratteristiche algoritmiche dell'operatore di derivazione, senza ridurlo a alcun oggetto matematico già definito indipendentemente da esso e intendendolo piuttosto come un operatore di sviluppo compiutamente definito dalla (14).[126]

Se assumiamo l'unicità dello sviluppo di ogni funzione $f(z)$ in una serie di potenze centrata sul punto $z = \xi$ e consideriamo una funzione come una composizione finita e regolata di un insieme dato di funzioni elementari,[127] il problema si riduce a determinare, secondo i metodi dell'analisi algebrica euleriana, il coefficiente di ordine uno dello sviluppo di ogni funzione elementare, a confrontare la forma di tale coefficiente alla funzione elementare

---

[126] Si osservi che l'argomento consistente nell'equiparazione degli sviluppi di $f[(x+\omega)+\xi]$ e $f[x+(\xi+\omega)]$ non mostra altro (se opportunamente reiterato) se non che il coefficiente $p_{\nu}(x)$ di ordine ν nello sviluppo di $f(x+\xi)$ è uguale al prodotto di $1/\nu$ per il coefficiente di ordine *uno* dello sviluppo di $p_{\nu-1}(x+\xi)$. L'interpretazione del simbolo "′", che non indica che il coefficiente di ordine uno di un opportuno sviluppo, come un simbolo operazionale non fa quindi, in senso stretto, che anticipare la conclusione dell'argomento discusso nella presente sezione, il quale mostra che per ogni funzione il passaggio da essa al primo coefficiente del suo sviluppo in serie intera è riducibile all'applicazione di *un* insieme definito di regole algoritmiche definite univocamente sull'insieme delle funzioni. Si osservi tuttavia che tale insieme di regole algoritmiche non definisce a rigore una sola operazione, ma un insieme di operazioni, ognuna delle quali è applicabile a funzioni di una determinata classe. Il caso del logaritmo (come quello delle funzioni trigonometriche inverse) mostra inoltre che in alcuni casi il passaggio da $f'(x)$ a $f''(x)$ non si realizza in senso stretto per mezzo della stessa operazione che conduce da $f(x)$ a $f'(x)$. L'uso del singolare, ovvero il riferimento a *un* operatore di derivazione non dipende quindi dall'individuazione di *una sola* operazione che conduce da ogni funzione alla sua derivata, ma dall'interpretazione delle regole che presiedono tale passaggio come regole costruttive *dello* sviluppo in serie intera di ogni funzione, il quale è presentato universalmente in concreto per mezzo di un solo oggetto. Ciò che è concettualmente prioritario non è quindi l'operazione, ma il suo esito, il quale si presenta così come un oggetto non genuinamente matematico [cfr. i precedenti paragrafo I.2.γ. e I.2.δ.]: ciò che fornisce un bell'esempio della persistenza del concetto nell'attività matematica anche più formalizzata.

[127] Cfr. il precedente paragrafo III.6.*a*.γ..

a cui esso si riferisce ,cercando di individuarne le regole costruttive, e a specificare in seguito, per mezzo dell'analisi delle leggi di composizione di serie generiche, le norme che permettono di passare dalle derivate delle funzioni elementari alle derivate delle funzioni composte.

Il primo passo di tale percorso consisterà allora nella determinazione delle seguenti coppie:[128]

$$\text{i)} < f(x) = x^m,\ f'(x) = \left(x^m\right)' = p_1(x)\big|_{f(x) = x^m} > \quad \left[m \in Q\right]$$

$$\text{ii)} < f(x) = a^x,\ f'(x) = \left(a^x\right)' = p_1(x)\big|_{f(x) = a^x} >$$

(23)

$$\text{iii)} < f(x) = \log_a x,\ f'(x) = \left(\log_a x\right)' = p_1(x)\big|_{f(x) = \log_a x} >$$

$$\text{iv)} < f(x) = \sin x,\ f'(x) = \left(\sin x\right)' = p_1(x)\big|_{f(x) = \sin x} >$$

$$\text{v)} < f(x) = \cos x,\ f'(x) = \left(\cos x\right)' = p_1(x)\big|_{f(x) = \cos x} >$$

il cui primo elemento è dato e il secondo deve essere formalmente costruito. Essendo x una variabile generica, la costruzione del coefficiente di ordine uno $p_1(x)\big|_{f(x) = g(x)}$ nello sviluppo di una funzione determinata $g(x+\xi)$, a partire dalla primitiva $g(x)$, non dipende in nessun modo da alcuna considerazione relativa alla convergenza di tale sviluppo, che può quindi tornare a essere eulerianamente definito come l'esito di una procedura formale applicata alla funzione assegnata. Non solo: data la (14) - ovvero dimostrati in generale i legami operazionali fra i successivi coefficienti dello sviluppo di una funzione qualsiasi - l'intera teoria degli sviluppi in serie intere (e quindi la teoria stessa delle funzioni derivate) non richiede in alcun modo la determinazione completa, secondo i metodi dell'analisi algebrica euleriana, degli sviluppi delle funzioni elementari. Individuato il termine di ordine uno, questi stessi sviluppi, possono infatti essere costruiti tramite una reiterazione dell'operazione che conduce a questo termine a partire dalla funzione data. Sebbene una tale operazione non sia in quanto tale compresa entro i limiti dell'analisi algebrica euleriana, l'interpretazione di essa come una mera regola algoritmica che trasforma una funzione data nel primo coefficiente del suo sviluppo in serie intera permette di abbattere tali limiti e di reinterpretare quindi l'intero edificio dell'analisi pre-lagrangiana come un edificio essenzialmente unitario, entro il quale la distinzione di Euler perde ormai il

[128] La presenza nella lista che segue del coseno in luogo di una funzione trigonometrica inversa corrisponde al "piano" della *Théorie* e delle *Leçons* [cfr. la precedente nota (27)].

suo significato precipuo, sopravvivendo al più come una comoda convenzione verbale.

III. 6. c. β. *La ricerca del coefficiente di ordine uno nello sviluppo in serie intera della funzione potenza e il teorema generalizzato del binomio*

Riducendosi all'esibizione del secondo termine dello sviluppo formale di una qualsiasi potenza razionale m del binomio $(x+\xi)$, la determinazione della (23)(i) sembra a Lagrange come assolutamente banale.

> [...] il est facile de démontrer - egli scrive -, soit par les simples règles de l'arithmétique, soit par les premières opérations de l'algèbre, que les deux premiers termes de la puissances m du binome $x+\xi$ sont $x^m + m\,x^{m-1}$, soit que m soit un nombre entier ou fractionnaire, positif ou négatif [...].[129]

Sebbene egli non fornisca alcuna indicazione su come una tale dimostrazione possa essere condotta, è del tutto evidente che il riferimento implicito è a quei procedimenti costruttivi dei primi termini dello sviluppo binomiale che non si richiamano che all'esecuzione effettiva di opportune moltiplicazione o divisioni riferite a polinomi finiti o infiniti. Data la regola di Mercator, si avrà in primo luogo, per $m = -p$ $\{p \in \mathbb{N}\}$:

$$
\begin{aligned}
(x+\xi)^{-p} &= \left[(x+\xi)^{-1}\right]^p = \left[\frac{1}{(x+\xi)}\right]^p = \left[x^{-1} - x^{-2}\,\xi + \&c.\right]^p \\
&= \left(x^{-1} - x^{-2}\xi + \&c.\right) \dots (\text{p volte}) \dots \left(x^{-1} - x^{-2}\,\xi + \&c.\right) \\
&= x^{-p} + \left[\left(-\xi\, x^{-2}\, x^{-p+1} + \&c.\right) + \dots (\text{p volte}) \dots + \left(-\xi\, x^{-2}\, x^{-p+1} + \&c.\right)\right] + \&c. \\
&= x^{-p} - p\, x^{-p-1}\, \xi + \&c.
\end{aligned}
\tag{24}
$$

Se $m = p/q$ si avrà invece:

$$
\begin{aligned}
(x+\xi)^{p/q} &= \left[(x+\xi)^{1/q}\right]^p = \left[x^{1/q} + K_1\xi + \&c.\right]^p \\
&= \left(x^{1/q} + K_1\xi + \&c.\right) \dots (\text{p volte}) \dots \left(x^{1/q} + K_1\xi + \&c.\right) \\
&= x^{p/q} + p\, x^{\frac{p-1}{q}}\, K_1\, \xi + \&c.
\end{aligned}
\tag{25}
$$

[129] Cfr. Lagrange (1797), p. 15; cfr. anche (1813), p. 13-4, (1801), p. 13-4 e (1806a), p. 16.

Per determinare K_1 basterà porre l'equazione identica $\left[(x+\xi)^{1/q}\right]^q = x+\xi$ e operare come in (25), ciò che fornirà l'identità

$$(26) \qquad x + \xi = \left[(x+\xi)^{1/q}\right]^q = x + q\, x^{\frac{q-1}{q}} K_1 \xi + \&c.$$

da cui è facile trarre, secondo il metodo dei coefficienti indeterminati,

$$(27) \qquad 1 = q\, x^{\frac{q-1}{q}} K_1 \text{ e quindi: } K_1 = q^{-1} x^{-\frac{q-1}{q}}$$

Sostituendo in (25) sarà allora ovvio concludere:

$$(28) \qquad (x+\xi)^{p/q} = x^{p/q} + \frac{p}{q} x^{\frac{p}{q}-1} \xi + \&c.$$

Insieme al teorema del binomio ristretto a esponenti naturali, la (24) e la (28) permettono di trarre l'identità cercata: $\left(x^m\right)' = m\, x^{m-1}$ ($m \in \mathbf{Q}$), che fornisce la determinazione della (23)(i), senza dipendere da alcun altro presupposto che le regole dell'algebra ordinaria - applicate tanto a polinomi finiti che infiniti - e il metodo dei coefficienti indeterminati. Reiterando l'ovvia operazione che conduce da $f(x) = x^m$ ($m \in \mathbf{Q}$) alla sua derivata prima e dando per scontato che, per K indipendente da x, $\left(K\varphi(x)\right)' = K\,\varphi'(x)$,[130] Lagrange trae poi successivamente:

$$(29) \qquad \begin{aligned} f(x) &= x^m \\ f'(x) &= m\, x^{m-1} \\ f''(x) &= m(m-1)\, x^{m-2} \\ f'''(x) &= m(m-1)(m-2)\, x^{m-3} \\ &\&c. \end{aligned}$$

---

[130] Per questo basta osservare che per ogni funzione $\varphi(x)$ vale l'implicazione

$$\varphi(x+\xi) = \varphi(x) + p_1(x)\,\xi + p_2(x)\,\xi^2 + \&c. \Rightarrow K\,\varphi(x+\xi) = K\varphi(x) + Kp_1(x)\,\xi + Kp_2(x)\,\xi^2 + \&c.$$

la quale ci assicura che se $p_1(x)$ è la derivata prima di $\varphi(x)$, allora $Kp_1(x)$ è la derivata prima di $K\varphi(x)$.

che sostituite in (14) forniscono lo sviluppo binomiale per un esponente razionale qualsiasi.

Benché lo stesso risultato avrebbe potuto ottenersi reiterando ulteriormente i procedimenti che conducono alla (24) e alla (28), la dimostrazione fornita da Lagrange per mezzo del ricorso alla (14) sembra semplificare notevolmente il percorso dimostrativo e renderlo, almeno apparentemente, alieno da ogni sospetto di ricorso a un argomento induttivo, senza richiedere alcuna presupposizione di natura non strettamente algebrica. Ciò è tuttavia possibile solo qualora il teorema binomiale sia appunto ristretto al caso di esponenti razionali. Se tale teorema vuole quindi venir impiegato per determinare le coppie (23)(ii) - (23)(v), esso deve venir differentemente dimostrato, in modo che ne sia da garantita l'estendibilità anche al caso di esponenti irrazionali e immaginari. Nonostante l'ovvietà di tale osservazione, Lagrange passa sotto silenzio la difficoltà tanto nella prima che nella seconda edizione della *Théorie*, impiegando in diverse occasioni il teorema del binomio generalizzato al caso di esponenti reali o complessi, senza fornirne alcuna ulteriore dimostrazione. Tale lacuna è colmata - e in parte giustificata (almeno per ciò che riguarda il caso di esponenti reali) - nelle *Leçons*. Indicata la possibilità di pervenire ai primi due termini dello sviluppo binomiale ristretto a esponenti razionali per mezzo delle "prime operazioni dell'algebra", Lagrange scrive:

> Comme tout nombre irrationnel peuvent être renfermé entre des limites rationnelles aussi renserrées que l'on veut, on pourrait conclure tout de suite la verité du résultat précédent pour une valeur quelconque irrationnelle de *m*, puisqu'on peut, en rensserrant les limites, diminuer l'erreur à volonté.[131] Mais comme il est plutôt question ici de la forme même de la fonction dérivée, que de sa valeur absolue dans chaque cas particulier, nous croyons, pour ne rien laisser à désirer sur cette proposition fondamentale, devoir en donner une démonstration aussi générale que rigoureuse.[132]

La nuova dimostrazione di Lagrange è espressamente funzionale e non differisce da quella di Euler-Æpinus[133] che per il procedimento risolutivo dell'equazione funzionale $F(m+n) = F(m) + F(n)$ su cui essa verte.[134] Posta l'identità generica

$$(30) \qquad (1 + z)^m = 1 + z\,F(m) + \&c.$$

Lagrange trae

---

[131] Come si ricorderà, lo stesso argomento, per quanto implicitamente rigettato da Euler, era stato avanzato, qualche anno prima da Roth [cfr. il precedente paragrafo III.5.ζ.].

[132] Cfr. Lagrange (1801), p. 14 e (1806a), pp. 16-7. Per la dimostrazione cfr. *ivi*, pp. 14-17 e pp. 17-21

[133] Cfr. la nota (85) del precedente paragrafo II.2.κ..

[134] Cfr. Pensivy (1987-88), pp. 122-3.

$$(31)\qquad \begin{aligned}(1+z)^{m+n} &= (1+z)^{m}\cdot(1+z)^{n} = 1 + \Big(F(m) + F(n)\Big)z + \&c.\\ &= (1+z)^{m+\xi}\cdot(1+z)^{n-\xi} = 1 + \Big(F(m+\xi) + F(n+\xi)\Big)z + \&c.\end{aligned}$$

da cui segue, secondo la (14) e per il metodo dei coefficienti indeterminati,

$$(32)\qquad \begin{aligned}F(m) + F(n) &= F(m+\xi) + F(n-\xi)\\ &= F(m) + F(n) + \Big(F'(m) - F'(n)\Big)\xi + \&c.\end{aligned}$$

e quindi (ancora per il metodo dei coefficienti indeterminati): $F'(m) = F'(n)$. Tale equazione ci dice che la derivata di $F(m)$ non dipende da m e può quindi essere intesa come una costante. Per determinare F si tratta quindi di cercare la primitiva di $F'(m) = K$. Per questo basta notare che $K_{m+\xi} - K_m = 0$ e quindi, secondo la (14), $F(m+\xi) = F(m) + K\,\xi$,[135] ovvero:

$$(33)\qquad F(m) = F(m-m) + Km = F(0) + Km$$

Sostituendo nella (30) si avrà allora $(1+z)^m = 1 + [F(0) + Km]z + \&c.$ e quindi, ponendo successivamente $m = 0$ e $m = 1$, $F(0) = 0$[136] e $K = 1$, da cui sarà ovvio trarre le (29), senza più alcuna limitazione su m.

III. 6. *c. γ. La ricerca del coefficiente di ordine uno nello sviluppo in serie intera delle funzioni esponenziale e logaritmica*

Dimostrato il teorema del binomio generalizzato, la determinazione della coppie (23)(ii) e (iii) non pone più alcuna difficoltà. Posti infatti $f(x) = a^x$ e $a = 1+b$ si avrà, applicando tale teorema:

$$(34)\qquad \begin{aligned}f(x+\xi) &= a^{x+\xi} = a^x\cdot a^\xi = a^x\left[(1+b)^\xi\right]\\ &= a^x\left[1 + \xi\, b + \frac{\xi(\xi-1)}{2!}b^2 + \&c.\right]\\ &= a^x\left[1 + \xi\,(a-1) + \frac{\xi(\xi-1)}{2!}(a-1)^2 + \&c.\right]\end{aligned}$$

---

[135]Si osservi l'interpretazione di K come una funzione di m che Lagrange avrebbe potuto formalmente evitare ponendo $n = m+\xi$ e traendo quindi: $F'(m+\xi) - F'(m) = 0$ e quindi $F(m+\xi) = F(m) + F'(m)\,\xi$. Egli si rende evidentemente conto che la stessa considerazione di sviluppi in serie intera finiti implica l'interpretazione di una costante come una funzione.

[136]Benché la stessa conclusione derivi direttamente dalla (30) per la stessa posizione $m = 0$, Lagrange preferisce evidentemente una determinazione parallela di F(0) e K.

$$= a^x \left[1 + \left((a-1) - \frac{(a-1)^2}{2!} + \frac{(a-1)^3}{3!} + \&c. \right) \xi + \&c. \right]$$

$$= a^x + a^x \left[(a-1) - \frac{(a-1)^2}{2!} + \&c. \right] \xi + \&c.$$

da cui, ponendo per semplicità $(a-1) - \frac{(a-1)^2}{2!} + \frac{(a-1)^3}{3!} + \&c. = A$, segue: $\left(a^x\right)'$ $= Aa^x$. Sfruttando ancora una volta l'identità $\left(K\varphi(x)\right)' = K\,\varphi'(x)$ si avrà allora successivamente:

$$(35)\qquad \begin{aligned} f(x) &= a^x \\ f'(x) &= A\, a^x \\ f''(x) &= A^2\, a^x \\ f'''(x) &= A^3\, a^x \\ &\&c. \end{aligned}$$

La (14) darà allora:

$$(36)\qquad a^{x+\xi} = a^x \cdot a^\xi = a^x \left[1 + A\xi + \frac{A^2}{2!}\xi^2 + \frac{A^3}{3!}\xi^3 + \&c. \right]$$

$$\left[A = (a-1) - \frac{(a-1)^2}{2!} + \frac{(a-1)^3}{3!} - \&c. \right]$$

e quindi:

$$(37)\qquad a^\xi = 1 + A\xi + \frac{A^2}{2!}\xi^2 + \frac{A^3}{3!}\xi^3 + \&c.$$

$$\left[A = (a-1) - \frac{(a-1)^2}{2!} + \frac{(a-1)^3}{3!} - \&c. \right]$$

Se nella (37) si pone poi $\xi = 1/A$ si avrà $a^{1/A} = 2 + \frac{1}{2!} + \frac{1}{3!} + \&c. = e$ e quindi: $A = \log a$.

Ponendo d'altra parte $f(x) = \log_a x$, si avrà $x = a^{f(x)}$ e $x+\xi = {}^{f(x+\xi)}$, ovvero:

$$\text{i) } x + \xi = a^{f(x) + f'(x)\xi + \&c.} = a^{f(x)} \cdot a^{f'(x)\xi + \&c.}$$

$$(38) \qquad \text{ii) } \frac{x+\xi}{x} = 1 + \frac{\xi}{x} = a^{f'(x)\,\xi + \&c.}$$

$$= 1 + A\left(f'(x)\,\xi + \&c.\right) + \frac{A^2}{2!}\left(f'(x)\,\xi + \&c.\right)^2 + \&c.$$

Dividendo la (38)(ii) per ξ è allora facile trarre

$$(39) \qquad x^{-1} = \frac{A}{\xi}\left(f'(x)\,\xi + \frac{f''(x)}{2!}\xi^2 + \&c.\right) + \frac{A^2}{2!\,\xi}\left(f'(x)\,\xi + \frac{f''(x)}{2!}\xi^2 + \&c.\right)^2 + \&c.$$

$$= A\, f'(x) + \frac{\xi}{2!}\left[A\, f''(x) + A^2\, [f'(x)]^2\right] + \&c.$$

e, quindi, secondo il metodo dei coefficienti indeterminati, $f'(x) = \left(\log_a x\right)' = \frac{1}{x\,A} = \frac{1}{x \log a}$. Sfruttando anche in tal caso l'identità $\left(K\,\varphi(x)\right)' = K\,\varphi'(x)$ e ricordandosi che $\left(x^m\right)' = m\,x^{m-1}$ si avrà allora:

$$(40) \qquad \begin{aligned} f(x) &= \log_a x \\ f'(x) &= \frac{1}{x \log a} \\ f''(x) &= -\frac{1}{x^2 \log a} \\ f'''(x) &= \frac{2}{x^3 \log a} \\ &\&c. \end{aligned}$$

e quindi, secondo la (14):

$$(41) \qquad \log_a (x+\xi) = \log_a x + \frac{\xi}{x \log a} - \frac{\xi^2}{2\,x^2 \log a} + \frac{\xi^3}{3\,x^3 \log a} - \&c.$$

Se, analogamente a quelle fornite da Euler nell'*Introductio,*[137] le dimostrazioni di Lagrange della (37) e della (41) sono perfettamente indipendenti

[137] Cfr. il precedente paragrafo III.3.*c*. γ..

dall'impiego del calcolo differenziale, a differenza delle prime, esse evitano ogni ricorso a presupposizioni infinitesimaliste di sorta. Nonostante questo, richiedendo il ricorso a un operatore di sviluppo - determinato in base alla (39) - e a una formula generale come la (14), esse dovrebbero ascriversi, secondo la classificazione euleriana, all'analisi superiore, piuttosto che a quella algebrica. Per quanto una tale classificazione abbia ormai perduto, proprio alla luce della costituenda teoria delle funzioni derivate, il suo significato profondo, Lagrange pare ancora interessato ai problemi di collocazione a essa connessi. Non si spiegherebbe altrimenti la ragione dell'introduzione nella *Théorie* di un nuovo *excursus*, nel quale egli presenta una dimostrazione degli sviluppi delle funzioni esponenziale e logaritmica,[138] la quale, pur evitando ogni ricorso a presupposizioni infinitesimaliste, resta del tutto estranea anche alla (14) e alla teoria stessa delle funzioni derivate. Poste a questo scopo le equazioni identiche

$$(42)\qquad \begin{aligned} &\text{i)}\ a^x = \left[\left(1+(a-1)\right)^n\right]^{x/n} \\ &\text{ii)}\ \left(1+(a-1)\right)^{nx} = \left(1+(a^x-1)\right)^n \end{aligned}$$

Lagrange ne deriva rispettivamente (sfruttando il teorema generalizzato del binomio):

$$(43)\qquad \begin{aligned} a^x &= \left[1 + n(a-1) + \frac{n(n-1)}{2!}(a-1)^2 + \&c.\right]^{x/n} \\ &= \left[1 + \left(H_1 n + H_2 n^2 + \&c.\right)\right]^{x/n} \\ &= 1 + x\left(H_1 + H_2 n + \&c.\right) + \frac{x(x-n)}{2!}\left(H_1 + H_2 n + \&c.\right)^2 + \&c. \\ &\qquad\qquad \left[H_1 = A = (a-1) - \frac{(a-1)^2}{2!} + \frac{(a-1)^3}{3!} - \&c.\right] \end{aligned}$$

e

$$(44)\qquad \begin{aligned} &1 + nx\,(a-1) + \frac{nx(nx-1)}{2!}(a-1)^2 + \&c. = 1 + n(a^x-1) + \frac{n(n-1)}{2!}(a^x-1)^2 + \&c. \\ &x\,(a-1) + \frac{x(nx-1)}{2!}(a-1)^2 + \&c. = (a^x-1) + \frac{n-1}{2!}(a^x-1)^2 + \&c. \end{aligned}$$

[138]Cfr. Lagrange (1797), pp. 18-20 e (1813), pp. 31-3. Nessuna dimostrazione analoga si ritrova nelle *Leçons*.

Siccome tanto nella (42)(i) che la (42)(ii) n è una "quantità completamente arbitraria" la cui eliminazione conduce all'equazione $a^x = a^x$, è necessario che anche nella (43) e nella (44) i termini in n si semplifichino vicendevolmente. Eliminando tali termini dalla (43), questa si riduce immediatamente alla (37) (per $\xi=x$), mentre compiendo la stessa eliminazione nella (44) si ha

$$\text{(45)}\quad \begin{gathered} Ax = (a^x-1) - \frac{1}{2}(a^x-1)^2 + \frac{1}{3}(a^x-1)^3 - \&c. \\ \left[A = (a-1) - \frac{(a-1)^2}{2!} + \frac{(a-1)^3}{3!} - \&c. \right] \end{gathered}$$

da cui è ovvio trarre la (41), ponendo $a^x = 1 + \frac{\xi}{x}$ (ovvero: $x = \log_a(+\xi) - \log_a x$).[139]

[139] La (41) può secondo Lagrange essere utilizzata per determinare il valore di un logaritmo qualunque $\log_a z$, ma per questo - egli aggiunge - occorre aver attenzione alla convergenza [cfr. Lagrange (1797), pp. 22-2, (1813), pp. 33-6, (1801), pp. 24-9 e (1806a), pp. 31-7)]. Ponendo a esempio nella (45) $a^x = 1+t$ si trae

$$\log_a(1+t) = \frac{1}{\log a}\left[t - \frac{1}{2}t^2 + \frac{1}{3}t^3 - \&c.\right]$$

che secondo Lagrange converge solo se $1+t = z$ "differisce poco dall'unità" [la convergenza di tale formula è in realtà assicurata, come è ben conosciuto, per $|t| < 1$ e non può quindi servire che a calcolare i logaritmi dei numeri compresi fra zero e due] Per allargarne l'intervallo di convergenza questi pone $\sqrt[r]{z}$ in luogo di z traendo (dopo aver moltiplicato per r):

$$\log_a z = \frac{r}{\log a}\left[\left(\sqrt[r]{z} - 1\right) - \frac{1}{2}\left(\sqrt[r]{z} - 1\right)^2 + \frac{1}{3}\left(\sqrt[r]{z} - 1\right)^3 - \&c.\right]$$

che convergendo per $\left|\sqrt[r]{z} - 1\right| < 1$, può, scegliendo opportunamente r, essere utilizzata per calcolare il logaritmo di tutti i numeri [si osservi che il problema della convergenza sorge qui, in linea con il punto di vista euleriano, solo relativamente alle applicazioni delle formule di sviluppo]. La (37) può per contro essere applicata alla ricerca delle potenze intere di una somma qualsiasi finita o infinita [cfr. Lagrange (1801), pp. 29-30 e (1806a), pp. 37-8]. Ponendo infatti $a = e$ e $\xi = z\,(p+q+r+\&c.)$ si avrà:

$$e^{zp} \cdot e^{zq} \cdot e^{zr} \cdot \&c. = 1 + z(p+q+r+\&c.) + \frac{z^2}{2!}(p+q+r+\&c.)^2 + \ldots + \frac{z^\nu}{\nu!}(p+q+r+\&c.)^\nu + \&c.$$

e, sviluppando gli esponenziali, è facile comprendere che il coefficiente $\frac{(p+q+r+\&c.)^\nu}{\nu!}$ è composto da tanti termini della forma $\frac{p^\rho \cdot p^\sigma \cdot p^\tau \cdot \&c.}{\rho!\,\sigma!\,\tau!\,\&c.}$ quanti sono i valori differenti che possono venir assegnati a ρ, σ, τ, &c. in modo che la somma $\rho + \sigma + \tau + \&c.$ sia uguale a ν.

III. 6. c. δ. *La ricerca del coefficiente di ordine uno nello sviluppo in serie intera delle funzioni trigonometriche*

La particolare natura delle funzioni trigonometriche, nel contesto delle funzioni elementari, e la difficoltà che essa pone al programma dell'analisi euleriana sono state più volte richiamate nel corso della presente dissertazione.[140] Intese come funzioni genuinamente elementari, queste non possono infatti venir liberate dalla loro originaria condizioni di entità essenzialmente geometriche, a meno che, grazie a un atto di forza - che tuttavia contraddice l'ideale illuminista di una genealogia matematica - esse non vengano direttamente definite per mezzo dell'ipostatizzazione di alcune delle loro proprietà analitiche. A una tale procedura (che rende evidentemente necessaria l'introduzione contemporanea tanto del seno che del coseno e spiega quindi la presenza di entrambe tali funzioni nella lista delle funzioni elementari[141]) possono essere contrapposte almeno due diverse alternative. La prima consiste nell'introdurre le funzioni trigonometriche come soluzioni di un adeguato sistema di equazioni funzionali, la seconda consiste invece nel definirle come combinazioni opportune di esponenziali immaginari. Se nel secondo caso appare difficile continuare a giustificare il trattamento di tali funzioni come elementari (in modo che il loro interesse particolare non potrebbe giustificarsi che relativamente a certe applicazioni dell'analisi), nel primo si sarebbe nella difficile condizione di dover trattare con una funzione elementare definita in termini impliciti e non per mezzo dell'esplicito riconoscimento del legame operazionale che essa manifesta.[142] Come era già stato il caso di Euler (e di Arbogast[143]) la determinazione dello sviluppo (del suo primo termine) delle funzioni trigonometriche pone così a Lagrange numerose difficoltà e questi non perviene a un tale risultato, nelle due edizioni della *Théorie* e nelle *Leçons*, che per tre cammini diversi, nessuno dei quali sembra veramente soddisfacente.

Il punto di partenza del procedimento presentato nella prima edizione della *Théorie*[144] è costituito dall'esibizione delle tre seguenti identità:

$$\text{(46)} \qquad \text{i) } \cos x = \sqrt{1 - \sin^2 x}$$

$$\text{ii) } \sin x = W_1 x + W_2 x^2 + \&c. \qquad [W_1,\ W_2,\ \&c. \text{ indeterminati}]$$

---

[140] Cfr. a esempio i precedenti paragrafi III.3.*c*.α. e III.6.*a*.γ..

[141] Cfr. le precedenti note (27) e (128).

[142] Si osservi che dal punto di vista di Lagrange (e Euler) ciò significa che il legame fra *x* e *y* esibito da una funzione trigonometrica $y = f(x)$ non è ricondotto a una relazione operazionale in qualche modo riducibile alle quattro operazioni dell'algebra ordinaria, assunte come *elementi* dati e originari di ogni teoria matematica. La vera difficoltà è allora ancora quella legata all'irriducibilità delle funzioni trigonometriche all'ideale genealogico descritto nel precedente paragrafo III.6.*a*.γ..

[143] Cfr. Arbogast (1779).

[144] Cfr. Lagrange (1797), pp. 22-8.

$$\text{iii)} \cos nx + \sqrt{-1} \sin nx = \left(\cos x + \sqrt{-1} \sin x\right)^n$$

le quali vengono assunte come date.[145] Combinando la (46)(i) e la (46)(ii) sarà facile trarre, applicando il teorema del binomio a un polinomio infinito,

$$\begin{aligned} \cos x &= \left[1 - \left(W_1 x + W_2 x^2 + \&c.\right)^2\right]^{1/2} \\ &= 1 - \frac{1}{2} W_1^2 x^2 + \&c. \end{aligned} \tag{47}$$

da cui segue, secondo la (46)(ii) e la (46)(iii):

$$\begin{aligned} \cos x + \sqrt{-1} \sin x &= \left[\cos nx + \sqrt{-1} \sin nx\right]^{1/n} \\ &= \left[1 + n\sqrt{-1}\, W_1 x - n^2\left(\sqrt{-1}\, W_2 - \frac{1}{2} W_1^2\right)x^2 + \&c.\right]^{1/n} \\ &= \left[1 + n\vartheta\right]^{1/n} \\ &= 1 + \vartheta + \frac{1-n}{2!}\vartheta^2 + \frac{(1-n)(1-2n)}{3!}\vartheta^3 + \&c. \\ &\left[\vartheta = W_1\sqrt{-1}\, x - n\left(\sqrt{-1}\, W_2 - \frac{1}{2} W_1^2\right)x^2 + \&c.\right] \end{aligned} \tag{48}$$

Essendo il primo membro della (48) indipendente dal fattore arbitrario n, è evidente che i termini del suo sviluppo nei quali compare tale fattore dovranno semplificarsi vicendevolmente. Eliminando i termini in $n\vartheta$ esso si ridurrà al prodotto immaginario $W_1 \sqrt{-1}\, x$ e la (48) assumerà quindi la forma seguente

$$\begin{aligned} \cos x + \sqrt{-1} \sin x = 1 + W_1\sqrt{-1}\, x - \frac{1}{2!} W_1^2 x^2 - \\ - \frac{1}{3!} W_1^3 \sqrt{-1}\, x^3 + \frac{1}{4!} W_1^4 x^4 + \&c. \end{aligned} \tag{49}$$

da cui, uguagliando fra loro le parti reali e quelle immaginarie, sarà facile trarre:[146]

---

[145] In quanto tale, la (46)(ii) è in realtà giustificata da Lagrange, assumendo come noto che $\sin 0 = 0$.

[146] Si osservi che, a differenza che nei casi precedenti, Lagrange determina qui in primo luogo lo sviluppo delle funzioni $f(x) = \sin x$ e $f(x) = \cos x$, senza fare alcun ricorso alla (14). Se il procedimento con cui egli perviene a tali risultati appare per certi versi

$$
(50)\quad
\begin{aligned}
&\text{i) } \cos x = 1 - \frac{1}{2!} W_1^2 x^2 + \frac{1}{4!} W_1^4 x^4 - \&c.\\
&\text{ii) } \sin x = W_1 x - \frac{1}{3!} W_1^3 x^3 + \frac{1}{5!} W_1^5 x^5 - \&c.
\end{aligned}
$$

In queste ultime formule il coefficiente W_1 resta tuttavia ancora indeterminato. Ciò dimostra che le condizioni stabilite dalle (46) non caratterizzano il seno e il coseno che a meno di un parametro costante che deve essere fissato. Agli occhi di un matematico moderno la situazione appare qui essenzialmente simile a quella in cui si trovano le stesse funzioni esponenziale e logaritmica, le quali risultano definite relativamente a una costante che individua il modulo del sistema logaritmico considerato. Mentre tale costante entra tuttavia esplicitamente nella definizione analitica di queste ultime funzioni, ugualmente non avviene per le funzioni trigonometriche, il cui valore dipende da un parametro che è generalmente introdotto dai matematici preeuleriani come la misura del raggio del cerchio su cui seno e coseno sono definiti. Ciò comporta l'impossibilità di caratterizzare la costante W_1 per mezzo di un'identità analoga a quella che caratterizza A nella (37), non essendo possibile trovare - a meno che non si scelga di *definire* il seno e il coseno come esponenziali immaginari[147] - alcuna "quantità analitica" che possa svolgere qui il ruolo della base a: o la determinazione di W_1 è quindi lasciata a una convenzione arbitraria, la quale non appare in nessuna scrittura analitica che non sia essenzialmente metalinguistica o essa deve quindi essere fissata una volta per tutte, in ottemperanza alla stessa pratica matematica diffusa.

Come già aveva fatto Euler,[148] anche Lagrange sceglie la seconda via, ma a differenza di questi, egli non può accettare l'idea di determinare W_1 richiamandosi - oltre che all'implicita considerazione di un cerchio di raggio unitario - anche alle ragioni fornite da una presupposizione apertamente

---

analogo a quello che fornisce le dimostrazioni della (37) e della (41) presentate in conclusione del precedente paragrafo III.6.*c*.γ., ciò che segna la differenza essenziale rispetto al caso delle funzioni esponenziale e logaritmica è che esso fa parte integrante dell'argomento che conduce alla determinazioni delle coppie (23)(iv) e (23)(v).

[147]Cfr. *sotto*.

[148]Cfr. il precedente paragrafo III.3.*c*.ε. e, in particolare, la nota (146). A proposito della tesi sostenuta in tale nota, si osservi che se è vero che lo stesso Lagrange non ha ancora attraversato il guado e resta legato a una concezione delle funzioni trigonometriche come oggetti determinati propri della matematica precedente, ciò appare *in parte* dovuto agli stessi vincoli epistemologici posti dalla concezione lagrangiana dell'analisi come scienza strettamente formale, concezione che impedisce non solo il ricorso a una definizione implicita di tali funzioni *via* un sistema di equazioni funzionali, ma anche l'introduzione metalinguistica di un parametro arbitrario a cui legare un determinato "sistema trigonometrico". La specificazione "in parte" è peraltro essenziale. Quando nella seconda edizione della *Théorie* Lagrange dissolverà quest'ultima difficoltà, definendo il seno e il coseno come degli esponenziali immaginari, egli porrà direttamente $a = e$, in modo da ritrovare le funzioni trigonometriche usuali (cfr. *sotto*).

infinitesimalista (che, fornendo l'identità di forma finita sin $\omega = \omega$ (ω infinitamente piccolo), permetterebbe di concludere subito che W_1 è uguale all'unità). Per evitare di ricorrere a un simile artificio Lagrange é tuttavia costretto a rendere esplicito il ricorso a argomenti di carattere geometrico.

Confrontando la (49) con la (37), ponendo in essa $W_1 = A$, egli trae le identità

$$\text{(51)} \qquad \cos x \pm \sqrt{-1} \sin x = a^{\pm x\sqrt{-1}}$$

che, sommate e sottratte fra di loro, danno immediatamente:

$$\text{(52)} \qquad \begin{aligned} &\text{i) } \cos x = \frac{a^{x\sqrt{-1}} + a^{-x\sqrt{-1}}}{2} \\ &\text{ii) } \sin x = \frac{a^{x\sqrt{-1}} - a^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} \end{aligned}$$

Tali formule non sono tuttavia assunte da Lagrange come delle definizioni del seno e del coseno, le quali sono considerate come delle funzioni *date*. Benché la costante *a* potrebbe, in caso contrario, essere intesa come un parametro che caratterizza (linguisticamente) il sistema trigonometrico in esame[149] - risolvendo le difficoltà precedenti - essa deve quindi venir determinata in modo che i primi membri delle (51) (che ne sono indipendenti) risultino effettivamente uguali ai secondi. Ecco il commento di Lagrange:

> Mais il y a ici une remarque importante à faire; c'est que dans les formules que nous venons de trouver, la quantité A [$=W_1$], ainsi que *a*, étant arbitraire, le système de logarithmes peut être pris à volonté; au lieu que dans les formules ordinaires relatives aux arcs de cercle, le module A est égal à l'unité, ce qui donne pour la base le nombre *e*, dont le logarithme hyperbolique est l'unité. Ainsi celles-ci ne sont qu'un cas particulier de celles que nous avons trouvées; mais cette particularisation est nécessaire pour qu'elles soient applicables au cercle, comme nous l'allons démontrer.[150]

A questo scopo si osservi che ,essendo un arco qualsiasi sempre compreso fra il suo seno e la sua tangente,[151] si avrà

---

[149]Basterebbe a tale scopo porre, come nel caso del logaritmo:

$$\text{i) } \cos_a x = \frac{a^{x\sqrt{-1}} + a^{-x\sqrt{-1}}}{2}$$

$$\text{ii) } \sin_a x = \frac{a^{x\sqrt{-1}} - a^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

[150]Cfr. Lagrange (1797), pp. 25-6 e (1813), p. 40 [la presenza di un tale brano nella seconda edizione della Théorie è giustificata più sotto].

[151]Per giustificare la propria assunzione Lagrange si riferisce esplicitamente a Archimede, affermando che il seno di un arco è uguale alla metà della corda di un arco

$$(53) \qquad \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} < \sin x < x$$

e quindi, secondo la (50)(ii):

$$(54) \qquad 1 - x^2 < \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} < W_1 - \frac{1}{3!} W_1^3 x^2 + \&c. < 1$$

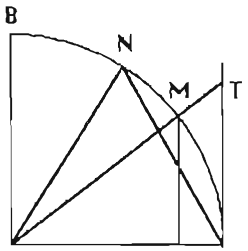
La serie che compare in tale disuguaglianza può tuttavia, per un'opportuna scelta di x, essere sempre resa convergente e tale che il suo secondo termine sia maggiore in modulo della somma di tutti i successivi.[152] Preso $|x|$ minore di un δ opportuno si avrà allora $W_1 - \frac{1}{3!} W_1^3 x^2 < W_1 - \frac{1}{3!} W_1^3 x^2 + \&c. < W_1$ e quindi, *a fortiori*, $W_1 - \frac{1}{3!} W_1^3 x^2 < 1$ e $W_1 > 1-x^2$ ovvero, *per ogni* x di modulo minore di δ:

$$(55) \qquad 1 - x^2 < W_1 < 1 + \frac{1}{3!} W_1^3 x^2$$

ciò che non può essere vero che a condizione che $W_1 = 1$.

Benché Lagrange non avesse presentato l'argomento che conduce alle (50) (per la sostituzione $W_1 = 1$) che come un'ulteriore "applicazione" del "metodo" con cui egli era pervenuto a dimostrare la (37) e la (41) nel corso dell'*excursus* considerato alla fine del precedente paragrafo III.6.*c*.γ., egli non

doppio rispetto a questo. Con tale precisazione Lagrange esplicita la propria interpretazione del seno e della tangente non come dei rapporti a denominatore costante (il cui valore fornisce il parametro rispetto a cui sono generalmente definite le funzioni trigonometriche), ma come gli stessi segmenti XM e AT (ciò che fissa implicitamente il valore del parametro, che risulta evidentemente uguale all'unità).



[152]Se Lagrange impiega qui il teorema sulla velocità della convergenza discusso nel precedente paragrafo III.6.*a*.δ. in un contesto non applicativo e prima di aver dimostrato il teorema del resto, questo non è che un sintomo dell'inadeguatezza della dimostrazione proposta.

esita a applicare tali sviluppi alla determinazione delle coppie (23)(iv) e (v).[153] Assumendo le identità sin $(\alpha+\beta) = (\sin \alpha)(\cos \beta) + (\sin \beta)(\cos \alpha)$ e $\cos(\alpha+\beta) = (\cos \alpha)(\cos \beta) - (\sin \alpha)(\sin \beta)$ e impiegando le (50) egli può infatti trarre:

$$
(56)\quad
\begin{aligned}
\text{i) } \cos(x+\xi) &= (\cos x)\left(1 - \frac{1}{2!}\xi^2 + \&c.\right) - (\sin x)\left(\xi - \frac{1}{3!}\xi^3 + \&c.\right)\\
&= \cos x - \xi \sin x + \&c.\\
\text{ii) } \sin(x+\xi) &= (\sin x)\left(1 - \frac{1}{2!}\xi^2 + \&c.\right) + (\cos x)\left(\xi - \frac{1}{3!}\xi^3 + \&c.\right)\\
&= \sin x + \xi \cos x - \&c.
\end{aligned}
$$

da cui segue, senza alcuna difficoltà, $\left(\sin x\right)' = \cos x$ e $\left(\cos x\right)' = -\sin x$. Sfruttando ancora l'identità $\left(K\varphi(x)\right)' = K\,\varphi'(x)$ è allora facile trarre

$$
(57)\quad
\begin{aligned}
&\text{i) } f(x) = \sin x && \text{ii) } f(x) = \cos x\\
&f'(x) = \cos x && f'(x) = -\sin x\\
&f''(x) = -\sin x && f''(x) = -\cos x\\
&f'''(x) = -\cos x && f'''(x) = \sin x\\
&\&c. && \&c.
\end{aligned}
$$

a partire dalle quali Lagrange non può che ritrovare gli stessi sviluppi da cui tali identità dipendono.

L'insoddisfazione dello stesso Lagrange nei confronti della propria dimostrazione è resa evidente dal fatto che nelle *Leçons*[154] egli la sostituisce con un procedimento diverso, il quale sembra tuttavia cadere nelle medesime difficoltà. Per trarre le (50) - che sono anche in questo caso presupposte alla determinazione delle (57) - egli pone l'identità generica

$$
(58)\quad \sin x = W_1 x^{n_1} + W_2 x^{n_2} + \&c. \qquad [0 < n_1 < n_2 < \&c.\ ;\ n_1, n_2, \&c. \in \mathbf{N}]
$$

(che non può venire giustificata che assumendo sin 0 = 0) e, assumendo la (46)(i) e la regola per il seno di una somma, ne deriva senza difficoltà

[153] Cfr. la precedente nota (146).

[154] Cfr. Lagrange (1801), lez. V, pp. 31-5 e (1806a), lez. V, pp. 39-46.

$$\text{(59)}\qquad \begin{aligned}\sin 2x &= 2^{n_1} W_1 x^{n_1} + 2^{n_2} W_2 x^{n_2} + \&c..\\ &= 2 (\sin x) \sqrt{1 - \sin^2 x}\\ &= 2W_1 x^{n_1} + 2 W_2 x^{n_2} + \&c. - W_1^3 w^{3n_1} - \&c.\end{aligned}$$

e quindi, per il metodo dei coefficienti indeterminati, $2^{n_1} = 2$, ovvero: $n_1 = 1$. Stabilito in tal modo il termine di ordine uno dello sviluppo di sin x, Lagrange può trarre, tramite la (46)(i), anche il termine di ordine due dello sviluppo del coseno e ragionare come nella prima edizione della *Théorie* per determinare W_1 e da qui le (57).

A fronte della (3), la (58) non è certo una presupposizione più debole della (46)(ii); la differenza fra la dimostrazione della prima edizione della *Théorie* e quella delle *Leçons* si riduce quindi al fatto che la prima mostra con maggiore evidenza come le (57) non dipendano che dal calcolo dei primi termini delle (50), posto che si assuma surrettiziamente (come fa Lagrange) la nullità dei termini di ordine pari della (50)(ii). Ciò che vi è di effettivamente nuovo nelle *Leçons* è piuttosto la considerazione delle funzioni trigonometriche inverse, come delle funzioni elementari. Posto f(x) = arc.sin x, si avrà ovviamente x = sin f(x) e quindi, secondo le (57),

$$\text{(60)}\qquad \begin{aligned} x + \xi &= \sin\left(f(x) + \xi f'(x) + \frac{\xi^2}{2!} f''(x) + \&c.\right)\\ &= \left[\sin f(x)\right]\left[\cos\left(\xi f'(x) + \&c.\right)\right] + \left[\cos f(x)\right]\left[\sin\left(\xi f'(x) + \&c.\right)\right]\\ &= x\left[1 - \frac{\left(\xi f'(x) + \&c.\right)^2}{2!} + \&c.\right] + \sqrt{1 - x^2}\left[\xi f'(x) + \frac{\xi^2}{2!} f''(x) + \&c.\right]\\ &= x + \left[f'(x)\sqrt{1 - x^2}\right]\xi + \left[\sqrt{1 - x^2}\, f'(x) - x[f'(x)]^2\right]\frac{\xi^2}{2!} + \&c.\end{aligned}$$

e quindi, secondo il metodo dei coefficienti indeterminati: $f'(x) = \left(\text{arc.sin}\, x\right)' = \dfrac{1}{\sqrt{1 - x^2}}$. Con un procedimento analogo sarà poi possibile determinare la derivata prima dell'arco coseno. Per trovare poi le derivate di ordine superiore occorrerà applicare l'algoritmo di derivazione delle funzioni composte che Lagrange non dimostra che in un secondo tempo.

Il procedimento che conduce nella prima edizione della *Théorie* alla costruzione delle (50) e alla successiva determinazione della costante W_1 costituisce nella seconda edizione - insieme a quello che conduce alla (37) e alla (41) senza l'ausilio della (14) - l'oggetto di una digressione (alla quale Lagrange dedica un intero capitolo[155]) esplicitamente estranea allo svolgersi dell'argomento principale che presiede alla determinazione algoritmica dell'operatore di derivazione. La determinazione delle coppie (23)(iv)-(v) è invece lasciata a un procedimento essenzialmente diverso, che resta in quanto tale indipendente da ogni considerazione geometrica. Il peso sopportato nelle precedenti dimostrazioni dal richiamo alle proprietà di un cerchio di cui il seno è definito come l'ordinata (posto il centro nell'origine degli assi) è infatti ora completamente scaricato sulla stessa definizione analitica del seno e del coseno come esponenziali immaginari di base *e*. Ecco come Lagrange si esprime:

> Les sinus et cosinus d'angles considérés analytiquement, ne sont que des expressions composées d'exponentielles imaginaires; ainsi on peut déduire leurs fonctions dérivées de celles de ces exponentielles.[156]

Poste le (52)[157] per la sostituzione $a = e$ si avrà, sfruttando la (36) (in cui si dovrà porre A = 1),

$$(61)\quad \text{i) } \sin(x+\xi) = \frac{e^{(x+\xi)\sqrt{-1}} - e^{-(x+\xi)\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}$$

$$= \frac{1}{2\sqrt{-1}}\left[e^{x\sqrt{-1}}\left(1+\xi\sqrt{-1}-\frac{\xi^2}{2!}+\&c.\right)-e^{-x\sqrt{-1}}\left(1-\xi\sqrt{-1}+\frac{\xi^2}{2!}+\&c.\right)\right]$$

$$= \frac{e^{x\sqrt{-1}} - e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}} + \left(\frac{e^{x\sqrt{-1}} + e^{-x\sqrt{-1}}}{2}\right)\xi + \&c.$$

$$= \sin x + [\cos x]\,\xi + \&c.$$

[155]Cfr. Lagrange (1813), cap. IV, pp. 31-42. Il titolo di tale capitolo ne esprime bene l'estraneità rispetto all'argomento principale della *Théorie*: "Digression sur la manière de déduire les séries qui expriment les exponentielles, les logarithmes, les sinus, cosinus et les arcs, de simples considération algébriques" [ovvero: senza far ricorso alla (14) e all'operatore di sviluppo che essa definisce].

[156]Cfr. Lagrange (1813), p. 24.

[157]Per una deduzione di tali formule a partire dall'algoritmo delle funzioni derivate cfr. Lagrange (1797), pp. 53-4 e (1813), pp. 73-5.

$$\text{ii) } \cos(x+\xi) = \frac{e^{(x+\xi)\sqrt{-1}} + e^{-(x+\xi)\sqrt{-1}}}{2}$$

$$= \frac{1}{2}\left[e^{x\sqrt{-1}}\left(1+\xi\sqrt{-1}-\frac{\xi^2}{2!}+\&c.\right)+e^{-x\sqrt{-1}}\left(1-\xi\sqrt{-1}+\frac{\xi^2}{2!}+\&c.\right)\right]$$

$$= \frac{e^{x\sqrt{-1}}+e^{-x\sqrt{-1}}}{2} - \left(\frac{e^{x\sqrt{-1}}-e^{-x\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}\right)\xi + \&c.$$

$$= \cos x + [\text{son } x]\, \xi + \&c.$$

da cui le (57) seguono senza più alcuna difficoltà.[158]

Se, in quanto tale, la nuova dimostrazione è certamente più soddisfacente delle precedenti, ciò non dipende che dal fatto che Lagrange ha spostato e sottaciuto la difficoltà, non solo assumendo le (52), pur continuando a intendere il seno e il coseno come funzioni elementari, ma soprattutto ponendo in esse arbitrariamente $a = e$, ciò che non può derivare che dal desiderio di ritrovare, in termini analitici, un determinato oggetto geometrico *già* dato.

III. 6. *c. ε. Il secondo passo verso la determinazione dell'operatore di sviluppo: l'algebra delle derivate*

Determinate le (23), la possibilità di generalizzare l'operatore di derivazione alle funzioni non elementari dipende dall'introduzione di opportune regole di composizione che ne stabiliscano l'algebra. Se $\varphi(x)$, $\phi(x)$ e $\psi(x)$ sono delle funzioni qualsiasi della stessa variabile x, si tratta per questo di determinare le coppie seguenti:

$$\text{(62)} \qquad \text{i) } \langle f(x) = \varphi(x) + \phi(x),\ f'(x) = \Big(\varphi(x) + \phi(x)\Big)' = p_1(x)\big|_{f(x) = \varphi(x)+\phi(x)} \rangle$$

$$\text{ii) } \langle f(x) = [\varphi(x)]\cdot[\phi(x)],\ f'(x) = \Big([\varphi(x)]\cdot[\phi(x)]\Big)' = p_1(x)\big|_{f(x) = [\varphi(x)]\cdot[\phi(x)]} \rangle$$

$$\text{iii) } \langle f(x) = \frac{\varphi(x)}{\phi(x)},\ f'(x) = \left(\frac{\varphi(x)}{\phi(x)}\right)' = p_1(x)\big|_{f(x) = \varphi(x)/\phi(x)} \rangle$$

[158] Date le (52) ($a = e$), Lagrange si limita a un accenno assai vago all'argomento che conduce da esse alle (57). Dalle sue indicazione sembra tuttavia che egli pensi a un procedimento diverso da quello indicato, il quale sfrutti le (35) per trarre direttamente le derivate del seno e del coseno senza passare per la determinazione del termine di ordine uno degli sviluppi in serie intera di sin $(x+\xi)$ e cos $(x+\xi)$. A questo scopo è tuttavia necessario presupporre non solo la regola per la derivazione di una funzione $K\varphi(x)$, ma anche quella per la derivazione di una somma di funzioni, ciò che rende ancora più evidente il carattere non elementare delle funzioni trigonometriche.

$$\text{iv)}\ \left\langle f(x) = \varphi o \phi(x),\ f'(x) = \Big(\varphi o \phi(x)\Big)' = p_1(x)\big|_{\varphi o \phi(x)} \right\rangle$$

e di aggiungere a esse una regola di derivazione per le funzioni esibite implicitamente per mezzo di un'equazione algebrica.[159]

Essendo le derivate definite come i coefficienti di ordine uno di certi sviluppi in serie intera, il secondo elemento di ognuno di tali coppie non fa che esprimere le regole di composizione dei coefficienti di due serie intere fra cui è stabilita la relazione operazionale indicata dal primo elemento. Assunta le possibilità di operare termine a termine sulle serie intere secondo le regole dell'algebra ordinaria, la determinazione delle (62) non pone quindi alcuna difficoltà né di principio, né di fatto.

Ponendo rispettivamente: $f(x) = \varphi(x) + \phi(x)$, $f(x) = [\varphi(x)]\cdot[\phi(x)]$ e $f(x) = \varphi(x)/\phi(x)$, si avrà, secondo la (14),

(63)

$$\begin{aligned}
\text{i)}\ f(x+\xi) &= \varphi(x+\xi) + \phi(x+\xi) \\
&= \Big[\varphi(x) + \varphi'(x)\,\xi + \&c.\Big] + \Big[\phi(x) + \phi'(x)\,\xi + \&c.\Big] \\
&= \Big[\varphi(x) + \varphi(x)\Big] + \Big[\varphi'(x) + \phi'(x)\Big]\xi + \&c. \\
\text{ii)}\ f(x+\xi) &= [\varphi(x+\xi)]\cdot[\phi(x+\xi)] \\
&= \Big[\varphi(x) + \varphi'(x)\,\xi + \&c.\Big]\cdot\Big[\phi(x) + \phi'(x)\,\xi + \&c.\Big] \\
&= \Big[[\varphi(x)]\cdot[\phi(x)]\Big] + \Big[[\varphi'(x)]\cdot[\phi(x)] + [\phi'(x)]\cdot[\varphi(x)]\Big]\xi + \&c. \\
\text{iii)}\ f(x+\xi) &= \frac{\varphi(x+\xi)}{\phi(x+\xi)} = [\varphi(x+\xi)]\cdot[\phi(x+\xi)]^{-1} \\
&= \Big[\varphi(x) + \varphi'(x)\,\xi + \&c.\Big]\cdot\Big[\phi(x) + \phi'(x)\,\xi + \&c.\Big]^{-1} \\
&= \Big[\varphi(x) + \varphi'(x)\,\xi + \&c.\Big]\cdot\left[\frac{1}{\phi(x)} - \frac{\phi'(x)}{[\phi(x)]^2}\xi + \&c.\right] \\
&= \frac{\varphi(x)}{\phi(x)} + \left[\frac{[\varphi'(x)]\cdot[\phi(x)] - [\phi'(x)]\cdot[\varphi(x)]}{[\phi(x)]^2}\right]\xi + \&c.
\end{aligned}$$

da cui è ovvio trarre:

(64) $$\text{i)}\ \Big(\varphi(x) + \phi(x)\Big)' = \varphi'(x) + \phi'(x)$$

[159]Cfr. Lagrange (1797), pp. 28-32, (1813), pp. 25-30, (1801), pp. 36-41 e (1806a), pp. 47-54.

$$\text{ii)} \left([\varphi(x)] \cdot [\phi(x)]\right)' = [\varphi'(x)]\cdot[\phi(x)] + [\phi'(x)]\cdot[\varphi(x)]$$

$$\text{iii)} \left(\frac{\varphi(x)}{\phi(x)}\right)' = \frac{[\varphi'(x)]\cdot[\phi(x)] - [\phi'(x)]\cdot[\varphi(x)]}{[\phi(x)]^2}$$

ciò che determina le (62)(i)-(iii).

Per determinare la (62)(iv) si ponga $f(x) = \varphi \circ \phi(x) = \varphi\left(\phi(x)\right)$ e $\phi'(x)\xi + \frac{\phi''(x)}{2!}\xi^2 + \&c. = \omega$, in modo da trarre:

$$\begin{aligned} f(x+\xi) &= \varphi\left(\phi(x+\xi)\right) = \varphi\left(\phi(x) + \omega\right) \\ &= \varphi\left(\phi(x)\right) + \varphi'\left(\phi(x)\right)\omega + \&c. \\ &= \varphi\left(\phi(x)\right) + \left[\varphi'\left(\phi(x)\right)\cdot[\phi'(x)]\right]\xi + \&c. \end{aligned} \tag{65}$$

Qui la derivata prima di $f(x)$ é ancora una funzione della variabile x, ma essa è calcolata considerando l'incremento ω non di tale variabile, ma della sua funzione $z = \phi(x)$ e potrà quindi essere indicata per mezzo della notazione $\varphi'_z(x) = \varphi'_{\phi(x)}(x)$ che verrà impiegata in seguito in luogo della più ambigua notazione di Lagrange.[160] La (65) rende allora esplicito che la derivazione è un'operazione che si applica a una funzione, relativamente a una variabile che deve, esplicitamente o implicitamente, essere fissata e permette di trarre la regola seguente:

$$\left(\varphi \circ \phi(x)\right)' = \left(\varphi\left(\phi(x)\right)\right)' = \left[\varphi'_{\phi(x)}(x)\right]\cdot[\phi'(x)] = \left[\varphi'_{\phi(x)}(x)\right]\left[\phi'_x(x)\right] \tag{66}$$

che determina la (62)(iv).

Si tratta quindi ora di fornire una regola di derivazione per le funzioni esibite implicitamente per mezzo di un'equazione algebrica $F(x, y) = 0$. Supponendo l'esistenza di una soluzione $y = \psi(x)$ si avrà, per ogni x, $F\left(x, \psi(x)\right) = \Phi(x) = 0$. Ponendo $x+\xi$ in luogo di x si avrà allora $\Phi(x+\xi) = \Phi(x) + \Phi'(x)\xi + \&c. = 0$ e quindi, secondo il metodo degli indeterminati, $\Phi'(x) = 0$. La soluzione del problema dipende dunque dalla possibilità di esprimere $\Phi'(x)$

[160] Lagrange usa in questo caso la notazione $f'p$, specificando verbalmente che p è una funzione di x (nella notazione di Lagrange una funzione è generalmente indicata da una lettera funzionale seguita da una variabile, senza far uso di parentesi come nella convezione oggi diffusa che è ho fin qui impiegato).

nei termini di $\varphi'(x)$ e di altre funzioni che derivano da $F(x, y)$ per mezzo di un algoritmo stabilito. A questo scopo è tuttavia necessario determinare l'algoritmo di "'" relativamente a una funzione a due variabili, che secondo Lagrange non è che "une fonction composée de différents fonctions particulières".[161] Considerata, alla maniera di Newton,[162] una funzione a due variabili $F(x, y)$ come una funzione $F(\varphi(t), \phi(t))$ di due funzioni fra loro indipendenti della medesima variabile, questi può infatti intendere la teoria delle derivate (totali) di funzioni a due o più variabili come una semplice estensione della teoria delle funzioni derivate di una sola variabile, estensione che può interamente venire fondata sul principio che afferma che il risultato della sostituzione di $t+\theta$ a t in $F(\varphi(t), \phi(t))$ è lo stesso se, invece di fare tale sostituzione contemporaneamente in φ e in ϕ la si faccia *prima* in φ e *poi* in ϕ. Ponendo $t+\theta$ in luogo di t nella funzione $\varphi(t)$ si avrà in primo luogo

$$F\Big(\varphi(t+\theta), \phi(t)\Big) = F\Big(\varphi(t), \phi(t)\Big) + F'_{\varphi(t)}\Big(\varphi(t), \phi(t)\Big)\varphi'(t)\,\theta + \&c. \tag{67}$$

e, sostituendo $t+\theta$ a t in $\phi(t)$,

$$\begin{aligned} F\Big(\varphi(t+\theta), \phi(t+\theta)\Big) &= F\Big(\varphi(t), \phi(t+\theta)\Big) + F'_{\varphi(t)}\Big(\varphi(t), \phi(t+\theta)\Big)\varphi'(t)\,\theta + \&c. \\ &= F\Big(\varphi(t), \phi(t)\Big) + F'_{\phi(t)}\Big(\varphi(t), \phi(t)\Big)\phi'(t)\,\theta + \&c. \\ &\quad + F'_{\varphi(t)}\Big(\varphi(t), \phi(t)\Big)\varphi'(t)\,\theta + \&c. \\ &\quad + \&c. \end{aligned} \tag{68}$$

e quindi, secondo la definizione stessa di funzione derivata:

$$F'\Big(\varphi(t), \phi(t)\Big) = F'_{\phi(t)}\Big(\varphi(t), \phi(t)\Big)\phi'(t) + F'_{\varphi(t)}\Big(\varphi(t), \phi(t)\Big)\varphi'(t) \tag{70}$$

risultato che può essere facilmente generalizzato a funzioni a più di due variabili.

Data la (70) la determinazione della regola di derivazione di funzioni esibite implicitamente non pone più alcuna difficoltà. Ponendo infatti $\varphi(t) = x$ e $\phi(t) = \psi(x)$ si avrà, secondo tale formula,

[161] Cfr. Lagrange (1797), p. 30, (1813), p. 28, (1801), p. 40 e (1806a), p. 51.

[162] Ciò che è essenziale nella teoria newtoniana delle flussioni è proprio l'interpretazione di ogni variabile come una funzione di una variabile comune, detta "tempo", la quale svolge il ruolo di un parametro universale [mi permetto di rimandare per questo a Panza (1989), cap. III].

$$0 = \Phi'(x) = F'\Big(x, \psi(x)\Big) = F'_{\psi(x)}\Big(x, \psi(x)\Big)\psi'(x) + F'_x\Big(x, \psi(x)\Big)\, x' \tag{71}$$
$$= F'_y(x, y)\, y' + F'_x(x, y)\, x'$$

da cui, scegliendo x come variabile principale e osservando che se f è la funzione identità lo sviluppo di $f(x+\xi)$ é uguale a $x+\xi$ e quindi $f'(x) = x'=1$, segue:

$$y' = - \frac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)} \tag{72}$$

che come si vede è proprio la regola cercata.

III. 6. *c*. ζ. *Derivate di una funzione rispetto a una funzione qualsiasi della sua variabile*

L'esempio della dimostrazione precedente mostra assai bene come la stessa definizione di derivata implichi che una qualsiasi funzione data possa essere associata a più di una funzione, derivata da essa secondo l'algoritmo precedente. Per questo basta infatti o intendere la variabile della funzione data come una funzione di una nuova variabile (la quale può a sua volta essere scelta arbitrariamente) o considerare determinate composizioni analitiche, che compaiono o no in essa e involvono la variabile in questione, come delle nuove variabili da sottoporre a un incremento indeterminato. La funzione $\sin x^2$ può così essere intesa, a esempio, o come una funzione di x, $f(x) = \sin x^2$, o come una funzione di t, $f(t) = \sin [x(t)]^2$, o come una funzione di $z = x^2$, $f(z) = \sin z$, o infine come una funzione di una qualsiasi funzione $\varphi(x)$, tale che $x^2 = \psi[\varphi(x)]$, $f[\varphi(x)] = \sin \psi[\varphi(x)]$. La sua derivata sarà il coefficiente di ordine uno rispettivamente degli sviluppi di $\sin (x+\xi)^2$, $\sin [x(t+\theta)]$, $\sin (z+\zeta)$, $\sin \psi[\varphi(x)+\omega]$. Tutto ciò è assolutamente banale. Il punto su cui intendo insistere è che una tale situazione non può essere letta da Lagrange che in un senso molto diverso da quella in cui noi siamo portati a intenderla. Dal nostro punto di vista, ciò significa semplicemente che una funzione $f(x)$ *ha* un'infinità di derivate della forma $\dfrac{df(x)}{d\psi(x)}$ (le quali sono tutte quante derivate della stessa primitiva $f(x)$). Non è tuttavia difficile rendersi conto che una tale interpretazione è legittima (e del tutto naturale) solo a condizione di intendere una funzione $f(x)$ come una collezione di valori associata a un'altra collezione di valori assegnabili alla variabile x. Al contrario, se una funzione è una forma, ogni cambiamento di variabile, il quale conduca a derivare tale funzione rispetto a una nuova funzione - che non compare esplicitamente in essa come proprio componente (o che sia tale che la vecchia variabile compare nella funzione data non soltanto come un suo componente) - produce un cambiamento della funzione stessa, in modo che la derivata determinata relativamente alla nuova variabile è in senso stretto la derivata di una nuova funzione.

Tranne che in certi casi particolari, un cambiamento della variabile di riferimento nella derivazione produce così un cambiamento nella stessa funzione primitiva. Quello considerato alla fine del precedente paragrafo è proprio uno di questi casi particolari e corrisponde al mio terzo esempio, quello della funzione $f(z) = \sin z = \sin x^2$, la quale può essere derivata, senza trasformarsi in una nuova funzione tanto rispetto a x, che rispetto a x^2. Anche in tal caso la semplice sostituzione $z = x^2$ produce tuttavia, a rigore, una nuova funzione, la quale è tuttavia associata alla vecchia secondo un legame assai semplice che può determinare senza alcuna difficoltà una classe di equivalenza di cui ogni membro può essere inteso come *la stessa funzione*. Questo è anche il caso del mio secondo esempio: il passaggio da $f(x) = \sin x^2$ a $\sin [x(t)]^2 = g(t)$ produce a rigore un cambiamento della funzione data, ma tale funzione è banalmente associabile alla nuova funzione prodotta dalla sostituzione e costitisce con essa una ovvia classe di equivalenza. Le situazioni illustrate dal primo e dal secondo esempio sono inoltre facilmente traducibili l'una nell'altra, scegliendo diversamente la scrittura analitica che fornisce la funzione assegnata, ovvero: il membro della classe di equivalenza utilizzato per rappresentare la classe; più che due situazioni distinte, esse appaiono così come due maniere di esprimere la stessa situazione. E' proprio a questa situazione che, a prima vista, sembra riferirsi Lagrange, quando, nella sua settima lezione "*sur le calcul des fonctions*",[163] affronta il problema generale posto dalla ricerca della derivata di una funzione data rispetto a un'altra funzione, intendendo tale ricerca come la ricerca della derivata rispetto a t di una funzione di x nel caso in cui x sia a sua volta una funzione di t. Se ci limitiamo a un caso simile, le differenza fra il punto di vista moderno e quello di Lagrange sembrano tali da non produrre delle conseguenze rilevanti rispetto alla soluzione del problema considerato e all'interpretazione di risultati raggiunti. Non è tuttavia difficile comprendere che una tale limitazione trasforma il problema di Lagrange in una pura curiosità, priva di ogni reale interesse matematico e sempre risolvibile per mezzo di semplici sostituzioni. Ciò che fa del problema della ricerca della derivata di una funzione data rispetto a un'altra funzione un problema interessante sul piano dello stesso algoritmo del *calcolo* e giustifica la consacrazione a esso di un'intera lezione (posta fra quelle che forniscono i principi generali della teoria) è la considerazione di derivate di una data "funzione" $f(x)$ relativamente a una funzione *qualsiasi* della stessa variabile x. Un tale problema sorge d'altra parte, in questa forma, del tutto naturalmente entro la stessa teoria settecentesca delle serie, qualora si cerchi un metodo generale per produrre degli sviluppi convergenti di una funzione assegnata per determinati valori della variabile. Se a esempio si cerca uno sviluppo in serie intera di $\log(1+x$, il quale sia convergente per $x = 3/2$, si può procedere assai semplicemente ponendo l'equazione identica

[163]Cfr. Lagrange (1801), pp. 47-52 e (1806a), pp. 62-8.

$\log(1+x) = \log[2+(x-1)] = \log(2+z)$ e calcolando lo sviluppo del secondo membro di tale equazione - inteso come una funzione di z - in una serie intera ordinata secondo le potenze della stessa variabile $z = (x-1)$. Impiegando un linguaggio moderno, si dirà che un tale procedimento richiede la ricerca delle derivate della funzione data $\log(1+x)$, relativamente alla funzione $z = x-1$, la quale non compare, in quanto tale, come un componente della funzione data. Delle formule come quella date da Lagrange nelle *Leçons* possono quindi essere assai utili per abbreviare i calcoli e evitare noiose sostituzioni. Secondo i presupposti della teoria di Lagrange un tale procedimento può tuttavia essere sostituito, in tutti i casi, da un procedimento diverso, che consiste semplicemente nel scegliere opportunamente il centro dello sviluppo che deve essere considerato e si riduce quindi a compiere opportune sostituzioni nelle successive derivate della funzione data, calcolate rispetto a una variabile generica. Se inteso nel primo modo il problema della settima *leçon* è quindi banale, inteso nel secondo esso appare estraneo alla teoria lagrangiana delle serie o comunque semplicemente eliminabile da essa. Quali ragioni possono quindi avere spinto Lagrange a dedicare a esso uno spazio così rilevante nella riesposizione della propria teoria? Prima di ricostruire la soluzione che questi prospetta avanzerò qui tre risposte diverse a una tale questione.

La prima di tali risposte si riduce a una semplice osservazione di fatto: nel 1798 - un anno dopo aver pubblicato la prima edizione della *Théorie* e un anno prima di professare le sue *Leçons* - Lagrange fu incaricato dall'*Institut*, insieme a Legendre, di stendere un rapporto su due manoscritti inviati da Bürmann[164] (un oscuro matematico tedesco che si legherà più tardi alla scuola di Hindenburg), in cui il problema generale dello sviluppo di una funzione in una serie di potenze di una funzione *qualsiasi* (non necessariamente lineare) della stessa variabile era considerato come il problema centrale dell'analisi: come il problema dalla cui soluzione dipendeva la possibilità di conferire all'analisi la massima generalità. Benché passati assolutamente inosservati (e dimenticati dagli storici), i manoscritti di Bürmann sono tutt'altro che privi di interesse e rappresentano anzi, sotto molti punti di vista, un compendio apprezzabile della teoria settecentesca delle serie, reinterpretata alla luce di una esigenza filosofica di unità e generalità che può in qualche modo aver fatto breccia nell'interesse di Lagrange.

Anche la seconda risposta consiste in una constatazione di fatto, sia pure di genere essenzialmente diverso. Se abbandoniamo la concezione strettamente formale di Lagrange e concepiamo una funzione come una *quantità* y dipendente da un'altra *quantità* x e accettiamo una qualche interpretazione particolare della nozione analitica di derivata (a esempio quella geometrica che qualifica la derivata di una funzione come il coefficiente angolare della tangente alla curva espressa da tale funzione), il problema in questione si trasforma nel problema di esprimere la derivata (intesa in senso particolare) di una quantità data, diciamo y, nei termini di una qualsiasi quantità, dicia-

[164] Cfr. Bürmann (1798) e (s. d.).

mo z, funzionalmente connessa alla quantità x da cui y dipende. y'_x e y'_z non sono da tale punto di vista che due differenti espressioni di una medesima quantità, la cui conoscenza permette, in certi casi, di operare trasformazioni essenziali in certe equazioni, in modo da esprimere le quantità cercate nei termini di quantità note, piuttosto che di altre quantità incognite. Per chiarire tale situazione vediamo come il problema si pone secondo un'interpretazione geometrica del *calcolo*. Siano a questo scopo $x = \psi(z)$ una funzione di z e $y = \phi[\psi(z)] = \phi(x) = \varphi(z)$ una funzione di x e siano inoltre (figura 1) AM $= z$, MT $= x$, MR $= y$ e M$m = dz$. Si avrà in primo luogo: $\frac{d}{dz}\Big(\psi(z)\Big) = \mathrm{PQ}/\mathrm{M}m = \mathrm{PQ}/dz$ e quindi $d_z\,\psi(z) = \mathrm{PQ}$, $\frac{d}{dz}\Big(\varphi(z)\Big) = \mathrm{VW}/\mathrm{M}m = \mathrm{VW}/dz = d_z\,\varphi(z)$. E' tuttavia possibile che la soluzione del problema assegnato dipenda dalla conoscenza della tangente RV, data l'ordinata MT della curva ATF, piuttosto che la sua ascissa AM. Si tratterà quindi di cercare il differenziale di $\varphi(z) = \phi[\psi(z)]$ relativamente a $x = \psi(z)$. Per questo si può scegliere PQ come l'incremento di $x = \psi(z)$ che ne costituisce il differenziale, in modo che VW sia il corrispondente differenziale di $y = \varphi(z) = \phi(x)$, ciò che produce la relazione seguente:

$$(73) \qquad \frac{d}{d\psi(z)}\Big(\varphi(z)\Big) = \frac{\mathrm{VW}}{\mathrm{PQ}} = \frac{d_z\varphi(z)}{d_z\psi(z)}$$

Tale semplice relazione non si mantiene tuttavia agli ordini superiori. Passando al second'ordine si avrà infatti (figura 2): A*M* $= z$, M*m* $= dz$, M*T* $= \frac{d}{dz}\Big(\psi(z)\Big) = \mathrm{PQ}/\mathrm{M}m$, M*R* $= \frac{d}{dz}\Big(\varphi(z)\Big) = \mathrm{VW}/\mathrm{M}m$, $\frac{d^2}{dz^2}\Big(\psi(z)\Big) = \mathrm{P^*Q^*}/\mathrm{M}m$, $\frac{d^2}{dz^2}\Big(\varphi(z)\Big) = \mathrm{V^*W^*}/\mathrm{M}m$, $\frac{d}{d\varphi(z)}\Big(\varphi(z)\Big) = \mathrm{VW}/\mathrm{PQ} = \mathrm{M^*R^*}/\mathrm{M^*T^*}$. Il differenziale di $\frac{d}{d\varphi(z)}\Big(\varphi(z)\Big)$ sarà allora dato dall'incremento del rapporto M*R*/M*T* e si avrà quindi:

$$(74) \qquad \frac{d^2}{[d\psi(z)]^2}\Big(\varphi(z)\Big) = d_z\left(\frac{d_z\varphi(z)}{d_z\psi(z)}\right)\frac{1}{d_z\psi(z)} = \frac{d}{dz}\left(\frac{d_z\varphi(z)}{d_z\psi(z)}\right)\frac{1}{\frac{d}{dz}\Big(\psi(z)\Big)}$$

Analogamente si avrà poi la formula generale

$$\text{(75)} \qquad \frac{d^{\nu}}{[d\psi(z)]^{\nu}}\Big(\varphi(z)\Big) = d_z\left(\frac{d_z^{\nu-1}\varphi(z)}{[d_z\psi(z)]^{\nu-1}}\right)\frac{1}{d_z\psi(z)} = \frac{d}{dz}\left(\frac{d_z^{\nu-1}\varphi(z)}{[d_z\psi(z)]^{\nu-1}}\right)\frac{1}{\frac{d}{dz}\Big(\psi(z)\Big)}$$

che fornisce un algoritmo per calcolare il rapporto differenziale di una funzione di z rispetto a una qualsiasi funzione di questa stessa variabile e può essere utile per risolvere problemi come quello precedente, anche qualora quasti si presentino a ordini superiori. Se Lagrange vuole rendere il proprio calcolo delle funzioni derivate agevolmente applicabile alla soluzione di simili problemi, egli deve fornire in esso un analogo della (75).

fig. 1

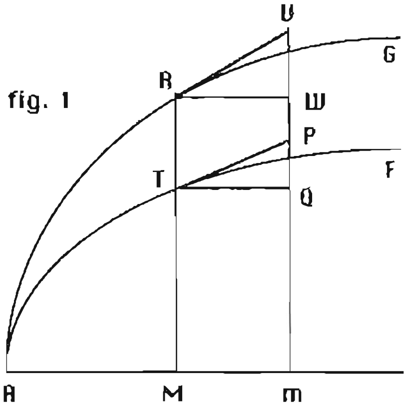
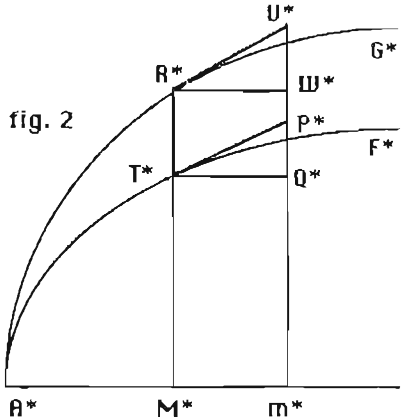


fig. 2



Vengo ora alla terza risposta. In molti casi una formula come la (75) serve, indipendentemente dal calcolo effettivo dei diversi termini che occorrono in essa, per esprime delle relazioni algoritmiche fra rapporti differenziali di una stessa funzione (quantità), rispetto a variabili (quantità) diverse e permettere quindi sostituzioni entro equazioni generiche, che forniscono, a esempio, un metodo di eliminazione di certe variabili. Anche in tal caso la possibilità di disporre di una formula analoga alla (75) è così una condizione indispensabile per rendere possibili numerose applicazioni della teoria delle funzioni derivate e anzi è lo stesso Lagrange a mostrare, nella parte conclusiva della *Théorie*, come una vasta classe di problemi meccanici possa essere risolta attraverso l'eliminazione di una variabile (nel caso particolare il tempo) dalle equazioni del moto espresse relativamente a essa.[165] Date tre coordinate generiche di un punto in movimento - intese come funzioni del tempo - $x = x(t)$, $y = y(t)$, $z = z(t)$, egli immagina che y e z possano a loro volta essere considerate come delle funzioni di x, in modo che se, in luogo di x, viene posto in esse $x+\xi$, i loro sviluppi assumano rispettivamente la forma seguente $y + A_1\xi$ + &c. e $z + B_1\xi$ + &c., nei quali si tratta di determinare i coefficienti A_1 e B_1, che costituiscono le derivate di y e z relativamente a x,

[165] Cfr. Lagrange (1797), pp. 239-40 e (1813), pp. 232-33.

espresse in termini delle derivate delle stesse funzioni rispetto a t (le equazioni del moto espresse rispetto a t, possono così venir convertite, tramite semplici sostituzioni regolate, in equazioni fra x, y e z indipendenti da t[166]). In tal modo Lagrange ritrova - riferendole a un'applicazione particolare - le stesse formule delle *Leçons* e lo fa seguendo un metodo analiticamente analogo a quello impiegato nel 1801. Tuttavia l'esplicito riferimento meccanico, che assegna direttamente ai simboli analitici un'interpretazione in termini di quantità, permette di asserire senza più alcuna difficoltà che le funzioni della variabile principale rispetto a cui è cercata la derivata sono assolutamente arbitrarie.

Questa non è d'altra parte la sola occorrenza del problema della VII lezione "*sur le calcul des fonctions*" che ritroviamo nella prima edizione della *Théorie*. Lo stesso problema si ripresenta nel quadro della riduzione operata da Lagrange della teoria delle funzioni derivate a due (o più) variabili alla teoria delle funzioni derivate a una sola variabile.[167] Se $y = f(x)$ è infatti una funzione di x, che è a sua volta una funzione di t, $x = x(t)$, si avrà, secondo la (66), $y_t' = f'_x(x)\, x_t'$ e quindi: $f'_x(x) = y_t'/x_t'$, che può essere considerata come la derivata rispetto a x di una funzione della variabile t. Così se si ha $F(x, y) = z$ e $y = y(x)$, la sostituzione di y_t'/x_t' a y_x' nelle equazioni derivate esprime il fatto che x e y possono venir considerate come delle funzioni *qualsiasi* della stessa variabile t e essere intese come indipendenti fra loro.

Questi due ultime esempi, mostrano come entro la stessa teoria delle funzioni analitiche si faccia inevitabilmente largo la necessità di una interpretazione della nozione di funzione la quale ritorni nei fatti all'originaria concezione di questa come una quantità. Accettato implicitamente un simile punto di vista (che traspare dalla stessa notazione scelta da Lagrange[168]) il problema della VII lezione "*sur le calcul des fonctions*" può essere inteso in tutta la sua generalità, senza far sorgere alcuna difficoltà di principio. Il prezzo pagato dalla teoria lagrangiana alla possibilità di presentarsi come una effettiva alternativa al calcolo differenziale in tutte le sue estensioni è così la surrettizia negazione dei propri medesimi presupposti concettuali.

Ciò detto, veniamo all'argomento proposto da Lagrange. Sia y una funzione di x ($y = y(x)$), la quale sia a sua volta una funzione di t ($x = x(t)$).[169] Si consideri y come una funzione di t e si ponga in essa $t+\theta$ in luogo di t, ciò che fornisce lo sviluppo $y(t+\theta) = y\,(t) + y_t'(t)\,\theta + \dfrac{y_t''(t)}{2!}\theta^2 + \&c.$. Considerando invece y come una funzione di x e ponendo $x+\xi$ in luogo di x si avrà $y(x+\xi) =$

166 Lagrange applica a esempio tale metodo alla soluzione del problema inverso del moto resistente affrontato da Newton nella prop. X del secondo libro dei *Principia* [cfr. le precedenti note 73, 74 e 75; sul procedimento di Lagrange cfr. anche Panza (1990)].

167 Cfr. *ivi*, p. 60 e p. 82 [cfr. il prossimo paragrafo III.6.*e*.δ.].

168 Cfr. la prossima nota 169.

169 L'uso delle lettere atomiche y e x per indicare delle funzioni è di Lagrange che indica nel seguito con y', y'', y''', &c. le derivate di y rispetto a t e con (y'), (y''), (y'''), &c. le derivate di y rispetto a x.

$y(x) + y_x'(x)\,\xi + \dfrac{y_x''(x)}{2!}\xi^2$ + &c.. Scegliendo ξ in modo che esso risulti uguale all'incremento subito da $x = x(t)$ per la sostituzione di $t+\theta$ a t (ciò che fornisce l'identità $\xi = x_t'(t)\,\theta + \dfrac{y_t''(t)}{2!}\theta^2$ + &c.), equiparando i due precedenti sviluppi e osservando che $y(x) = y(t)$ si avrà allora:

$$
\begin{aligned}
(76)\qquad & y(t) + y_t'(t)\theta + \frac{y_t''(t)}{2!}\theta^2 + \&c. = \\
&= y(t) + y_x'(t)\left[x_t'(t)\,\theta + \frac{x_t''(t)}{2!}\theta^2 + \&c.\right] + \frac{y_x''(t)}{2!}\left[x_t'(t)\,\theta + \frac{x_t''(t)}{2!}\theta^2 + \&c.\right] + \&c.
\end{aligned}
$$

Da qui, per il metodo dei coefficienti indeterminati, è facile trarre le identità

$$
(77)\qquad
\begin{aligned}
&\text{i)}\ y_x'(t) = \frac{y_t'(t)}{x_t'(t)} \\
&\text{ii)}\ y_x''(t) = \frac{y_t''(t) - \left(x_t''(t)\right)\left(y_x'(t)\right)}{\left(x_t'(t)\right)^2} = \frac{y_t''(t)}{\left(x_t'(t)\right)^2} - \frac{\left(x_t''(t)\right)\left(y_t'(t)\right)}{\left(x_t'(t)\right)^3} \\
&\text{iii)}\ y_x''(t) = \frac{\left(x_t'''(t)\right)\left(y_x'(t)\right)}{\left(x_t'(t)\right)^3} - \frac{3\left(x_t'(t)\right)\left(x_t''(t)\right)\left(y_x''(t)\right)}{\left(x_t'(t)\right)^3} + \frac{y_t'''(t)}{\left(x_t'(t)\right)^3} \\
&\qquad = \frac{\left(y_t'(t)\right)\left(x_t'''(t)\right)}{\left(x_t'(t)\right)^4} - \frac{3\left(x_t''(t)\right)\left(y_t''(t)\right)}{\left(x_t'(t)\right)^4} + \frac{3\left(x_t''(t)\right)^2\left(y_t'(t)\right)}{\left(x_t'(t)\right)^5} + \frac{y_t'''(t)}{\left(x_t'(t)\right)^3} \\
&\&c.
\end{aligned}
$$

le quali possono essere riscritte sotto la forma seguente

$$
(78)\qquad \text{i)}\ y_x'(t) = \frac{y_t'(t)}{x_t'(t)} \qquad\qquad \left[\varphi'_{\psi(t)}(t) = \frac{\varphi_t'(t)}{\psi_t'(t)}\right]
$$

$$\text{ii)}\ y''_x(t) = \left(\frac{y'_t(t)}{x'_t(t)}\right)'_t \frac{1}{x'_t(t)} \qquad \left[\varphi''_{\psi(t)}(t) = \varphi''_{\psi(t),t}(t)\,\frac{1}{\psi'_t(t)}\right]$$

$$\text{iii)}\ y'''_x(t) = \left[\left(\frac{y'_t(t)}{x'_t(t)}\right)'_t \frac{1}{x'_t(t)}\right]'_t \frac{1}{x'_t(t)} \qquad \left[\varphi'''_{\psi(t)}(t) = \varphi'''_{[\psi(t)]^2,t}(t)\,\frac{1}{\psi'_t(t)}\right]$$

&c.

che, corrispondendo alla (75) risolve definitivamente il problema.

III. 6. c. η. *Continuità numerica / continuità formale: le eccezioni locali alla sviluppabilità in serie intera*

Come si ricorderà la (14) esprime la forma dello sviluppo in serie di potenze di una qualsiasi funzione, posto che x sia intesa come una variabile generica, e può venir contraddetta qualora tale variabile assuma dei particolari valori isolati. L'intera costruzione precedente non si riferisce quindi che a funzioni di una variabile generica x e nulla ci assicura *a priori* che sostituendo in una derivata $f^{v}(x)$ ($v \in N$) della funzione assegnata $f(x)$ un certo valore x_0 di x il valore trovato sia effettivamente uguale al prodotto $v!A_v$ dove A_v è il coefficiente di ordine v nello sviluppo in serie di potenze di $f(x_0+\xi) = f(\xi)$. Per poterlo asserire dovremmo infatti assicurarci prima che il valore x_0 possa essere scelto come centro di uno sviluppo in serie intera della funzione data $f(x)$. Per quanto i "casi particolari" in cui la (14) "è in difetto" non sembrano infatti corrispondere, dal punto di vista di Lagrange, che alla scelta di un valore x_0 della variabile x, il quale (pur lasciando finita $f(x)$) renda infinita almeno una delle sue derivate, la mancanza di una definizione indipendente dell'oggetto `derivata´ rispetto alla (14) impedisce di asserire *a priori* che ogni volta che la sostituzione di x_0 a x in una funzione $f^{v}(x)$, tratta da $f(x)$ secondo l'algoritmo determinato nei precedenti paragrafi, produce un valore finito determinato, questo possa essere impiegato nelle diverse applicazioni in luogo della "derivata" di ordine v della funzione data. Se il valore x_0 di x è tale che la (14) "è in difetto", nessuna delle derivate di $f(x)$ é infatti a rigore definita in quanto oggetto matematico determinato, venendo meno con la (14) la base stessa della definizione prospettata. Per poter garantire la piena generalità della propria costruzione teorica (e mantenere inalterata l'ampiezza delle applicazione del *calcolo*) Lagrange è quindi costretto a sottoporre a un'indagine particolare i casi in cui la (14) "possa essere in difetto", cercando di determinar, in tli casi, e l'effettivo sviluppo in serie di potenze della funzione $f(x_0+\xi) = f(\xi)$.[170]

Come abbiamo visto nella precedente sezione III.6.*b*. il passaggio dalla (2) alla (3), e quindi alla (14), può essere bloccato solo a condizione che a x venga assegnato un valore determinato $x = x_0$, il quale "faccia sparire qualche radicale nella funzione $f(x)$ e nelle sue derivate".[171] Ora, osserva Lagrange, un radicale non può "sparire" in una funzione data che a due condizioni: esso è moltiplicato per un fattore che diviene nullo secondo la sostituzione assegnata, oppure esso è tale che è lo stesso radicando a divenire nullo per questa sostituzione.

Consideriamo il primo di questi due casi, e supponiamo che la sostituzione $x = x_0$ "distrugga" un radicale in $f(x)$ senza distruggerlo in $f'(x)$. Ecco come Lagrange ragiona:

> [...] il est clair que pour cette valeur de x, la fonction $f'(x)$ devra avoir un plus grand nombre de valeurs différentes que la fonction $f(x)$, à raison du radical qui se trouve dans $f'(x)$ et qui a disparu dans $f(x)$; d'où il s'ensuit que la valeur de y' ne pourra pas être donnée par une fonction de x et y qui ne contiendrait pas ce radical. Cependant, si dans l'équation $y = f(x)$ on détruit ce même radical par l'élévation des puissances, et que l'équation résultante soit représentée par $F(x, y) = 0$, son équation prime donnera généralement, comme l'avons vu [...] [cfr. la 72], $y'\ [= y_x'] = -\dfrac{F'_x(x, y)}{F'_y(x, y)}$. Donc cette expression sera en défaut dans le cas où l'on donnerait à x la valeur en question, ce qui ne peut avoir lieu qu'autant que les quantités $F'_x(x, y)$ et $F'_y(x, y)$ seront l'une et l'autre nulles à la fois. Ainsi, dans le cas dont il s'agit, l'expression de y' deviendra égale à zéro divisé par zéro; et réciproquement lorsque cela arrivera, ce sera une marque que la valeur correspondante de x aura détruit dans $f(x)$ un radical, sans le détruire dans $f'(x)$.[172]

Per avere il valore di $f'(x_0)$ basterà tuttavia passare all'equazione alle derivate seconde. Essendo $y = f(x)$ una funzione di x si avrà infatti:

---

[170]Cfr. Lagrange (1797), pp. 32-40, (1813), pp. 59-65, (1801), lez. VIII, p. 52-65 e (1806a), lez. VIII pp. 69-87.

[171]Cfr. Lagrange (1797), p. 32 e (1813), p. 43. Nelle *Leçons* [cfr. Lagrange (1801), pp. 52-53 e (1806a), pp. 69-70] Lagrange osserva che lo sviluppo in serie di potenze di $f(x_0+\xi)$ non può contenere delle potenze negative che nel caso in cui $f(x_0)$ sia infinita, ovvero soddisfi l'equazione $1/f(x_0) = 0$. Per trovare tale sviluppo egli pone allora la nuova equazione $f(x) = \dfrac{F(x)}{(x - x_0)^m}$ (con $F(x)$ una funzione che non diviene né nulla né infinita per $x = x_0$ e m un numero positivo qualsiasi); ponendo $x_0+\xi$ il luogo di x sarà allora facile trarre l'identità: $f(x_0+\xi) = \dfrac{F(x_0+\xi)}{\xi^m} = \dfrac{1}{\xi^m}\left[F(x_0) + F'(x_0)\xi + \&c.\right]$ che fornisce lo sviluppo cercato.

[172]Cfr. Lagrange (1797), p. 33 e (1813), pp. 44-5.

$$\begin{aligned}(79)\qquad &\left[F''_{y^2}(x, y)\, y' + F''_{y,x}(x, y)\right] y' + F'_y(x, y)\, y'' + F''_{x^2}(x, y) + F''_{x,y}(x, y)\, y' = 0\\ &y''\, F'_y(x, y) + [y']^2\, F''_{y^2}(x, y) + 2y'\, F''_{x,y}(x, y) + F''_{x^2}(x, y) = 0\end{aligned}$$

che per la posizione $F'_y(x, y) = 0$ fornisce il valore cercato di y'.[173] Se la sostituzione $x = x_0$ distrugge il radicale in questione anche in $f'(x)$, basterà passare all'equazione alle derivate terze e così di seguito.[174] Se invece essa distrugge tale radicale tanto in $f(x)$ che in tutte le sue derivate, il primo caso si ridurrà al secondo e il valore cercato potrà quindi essere fornito tramite il procedimento seguente.

Se la sostituzione $x = x_0$ annulla un radicando di $f(x)$, allora questo sparirà (secondo l'algoritmo determinato nei paragrafi precedenti) anche in tutte le derivate successive di tale funzione. Essendo, per ogni funzione, $f'_x(x+\xi) = f'_\xi(x+\xi)$ - ciò che si può dimostrare facilmente equiparando gli sviluppi di $f((x+\omega)+\xi)$ e $f(x+(\xi+\omega))$ - i valori di $f'(x_0)$, $f''(x_0)$, &c. potranno tuttavia essere determinati anche in tal caso cercando le derivate $f'_\xi(x+\xi)$, $f''_\xi(x+\xi)$, &c. e ponendo in seguito in esse $\xi = 0$. Ora, continua Lagrange, si supponga che lo sviluppo di $f(x_0+\xi) = f(\xi)$ contenga un termine della forma $A\xi^\alpha$ (con α un numero razionale qualsiasi, non naturale). Passando alle successive funzioni derivate, sarà allora ovvio concludere che gli sviluppi di $f'(x_0+\xi) = f'(\xi)$, $f''(x_0+\xi) = f''(\xi)$, &c. conterranno a loro volta dei termini della forma $\alpha A\xi^{\alpha-1}$, $\alpha(\alpha-1)A\xi^{\alpha-2}$, &c., in modo che se $\xi = 0$ (gli sviluppi del)le funzioni $f^{(\nu)}(x_0)$ conterranno rispettivamente i termini $\alpha(\alpha-1)...(\alpha-\nu+1)A0^{\alpha-\nu}$ ($\nu = 1, 2,$ &c.), i quali saranno infiniti se α è negativo o minore di ν e nulli se α è maggiore di ν. Queste semplici osservazioni sembrano sufficienti a Lagrange per giustificare *a posteriori* uno dei presupposti fondamentali sui quali regge la sua teoria:

> On conclura de-là - egli scrive - que le développement $f(x) + \xi f'(x) + \frac{\xi^2}{2} f''(x) +$ &c. ne peut devenir fautif pour une valeur donnée de x, qu'autant qu'une des fonctions $f(x)$, $f'(x)$, $f''(x)$, &c. deviendra infinie, ainsi que toutes les suivantes pour cette valeur de x.[175]

---

[173] L'identità $F''_{y,x}(x, y) = F''_{x,y}(x, y)$ che è qui utilizzata da Lagrange è facilmente dimostrabile ricorrendo agli sviluppi.

[174] Il metodo con cui Lagrange propone di determinare il rapporto $y' = 0/0$ corrisponde chiaramente alla regola di l'Hôpital, reinterpretata entro la teoria delle funzioni derivate: se per $x = x_0$ si ha $z = \varphi(x)/\phi(x) = 0/0$ si avrà anche $z'\,\varphi(x) + z\,\varphi'(x) - \phi(x) = z\,\varphi'(x) - \phi(x) = 0$ e quindi $z = \varphi'(x)/\phi'(x)$.

[175] Cfr. *ivi*, p. 38 e p. 51.

Se $f^{(\nu)}(x_0)$ è quindi un valore finito per $\nu = n$-1 che diviene infinito per $\nu = n$, lo sviluppo di $f(x_0+\xi) = f(\xi)$ dovrà contenere una potenza frazionaria di ξ, il cui esponente dovrà essere compreso fra n-1 e n (se $n = 0$, esso dovrà contenere delle potenze negative di ξ) e potrà essere determinato ponendo $x = x_0$ in $f(x+\xi)$ e sviluppando la funzione risultante di ξ secondo le regole euleriane.[176]

Per quanto la trattazione di Lagrange resti largamente insoddisfacente e fondata essenzialmente su un'arbitraria generalizzazione di alcuni esempi particolari di natura espressamente algebrica,[177] la strategia che essa persegue appare assolutamente esplicita. Definito l'algoritmo che presiede alle trasformazioni formali di una funzione data nelle proprie "derivate", Lagrange non intende semplicemente richiamarsi a un generale assioma di continuità numerica di ogni funzione (entro il proprio dominio di definizione) per concludere che, *per ogni valore* x_0 della variabile x, il valore della derivata ν-esima di $f(x)$ è dato dalla semplice sostituzione di x_0 nella forma $f^{(\nu)}(x_0)$, tratta da $f(x)$ per l'applicazione di tale algoritmo e cerca al contrario un procedimento strettamente formale capace di giustificare questâ sostituzione anche nei casi in cui la (14) cessa di aver luogo. La discontinuità numerica causata da un passaggio all'infinito non solo ritrova così la sua radice formale, ma viene per così dire resa inoffensiva. Mostrato che la (14) non può "essere in difetto" che a condizione che uno dei successivi coefficienti della (3) assuma un valore infinito, Lagrange trae delle opportune identità formali capaci di esprimere la derivata generica di $f(x)$ nei termini delle derivate di certe funzioni associate, in modo da poter definire implicitamente per mezzo di esse la nozione di derivata puntuale anche nel caso in cui la (14) si mostri "in difetto". Al presupposto di continuità numerica di ogni funzione (entro il proprio dominio di definizione) - che ai nostri occhi parrebbe il più naturale - egli propone quindi di sostituire una sorta di presupposto di continuità formale dell'algoritmo definito in base alla (14) relativamente a funzioni di una variabile generica. Sono proprio le regole di tale algoritmo che forniscono infatti le identità opportune e conferiscono quindi alla nozione di derivata un significato che può ora trascendere l'esplicito richiamo allo stesso sviluppo (14) e permettere quindi di parlare di derivate (puntuali) anche in riferimento a quei valori che falsificano tale sviluppo.

---

[176] Lagrange porta a questo proposito alcuni semplici esempi.

[177] Ecco come lo stesso Lagrange si esprime a conclusione delle proprie considerazioni [cfr. *ivi*, pp. 40-41 e p. 55, cfr. anche Lagrange (1801), p. 65 e (1806a), p. 87]:

> Nous avons donc résolu les difficultés qui peuvent se rencontrer dans le développement de $f(x+\xi)$; et quoique nous n'ayons considéré que des fonctions algébriques, il n'est pas difficile d'étendre nos solutions aux fonctions transcendantes. Comme ces difficultés n'ont lieu que pour des valeurs particulières de x, il est clair qu'elles n'influent en rien sur la théorie des fonctions dérivées $f'(x)$, $f''(x)$, &c.; mais il était nécessaire de les examiner, et de donner les moyens de ses lever, pour ne laisser aucun nuage sur cette théorie.

III. 6. *d*.
FORMA E VALUTAZIONE DEL RESTO DI UNO SVILUPPO IN SERIE INTERA

III. 6. *d*. α. *Premessa: la riformulazione dell'analisi superiore e la giustificazione delle sue applicazioni geometriche e meccaniche*

Se i risultati esposti nel corso della precedente sezione permettono di identificare l'algoritmo delle funzioni derivate con quello del *calcolo* e forniscono quindi un'interpretazione di quest'ultimo, ciò non è ancora sufficiente per asserire che la nuova teoria possa (o debba) soppiantare il calcolo differenziale in tutta la sua estensione e in tutti i suoi domini di applicazione. Una parte assai cospicua dei risultati che formavano infatti alla fine del settecento il *corpus* dell'analisi superiore e ne regolavano le molteplici applicazioni, tanto geometriche che meccaniche, erano stati ottenuti per mezzo di un insopprimibile ricorso a argomenti di natura concettuale i quali vertevano, più che sull'algoritmo stesso dei differenziali, sulla natura particolare di questi, sulla loro interpretazione come differenze infinitamente piccole. Nella maggioranza dei casi l'applicabilità dell'algoritmo alla soluzione dei problemi assegnati non era anzi che la conclusione dell'argomento, il quale consisteva essenzialmente nel riconoscere in alcune entità determinate delle differenze infinitamente piccole e nel richiamarsi quindi alla teoria formale di questo genere di quantità. Proponendo di sostituire *d'emblée* il calcolo differenziale con la propria teoria delle funzioni derivate, prospettando una sorta di principio di *transfer* fondato sulla riconosciuta identità degli algoritmi, Lagrange avrebbe così fatto implicitamente ricorso a un vasto insieme di argomenti infinitesimalisti, i quali avrebbero di fatto continuato a garantire il legame fra le procedure algoritmiche e molti dei problemi ai quali esse erano generalmente applicate. Se a queste considerazioni aggiungiamo l'esigenza, spesso non soltanto "filosofica", di una reinterpretazione, nel quadro della nuova teoria, di certe nozioni, pure riferite, in quanto tali, a oggetti meramente matematici (come quella di "equazione differenziale") e perfino di certe procedure algoritmiche (come la ricerca delle soluzioni tanto generali che particolari di un'equazione data), ci rendiamo conto che se Lagrange si fosse limitato all'esibizione dei risultati precedenti, egli avrebbe mancato al suo scopo in modo davvero imperdonabile. A fronte di essi la ricerca doveva quindi continuare in almeno due direzioni distinte: da una parte si trattava di riformulare entro il nuovo contesto, in modo il più possibile dettagliato - e senza rinviare a alcun principio di automatica sostituzione simbolica - l'intero *corpus* dell'analisi superiore, nella sua parte pura; dall'altra occorreva giustificare l'applicabilità dell'algoritmo delle funzioni derivate alla soluzione di vastissime classi di problemi geometrici e meccanici, reinterpretando i dati e le incognite di essi nei termini di opportune combinazioni di coefficienti di determinati sviluppi in serie intera. Se non è certo possibile affermare che Lagrange percorse compiutamente né l'uno né l'altro di questi tragitti, giungendo alla completa realizzazione del proprio programma di eliminazione del calcolo differenziale, resta il fatto egli si inoltrò in essi abbastanza a fondo da rendere la continuazione del proprio lavoro una questione di semplice *routine*.

La riformulazione lagrangiana dei principali elementi dell'analisi superiore farà l'oggetto della prossima sezione III.6.*e*.. Nella presente sezione concentrerò per contro la mia attenzione sul cosiddetto "teorema del resto", il quale sembra costituire, nell'economia complessiva della teoria delle funzioni analitiche, un principio generale di mediazione fra l'algoritmo delle derivate e l'insieme delle sue applicazioni allo studio di certi sistemi di quantità particolari, tanto geometrici che meccanici. Non ho invece creduto opportuno spingere la mia ricostruzione fino alla considerazione delle parti restanti della *Théorie,* specificatamente dedicate alla presentazione di queste ultime applicazioni,[178] la cui analisi ci avrebbe condotto a affrontare dei temi che restano estranei al progetto complessivo della mia dissertazione.

III. 6. *d*. β. *Alcune osservazioni preliminari a proposito del "teorema del resto"*

Per quanto la struttura interna della teoria di Lagrange lasci ben pochi dubbi a proposito del fatto che questi intenda il proprio teorema del resto come un principio di mediazione fra l'algoritmo delle funzioni derivate e le sue applicazioni geometriche e meccaniche, rimane la possibilità di domandarsi se il richiamo a un principio di mediazione corrisponda *de jure* a un'esigenza effettiva e, in caso di risposta affermativa, se tale esigenza sia effettivamente soddisfatta dal teorema in questione o se esso sia a questo scopo insufficiente o al contrario pleonastico.

L'esigenza di una mediazione sorge naturalmente dalla separazione operata da Lagrange fra formale e numerico, o meglio dalla reinterpretazione dell'analisi come una pura teoria di trasformazioni formali, la quale non può venire applicata allo studio di grandezze date che a condizione di fornire un principio di interpretazione. Il ricorso a delle forme infinite per definire un'entità analitica, alla quale è *successivamente* associato un algoritmo, rende tale principio tutt'altro che naturale. Anche se assegnamo un valore alle variabili considerate, la funzione derivata non si trasforma infatti, in quanto tale, che in un valore che partecipa a una somma infinita, il quale non è altrimenti caratterizzato, in termini generali, che come il valore associato a una determinata trasformata di una forma data, per l'assegnazione di un valore stabilito alle variabili di tale forma. Per intendere questa forma come la

---

[178]Cfr. Lagrange (1797), parte II, pp. 117-277 (pp. 117-223: "applicazioni alla geometria", pp. 223-277: "applicazioni alla meccanica") e (1813), parti II e III, pp. 165-310 e pp. 311-81 (rispettivamente dedicate alle "applicazioni alla geometria" e alle "applicazioni alla meccanica"). Per le "applicazioni alla meccanica" mi permetto comunque di rinviare a Panza (1990). Resterà esclusa dalla mia trattazione anche la riformulazione lagrangiana del calcolo delle variazioni [cfr. Lagrange (1797), (1813), pp. 200-217 e (1806a), lez. XXI, pp.401-40 (in particolare, pp. 423-440) e XXII, pp. 441-501], che già è stata d'altra parte largamente discussa in Fraser (1985).

rappresentazione analitica di determinate quantità particolari, caratterizzate al contrario per il ruolo che esse svolgono entro determinati sistemi di quantità, è così necessario assicurarsi *a priori* che la serie goda di determinate proprietà che possano fare di essa, o di una sua parte opportuna, la trasposizione formale di un oggetto essenzialmente non formale e tale che il sistema di quantità prescelto possa essere descritto nei termini di esso. A questo scopo non è naturalmente sufficiente alcuna valutazione del comportamento numerico di certe serie particolari per certe particolari sostituzioni di valori, la quale assicuri che la serie stessa possa intendersi come una rappresentazione di una quantità stabilita a cui le sue ridotte parziali si approssimano indefinitamente. Ciò che serve è infatti un risultato che ci assicuri che la stessa *forma* generica della (14) sia tale da garantirne il possesso delle proprietà richieste, in modo che si possa concludere che determinati oggetti formali, quali i suoi coefficienti successivi, godano *in quanto tali* della proprietà di rappresentare certe definite quantità particolari.

Avanzata una tale richiesta, si potrebbe pensare che il modo più semplice e generale per rispondere a essa sia di fornire un risultato che assicuri la convergenza dello sviluppo di *ogni* funzione, sotto determinate condizioni, che dovranno al tempo stesso venire fissate. Se riconosciamo nel teorema del resto un risultato di tal genere, saremmo così portati a concludere, che le considerazioni precedenti contengono una risposta a entrambi i problemi sollevati, conducendoci a riconoscere una ragione intrinseca che giustifica la scelta strutturale compiuta da Lagrange. Una riflessione più attenta ci convince tuttavia che tale risposta è in quanto tale insoddisfacente. La separazione fra formale e numerico istituita dalla teoria delle funzioni analitiche ha infatti un carattere peculiare: il percorso che conduce alla (14) ,e dà a essa un senso indipendentemente dalle regole costruttive degli sviluppi particolari, sembra poggiare sul presupposto implicito che per ogni funzione esiste una somma di forma intera che converge a tale funzione entro un disco centrato sullo zero a diametro non nullo e che la (14) non fa che caratterizzare in termini del tutto generali. O si considera quindi l'intera costruzione lagrangiana come strettamente inessenziale, e si accetta semplicemente di definire la derivata come il coefficiente di ordine uno degli sviluppi euleriani (definiti a loro volta come il risultato di certi procedimenti costruttivi), o si è portati a concludere che lo stesso atto fondatore di tale separazione fornisca un principio di mediazione che possa, in molti casi, venire felicemente impiegato. E' proprio all'uso di tale principio (per quanto introdotto *a posteriori* piuttosto che *a priori*, come in Lagrange) che è d'altra parte riconducibile quella diffusissima pratica settecentesca che consiste nell'impiegare degli sviluppi formalmente costruiti per fornire della approssimazioni numeriche di alcune quantità. Così se accettiamo l'idea che il principio di mediazione di cui ha bisogno Lagrange sia un risultato che assicuri (sotto certe condizioni) la convergenza della (14), dobbiamo concludere che l'impiego del teorema del resto nel ruolo di un tale principio non corrisponde a un'esigenza effettiva: la mediazione in questione avrebbe potuto essere svolta dallo stesso principio fondatore della teoria delle funzioni analitiche.

Una riflessione più accorta, supportata da una attenta analisi testuale, ci convince tuttavia sia che la convergenza della (14) su un disco di raggio positivo non è, in quanto tale, una proprietà sufficiente per giustificare le diverse applicazioni geometriche e meccaniche dell'algoritmo delle funzioni derivate - e anzi non è a questo scopo neppure necessaria - sia che il teorema del resto non è in nessun modo riconducibile a un'asserzione di convergenza della (14) sotto opportune condizioni (numeriche).

Il modo più semplice per giustificare la prima di tali affermazioni è di considerare un esempio, il quale possa essere scelto come paradigmatico. Ecco come Lagrange ragiona per dimostrare che la derivata prima di una funzione data rappresenta il coefficiente angolare della tangente alla curva espressa da tale funzione.[179] Siano $u = f(v)$, $u = \varphi(v)$ e $u = \phi(v)$ tre funzioni che esprimono le ordinate di tre curve riferite a un comune sistema ortogonale di assi v, u, le quali siano tali da possedere un punto comune di ascissa x - ciò che porta ovviamente a concludere che $f(x) = \varphi(x) = \phi(x)$. Supponiamo per semplicità che in un intorno destro del punto x tali curve siano tutte crescenti e che le loro ordinate siano positive e tali che $f(v)$ sia comunque minore tanto di $\varphi(v)$ che di $\phi(v)$.[180] Siano inoltre Δ_1 la differenze fra $f(v)$ e $\varphi(v)$ valutata nel punto $v = x+\xi$ ($\xi > 0$) e Δ_2 quella fra $f(v)$ e $\phi(v)$ valutata nello stesso punto. Applicando la (14) si avrà allora rispettivamente:

$$
(80)\quad
\begin{aligned}
&\text{i)}\ \Delta_1 = \xi\left[f'(x) - \varphi'(x)\right] + \frac{\xi^2}{2!}\left[f''(x) - \varphi''(x)\right] + \&c.\\
&\text{ii)}\ \Delta_2 = \xi\left[f'(x) - \phi'(x)\right] + \frac{\xi^2}{2!}\left[f''(x) - \phi''(x)\right] + \&c.
\end{aligned}
$$

che, applicando il teorema del resto[181] e non considerando che i termini di ordine uno, potranno essere riscritte sotto la forma:

$$
(81)\quad
\begin{aligned}
&\text{i)}\ \Delta_1 = \xi\left[f'(x) - \varphi'(x)\right] + \frac{\xi^2}{2!}\left[f''(x + \eta_{1,1}) - \varphi''(x + \eta_{2,1})\right]\\
&\text{ii)}\ \Delta_2 = \xi\left[f'(x) - \phi'(x)\right] + \frac{\xi^2}{2!}\left[f''(x + \eta_{1,1}) - \phi''(x + \eta_{3,1})\right]
\end{aligned}
$$

(in cui $\eta_{1,1}$, $\eta_{2,1}$, $\eta_{3,1}$, &c. sono della quantità, eventualmente diverse fra loro, ma comprese comunque fra 0 e ξ).[182] Si supponga ora che la curva $u = \varphi(v)$ sia tale che $f'(x) = \varphi'(x)$. La (81) rende evidente che una condizione neces-

[179]Cfr. Lagrange (1797), pp. 118 e segg. e (1813), pp. 166 e segg..

[180]La considerazione di casi differenti non comporta ovviamente alcuna differenza di principio.

[181]Cfr. la prossima formula (105).

[182]Per una precisa caratterizzazione di tali quantità cfr. il prossimo paragrafo III.6.*d.ε.*.

saria affinché la curva $u = \phi(v)$ possa passare, a destra del punto x, fra le curve $u = f(v)$ e $u = \varphi(v)$ è che anche $\phi'(x)$ sia uguale a $f'(x)$. Se la differenza $\phi'(x) - f'(x)$ fosse infatti positiva e uguale a ω, si potrebbe sempre prendere ξ sufficientemente piccolo affinché la differenza $\frac{\xi}{2}\left[\phi''(x+\eta_{3,1}) - \varphi''(x+\eta_{2,1})\right]$ sia in modulo minore di ω e Δ_2 sia quindi in modulo maggiore di Δ_1. Supponiamo ora che le curve $u = \varphi(v)$ e $u = \phi(v)$ siano piuttosto delle rette di equazione $u = m_1 v + q_1$ e $u = m_2 v + q_2$. La conclusione precedente ci dice che la seconda di tali rette non può passare, a destra del punto x, fra la prima retta e la curva, a meno che $\varphi'(x)$ non sia uguale a $\phi'(x)$, ovvero m_1 non sia uguale a m_2. Ma se $\varphi(x) = \phi(x)$ e $m_1 = m_2$, anche q_1 sarà uguale a q_2 e quindi se è data una curva $u = f(v)$ e una retta $\varphi(v) = mv + q$ passante per il punto $(x, f(x))$ e tale che $\varphi'(v) = m = f'(x)$, allora non vi è alcuna retta passante per questo stesso punto che passi, a destra di tale punto, fra la curva e la retta $\varphi(v) = mv + q$; la derivata prima di una funzione data, valutata nel punto $v = x$ esprimerà quindi il coefficiente angolare della tangente nel punto di ascissa x alla curva la cui ordinata è espressa da tale funzione.

Non è difficile comprendere che, redatta nella forma precedente, la dimostrazione che assicura l'applicabilità dell'algoritmo delle funzioni derivate alla ricerca delle tangenti richiede una proprietà della (14) che è diversa dalla sua convergenza per ξ abbastanza piccolo. Essa si richiama infatti alla possibilità di esprimere le differenze $\varphi(x+\xi) - \varphi(x) - \xi\,\varphi'(x)$ e $\phi(x+\xi) - \phi(x) - \xi\,\phi'(x)$ in una forma tale da rendere manifesto che il rapporto $\frac{\varphi(x+\xi) - \varphi(x) - \xi\,\varphi'(x) - \phi(x+\xi) + \phi(x) + \xi\,\phi'(x)}{\xi}$, fra la differenza fra queste differenze e l'incremento comune ξ, possa essere resa in modulo minore di qualsiasi grandezza positiva assegnata, scegliendo ξ sufficientemente piccolo. Per giustificare tale lemma Lagrange fa ricorso alla possibilità di scrivere la differenza $f(x+\xi) - f(x)$ di ogni funzione sotto la forma indicata dalla (14) e al teorema del resto, che egli sembra intendere come un risultato che asserisce che per ogni funzione $f(x+\xi)$ il resto di ordine n, $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}\xi^k$ dello sviluppo in serie intera a essa associato è uguale a un prodotto della forma $\frac{f^{(n+1)}(x+\eta_n)}{(n+1)!}\xi^{n+1}$ (in cui η_n è una quantità compresa fra 0 e ξ). La proprietà chiave della (14) che è evidenziata da tale teorem,a e che Lagrange sembra impiegare qui, è così quella che rende questo sviluppo tale che, per ogni n fissato (n = 0, 1, 2, &c.) e per ogni valore positivo ω, è sempre possibile scegliere ξ in modo che il resto di ordine n sia minore in modulo di ω. Questa proprietà è in se stessa del tutto differente dalla proprietà che asserisce che lo sviluppo (formale) di ogni funzione $f(x+\xi)$ è tale che che se $|\xi|$ è abbastanza piccolo, allora, per ogni quantità ω, è sempre possibile scegliere n abbastanza grande, in modo che il resto di ordine n sia minore di ω. Ora, il principio originario di convergenza che Lagrange impiega come presupposto della propria costruzione non asserisce, in quanto tale, che la seconda delle due proprietà e non la prima, la quale è invece utilizzata nella dimostrazione precedente e è asserita dal teorema del resto (almeno secondo l'interpretazione intesa dello stesso Lagrange).[183] E' questa differenza di contenuto informativo, che separa il teorema del resto dall'originario presupposto di convergenza su cui si fonda l'intera teoria delle funzioni analitiche, che rende agli occhi di Lagrange tale teorema una mediazione indispensabile fra l'algoritmo delle funzioni derivate e le sue applicazioni geometriche e meccaniche e dà quindi ragione dell'organizzazione interna della teoria delle funzioni analitiche.[184]

---

[183] Se ci limitiamo al problema della ricerca della tangente la dimostrazione di Lagrange può in verità essere semplificata in modo da rendere inutile il ricorso al lemma indicato e, *a fortiori*, al teorema del resto. Questa tuttavia è una caratteristica peculiare del problema della tangente che non si ritrova in altri problemi geometrici, come quello della ricerca del cerchio osculatore o quello dell'area di una curva data. Per operare una tale semplificazione occorre infatti assumere *a priori* che le funzioni $u = \varphi(v)$ e $u = \phi(v)$ esprimano delle rette e siano quindi tali che la loro derivata seconda sia nulla. Posta l'identità $f'(x) = \varphi'(x)$, la disequazione $|\Delta_1| < |\Delta_2|$ sarebbe infatti indipendente dai resti e sarebbe banalmente verificata per ogni ω positivo, indipendentemente dalla scelta di ξ. Una situazione analoga si verifica tutte le volte che la curva osculatrice cercata è una curva polinomiale di grado assegnato, ma cessa di aver luogo non appena si passi, a esempio, alla ricerca del cerchio osculatore. (Una interessante conseguenza di tale osservazione è che la giustificazione della possibilità di rappresentare la velocità e l'accelerazione istantanee per mezzo delle derivate prima e seconda della funzione che esprime il moto è in quanto tale indipendente dall'impiego del teorema del resto e non richiede che la convergenza della (14) per $|\xi|$ sufficientemente piccolo]. Ancora più evidente è poi la necessità di ricorrere al teorema del resto per giustificare l'applicabilità dell'algoritmo delle funzioni derivate alla ricerca dell'area di una curva data. A questo scopo Lagrange [cfr. Lagrange (1797), pp. 155-56 e (1813), pp. 215-16] assume infatti che, data una funzione $u = f(v)$ l'area della curva corrispondente sia espressa da un'altra funzione indeterminata $\phi(v)$, in modo che $\phi(x)$ sia il valore della porzione di tale area compresa fra le ascisse $v = 0$ e $v = x$. La differenza $\phi(x+\xi) - \phi(x)$ esprime allora il valore della porzione di questa stessa area compresa fra le ascisse $v = x+\xi$ e $v = x$, la quale dovrà ovviamente essere compresa fra le aree dei due rettangoli di base ξ e altezza $f(x)$ e $f(x+\xi)$. Supponendo per semplicità che l'ordinata $u = f(v)$ sia positiva e crescente in un intorno destro x [l'argomento è banalmente riformulabile per le supposizioni contrarie], si avrà allora, sviluppando in serie e impiegando il teorema del resto:

$$0 \leq \left[\phi'(x) - f(x)\right] \leq \left[f'(x+\eta_{1,0}) - \frac{\phi''(x+\eta_{1,1})}{2}\right]\xi$$

che potrà essere verificata *per ogni* ξ (minore in modulo di un certo δ) solo se $f(x) = \phi'(x)$: la derivata della funzione area è quindi uguale alla funzione ordinata. E' evidente che l'impiego del teorema del resto svolge qui la funzione di garantire che il resto di ordine zero dello sviluppo della funzione $\psi(x+\xi) = f(x+\xi) - \frac{\phi'(x)}{2}$ possa essere reso minore di ogni quantità data, scegliendo ξ sufficientemente piccolo [cfr. *sotto*].

[184] Parlando di differenza di contenuto informativo mi riferisco ovviamente al contenuto informativo esplicito. Il punto non è infatti se le premesse di Lagrange siano in quanto tali sufficienti a concludere che la serie sviluppo possiede la proprietà indi-

Ciò detto, torniamo all'argomento impiegato da Lagrange per giustificare l'interpretazione della derivata prima di una funzione data come una rappresentazione analitica del coefficiente angolare della tangente alla curva espressa da tale funzione. Se l'analisi precedente ci ha mostrato come esso si richiami a una proprietà della (14) che è diversa dalla sua convergenza su un disco di raggio positivo, questo non significa che tale argomento sia in quanto tale indipendente dalla convergenza della (14) e possa venir riformulato accettando semplicemente la premessa che asserisce che la (14) esibisce uno sviluppo che gode della proprietà indicata.[185] Al contrario, la stessa premessa di Lagrange si fonda sulla possibilità di rappresentare la differenza finita $f(x+\xi)$- $f(x)$ di una qualsiasi funzione per mezzo dello sviluppo in serie intera di $f(x+\xi)$ e richiede quindi la convergenza di tale sviluppo, la quale è d'altra parte necessaria per poter intendere il teorema del resto come un risultato che fornisce un'espressione finitaria della serie $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \xi^k$, che è in tal modo implicitamente equiparata alla differenza finita $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!} \xi^k$ - $f(x+\xi)$. Per evitare di dover ricorrere a una simile premessa, che oggi sappiamo inutilmente forte, Lagrange avrebbe dovuto modificare in modo sostanziale la sua impostazione, accettando di intendere la derivata prima di $f(x)$ semplicemente come il coefficiente di ordine uno di una funzione lineare $A_0 + A_1\xi$ la cui differenza rispetto alla funzione $f(x+\xi)$ può essere resa minore di ogni

cata, ma se esse asseriscono questo in modo esplicito o se richiedono una dimostrazione che evidenzi tale conseguenza.

[185]Si osservi che, anche qualora il "resto" sia inteso come la differenza fra la funzione assegnata e la ridotta parziale del suo sviluppo (formale) [cfr. *sotto*], la proprietà indicata, per quanto molto vicina, non corrisponde ancora in senso stretto alla moderna proprietà di asintoticità di uno sviluppo (la quale risale essenzialmente a Poincaré [cfr. Poincaré (1886)], il quale non si riferisce tuttavia che a serie di potenze intere negative): in linguaggio moderno uno sviluppo (formale) $\sum_{v=0}^{\infty} A_v \Phi_v(\xi)$ di una funzione $\varphi(\xi)$ è infatti uno sviluppo asintotico (per ξ tendente a ξ_0) quando, per ogni scelta di n ($n \in$ N), la successione $\left\{\Phi_v(\xi)\right\}$ e la differenza $\varphi(\xi) - \sum_{v=0}^{n} A_v \Phi_v(\xi)$ sono rispettivamente tali che:

$$\lim_{\xi\to\xi_0} \frac{\Phi_{n+1}(\xi)}{\Phi_n(\xi)} = 0 \text{ e } \lim_{\xi\to\xi_0} \frac{\varphi(\xi) - \sum_{v=0}^{n} A_v \Phi_v(\xi)}{\Phi_n(\xi)} = 0$$

[cfr. a esempio Murray (1974), pp. 11-2]. È chiaro che se $\left\{\Phi_v(\xi)\right\} = \left\{\xi^v\right\}$, ciò è possibile solo se la differenza fra la ridotta parziale di ogni ordine n dello sviluppo assegnato e la funzione data tende a zero se ξ tende a ξ_0; tale condizione, pur essendo necessaria, non è tuttavia sufficiente. Come vedremo Lagrange considera d'altra parte la proprietà indicata come una ovvia conseguenza della possibilità di renderne il "resto" di ogni ordine dello sviluppo (14) minore di ogni valore positivo assegnato, prendendo ξ sufficientemente piccolo in modulo.

quantità assegnata, prendendo ξ sufficientemente piccolo, ciò che lo avrebbe condotto di fatto alla definizione di Cauchy. Al contrario l'implicita richiesta di appartenenza delle funzioni considerate alla classe C^{∞} nel punto di ascissa x può facilmente venir eliminata per mezzo di banali correzioni locali dell'argomento, il quale può senza difficoltà essere riferito a uno sviluppo qualsiasi in serie di potenze razionali, il cui secondo termine presenti la potenza uno della variabile ξ. Anche questa caratteristica inessenziale della dimostrazione è tuttavia sintomatica del modo di procedere di Lagrange, il quale sembra riferirsi comunque alla (14) come a uno sviluppo convergente su un disco di raggio positivo e associabile a ogni funzione assegnata - tranne, eventualmente, che in determinati punti isolati, la cui considerazione non riguarda la teoria generale e non mette luogo che a qualche eccezione locale, che può sempre venire trattata tramite procedimenti particolari. Se l'originaria assunzione di convergenza non è così in quanto tale *sufficiente* a garantire le applicazioni geometriche e meccaniche dell'algoritmo delle funzioni derivata, essa appare *necessaria* per legittimare la prova di Lagrange, che sembra, d'altra parte, darla per acquisita.

Se la stessa nozione lagrangiana di funzione sembra giustificare un simile approccio e renderlo "generalmente" corretto, l'equiparazione fra la serie $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}\xi^{k}$ e la differenza finita $\sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}\xi^{k}$ - $f(x+\xi)$ su cui esso si fonda non può essere in generale mantenuta senza ingenerare gravi ambiguità. Detto in altri termini: l'implicita limitazione a intorni arbitrariamente piccoli di x, la quale non comporta alcuna difficoltà relativamente allo studio dei comportamenti puntuali di una funzione e permette una tale equiparazione, impedisce di intendere la valutazione del resto come uno strumento atto a stabilire l'intervallo di convergenza dello sviluppo di una funzione assegnata. Un semplice esempio chiarirà la situazione. Applicando il teorema del resto nella forma sopra richiamata allo sviluppo della funzione $f(x+\xi) = (x+\xi)^{-1}$ si ottiene senza alcuna difficoltà l'identità finitaria $(x+\xi)^{-1} = \frac{1}{x} - \frac{\xi}{x^{2}} + \frac{\xi^{2}}{x^{3}} - \ldots +(-)^{\nu} \frac{\xi^{\nu}}{x^{\nu+1}} -(-)^{\nu+1} \frac{\xi^{\nu+1}}{(x+\eta_{\nu})^{\nu+2}}$ $(0 \leq \eta_{\nu} \leq \xi)$. Ora, se x e ξ sono entrambi maggiori di zero l'ultimo termine di tale somma non diventa mai infinito, ma non è ovviamente vero che lo sviluppo in serie intera di $(x+\xi)^{-1}$ converge per ogni x e ξ positivi. Per comprendere una tale situazione occorre quindi distinguere fra la serie $\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x)}{k!}\xi^{k}$ e la differenza fra la funzione e i primi n termini del suo sviluppo e intendere il "teorema del resto" come riferito a quest'ultima differenza. Questo non è tuttavia il solo modo per evitare che l'identità precedente si presenti come contraddittoria rispetto al "teorema del resto". L'altra possibilità è quella di intendere tale teorema come sottoposto alle condizioni che rendono lo sviluppo convergente. Ciò riduce tuttavia in modo essenziale il contenuto informativo del risultato di Lagrange, anche nel contesto di un universo funzionale ristretto, come quello a cui questi si riferisce. La scelta fra queste due alternative non risulta mai esplicita né nella *Théorie* né nelle *Leçons* e ciò è all'origine di non poche ambiguità. E' tuttavia sintomatico che Lagrange presenti nelle *Leçons* una dimostrazione del "teorema del resto" essenzialmente diversa da quella che egli aveva impiegato nella prima edizione della *Théorie*. Infatti, benché quest'ultima dimostrazione si ripresenti inalterata anche nella seconda edizione, è possibile intendere la decisione di Lagrange come motivata dal desiderio di rendere esplicita la possibilità di leggere il risultato espresso da tale teorema come una valutazione della differenza fra una funzione assegnata e una ridotta parziale di ordine qualsiasi del suo sviluppo formale, sia esso convergente o divergente.

III. 6. *d*. γ. *Un primo teorema di Lagrange relativo alla valutazione dei resti di una serie convergente*

Fatte questo necessarie premesse, torniamo ora al teorema presentato alla fine del precedente paragrafo III.6.*b*.γ., e cerchiamo di analizzarne la dimostrazione e di interpretarne l'enunciato, la cui mancanza di precisione è assolutamente evidente.

La prima ambiguità che salta agli occhi è relativa al significato dell'avverbio "*toujours*". Se assumiamo che questo introduca un'universalizzazione riferita tanto alla funzione considerata che al valore occasionalmente assegnato alla variabile x (posta eventualmente l'eccezione di alcuni punti isolati[186]), possiamo scegliere fra due diverse interpretazioni della proprietà predicata dal teorema, la quale è essenzialmente diversa, a seconda se l'opportuno valore di ξ è considerato come dipendente o indipendente dalla scelta di x e n. Se Lagrange avesse colto una tale differenza - che oggi sappiamo essere connessa all'ordine delle quantificazioni - egli avrebbe anche saputo distinguere in generale fra comportamenti uniformi e non uniformi di una serie, ciò che non sembra certamente il caso.[187] Tuttavia le due differenti interpretazioni aprono, come vedremo, la possibilità di diversi giudizi relativi alla conclusione cui conduce il teorema, e devono quindi venir separate. Compiuta una tale distinzione, per così dire di principio, non è difficile rendersi conto che la dimostrazione di Lagrange, comunque essa venga intesa, non fornisce alcun argomento per giustificare l'asserzione della versione più forte del teorema, che se vuole discendere dalla prova proposta deve quindi presentarsi in modo da rendere esplicita la dipendenza del valore opportuno di ξ tanto da x che da n.

---

[186] Cfr. *sotto*.

[187] Come è noto la nozione di uniformità non fece il suo ingresso esplicito in matematica che fra gli anni 1847 e 1848 per merito di Seidel e Stokes [cfr Seidel (1847) e Stokes (1848)] a seguito della nota discussione sull' "errore di Cauchy" a proposito della funzione limite di una serie convergente di funzioni continue [per alcune indicazioni bibliografiche cfr. la nota (76) del precedente paragrafo II.2.κ.].

Questa non è tuttavia la sola ambiguità presente nell'enunciato di Lagrange. Un'altra, almeno altrettanto rilevante, é subito chiara non appena si confronti tale enunciato tanto con la dimostrazione che lo sorregge, che con il "procedimento preparatorio" esposto nel precedente paragrafo III.6.*b*.γ.. Tale ambiguità riguarda il significato dei simboli ξP_1, ξP_2, ξP_3, &c. che Lagrange qualifica nell'enunciato del teorema come dei "resti" e nella dimostrazione come delle funzioni di ξ che restano finite nell'intorno del punto $\xi = 0$, nel quale si annullano. Ora, se pensiamo tale simboli come definiti reiterativamente dalle (11), e accettiamo le condizioni di Lagrange relative all'esistenza di un valore finito (diverso da zero), che può essere sostituito ai simboli di ordine inferiore (rispetto a ogni ordine considerato) qualora la variabile ξ sia posta uguale a zero, allora dobbiamo anche accettare che tali simboli rinviano a della "funzioni" (quantità) finite, espresse volta a volta da una somma algebrica finita di quantità finite. In tal caso essi non si presentano tuttavia, in quanto tali, come dei "resti" di uno sviluppo già dato. Così non vi è alcun senso in cui si possa dire *a priori* che la "quantità" indicata dal simbolo ξP_ν contenga come propri addendi le "quantità" successive $\xi P_{\nu+1}$, $\xi P_{\nu+2}$, &c.. Nonostante ciò, se possiamo dimostrare che per ogni f e per ogni x, che soddisfanno le condizioni richieste, è possibile fissare un valore positivo δ, tale che se l'incremento ξ è preso in modulo minore di δ, allora le differenze ξP_1, ξP_2, ξP_3, &c. sono tali che per ogni valore ε fissato esiste un numero naturale N tale che se ν è maggiore o uguale a N, allora tutte le differenze ξP_ν, $\xi P_{\nu+1}$, $\xi P_{\nu+2}$, &c. sono minori di ε, allora abbiamo dimostrato che il procedimento di Lagrange produce una serie convergente alla funzione data, entro un disco centrato sul punto $\xi = 0$ e di raggio positivo. Se la dimostrazione di Lagrange raggiunge un tale risultato e possiamo interpretare l'enunciato del teorema come tale da asserire una tale proprietà, allora questi ha *dimostrato*, senza alcuna necessità di riferirsi a una presupposizione di convergenza riferita alla (2), che tutte le funzioni che soddisfanno le sue richieste posseggono uno sviluppo in serie intera convergente su un disco di raggio finito.

Il ruolo del teorema in esame sarebbe allora cruciale per la stessa edificazione della teoria: esso potrebbe sostituirsi alla dimostrazione della (3) e dare un senso non formale alla nozione di sviluppo (almeno per alcune funzioni) senza richiedere alcuna presupposizione relativa alla convergenza. Non è tuttavia difficile rendersi conto che, anche limitando il dominio delle funzioni considerate in modo che sia rispettata la condizione di fattorializzazione implicita nella costruzione delle (11),[188] la dimostrazione di

---

[188] Dopo aver ripresentato la dimostrazione già fornita nella prima edizione della *Théorie* per il teorema precedente, Lagrange scrive nella seconda edizione [cfr. Lagrange (1813), p. 15]:

> Les doutes qui pourraient rester sur la démonstration de ce théorème, parce que le procédé que nous avons employé pour trouver les restes ξP_1, ξP_2, ξP_3, &c. n'est applicable qu'aux fonctions algébriques, seront levés dans le chapitre VI, où nous donnerons l'expression générale de ces restes, et la manière d'en déterminer les limites.

Lagrange è ben lontana dal produrre un tale risultato, che il suo enunciato non sembra peraltro in nessun modo asserire. Ecco infatti come egli presenta il proprio argomento:

> [...] puisque les restes ξP_1, ξP_2, ξP_3, &c. sont des fonctions de ξ qui deviennent nulles, par la nature même du développement, lorsque $\xi = 0$, il s'ensuit qu'en considérant la courbe dont ξ serait l'abscisse, et l'une de ces fonctions l'ordonnée, cette courbe coupera l'axe à l'origine des abscisses; et à moins que ce point ne soit pas un point singulier, ce qui ne peut avoir lieu que pour des valeurs particulières de x, comme il est facile de s'en convaincre avec un peu de réflexions, et par un raisonnement analogue à celui du n° 10 [si tratta dell'argomento che conduce dalla (2) alla (3)], le cours de la courbe sera nécessairement continu depuis ce point; donc elle s'approchera peu à peu de l'axe avant de le couper, et s'en approchera par conséquent d'une quantité moindre qu'aucune quantité donnée; de sorte qu'on pourra toujours trouver une abscisse ξ correspondante à une ordonnée moindre qu'une quantité donnée; et alors toute valeur plus petite de ξ répondra aussi à des ordonnées moindres que la quantité donnée.[189]

Date le (11), Lagrange prende in considerazione la famiglia di funzioni di ξ $\{\xi\, P_\nu(x, \xi)\}$ ($\nu = 1, 2,$ &c.) - dove $P_\nu(x, \xi)$ è per ogni ν tale che la sua proiezione $P_\nu(x, 0)$ è comunque finita, salvo che per isolati valori di x - e asserisce che le funzioni che appartengono a tale famiglia sono tutte continue[190] in un intorno opportunamente piccolo del punto $\xi = 0$, in cui esse si annullano, e tendono *quindi* indefinitamente a zero quando ξ stesso tende a zero. Per ogni ω positivo fissato e per ogni ν è *quindi* possibile scegliere un valore positivo ε, tale che, per ogni ξ minore (in modulo) di ε, il prodotto $|\xi\, P_\nu(x, \xi)|$ sia minore di ω. Se ω e ν sono presi rispettivamente uguali a $|p_\nu(x)|$ [$= P_\nu(x, 0)$] e a $n+1$, seguirà che si potrà trovare un valore ε, tale che $|\xi^{n+1}\, P_{n+1}(x, \xi)|$ è minore di $|p_\nu(x)\, \xi^n|$, per ogni ξ minore (in modulo) di ε, ciò che dimostra il teorema. L'argomento di Lagrange si costruisce così a partire da una premessa, che

---

Se è chiaro come Lagrange intenda qui rinviare a una differente dimostrazione possibile (che egli aveva d'altra parte già fornito nelle *Leçons* [cfr. la precedente nota (46)]), la quale fornisce una nuova collocazione per il suo risultato, ciò che è interessante è il riferimento alla limitazione alle sole funzioni algebriche come condizione di validità della propria dimostrazione. Lagrange sembra infatti asserire che la fattorializzazione richiesta nel processo di costruzione delle (11) è legittimamente asseribile (indipendentemente dall'assunzione della (3) come espressione di uno sviluppo convergente) solo per le funzioni algebriche. Tale osservazione si potrebbe intendere allora come un'implicita indicazione della possibilità di pervenire a una dimostrazione della convergenza, almeno nel caso di funzioni algebriche. Purtroppo se Lagrange credeva d'aver mostrato tale possibilità, egli semplicemente si sbagliava: non vi è nulla nella sua dimostrazione del teorema in questione (anche quando la si limiti a funzioni che legittimano la fattorializzazione) che possa far pensare che la proprietà dimostrata è la convergenza di uno sviluppo costruito reiterativamente secondo un procedimento *standard* come quello indicato dalle (11).

[189] Cfr. Lagrange (1797), p. 12 e (1813), pp. 14-5.

[190] Il termine "continuo", riferito a delle funzioni, rende chiaro che il riferimento è alle nozioni moderne tanto di funzione che di continuità. Il mio linguaggio non è quindi fedele al testo di Lagrang,e che formula il proprio ragionamento in termini esplicitamente geometriche, riferendolo a curve piuttosto che a funzioni [cfr. *sotto*].

asserisce che la funzione $P_\nu(x, \xi)$ è - salvo che per valori isolati di x - una funzione continua in un intorno finito dell'origine, e a due inferenze cruciali, le quali si presentano come dei casi particolari delle due seguenti implicazioni: i) se $\varphi(z)$ è una funzione continua in un intorno di un punto a e $\varphi(a) = A$, allora quando z tende a a $\varphi(z)$ tende a A; ii) se una funzione $\varphi(z)$ di z tende a A per z che tende a a, allora, per ogni quantità ω assegnata, è possibile scegliere un valore positivo ε sufficientemente piccolo affinché la differenza $|A - \varphi(a \pm \varepsilon)|$ sia minore di ω.[191] Assunta la premessa, Lagrange cerca, se non di giustificare, almeno di illustrare la (i) e la (ii) e fa a questo scopo ricorso a un linguaggio esplicitamente geometrico.

Comunque si interpretino tali inferenze, e chiaro che esse non si riferiscono che a funzioni isolatamente prese. Non vi è quindi alcun argomento nella dimostrazione di Lagrange che permetta di asserire qualcosa relativamente al comportamento di tutte le funzioni della famiglia considerata rispetto a un valore fissato di ξ o a una quantità stabilita ω arbitrariamente piccola. Ancora più chiaramente è assente ogni considerazione relativa alle relazioni esistenti fra tali funzioni, la quale permetta di mostrare che esse si comportano l'una rispetto alle altre come dei resti di una serie convergente. Se interpretiamo queste funzioni come delle differenze definite dal procedimento costruttivo che conduce alle (11), secondo il suggerimento precedente, tutto ciò che sappiamo è che, per ognuna di tali differenze, vi è un valore di ξ abbastanza piccolo che possa renderla minore in modulo di una qualsiasi quantità data. Assumendo la forma della (11) possiamo allora concludere, moltiplicando per un opportuna potenza di ξ, che per ogni ordine ν di reiterazione del procedimento costruttivo possiamo scegliere un valore sufficientemente piccolo di ξ, tale che la differenza fra il polinomio finito fino allora costruito e la funzione generatrice è minore dell'ultimo termine di tale polinomio, ciò che ovviamente non è la convergenza del polinomio indefinitamente reiterato alla funzione generatrice su un disco di raggio positivo.

La situazione cambia radicalmente se accettiamo di qualificare le funzioni ξP_1, ξP_2, ξP_3, &c. come dei resti successivi definiti dalla (3), intesa come una serie convergente su un disco di raggio positivo, ovvero se poniamo semplicemente

$$
(82)\qquad
\begin{aligned}
&\xi\, P_1(x, \xi) = \xi \left[p_1(x) + \xi\, p_2(x) + \&c. \right] \\
&\xi\, P_2(x, \xi) = \xi \left[p_2(x) + \xi\, p_3(x) + \&c. \right] \\
&\xi\, P_3(x, \xi) = \xi \left[p_3(x) + \xi\, p_4(x) + \&c. \right] \\
&\&c.
\end{aligned}
$$

---

[191] Per quanto ciò non implichi la comprensione della distinzione fra continuità uniforme e non uniforme, il linguaggio di Lagrange sembra in questo caso sufficientemente esplicito per permettere di interpretare ε come dipendente dalla scelta di ω.

La dimostrazione di Lagrange non si presenta allora che come una prova della possibilità di prendere, in ogni serie intera[192] convergente su un disco di raggio positivo, il valore della variabile abbastanza piccolo perché la convergenza sia sufficientemente veloce da rendere ogni resto dato minore dell'ultimo termine considerato. L'interesse di un tale risultato risulta chiaramente dalle considerazioni presentate nel precedente paragrafo III.6.*d*.β. e la sua dimostrazione non pone più alcuna difficoltà, una volta che se ne siano accettate le premesse. Il teorema può allora presentarsi sotto la forma seguente:

Teorema I. Se lo sviluppo indicato dalla (3) è convergente[193] per $0 < |\xi| < \delta$, allora esso è tale che per ogni x (per cui tutti i successivi coefficienti risultano finiti) e per ogni n ($n \in \mathrm{N}$) esiste un ε positivo maggiore di zero (e minore o uguale a δ) tale che:

$$(83) \qquad |\xi| < \varepsilon \Rightarrow \left| p_n(x)\,\xi^n \right| > \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} p_k(x)\,\xi^k \right|$$

Interpretato il teorema in tal modo, torniamo alla sua dimostrazione. Ciò che occorre osservare in primo luogo è che essa non si riferisce esplicitamente che a funzioni a dominio e codominio reale. Se la dimostrazione della (3) era stata condotta, d'altra parte, con un esplicito riferimento al campo complesso, non sembra che la teoria delle funzioni derivate possa in nessun modo qualificarsi come un frammento di analisi complessa, e anzi quello precedente non è che il primo di una lunga serie di argomenti che si susseguono,

[192]Ecco d'altra parte come lo stesso Lagrange si esprime subito dopo aver fornito la propria dimostrazione [cfr. Lagrange (1797), p. 12-3 e (1813), pp. 15-6 (la citazione si riferisce alla prima edizione e non tiene conto di alcune lievi e inessenziali modifiche introdotte nella seconda)]:

> Au reste, il est facile de voir que la manière que nous venons de donner pour trouver successivement les termes de la série qui représente une fonction de $x+\xi$, développée suivant les puissances de ξ, peut s'appliquer en général au développement de toute fonction de x et de ξ, pourvu que cette fonction soit susceptible d'être réduite en une série qui procède suivant les puissances positives et entières de ξ. Car le raisonnement [...] par lequel nous avons prouvé que toute fonction de $x+\xi$ est, généralement parlant, susceptible de cette forme, ne pourrait pas s'appliquer en général à une fonction quelconque de x et ξ. Mais dans le cas où cette réduction est possible, on pourra toujours appliquer à la série résultant du développement suivant les puissances ascendantes de ξ, la conséquence que nous avons tirée [...]; savoir, que la quantité ξ pourra être prise assez petite pour qu'un terme quelconque de la série soit plus grand que tous ceux qui le suivent, pris ensemble.

Per quanto non sia per nulla chiaro a che genere di eccezioni Lagrange voglia qui riferirsi [l'ipotesi più soddisfacente è a mio parere che egli intenda riferirsi alle eccezioni relative a particolari valori isolati di x], tale brano mostra con tutta evidenza come questi interpreti la sua prova come del tutto conseguente all'assunzione della (3).

[193]Si osservi che, assunta la convergenza e definite le funzioni $P_\nu(x, \xi)$ come dei resti riferiti alla (3), l'intero ragionamento di Lagrange è, in quanto tale, indipendente da ogni considerazione sul rapporto fra la serie e la funzione generatrice. Ciò che è assunto è quindi in senso stretto la convergenza e non la convergenza alla funzione, la quale è invece indispensabile per asserire la (9) e la (12) in senso non puramente formale.

tanto nella *Théorie* che nelle *Leçons*, mostrando con tutta evidenza che il riferimento principale di Lagrange è al campo reale, piuttosto che a quello complesso. Come era già stato il caso di Euler, la considerazione di valori complessi non interviene che localmente e in termini operativi (come nel caso della identificazione delle funzioni trigonometriche con delle composizioni di esponenziali immaginari[194]) o in modo generalissimo, per evitare di dover restringere (per mezzo di una condizione metalinguistica) l'universo delle funzioni a quelle sole forme analitiche definite almeno su una porzione (non puntuale) di $\mathbf{R}$ (scartando a esempio espressioni formalmente ineccepibili come $\sqrt{x-1}\left(\sqrt{1-x}\right)$, senza accompagnarsi a alcuna concettualizzazione delle conseguenze che derivano dal riferimento a un dominio di valori non totalmente ordinato. Se questa contraddizione intrinseca all'analisi post-euleriana è largamente circoscritta nei trattati di Lagrange, grazie all'esplicita impostazione formale che li contraddistingue, essa riemerge puntualmente non appena si passi, dall'enunciazione o dall'applicazione delle regole formali, alla considerazione dei valori rappresentati dalle variabili in gioco. Sembra così che una appropriata ricostruzione degli argomenti che Lagrange impiega nel corso della sua analisi del resto della (14) e delle conclusioni che egli ne trae non possa che riferirsi esclusivamente al campo reale. L'introduzione dei moduli, nella mia precedente ricostruzione, non corrisponde così che all'ovvia indipendenza del ragionamento di Lagrange dalla considerazione di un intervallo destro piuttosto che sinistro dell'origine.

Il carattere geometrico dell'argomento non ha tuttavia solo la conseguenza negativa di limitare il riferimento al campo reale. Ciò che forse è più rilevante è che esso permette di far ricorso a una proprietà come la continuità (in senso moderno) che Lagrange non avrebbe potuto predicare delle funzioni, intese in quanto tali come delle mere forme analitiche.[195] Il contesto in cui tale proprietà è introdotta è tuttavia significativamente differente da quello oggi usuale. Questa non si presenta infatti come una proprietà che caratterizza una determinata sottoclasse degli oggetti considerati (siano essi curve o funzioni), ma come una proprietà comune a tutti gli elementi della classe, eventualmente contraddetta soltanto dalla considerazione di valori estranei al dominio di definibilità della funzione data relativamente a $\mathbf{R}$: se una funzione è tale da non assumere che valori reali e finiti entro un certo intervallo, allora essa (la curva corrispondente) è continua in tale intervallo (o se si preferisce: è rappresentabile da *una* curva, genuinamente parlando). E' proprio partendo da tale presupposto che Lagrange può affermare che, essendo $P_v(x, 0)$ una funzione di x che resta finita (in $\mathbf{R}$[196]) per ogni scelta di x (per cui ha luogo la (3)), allora $P_v(x, \xi)$ è, per ogni x, una funzione finita(e reale) di ξ ($\xi \in \mathbf{R}$) e può *quindi* essere rappresentata da una curva che è per definizione una traccia continua intorno a un punto dato. In verità Lagrange

[194] Cfr. il precedente paragrafo III.6.*c*.δ..

[195] Cfr. la precedente nota (190).

[196] E' evidente che, restringendo il riferimento al campo reale, la (14) non esprime che una sviluppo riferito al dominio di definibilità in R della funzione primitiva.

introduce qui una clausola con la quale elimina alcuni valori isolati di x, i quali produrrebbero dei resti che, pur essendo definiti su **R** nel punto $\xi = 0$, non lo sono in nessun intorno di tale punto.[197] Strettamente parlando, tale clausola è tuttavia inessenziale. Essa non sarebbe necessaria[198] che nel caso in cui $P_v(x, \xi)$ fosse definita come la differenza fra la funzione $f(x+\xi)$ e la corrispondente ridotta parziale dello sviluppo. In tal caso nulla ci assicurerebbe infatti che la (3) possa effettivamente aver luogo e occorrerebbe escludere casi come quelli considerati nella precedente nota (197) - i quali sono implicitamente esclusi qualora la forma di $P_v(x, \xi)$ sia data dalla (3).

III. 6. *d.* δ. *La dimostrazione della Théorie del teorema del resto: l'espressione del resto per mezzo di un'opportuna equazione alle funzioni derivate e la sua reinterpretazione in forma integrale*

Se il precedente Teorema I permette una valutazione del resto di uno sviluppo convergente, che è in numerose occasioni sufficiente, i principi generali della teoria delle funzioni derivate permettono di dimostrare un risultato più generale, che Lagrange impiega come base d'appoggio per giustificare le applicazioni geometriche e meccaniche di tale teoria, e indica come uno strumento atto a perfezionare i metodi usuali di approssimazione numerica. Mi riferisco ovviamente al cosiddetto "teorema del resto", il cui ruolo di principio generale che presiede all'insieme delle applicazioni possibili della "teoria delle serie" è sottolineato in modo assolutamente esplicito dallo stesso Lagrange:

> La perfection des méthodes d'approximation dans lesquelles on emploie les séries, dépend non-seulement de la convergence des séries,[199] mais encore de ce

---

[197]Essendo x e ξ due variabili indipendenti fra loro, è chiaro che Lagrange non può che riferirsi all'eventualità che la scelta di x renda lo sviluppo tale che uno dei resti successivi sia espresso da una funzione di ξ (in cui x compaia come una costante determinata), la quale, pur annullandosi per $\xi = 0$, non sia definita per alcun intorno di questo punto relativamente a R e non possa quindi esprimere l'ordinata di una curva. Lagrange afferma quindi che un argomento analogo a quello che conduce dalla (2) alla (3) mostra che una tale funzione (a esempio $\xi[P_v(x,\xi)] = \xi\left[\sqrt{\xi(\xi-1)} + \sqrt{\xi(1-\xi)}\right] g(x)$, con $g(x)$ una quantità finita e costante relativamente a ξ) non possa esprimere un resto della (2) che per valori isolati di x. Egli assume quindi implicitamente che una tale situazione non possa essere creata che dalla presenza di radicali nel resto della (2), ciò che porterebbe alle stesse contraddizioni indicate relativamente alla presenza di esponenti frazionari in almeno uno dei termini di questo stesso sviluppo.

[198]Si osservi che una tale necessità è riferita solo alla particolare dimostrazione fornita da Lagrange. Anche mantenendo inalterato il riferimento geometrico potremmo infatti riformulare tale prova relativamente a superfici continue, e ampliare quindi il riferimento a funzioni a valori complessi senza introdurre nessuna particolare limitazione. Una funzione lagrangiana (forma analitica) a valori complessi è infatti ovunque continua tranne che negli intorni dei punti in cui diviene infinita.

[199]E' qui perfettamente chiaro il riferimento a serie già intese come convergenti, ciò che conferma le conclusioni dei precedenti paragrafi III.6.*d*.β. e III.6.*d*.γ..

> qu'on puisse estimer l'erreur qui résulte des termes qu'on néglige, et à cet égard on peut dire que presque toutes les méthodes d'approximation dont on fait usage dans la solution des problèmes géométriques et mécaniques, sont encore très-imparfaites. Le théorème précédent [il teorema del resto, appunto] pourra servir dans beaucoup d'occasion à donner à ces méthodes la perfection qui leur manque, et sans laquelle il est souvent dangereux de les employer.[200]

Ecco d'altra parte come Lagrange introduce, qualche pagina prima, l'argomento che condurrà al proprio risultato:[201]

> Ce problème [quello di "juger de la valeur du reste de la série"], l'un des plus importants de la théorie des séries, n'à pas encore été résolu d'une manière générale. On pourrait, à la vérité, le résoudre pour chaque fonction en particulière, par les méthodes exposées au commencement [...][202]; mais il serait impossible de parvenir par cette voie à une solution générale pour une fonction quelconque.

Il "teorema del resto" fornisce proprio una tale "soluzione generale" al problema della valutazione del resto di una serie sviluppo.

Come ho già detto, Lagrange perviene al proprio risultato tramite due differenti percorsi nella *Théorie* e nelle *Leçons*.[203] Nel presente paragrafo e in quello che lo segue analizzerò la dimostrazione proposta nel primo di tali trattati (la quale si presenta sostanzialmente inalterata in entrambe le edizioni[204]), lasciando la dimostrazione delle *Leçons* al prossimo paragrafo III.6.*d*.*ζ*..

Se nella (14) poniamo x-ξ in luogo di x e successivamente xz in luogo di ξ (con z una variabile arbitraria) otteniamo senza alcuna difficoltà la seguente identità

$$(84)\qquad f(x) = f(x-xz) + xz\, f'(x - xz) + \frac{x^2z^2}{2!} f''(x-xz) + \frac{x^3z^3}{3!} f'''(x-xz) + \&c.$$

che per $z = 1$ si trasforma nell'equivalente lagrangiano del "teorema" di Maclaurin:

$$(85)\qquad f(x) = f(0) + x\, f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \frac{x^3}{3!} f'''(0) + \&c.$$

[200] Cfr. Lagrange (1797), p. 50 e (1813)p. 69.

[201] Cfr. *ivi*, p. 43 e p. 56.

[202] Lagrange rinvia qui alla (11).

[203] Cfr. rispettivamente *ivi*, pp. 41-50 e pp. 54-69 e Lagrange (1801), lez. IX, pp. 65-83 e (1806a), lez. IX, pp. 88-110.

[204] Alcune lievi differenze verranno indicate in nota.

(che, specificando *a priori* il centro dello sviluppo, è contraddetta da una classe di funzioni facilmente caratterizzabile).[205] Se tronchiamo la (84) dopo il suo (ν +1)-esimo termine, avremo (per ogni ν (ν = 0, 1, 2, &c.)):

$$f(x) = f(x - xz) + xz\, f'(x-xz) + \frac{x^2 z^2}{2!} f''(x - xz) + \ldots +$$

(86) $$+ \frac{x^\nu z^\nu}{\nu!} f^{(\nu)}(x-xz) + x^{\nu+1} R_\nu$$

$$\left[R_\nu = R_\nu(x, z);\ R_\nu(x, 0) = 0\right]$$

nella quale la forma del "resto" di ordine ν, $x^{\nu+1}R_\nu$, non può essere tratta che da un'analisi della stessa identità (84);[206] questo non può quindi che essere qualificato come una rappresentazione contratta della somma dei termini di ordine superiore a ν nella (84) stessa. Derivando relativamente a *z* (che è una variabile arbitraria indipendente da *x*) e osservando che i successivi coefficienti della (84) possono essere intesi come delle derivate rispetto alla variabile composta *v* = *x-xz*, si avrà allora

$$0 = -x\, f'_{x-xz}(x - xz) + x\, f'_{x-xz}(x-xz) - x^2 z\, f''_{x-xz} + \ldots +$$

(87) $$+ \frac{x^\nu z^{\nu-1}}{\nu!} f^{(\nu)}_{x-xz}(x-xz) - \frac{x^{\nu+1} z^\nu}{\nu!} f^{(\nu+1)}_{x-xz}(x-xz) + x^{\nu+1} \left(R_\nu(x, z)\right)'_z$$

$$\left[R_n(x, 0) = 0\right]$$

e quindi (per ogni ν (ν ∈ N)):

---

[205] Lagrange osserva che la (85) può essere dimostrata, secondo la prova classica, ponendo $f(x) = A + Bx + Cx^2 + \&c.$ e calcolando le derivate successive per $x = 0$. Egli qualifica tuttavia tale dimostrazione come "meno diretta e meno rigorosa" di quella che conduce alla (85) a partire dalla (14) secondo le sostituzioni indicate. Non solo essa richiede infatti la costruzione dell'algoritmo delle funzioni derivate, ma assume inoltre che "la somme de tous les termes affectés de *x* devient nulle, lorsque *x* = 0, quoique le coèfficiens de ces termes augment à l'infini dans les équations dérivées" [cfr. Lagrange (1797), p. 42 e (1813), p. 56].

[206] Se infatti il resto fosse definito semplicemente come la differenza $f(x) - f(x - xz) - \ldots - \frac{x^\nu z^\nu}{\nu!} f^{(\nu)}(x-xz)$ Lagrange non avrebbe alcun argomento per giustificare che esso possa porsi sotto la forma indicata, neppure quello impiegato per ottenere la (8) e la (10) (che peraltro sappiamo scorretto), che si richiama al valore di tale differenza per *x* = 0. Tutto ciò che possiamo affermare di quest'ultima è infatti che essa si annulla per *z* = 0. E' d'altra parte lo stesso Lagrange a qualificare la (86) come una trascrizione contratta della (84).

$$(88) \qquad \left(R_\nu(x,z)\right)'_z = \frac{z^\nu}{\nu!} f^{(\nu+1)}_{x-xz}(x-xz) \qquad \left[R_n(x,0)=0\right]$$

che fornisce un sistema infinito di equazioni alle funzioni derivate, il quale definisce implicitamente i resti degli ordini successivi della (84) e corrisponde all'espressione di questi in forma integrale, permettendo di trarre in generale (per $x - xz = a$):

$$(89) \qquad \begin{aligned} f(x) &= f(a) + f'(a)(x-a) + \frac{f''(a)}{2!}(x-a)^2 + \ldots + \\ &+ \frac{f^{(\nu)}(a)}{\nu!}(x-a)^\nu + \frac{1}{\nu!}\int_a^x (x-t)^\nu f^{(\nu+1)}(t)\,dt \end{aligned}$$

(dove le costanti di integrazione sono calcolate in modo da rispettare la condizione iniziale indicata nella (88)). Lagrange non scrive in verità la (89), intendendo il resto $x^{\nu+1}R_\nu$, non come un integrale definito, ma come la sola primitiva di $\dfrac{z^\nu x^{\nu+1}}{\nu!} f^{(\nu+1)}_{x-xz}(x-xz)$ relativamente a z che si annulla per $z = 0$.[207] E'

[207]Cfr. Ovaert (1976), p. 187. Nella seconda edizione della *Théorie* [cfr. Lagrange (1813), pp. 59-63] Lagrange aggiunge due nuovi paragrafi, nei quali egli determina le relazioni analitiche che le funzioni R_ν ($\nu = 0, 1, 2,\ldots$) intrattengono fra loro. Confrontando la (86) con l'identità analoga di ordine immediatamente superiore, egli ottiene

$$R_\nu = \frac{z^{\nu+1}}{(\nu+1)!} f^{(\nu+1)}(x-xz) + x\,R_{\nu+1}$$

dalla quale, sostituendo secondo la (88), è facile trarre

$$R_{\nu+1} = \frac{R_\nu - \frac{z}{\nu}\left(R_\nu\right)'_z}{x}$$

che è appunto la formula cui perviene Lagrange. Partendo invece dalle (11) e tenendo conto della (14) si avrà, derivando prima rispetto a x e poi rispetto a ξ,

$$f'_x(x+\xi) = f'_x(x) + f''_x(x)\,\xi + \frac{f'''_x(x)}{2!}\xi^2 + \ldots + \frac{f^{(\nu)}_x(x)}{(\nu-1)!}\xi^{\nu-1} + \xi^\nu\left(P_\nu\right)'_x$$

$$f'_\xi(x+\xi) = f'_x(x) + f''_x(x)\,\xi + \frac{f'''_x(x)}{2!}\xi^2 + \ldots + \frac{f^{(\nu-1)}_x(x)}{(\nu-2)!}\xi^{\nu-2} + \nu\,\xi^{\nu-1}P_\nu + \xi^\nu\left(P_\nu\right)'_\xi$$

e quindi, sottraendo membro a membro e calcolando P_ν:

$$P_\nu = \frac{\dfrac{f^{(\nu)}_x(x)}{(\nu-1)!} + \xi\left[\left(P_\nu\right)'_x - \left(P_\nu\right)'_\xi\right]}{\nu}$$

proprio a partire da una tale interpretazione della (88) che egli cerca di fornire, tanto una valutazione numerica del resto, data da un'opportuno inquadramento, che una sua espressione esplicita nei termini di una derivata opportuna della funzione generatrice.

Prima di analizzare la proposta di Lagrange è tuttavia opportuno considerare le relazioni formali intercorrenti fra la (88) e l'implicita espressione del resto in forma integrale, fornita da d'Alembert e Laplace nel quadro della loro dimostrazione differenziale del "teorema di Taylor", analizzata nel precedente paragrafo III.4.*c*.β., alla quale Lagrange sembra apertamente ispirarsi.[208] Ecco come Lacroix mostra, nella seconda edizione del *Traité*, l'equivalenza dei due risultati.[209]

Reiterando fino all'ordine ν il procedimento costruttivo che fornisce la (111) di tale paragrafo e introducendo una più opportuna notazione differenziale, si ottiene la seguente espressione dello sviluppo di Taylor:

$$f(x+\xi) = f(x) + \frac{df(x)}{dx}\xi + \frac{d^2f(x)}{dx^2}\frac{\xi^2}{2!} + \ldots + \frac{d^\nu f(x)}{dx^\nu}\frac{\xi^\nu}{\nu!} + \tag{90}$$
$$+ \int_0^\xi \left[\int_0^\xi \left[\ldots \nu+1 \text{ volte} \ldots \left[\int_0^\xi \frac{\partial^{\nu+1} f(x+\xi)}{\partial x^{\nu+1}} d\xi \right] \ldots \nu+1 \text{ volte} \ldots \right] d\xi \right] d\xi$$

L'integrale multiplo che esprime il resto può essere ridotto a una somma di integrali, mediante un procedimento fondato su una reiterata integrazione per parti, la quale fornisce la seguente identità generale:[210]

Arrestando allora la (14) all'ordine ν e esprimendo il resto sotto la forma indicata dalle (11) si avrà, sostituendo,

$$f(x+\xi) = f(x) + f'(x)\,\xi + \frac{f''(x)}{2!}\xi^2 + \ldots + \frac{f^{(\nu-1)}(x)}{(\nu-1)!}\xi^{\nu-1} + \frac{f^{(\nu)}(x)}{\nu!}\xi^\nu + \frac{\xi^{\nu+1}}{\nu}\left[\left(P_\nu\right)_x - \left(P_\nu\right)_\xi\right]$$

e quindi:

$$P_{\nu+1} = \frac{1}{\nu}\left[\left(P_\nu\right)_x - \left(P_\nu\right)_\xi\right]$$

[208]Si osservi tuttavia che d'Alembert e Laplace procedono costruendo progressivamente lo sviluppo e intendendo chiaramente l'integrale che lo completa come un residuo definito dalla differenza fra la funzione e i termini già determinati, mentre Lagrange sembra al contrario intendere $x^{\nu+1} R_\nu$ come l'espressione compatta di una serie già data [cfr. Lacroix (1810-19), vol. I, p. 388]. Un'indizio evidente di tale differente punto di vista è dato dal fatto che l'integrale di d'Alembert e Laplace esprime direttamente la differenza in questione, mentre la (88) non esprime che un fattore del resto.

[209]Cfr. *ivi*, vol. III, pp. 397-98 e vol. 2, p. 152.

[210]L'esempio μ = 3 permetterà di illustrare il procedimento la cui reiterazione conduce alla (91). Integrando per parti il secondo integrale si ottiene in primo luogo l'identità seguente

$$(91)\qquad \int_0^v\left[\int_0^v\left[\ldots\ \mu\ \text{volte}\ \ldots\left[\int_0^v F(v)\ dv\right]\ldots\ \mu\ \text{volte}\ \ldots\right]dv\right]dv =$$
$$= \frac{1}{(\mu-1)!}\left[\sum_{k=1}^{\mu} -(-)^k \binom{\mu}{k}\frac{k}{\mu}\, x^{\mu-k}\int_0^v v^{k-1}\ F(v)\ dv\right]$$

Si osservi ora che il secondo membro di tale identità può essere ottenuto anche partendo dall'integrale semplice

$$(92)\qquad \frac{1}{\mu-1}\int_0^v (t-v)^{\mu-1}\ F(v)\ dv$$

$$\int_0^v\left[\int_0^v\left[\int_0^v F(v)\ dv\right]dv\right]dv = \int_0^v\left[v\int_0^v F(v)\ dv - \int_0^v v\ F(v)\ dv\right]$$
$$= \int_0^v\left[v\int_0^v F(v)\ dv\right]dv - \int_0^v\left[\int_0^v v\ F(v)\ dv\right]$$

Da qui, ponendo le sostituzioni formali $\int_0^v F(v)\ dv = \Phi(\nu)$ e $\int_0^v v\ F(v)\ dv = \Psi(\nu)$ è in seguito facile procedere come segue:

$$\int_0^v\left[\int_0^v\left[\int_0^v F(v)\ dv\right]dv\right]dv = \int_0^v v\ \Phi(v)\ dv - \int_0^v \Psi(v)\ dv$$
$$= \frac{1}{2}v^2\,\Phi(v) - \frac{1}{2}\int_0^v v^2\ d\Phi(v)\ \cdot v\,\Psi(v) + \int_0^v v\ d\Psi(v)$$
$$= \frac{1}{2}v^2\int_0^v F(v)\ dv - \frac{1}{2}\int_0^v v^2\ F(v)\ dv - v\int_0^v v\ F(v)\ dv + \int_0^v v^2\ F(v)\ dv$$
$$= \frac{1}{2}\left[v^2\int_0^x F(v)\ dv - 2\,v\int_0^v v\ F(v)\ dv + \int_0^v v^2\ F(v)\ dv\right]$$

ciò che dimostra la (91) nel caso considerato.

sviluppando il binomio, distribuendo l'integrale, facendo uscire le potenze di t dall'argomento di questo e ponendo in seguito t in luogo di v. Il confronto fra la (91) e la (92) per le semplici sostituzioni $\mu = v+1$, $v = \xi$ e $\dfrac{\partial^{v+1} f(x+\xi)}{\partial x^{v+1}} = \dfrac{\partial^{v+1} f(x+\xi)}{\partial \xi^{v+1}} = F(\xi)$ ci permette allora di concludere come la (90) possa essere scritta sotto la forma seguente

$$f(x+\xi) = f(x) + \frac{df(x)}{dx}\xi + \frac{d^2 f(x)}{dx^2}\frac{\xi^2}{2!} + \ldots + \tag{93}$$
$$+ \frac{d^v f(x)}{dx^v}\frac{\xi^v}{v!} + \frac{1}{v!}\left[\int_0^{\xi} (t-x)^v \frac{\partial^{v+1} f(x+\xi)}{\partial x^{v+1}} d\xi\right]_{t=\xi}$$

da cui, ponendo la sostituzione $t - \xi = zt$ $(d\xi = -t\,dz)$, è allora facile trarre:

$$f(x+\xi) = f(x) + \frac{df(x)}{dx}\xi + \frac{d^2 f(x)}{dx^2}\frac{\xi^2}{2!} + \ldots + \tag{94}$$
$$+ \frac{d^v f(x)}{dx^v}\frac{\xi^v}{v!} + \frac{\xi^{v+1}}{v!}\int_0^1 z^v \frac{\partial^{v+1} f(x+\xi)}{\partial x^{v+1}} dz$$

che fornisce un'analogo della (89).[211]

[211] Per rendersi conto della corrispondenza fra la (94) e la (89) si ponga nella (94) la sostituzione x-$\xi z = a$. Badando a portare nell'integranda il fattore costante ξ^{v+1} e introducendo la notazione lagrangiana si avrà allora

$$f(a+\xi z+\xi) = f(x) + f'(x)\xi + \frac{f''(x)}{2!}\xi^2 + \ldots + \frac{f^{(v)}(x)}{v!}\xi^v + \frac{1}{v!}\int_{x-\xi}^{x} (x-a)^v f^{(v+1)}_{a+\xi z}(a+\xi z+\xi)\, da$$

Da qui, ponendo $a = x$-ξ e $z = 0$ si ottiene

$$f(x) = f(a+\xi) + f'(a+\xi)(a-x) + \frac{f''(a+\xi)}{2!}(a-x)^2 + \ldots + \frac{f^{(v)}(a+\xi)}{v!}(a-x)^v + \frac{1}{v!}\int_a^x (x-a)^v f^{(v+1)}_{x-\xi}(x)\, da$$

da cui, essendo ovviamente $f^{(v+1)}_x(x) = f^{(v+1)}_t(t)$ per avere la (89) basta porre $\xi = 0$ e sostituire t a a nell'integranda.

III. 6. *d. ε. La dimostrazione della Théorie del teorema del resto: valutazione e forma del resto*

Ciò detto, torniamo alla (88) e vediamo come Lagrange perviene, a partire da essa, a fornire una formula generale per la valutazione del resto. Egli si serve per questo del seguente lemma di ordine generale:

Lemma I: Se la derivata prima $\varphi'(z)$ di una qualsiasi funzione di z, $\varphi(z)$ è costantemente positiva in un intervallo $[a, b]$ (di $\mathbf{R}$[212]), $(a < b)$, allora anche la differenza $\varphi(a) - \varphi(b)$ è positiva. In simboli:

$$(95) \qquad \left(z \in [a, b] \Rightarrow \varphi'(z) > 0\right) \Rightarrow [\varphi(b) - \varphi(a)] > 0 \qquad [b > a]$$

Se interpretiamo geometricamente la derivata come il coefficiente angolare della tangente, il Lemma I ha un'evidenza geometrica immediata. Lagrange crede tuttavia opportuno fornirne una dimostrazione fondata su principi analitici e almeno apparentemente estranea a ogni particolare applicazione della teoria delle funzioni derivate. Se la scelta di un tale percorso argomentativo è del tutto conseguente alla concezione lagrangiana della matematica e all'ordine logico che questa afferma e trova quindi la propria ragione, più che in un'esigenza di correttezza argomentativa, in una preoccupazione di natura più generale, relativa all'architettonica stessa della conoscenza, ciò che stupisce il lettore che abbia assimilato un tale punto di vista è l'esplicito richiamo di Lagrange al Teorema I, come punto di partenza dl proprio argomento. Tale teorema era stato infatti dimostrato per mezzo del ricorso a argomenti geometrici e impiegarlo nel corso della dimostrazione del "teorema del resto" significa negare *a priori* la possibilità di impiegare quest'ultimo teorema per fornirne una più convincente e perspicua giustificazione, come Lagrange sembra invece proporre nella seconda edizione della *Théorie*.[213] La cosa appare ancora più rimarchevole quando osserviamo che Lagrange avrebbe potuto fondare le applicazioni geometriche e meccaniche della propria teoria direttamente sul Teorema I. La preoccupazione di Lagrange non sembra così qui quella di liberarsi, per mezzo del "teorema del resto", della necessità di ogni ricorso a un teorema meno perspicuo, come il Teorema I - che pure avrebbe potuto essere impiegato agli stessi fini - ma quella di cercare, a partire da quest'ultimo teorema, un risultato espresso in una forma più generale, per mezzo di una formula esplicita che fornisce una opportuna rappresentazione analitica del resto (e non solo una sua valutazio-

---

[212] Cfr. il precedente paragrafo III.6.*d*.γ..

[213] Cfr. la precedente nota (188). Si osservi che nelle *Leçons*, nelle quali il Teorema I è dimostrato come conseguenza del teorema del resto, quest'ultimo non è comunque giustificato a partire dal Lemma I e la sua prova non richiede, a sua volta, il ricorso al Teorema I [cfr. il prossimo paragrafo III.6.*d*.ζ.].

ne),[214] e permette di redigere le dimostrazioni che giustificano le differenti applicazioni della teoria delle funzioni derivate in un linguaggio quasi completamente formale. Ugualmente estranea alle preoccupazioni di Lagrange sembra d'altra parte l'esigenza di affrancare il proprio ragionamento dalla presupposta convergenza della (3) che è, come abbiamo visto, una premessa indispensabile per la dimostrazione del Teorema I. Tornerò più avanti su quest'ultimo punto.

Ciò detto, ecco comunque l'argomento di Lagrange. Se $\varphi'(z)$ è positiva, allora secondo il Teorema I è sempre possibile trovare un valore positivo δ tale che:[215]

$$(96)\qquad \left[|\xi| < \delta\right] \Rightarrow \left[\varphi(z+\xi) - \varphi(z) = \xi\,\varphi'(z) + \frac{\xi^2}{2!}\varphi''(z) + \&c. > 0\right]$$

Consideriamo ora ξ come positivo e poniamo successivamente $z = a$, $z = a+\xi$, $z = a+2\xi$, ..., $z = a+n\,\xi$ ($n \in \mathrm{N}$). Dalla (96) sarà allora facile concludere che è sempre possibile trovare un valore positivo δ^*, tale che:

$$(97)\qquad \xi < \delta^* \Rightarrow \begin{bmatrix} \varphi'(a) > 0 \Rightarrow \varphi(a+\xi) - \varphi(a) > 0 \\ \varphi'(a+\xi) > 0 \Rightarrow \varphi(a+2\xi) - \varphi(a+\xi) > 0 \\ \varphi'(a+2\xi) > 0 \Rightarrow \varphi(a+3\xi) - \varphi(a+2\xi) > 0 \\ \dots \\ \varphi'(a+n\xi) > 0 \Rightarrow \varphi(a+(n+1)\xi) - \varphi(a+n\xi) > 0 \end{bmatrix}$$

Se gli antecedenti di entrambe le implicazioni sono verificati, tutte le differenze che compaiono nei conseguenti della seconda implicazione saranno allora positive e lo sarà quindi anche la loro somma:

$$(98)\qquad \xi < \delta^* \Rightarrow \left\{\begin{bmatrix} \varphi'(a) > 0 \\ \varphi'(a+\xi) > 0 \\ \varphi'(a+2\xi) > 0 \\ \dots \\ \varphi'(a+n\xi) > 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \varphi(a+(n+1)\xi) - \varphi(a) > 0\right\}$$

Siano ora a e b due valori fissati e siano n e ξ tali che $b = a + (n+1)\xi$. Essendo sempre possibile, aumentando n, giungere a rendere ξ minore di δ^*, la (97)

---

[214]Cfr. *sotto*.

[215]Dal Teorema I segue infatti che se z è tale da non falsificare la (14), allora è possibile determinare un valore positivo di ξ, tale che $|\xi\,\varphi'(z)| = \xi\,\varphi'(z) > \left|\frac{\xi^2}{2!}\varphi''(z) + \&c.\right|$.

permette di concludere che, per ogni a e b [$= a+(n+1)\xi$] è sempre possibile trovare un valore Λ ($\Lambda \in \mathbf{N}$), tale che:

$$(99) \qquad n < \Lambda \Rightarrow \left\{ \left[\begin{array}{l} \varphi'(a) > 0 \\ \varphi'\left(a + \dfrac{b-a}{n+1}\right) > 0 \\ \varphi'\left(a + 2\dfrac{b-a}{n+1}\right) > 0 \\ \ldots \\ \varphi'\left(a + n\dfrac{b-a}{n+1}\right) > 0 \end{array} \right] \Rightarrow \varphi(b) - \varphi(a) > 0 \right\}$$

da cui il Lemma I segue *a fortiori*.

Sebbene la mia ricostruzione faccia esplicitamente ricorso a un linguaggio non strettamente lagrangiano, essa restituisce, io credo, la struttura essenziale dell'argomento, senza introdurre alcun tradimento sostanziale. Se Lagrange non esplicita infatti la distinzione fra le variabili ξ e n e i valori δ, δ^* e Λ, la sua dimostrazione sembra giocare proprio sulla possibilità di trovare, per ogni n finito, un minimo nella collezione dei valori limite di ξ che verificano la (96) per le sostituzioni indicate e sulla relazione funzionale fra le variabili ξ e n, la quale permette di intendere b come una qualsiasi quantità fissata.

Applicando il Lemma I è possibile trovare i limiti di variazione di ogni funzione in un dato intervallo, nel quale si conosca il comportamento della sua derivata prima. Sia infatti $\varphi'(z) = z^m Z$ ($Z = Z(z)$) la derivata prima di una funzione primitiva qualsiasi $\varphi(z)$ e siano rispettivamente M e N i valori massimo e minimo di $Z(z)$ in un intervallo $[a, b]$ di variazione di z, in simboli:

$$(100) \qquad \mathsf{M} = \underset{z \in [a,\, b]}{\mathrm{Max}}\ Z(z)\ ; \qquad \mathsf{N} = \underset{z \in [a,\, b]}{\mathrm{Min}}\ Z(z)$$

(dove M e N possono indicare formalmente l'infinito positivo e negativo). Se z appartiene a $[a, b]$ le differenze M-Z e Z-N saranno allora entrambe positive e quindi, prendendo $0 > a > b$, sarà facile concludere, per ogni m:

$$(101) \qquad z \in [a, b] \Rightarrow \left(z^m [\mathsf{M}-Z] > 0 \ \&\ z^m [Z-\mathsf{N}] > 0\right)$$

Siano ora $\psi'(z) = z^m (\mathsf{M}-Z)$ e $\phi'(z) = z^m (Z-\mathsf{N})$ e quindi: $\psi(z) = \dfrac{\mathsf{M} z^{m+1}}{m+1} - \varphi(z) + C$ e

$\phi(z) = \varphi(z) - \dfrac{Nz^{m+1}}{m+1} + C$.[216] Da (101) segue, secondo il Lemma I, che se $z \in [a, b]$, allora $\psi(b) - \psi(a) > 0$ e $\phi(b) - \phi(a) > 0$, ovvero:

$$\text{(102)} \qquad z \in [a, b] \Rightarrow \begin{bmatrix} \varphi(b) < \varphi(a) + \dfrac{M\left(b^{m+1} - a^{m+1}\right)}{m+1} \\ \varphi(b) > \varphi(a) + \dfrac{N\left(b^{m+1} - a^{m+1}\right)}{m+1} \end{bmatrix}$$

Tornando ora alla (88) si ponga, per ogni v, $\varphi(z) = R_v(x, z)$ e quindi, per $m = v$: $\left(R_v(x, z)\right)'_z = \dfrac{z^v}{v!} f^{(v+1)}_{x-xz}(x-xz) = \varphi'(z) = z^m Z = z^v Z$, $Z = Z(z) = \dfrac{1}{v!} f^{(v+1)}_{x-xz}(x-xz)$.

Compiendo tali sostituzioni nella (102), ponendo inoltre $a = 0$, $b = 1$, $N = \dfrac{N_v}{v!}$ e $M = \dfrac{M_v}{v!}$ e ricordando la condizione iniziale $R_v(x, 0) = 0$, si avrà senza alcuna difficoltà:

$$\text{(103)} \qquad z \in [0, 1] \Rightarrow \frac{N_v}{(v+1)!} < R_v(x, 1) < \frac{M_v}{(v+1)!}$$
$$\left[N_v = \min_{z \in [0,1]} f^{(v+1)}_{x-xz}(x-xz)\ ;\ M_v = \max_{z \in [0,1]} f^{(v+1)}_{x-xz}(x-xz)\right]$$

ciò che fornisce l'inquadramento cercato per il resto di ordine v della (86), nella quale z sia posto uguale a 1, ovvero per il resto della (85). Sia ora $x-xz = t$. Se z varia fra 0 e 1, t varierà fra x e 0 e N_v e M_v potranno essere intesi rispettivamente come il minimo e il massimo di $f^{(v+1)}_t(t) = f^{(v+1)}(t)$ per t che varia nell'intervallo $[0, x]$. Così se ζ_v è un valore opportuno compreso fra 0 e x la (85) può essere riscritta sotto la forma seguente[217]

---

[216] Lagrange non indica la costante d'integrazione, che è d'altra parte immediatamente eliminata

[217] E' chiaro che se $f(t)$ è una funzione lagrangiana che resta finita nel punto $t = 0$ insieme a tutte le sue derivate, è sempre possibile trovare un valore x di t tale che $f(t)$ resta finita e continua (nel nostro senso) in $[0, t]$ insieme a tutte le sue derivate. Se f è quindi tale che la (14) non viene meno per la posizione $x = 0$, allora $f^{(v+1)}(t)$ è continua (nel nostro senso), per ogni v e Lagrange non fa quindi che assumere il teorema dei valori intermedi come un'evidenza non bisognosa di alcuna giustificazione. Per quanto

$$(104) \qquad f(x) = f(0) + x\, f'(0) + \frac{x^2}{2!} f''(0) + \ldots + \frac{x^\nu}{\nu!} f^{(\nu)}(0) + \frac{x^{\nu+1}}{(\nu+1)!} f^{(\nu+1)}(\zeta_\nu)$$

presentandosi quindi come un polinomio finito. Sostituendo in tale formula ξ in luogo di x e considerando $f(\xi)$ come una funzione di $x+\xi$ si avrà, essendo la derivata rispetto a x di $f(x+\xi)$ uguale alla derivata della stessa funzione rispetto a ξ:

$$(105) \qquad f(x+\xi) = f(x) + \xi\, f'(x) + \frac{\xi^2}{2!} f''(x) + \ldots + \frac{\xi^\nu}{\nu!} f^{(\nu)}(x) + \frac{\xi^{\nu+1}}{(\nu+1)!} f^{(\nu+1)}(x+\eta_\nu)$$

$$\left[0 \le \eta_\nu \le \xi\right] \text{ oppure } \left[\xi \le \eta_\nu \le 0\right]$$

che esprime appunto il "teorema del resto".

La *démarche* di Lagrange sembra rendere chiaro che egli interpreta la (105) come una trascrizione in forma concisa della (14) - assumendo *a priori* tanto l'esistenza di tale sviluppo per x diverso da determinati valori isolati,[218] che la sua convergenza su un disco di raggio positivo - e pensa la propria dimostrazione come un procedimento formale, le cui inferenze sono *localmente* fondate sul ricorso a valutazioni di ordine numerico. Il fatto che tali valutazioni richiedano la convergenza della (14) e non siano quindi corrette che a condizione di limitare il dominio di variazione di ξ, non sembra preoccupare Lagrange che, non solo fa esplicito riferimento al Teorema I, ma non applica la minima attenzione a riformulare questo in termini più deboli, come riferito alla differenza $\varphi(x+\xi) - \varphi(x) - \xi\varphi'(x)$ anziché alla serie $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{\varphi^{(k)}(x)}{k!}\xi^k$ tratta dalla (14). Se è vero che anche la dimostrazione di una simile versione indebolita del teorema avrebbe richiesto di giustificare la (8) e non avrebbe quindi potuto procedere, dal punto di vista di Lagrange, che

il rifiuto di dimostrare il Lemma I in termini esplicitamente geometrici possa venire accumunato all'esigenza avanzata qualche anno più tardi da Bernard Bolzano [cfr. Bolzano (1817)] nel presentare una dimostrazione analitica del teorema dei valori intermedi, essa sembra non solo possedere una diversa origine filosofica, ma anche pervenire a un esito meno radicale.

[218]Si osservi che derivando la (105) dalla (104) la dimostrazione di Lagrange sembra cadere nell'inconveniente di trarre una formula generale da un proprio caso particolare. Se intendiamo tale dimostrazione in termini puramente formali, ciò corrisponde al fatto che l'argomento che conduce alla (105) richiede determinate assegnazioni di valore a certe variabili (non semplicemente ausiliari), le quali non possono quindi essere intese, in senso pieno, come generiche. La situazione è più delicata se la dimostrazione è intesa come una sequenza di identità numeriche (le cui condizioni di validità resterebbero implicite). In tal caso la (105) dipenderebbe infatti da una formula le cui condizioni di validità sono più ristrette di quelle cui essa è invece sottoposta.

tramite una equiparazione fra la differenza $\varphi(x+\xi) - \varphi(x)$ e la serie $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi^{(k)}(x)}{k!}\xi^k$ e sarebbe quindi tornata a richiedere la convergenza dello sviluppo di $\varphi(x+\xi)$, una simile attenzione avrebbe almeno mostrato la preoccupazione di liberare il teorema del resto dalle condizioni implicite relative al valore di ξ, di riferirlo alla differenza finita $f(x+\xi) - f(x) - \xi f'(x) - \frac{\xi^2}{2!} f''(x) - \dots - \frac{\xi^\nu}{\nu!} f^{(\nu)}(x)$ e di poterlo quindi impiegare nelle ricerca dei limiti di convergenza della (14).[219]

Ciò nonostante è facile rendersi conto come basti liberare la dimostrazione del Lemma I dal ricorso al Teorema I - legandola a una diversa definizione della derivata come coefficiente del termine di ordine uno di una funzione lineare $A_0 + A_1\xi$, la cui differenza rispetto alla funzione $f(x+\xi)$ può essere resa minore di ogni quantità assegnata, prendendo ξ sufficientemente piccolo[220] - per poter riformulare, grazie a banali correzioni locali, la prova di Lagrange in termini assolutamente compatibili con i moderni punti di vista e pensare quindi la (105) come riferita (intendendo il termine nel nostro senso) a una qualsiasi funzione (numerica) $f(t)$ di classe $C^{\nu+1}$ in un intervallo $[x, x+\xi]$ e a un qualsiasi valore dell'incremento ξ, ovvero alla differenza fra tale funzione valutata nel punto $x+\xi$ e la ridotta parziale di ordine ν del suo sviluppo formale in una serie intera centrata sul punto $t = x$. Assumendo infatti che $f(t$ sia una funzione di classe $C^{\nu+1}$ nel punto $t = \xi-\xi\nu+x$, riscrivendo la (86) sotto la forma seguente

$$f(\xi+x) = f(\xi-\xi z+x) + \xi z\, f'(\xi-\xi z+x) + \frac{\xi^2 z^2}{2!} f''(\xi-\xi z+x) + \dots +$$

$$(106) \qquad + \frac{\xi^\nu z^\nu}{\nu!} f^{(\nu)}(\xi-\xi z+x) + \mathbf{D}_\nu$$

$$\left[\mathbf{D}_\nu = \mathbf{D}_\nu(\xi, x, z);\ \mathbf{D}_\nu(\xi, x, 0) = 0\right]$$

e intendendo questa come un'identità numerica finitaria che definisce implicitamente $\mathbf{D}_\nu$ come una differenza finita, si ottiene, derivando rispetto a z:

$$(107) \qquad \left(\mathbf{D}_\nu(\xi, x, z)\right)'_z = \frac{\xi^{\nu+1} z^\nu}{\nu!} f^{(\nu+1)}_{\xi-\xi z}(\xi-\xi z+x) \qquad \left[\mathbf{D}_\nu(\xi, x, 0) = 0\right]$$

[219]Cfr. il precedente paragrafo III.6.*d*. β..

[220]Cfr. ancora il precedente paragrafo III.6.*d*.β..

Dimostrando poi il Lemma I senza ricorrere al Teorema I e passando da questo alla (102), sarà facile ottenere, ponendo le sostituzioni $\varphi(z) = D_\nu(\xi, x, z)$, $m = \nu$, $\varphi'(z) = \left(D_\nu(\xi, x, z)\right)'_z = f^{(\nu+1)}_{\xi-\xi z}(\xi-\xi z+x)\,\frac{\xi^{\nu+1} z^\nu}{\nu!} = z^\nu\ Z(z)$, $Z(z) = f^{(\nu+1)}_{\xi-\xi z}(\xi-\xi z+x)\,\frac{\xi^{\nu+1}}{\nu!}$, $a = 0$, $b = 1$, $N = \frac{N_n \xi^{\nu+1}}{\nu!}$ e $M = \frac{M_n \xi^{\nu+1}}{\nu!}$, assumendo ξ come positivo[221] e richiedendo che f(t) sia una funzione di classe $C^{\nu+1}$ in $[x, x+\xi]$:

$$(109)\qquad \frac{N_\nu \xi^{\nu+1}}{(\nu+1)!} < D_\nu(\xi, x, 1) < \frac{M_\nu \xi^{\nu+1}}{(\nu+1)!}$$

$$\left[N_\nu = \operatorname*{Min}_{z\in[0,1]} f^{(\nu+1)}_{\xi-\xi z}(\xi-\xi z+x)\ ;\ M_\nu = \operatorname*{Max}_{z\in[0,1]} f^{(\nu+1)}_{\xi-\xi z}(\xi-\xi z+x)\right]$$

Se la funzione $f^{(\nu+1)}(t)$ è assunta ora come continua in $[x, x+\xi]$ si potrà applicare il teorema dei valori intermedi. Sostituendo nella (106) sarà allora facile ottenere il seguente teorema:

Teorema II: Se f(t) è una funzione (numerica) di classe $C^{(\nu+1)}$ in $[x, x+\xi]$ e tale che la sua derivata di ordine $\nu+1$, $f^{(\nu+1)}(t)$ è *ivi* continua, allora esiste, per ogni ν (finito), un valore τ_ν appartenete all'intervallo $[x, x+\xi]$ che soddisfa la seguente identità

$$(110)\qquad f(x+\xi) = f(x) + \xi\, f'(x) + \frac{\xi^2}{2!} f''(x) + \ldots + \frac{\xi^\nu}{\nu!} f^{(\nu)}(x) + \frac{\xi^{\nu+1}}{(\nu+1)!} f^{(\nu+1)}(\tau_\nu)$$

che costituisce la versione moderna del teorema del resto di Lagrange per uno sviluppo di Taylor.

L'ultimo addendo della (110) è ora inteso come una differenza finita, la cui sussistenza non dipende che dalla differenziabilità della funzione data fino all'ordine $\nu+1$ e è quindi del tutto indipendente da ogni ipotesi di convergenza. Siccome tale differenza tende evidentemente a zero per ξ tendente a zero, è allora facile capire che, indipendentemente da ogni ipotesi di convergenza, essa può essere resa minore di ogni valore assegnato, diminuendo opportunamente il valore di ξ. Altrettanto facile è comprendere che, ancora indipendentemente da ogni ipotesi di convergenza, essa può essere resa minore del termine immediatamente precedente. Il Teorema I può essere così riformulato come un risultato relativo alle differenze finite determinate dal polinomio di Taylor di un qualsiasi ordine (finito) ν e reso quindi del tutto

[221] E' facile capire che per ξ negativo si giunge al medesimo risultato espresso tal Teorema II, invertendo il massimo con il minimo in (108).

indipendente dalla convergenza della serie corrispondente. Proprio grazie alla sua indipendenza da ogni ipotesi di convergenza, il Teorema Π può essere d'altra parte impiegato come punto di partenza per determinare le condizioni sotto le quali una funzione (numerica) è sviluppabile (in senso moderno) in serie di Taylor, ovvero è numericamente uguale al proprio sviluppo formale in serie intera (sviluppo che può essere banalmente costruito per mezzo di reiterate derivazioni). Una tale eventualità ha infatti luogo se e soltanto se la differenza finita rappresentata dall'ultimo addendo della (110) tende a zero al tendere di ν verso l'infinito. Così se $f(t)$ è una funzione (numerica) di classe C^{∞} in $[x, x+\xi]$ e possiamo dimostrare che f, x e ξ sono tali che $\lim_{\nu\to\infty} F(x, \xi, \nu) = 0 \left(F(x, \xi, \nu) = \dfrac{\xi^{\nu+1}}{(\nu+1)!} f^{(\nu+1)}(\eta_\nu) \right)$, allora siamo certi che tale funzione è sviluppabile in serie di Taylor nell'intervallo indicato (mentre se possiamo dimostrare che il limite in questione è diverso da zero, allora siamo certi che ciò non ha luogo).

Se Lagrange è chiaro non avrebbe potuto redigere una tale dimostrazione che a condizione di modificare la sua stessa nozione di funzione derivata, è del tutto evidente che, una volta modificato il punto di partenza, la prova della (105) può essere riproposta essenzialmente inalterata, come dimostrazione di un risultato che può essere impiegato anche oggi come punto di partenza di una teoria degli sviluppi in serie intera.[222] Se questa facile traducibilità della dimostrazione è senza dubbio alla base della fortuna matematica del risultato di Lagrange, essa è anche la ragione principale della difficoltà spesso incontrata a comprendere i presupposti da cui esso deriva entro l'edificio della teoria lagrangiana delle funzioni analitiche.[223]

---

[222]Cfr., fra gli altri, Giusti (1983), vol. II, pp. 46-7.

[223]Il risultato di Lagrange venne ridimostrato nel 1812 da Laplace, facendo ricorso a una valutazione diretta del resto in forma integrale [cfr. Laplace (1812a), pp. 175-6; cfr. anche Lacroix (1810-19), vol. III, pp. 399] e in termini assai meno accurati che nella *Théorie* (e nelle *Leçons* [cfr. il prossimo paragrafo III.6.*d*.ζ.]). Integrando per parti è facile trarre, per ogni ν ($\nu \in \mathbb{N}$),

$$\int_0^{\xi} \xi^{\nu-1} f^{\nu}(t-\xi)\, d\xi = \frac{1}{\nu}\xi^{\nu} f^{(\nu)}(t-\xi) + \frac{1}{\nu}\int_0^{\xi} \xi^{\nu} f^{(\nu+1)}(t-\xi)\, d\xi$$

e è facile concludere, reiterando ν-1 volte la stessa operazione a partire dal valore $\nu = 2$,

$$\int_0^{\xi} f'(t-\xi)\, d\xi = \xi f'(t-\xi) + \frac{1}{2!}\xi^2 f''(t-\xi) + \ldots + \frac{1}{\nu!}\xi^{\nu} f^{(\nu)}(t-\xi) + \frac{1}{\nu!}\int_0^{\xi} \xi^{\nu} f^{(\nu+1)}(t-\xi)\, d\xi$$

da cui, essendo per sostituzione,

$$\int_0^{\xi} f'(t-\xi)\, d\xi = -\int_t^{y} f'(y)\, dy = f(t) - f(y) = f(t) - f(t-\xi)$$

segue senza difficoltà:

III. 6. *d. ζ. La dimostrazione delle Leçons del teorema del resto*

Il fatto che la precedente riformulazione della dimostrazione della *Théorie* dipenda essenzialmente da una prova del Teorema I, apparentemente incompatibile con la stessa nozione lagrangiana di funzione derivata, non significa ancora che il teorema del resto non possa essere dimostrato da Lagrange per altra via e reso indipendente dalle condizioni di convergenza della (14). Proprio questo sembra lo scopo della dimostrazione delle *Leçons*.[224] Per quanto Lagrange sia infatti assolutamente elusivo sulle ragioni che lo avrebbero condotto a presentare una nuova dimostrazione - che egli qualifica genericamente come "più elementare", ma "ugualmente rigorosa" rispetto alla precedente[225] - sembrano infatti emergere in tale dimostrazione quelle preoccupazioni che erano invece assenti nella prima edizione della *Théorie* (e continueranno per la verità a esserlo, fatte salve alcune isolate affermazioni, anche nella seconda).[226]

Invece di valutare il "resto", dopo averlo espresso in termini analitici, per mezzo di un'equazione alle funzioni derivate o eventualmente di un integrale, Lagrange cerca ora di derivare l'inquadramento di questo a partire da un un'inquadramento della funzione generatrice $f(x+\xi)$ entro due limiti costituiti dalla medesima ridotta parziale del suo sviluppo completata da due resti opportuni, la cui considerazione fornisce il risultato richiesto. Egli cerca

---

$$f(t) = f(t-\xi) + \xi f'(t-\xi) + \ldots + \frac{1}{\nu!}\xi^{\nu} f^{(\nu)}(t-\xi) + \frac{1}{\nu!}\int_0^{\xi} \xi^{\nu} f^{(\nu+1)}(t-\xi)\, d\xi$$

Ponendo la sostituzione $t-\xi = x$ è allora facile capire come la (14) possa essere scritta sotto la forma seguente:

$$f(x+\xi) = f(x) + \xi f'(x) + \ldots + \frac{1}{\nu!}\xi^{\nu} f^{(\nu)}(x) + \frac{1}{\nu!}\int_0^{\xi} z^{\nu} f^{(\nu+1)}(x+\xi-z)\, dz$$

> [...] il est clair - continua Laplace - que si l'on faisait [...] [nell'integrale che fornisce l'ultimo addendo della formula precedente] $f^{(\nu+1)}(x+\xi+z)$ constante, on aurait un trop grand résultat, si l'on prenait de plus la plus grande valeur de cette quantité; et un trop petit résultat, en prenant sa plus petite valeur. Il y donc dans l'intervalle de $z = 0$ à $z = \xi$ une valeur de z telle que en supposant cette quantité constante, on aura un résultat exact.

Se indichiamo tale valore con θ_ν si avrà allora

$$f(x+\xi) = f(x) + \xi f'(x) + \ldots + \frac{1}{\nu!}\xi^{\nu} f^{(\nu)}(x) + \frac{\xi^{\nu+1}}{(\nu+1)!} f^{(\nu+1)}(x+\xi-\theta_\nu)$$

che, come è facile constatare, corrisponde appunto alla (105).

[224] Cfr. la precedente nota (203).

[225] Cfr. Lagrange (1801), p. 66 e (1806a), p. 89.

[226] Colte le difficoltà della dimostrazione della *Théorie*, Lagrange non sembra averle giudicate abbastanza serie da giustificare una ritrascrittura radicale di una parte così importante del proprio testo: una prova ulteriore della profonda differenza fra il nostro modo di pensare e il suo o, più semplicemente, una comprensibile pigrizia di un matematico ormai quasi ottuagenario?

inoltre di rendere il proprio argomento indipendente dall'assunzione del Teorema I, il quale è piuttosto dimostrato come un corollario di questo.

Il nuovo lemma impiegato da Lagrange è il seguente:

> Une fonction qui est nulle lorsque la variable est nulle, a nécessairement, depuis l'origine de la variable, des valeurs finies et constamment positives ou négatives, tant que sa fonction dérivée est finie et toujours positive ou négative.[227]

Così come il Lemma I, anche tale lemma - qualora sia ovviamente riferito a funzioni continue (nel nostro senso) in un intorno dell'origine - ha un'immediata evidenza geometrica: se il coefficiente angolare della tangente è in $(0, \varepsilon)$ costantemente positivo, allora la funzione sarà monotòna crescente e, essendo nulla nell'origine, sarà ovviamente positiva; se il coefficiente angolare della tangente è invece costantemente negativo, essa sarà monotòna decrescente e quindi negativa. Lagrange presenta tuttavia una diversa interpretazione differenziale e geometrica del lemma, che si caratterizza per la sua imprecisione, e ne trae un argomento per giustificare la propria reinterpretazione di esso nel quadro analitico della teoria delle funzioni derivate. Ragionando secondo i principi del calcolo differenziale, data una funzione $y = y(z)$, tale che $y(0) = 0$, si avrà $y = \int_{[0]}^{[z]} \frac{dy}{dz} dz$ e quindi "y sera la somme de tous les élémens $\frac{dy}{dz} dz$ qui répondent à tous les élémens de z" e essa sarà quindi positiva "depuis $z = 0$ jusqu'à une valeur quelconque positive de z".[228] Ciò è tuttavia contraddetto, secondo Lagrange, dal caso di funzioni la cui derivata prima diviene infinita nell'origine. L'evidente pretestuosità dell'argomento mostra assai bene che la ragione profonda del rifiuto dell'impostazione differenziale non può essere semplicemente cercata nelle difficoltà locali che questa comporta. Comunque si giudici l'osservazione di Lagrange, essa non ha alcun rilievo nella dimostrazione del lemma, che sembra possa venir formulato più precisamente nei termini seguenti:

Lemma II: Se $\psi(z)$ è una funzione di z tale che $\psi(0) = 0$, allora esiste un valore ζ (positivo o negativo) tale che

$$(111) \qquad \Big[z \in (0, \zeta] \Rightarrow \psi'(z) \neq \infty \Big] \Rightarrow \begin{cases} \psi(z) \neq \infty \\ [z \in (0, z] \Rightarrow \psi'(z) \gtrless 0] \Rightarrow \psi(z) \gtrless 0 \end{cases}$$

[227] Cfr. *ivi*, p. 66 e p. 89. Nella seconda edizione Lagrange introduce in verità una correzione del proprio enunciato facendo esplicitamente riferimento a valori tanto positivi che negativi della variabile. Nonostante ciò mi limiterò per ragioni di semplicità a presentare la dimostrazione di Lagrange nel caso di un intorno destro dell'origine; la ripetizione del ragionamento relativamente a un intervallo sinistro è infatti banale, così come è ovvio rendersi conto che in un intervallo sinistro dell'origine la funzione e la sua derivata avranno, sotto le condizioni del teorema, dei segni diversi.

[228] Cfr. *ivi*, p. 69 e p. 93.

La dimostrazione di Lagrange può d'altra parte essere ricostruita nei termini che seguono. Si consideri una funzione qualsiasi $\varphi(t)$ della variabile t (la quale resti finita nell'intervallo $[v,v+\xi]$). Se anche la sua derivata $\varphi'(v)$ valutata nel punto $t = v$ resta finita, i primi due termini della (14) sono senza dubbio "esatti" - ovvero i primi due termini dello sviluppo di $\varphi(t)$ in una serie di potenze centrata sul punto $t = v$ saranno $\varphi(v)$ e $\varphi'(v)(t-v) = \varphi'(v)\,\xi$ - e i restanti assumeranno comunque la forma $p_v(v)\,\xi^{\alpha}$ con α un esponente razionale maggiore di uno.[229] Ciò permette di scrivere l'identità:

$$(112) \qquad \varphi(v+\xi) = \varphi(v) + \xi\,(\varphi'(v) + V) \qquad \left[V = V(v,\xi);\ V(v,0) = 0\right]$$

La (112) rende chiaro

> [...]qu'en faisant croître ξ par degrés insensibles depuis zéro, la valeur de V croîtra aussi insensiblement depuis zéro, soit en plus ou en moins, jusqu'à un certain point, après quoi elle pourra diminuer; que, par conséquent, on pourra toujours donner à ξ une valeur telle que la valeur correspondante de V, abstraction faite du signe, soit moindre qu'une quantité donnée, et que, pour les valeur moindres de ξ, la valeur de V soit aussi moindre.[230]

Tale proprietà è infatti caratteristica delle funzioni lagrangiane, almeno qualora esse siano valutate sul campo complesso: se una funzione è definita - resta finita - in un punto assegnato, allora essa è senza dubbio definita in un intorno di tale punto e è *ivi* continua (nel nostro senso). Le difficoltà relative alla generalizzazione di Lagrange sono allora due: la prima riguarda la trasponibilità di tale proprietà al campo reale[231] al quale egli sembra riferirsi, la seconda l'effettiva possibilità di qualificare V come una funzione lagrangiana. Vi sono almeno due modi per risolvere entrambi i problemi: il primo è quello di intendere V come una differenza definita implicitamente dalla (112) e richiedere che φ' sia una funzione opportuna, il secondo è quello di riferirsi alla (2) e intendere V come il prosieguo di uno sviluppo inteso come convergente su un intorno del punto $\xi = 0$, richiamandosi all'identità presupposta in tale intorno per negare la possibilità che V divenga immaginaria per un valore di ξ per cui $\varphi(v+\xi)$ è reale (posto che $\varphi(v)$ sia reale). Per quanto il richiamo all'indagine relativa alle eccezioni locali della (14) possa far pensare che la strada scelta da Lagrange sia ancora una volta la seconda - la quale conduce a far dipendere la legittimità della prova dalla convergenza alla funzione della (2) - il linguaggio che quasti impiega è ora molto più elusivo e sembra corrispondere al tentativo di liberare la dimostrazione da ogni presupposto di convergenza, in modo da non richiedere alcuna condizione relativa al valore di ξ. Tuttavia se V è definita implicitamente dalla (112) e la de-

[229]Lagrange si richiama per questo alla precedente lezione VIII, nella quale egli aveva analizzato i casi in cui la (14) "è in difetto" [cfr. il precedente paragrafo III.3.c.η].
[230]Cfr. *ivi*, p. 67 e p. 90.
[231]Cfr. la precedente nota (197).

rivata è comunque intesa come un coefficiente di uno sviluppo, la condizione $V(\nu, 0) = 0$ non può essere garantita che dalla convergenza di tale sviluppo. Per evitare che un tale presupposto sia necessario, occorre assumere che V sia tale che $V(\nu, 0) = 0$ e definire la derivata, per mezzo della (112), come la funzione che verifica tale condizione. Per quanto Lagrange non possa esplicitare una simile definizione, la sua stessa procedura e il suo linguaggio elusivo sembrano in qualche modo suggerirla. Se accettiamo quindi l'idea che lo scopo di Lagrange fosse quello di liberare il "teorema del resto" dalle condizioni di convergenza della (14), dobbiamo anche concludere che un tale tentativo conduce questi assai vicino alla definizione moderna di funzione derivata. Ciò detto, è comunque evidente che, senza una esplicita accettazione di tale definizione, anche la nuova dimostrazione di quest'ultimo teorema dipende, come quella della *Théorie*, dall'assunzione delle condizioni che rendono la (2) convergente. Ma, a differenza che nella precedente dimostrazione, Lagrange pare ora preoccupato di nascondere una tale condizione, che non riappare che sotto la forma di un lemma nascosto.

Dato comunque un valore positivo ω, sia ϑ un valore positivo tale che $|\xi| \leq \vartheta \Rightarrow |V(\nu, \xi)| < \omega$. Posta per comodità la positività di ξ,[232] dalla (112) si potrà allora trarre l'implicazione seguente:

$$(113) \qquad 0 < \xi \leq \vartheta \Rightarrow \xi\,(\varphi'(v) - \omega) < \varphi(v+\xi) - \varphi(v) < \xi\,(\varphi'(v) + \omega)$$

> Comme cette conclusion a lieu - continua Lagrange - quelle que soit la valeur de ν, pourvu que $\varphi'(\nu)$ ne soit pas infinie,[233] elle subsistera aussi en mettant successivement $\nu+\xi$, $\nu+2\xi$, $\nu+3\xi$, &c. jusqu'à $\nu+(n-1)\xi$ à la place de ν [...].[234]

Indicando allora con ϑ^* il minimo della famiglia (finita) dei valori che occorre sostituite a ϑ nella (113) nel caso in cui ν sia sostituita dalle somme $\nu+\xi$, $\nu+2\xi$, ...,$\nu+(n-1)\xi$,[235] si avrà, posto che la funzione $\varphi'(t)$ resti finita per tutte le sostituzioni $t = \nu + v\xi$ ($v = 0, 1, 2, ..., n-1$):

$$(114)$$

$$0 < \xi \leq \vartheta^* \Rightarrow \begin{cases} \xi\,(\varphi'(v) - \omega) < \varphi(v+\xi) - \varphi(v) < \xi\,(\varphi'(v) + \omega) \\ \xi\,(\varphi'(v+\xi) - \omega) < \varphi(v+2\xi) - \varphi(v+\xi) < \xi\,(\varphi'(v+\xi) + \omega) \\ \xi\,(\varphi'(v+2\xi) - \omega) < \varphi(v+3\xi) - \varphi(v+2\xi) < \xi\,(\varphi'(v+2\xi) + \omega) \\ \dots \\ \xi\,(\varphi'(v+(n-1)\xi) - \omega) < \varphi(v+n\xi) - \varphi(v+(n-1)\xi) < \xi\,(\varphi'(v+(n-1)\xi) + \omega) \end{cases}$$

---

[232] Cfr. la precedente nota (227).

[233] Si noti che tale condizione non serve a Lagrange per assicurarsi che la differenza finita $\varphi(\nu+\xi) - \varphi(\nu) - \xi\varphi'(\nu)$ sia finita, ma per garantire che il secondo termine dello sviluppo di $\varphi(x+\xi)$ sia effettivamente $\xi\varphi'(\nu)$ [cfr. *sopra*].

[234] Cfr. *ivi*, p. 67 e p. 90.

[235] Lagrange non fa in realtà alcun cenno alla dipendenza funzionale fra ϑ e ν in (113) e si limita a sostenere che vi è un valore abbastanza piccolo di ξ che verifica il conseguente della (114), e a trarre che ciò sia vero anche per tutti i valori minori (in modulo).

Se la funzione $\varphi'(t)$ resta inoltre dello stesso segno per tutte le sostituzioni indicate, allora la somma delle differenze inquadrate dalla (114) sarà inquadrata dalla somma degli estremi e dalla (114) seguirà quindi:

$$(115)\quad 0 < \xi < \vartheta^* \Rightarrow \sum_{\nu=0}^{n-1}[\xi\ \varphi'(v+\nu\xi)] - n\xi\omega < \varphi(v+n\xi) - \varphi(v) < \sum_{\nu=0}^{n-1}[\xi\ \varphi'(v+\nu\xi)] + n\xi\omega$$

Essendo d'altra parte ω arbitrario esso potrà essere preso minore del valore assoluto della somma $\dfrac{\sum_{\nu=0}^{n-1}[\ \varphi'(v+\nu\xi)]}{n}$ in modo che da (115) sia possibile trarre:

$$(116)\quad 0 < \xi \leq \vartheta^* \Rightarrow \begin{cases} 0 < \varphi(v+n\xi) - \varphi(v) < 2\xi \sum_{\nu=0}^{n-1}\varphi'(v+\nu\xi) & \left[\sum_{\nu=0}^{n-1}\varphi'(v+\nu\xi) > 0\right] \\ 2\xi \sum_{\nu=0}^{n-1}\varphi'(v+\nu\xi) < \varphi(v+n\xi) - \varphi(v) < 0 & \left[\sum_{\nu=0}^{n-1}\varphi'(v+\nu\xi) < 0\right] \end{cases}$$

Sia ora $K = \max_{\nu=0,1,\dots,n-1} |\varphi'(v+\nu\xi)|$. Da (116) sarà allora facile trarre:

$$(117)\quad 0 < \xi \leq \vartheta^* \Rightarrow \begin{cases} 0 < \varphi(v+nx) - \varphi(v) < 2\xi nK & \left[\sum_{\nu=0}^{n-1}\varphi'(v+\nu x) > 0\right] \\ -2\xi nK < \varphi(v+nx) - \varphi(v) < 0 & \left[\sum_{\nu=0}^{n-1}\varphi'(v+\nu x) < 0\right] \end{cases}$$

Ora, siccome n può essere preso arbitrariamente grande, è possibile, secondo Lagrange, considerare il prodotto $n\xi$ come una qualsiasi quantità positiva che indichiamo con la variabile z. La differenza $\varphi(v+n\,\xi) - \varphi(v) = \varphi(v+z) - \varphi(v)$ può allora essere intesa come una qualsiasi funzione di z, diciamo $\psi(z)$, la quale diviene nulla per $z = 0$. La derivata $\varphi'(x+n\xi) = \varphi'(x+z)$ corrisponderà allora alla derivata $\psi'(z)$ di $\psi(z)$. Siccome la funzione $\varphi(t)$ è stata supposta tale che la sua derivata $\varphi'(t)$ resta dello stesso segno per tutte le sostituzioni $t = v + \nu\xi$ ($\nu = 0, 1, 2, \dots, n-1$), le due condizioni indicate fra parentesi quadre nella (117) equivalgono a affermare che $\varphi'(x+n\xi) = \psi'(z)$ è rispettivamente positiva e negativa. La (117) ci dice allora che se sono rispettate le condizioni assunte nel corso della dimostrazione, allora, per quanto n sia grande (purché resti finito), esiste un valore positivo ϑ^* di ξ che rende z uguale a un valore positivo, diciamo ζ, il quale è a sua volta tale che

$$(118)\qquad 0 < z \leq \zeta \Rightarrow \begin{cases} 0 < \psi(z) < 2zK & \left[\psi'(\zeta) > 0\right] \\ -2zK < \psi(z) < 0 & \left[\psi'(\zeta) < 0\right] \end{cases}$$

da cui il Lemma II - nel caso in cui ζ sia positivo - segue senza più alcuna difficoltà. Ripetendo lo stesso ragionamento relativamente a dei valori negativi di ξ, si potrà poi trarre una conclusione analoga riferita al caso in cui ζ sia negativo.

Secondo J. L. Ovaert la dimostrazione di Lagrange, oltre a assumere la convergenza della (2), richiede implicitamente la differenziabilità uniforme di $\varphi(t)$ in un intorno destro di t. Se il resto della (112) è inteso come una differenza definita implicitamente da tale identità, la proprietà richiesta per trarre la (113) non è infatti altro che la differenziabilità puntuale della funzione $\varphi(t)$ nel punto $t = v$.[236] Se accettiamo tale interpretazione, allora la dimostrazione precedente richiede l'uniforme differenziabilità in $[v,v+z)$, essendo fondata sulla possibilità di aumentare n all'infinito al tendere di ξ a zero.[237] Interpretata in tal modo la (112), la conclusione di Lagrange risulta tuttavia indipendente dalle condizioni di convergenza della (2). Al contrario, se nella (112) V è intesa come una rappresentazione concisa del prosieguo della (2), la dimostrazione richiede la convergenza di tale serie, ma l'indubitabile richiesta implicita di uniformità avanzata nel corso di essa non sembra equivalere più a una richiesta di uniforme differenziabilità. Assunta la continuità di $V(x, \xi)$ in un intorno del punto $\xi = 0$, Lagrange può passare dalla (113) alla (114) e alla (115) - senza ulteriori richieste - grazie al presupposto carattere finito di n, scegliendo ϑ^* in funzione di ω e n (oltre che di v che è assunto come fissato). Per poter asserire poi che, per ogni ω fissato, il valore assoluto del rapporto $\dfrac{\sum_{\nu=0}^{n-1}[\varphi'(v+\nu\xi)]}{n}$ possa essere reso maggiore di ω (e possa

---

[236]Se la (112) è intesa in tale senso si ha infatti $V(v, \xi) = \left|\dfrac{\varphi(v+\xi) - f(v) - \xi f'(v)}{\xi}\right|$. La corrispondenza fra la proprietà di differenziabilità e la proprietà di continuità del resto di ordine uno rispetto alla variabile ξ in un intorno dell'origine chiarisce le considerazioni presentate alla fine del precedente paragrafo III.6.*d*. ε. e mostra bene la ragione che rende un qualsiasi sviluppo (formale) in serie di Taylor (il quale non può essere che associato a una funzione di classe C^∞) tale che il suo resto di ordine qualsiasi tende a zero quando ξ che tende a zero.

[237]Si osservi che la struttura della dimostrazione di Lagrange è tale che, anche interpretando la (112) come una definizione implicita della derivata, la differenziabilità uniforme non sembra essere ancora sufficiente a garantirla. La richiesta implicita individuata da Bolzano nel 1817 [cfr. la prossima nota (238)] sembra infatti diversa dalla semplice richiesta di uniforme differenziabilità.

restare tale per ogni ξ appartenente a un opportuno intorno destro di zero), egli deve intendere n come una funzione di ξ - che tende a divenire infinita quando ξ tende a zero - e presupporre che la funzione $\varphi(t)$ sia tale da poter corrispondere a tale richiesta facendo crescere indefinitamente n, pur mantenendo il carattere finito del limite del prodotto $n\xi$ ($n \to \infty$, $\xi \to 0$). Se quest'ultima richiesta equivale a porre una implicita condizione aggiuntiva alle premesse del teorema - come già Bolzano ha osservato fin dal 1817[238] - l'interpretazione stessa di n come una funzione di ξ, che tende a divenire infinita quando ξ tende a zero, rende in generale illegittima l'assunzione di esistenza tanto di un minimo ϑ^* della famiglia dei valori limite di ξ necessari a soddisfare tutti i conseguenti della (114) per ogni scelta di ω, che quella di un massimo della famiglia delle derivate di $\varphi'(t)$ nei punti $t = \nu+\nu\xi$ ($\nu = 0, 1, 2, \ldots, n$ 1). Per giustificare la prima di tali assunzioni (posto che il prodotto $n\xi$ resti finito per n che tende a infinito e ξ che tende a zero), occorre richiedere l'uniforme continuità di $V(\nu, \xi)$ per $\xi \in [0, z)$, mentre per giustificare la seconda occorre postulare che la derivata $\varphi'(t)$ resti finita per $t \in [\nu, \nu+z]$ e non solo per $t \in [\nu, \nu+z)$ come sembra richiedere Lagrange.

---

[238] Ecco come Bolzano esprime nel 1817 i propri dubbi relativamente alla dimostrazione di Lagrange [cfr. Bolzano (1817), pp. 142-3: cito qui la traduzione francese di J. Sebestik]:

> [...] cette démonstration de Lagrange a [...] une lacune. Car elle demande de prendre la grandeur ξ si petite que:
>
> $$\frac{\varphi(v+\xi) - f(v)}{\xi} - \varphi'(v)$$
>
> devient
>
> $$< \frac{\varphi'(v) + \varphi'(v+\xi) + \varphi'(v+2\xi) + \ldots + \varphi'(v+n-1)\xi)}{n}$$
>
> expression dans laquelle le produit ξn doit rester égale à une grandeur *donnée* [...]. Ici se pose maintenait la question de savoir s'il est possible de satisfaire à cette demande. Plus petit on prend ξ pour diminuer la différence
>
> $$\frac{\varphi(v+\xi) - f(v)}{\xi} - \varphi'(v)$$
>
> plus grand on doit prendre n qui est le *diviseur* dans l'expression à droite de l'inégalité, si ξn doit toujours rester égale à une grandeur donnée. Il est vrai que l'ensemble des termes dans le numérateur augmente également; mais il reste encore à prouver que cette augmentation fait croître le numérateur dans la même proportion dans laquelle augmente le dénominateur. Il reste donc à voir si par suite de la diminution de ξ, la valeur de toute fraction ne diminue pas de la même façon ou encore plus rapidement que l'expression:
>
> $$\frac{\varphi(v+\xi) - f(v)}{\xi} - \varphi'(v)$$

Dato comunque il Lemma II,[239] l'inquadramento del resto della (14) segue da esso piuttosto facilmente. Siano infatti ρ_1 e σ_1 i valori della somma $x+\xi$ tali che le derivate puntuali $f'(\rho_1)$ e $f'(\sigma_1)$ di una funzione qualsiasi $f(t)$ corrispondano rispettivamente ai valori massimo e minimo di $f'(x+\xi)$ relativamente alla variazione di ξ fra 0 e un qualsiasi valore θ fissato. Sotto una tale condizione si avrà ovviamente, per ogni $\xi \in (0, \theta]$, $f'(x+\xi) - f'(\sigma_1) > 0$ e $-f'(x+\xi) + f'(\rho_1) > 0$. Passando alle primitive rispetto a ξ e applicando il Lemma II, sotto la condizione che la derivata $f'(x+\xi)$ non divenga infinita nell'intervallo considerato, è allora facile ottenere:

$$(119) \quad \begin{aligned} &\text{i)}\ f(x+\xi) - \xi f'(\sigma_1) + C_{1,1} > 0 \\ &\text{ii)}\ -f(x+\xi) + \xi f'(\rho_1) + C_{2,1} > 0 \end{aligned}$$

[239] La dimostrazione di Lagrange è presentata in una forma largamente semplificata da Lacroix nella seconda edizione del *Traité* [cfr. Lacroix (1810-18), vol. 1, p. 382]. Dato un intervallo $[0, \zeta]$, Lacroix definisce su di esso una partizione finita costituita dagli n intervalli uguali $[\nu\zeta/n, (\nu+1)\zeta/n]$ ($\nu = 0, 1, \ldots n-1$) e considera una funzione $\psi(t)$ definita nell'intervallo $[0, \zeta]$ ($\zeta>0$), la quale sia nulla nell'origine e sia tale che la sua derivata prima resti finita nei punti $t = \nu\zeta/n$ ($\nu = 0, 1, \ldots -1$). Sviluppando tale funzione fino all'ordine uno nei punti di frontiera della partizione, egli ottiene allora la seguente successione di identità

$$\psi(\zeta/n) = \psi(0 + \zeta/n) = \psi(0) + \frac{\zeta}{n}\psi'(0) + \left(\frac{\zeta}{n}\right)^{\alpha} V_0 = \frac{\zeta}{n}\psi'(0) + \left(\frac{\zeta}{n}\right)^{\alpha_0} V_0$$

$$\psi(2\zeta/n) - \psi(\zeta/n) = \psi(\zeta/n + \zeta/n) - \psi(\zeta/n) = \frac{\zeta}{n}\psi'(\zeta/n) + \left(\frac{\zeta}{n}\right)^{\alpha_1} V_1$$

$$\psi(3\zeta/n) - \psi(2\zeta/n) = \psi(2\zeta/n + \zeta/n) - \psi(2\zeta/n) = \frac{\zeta}{n}\psi'(2\zeta/n) + \left(\frac{\zeta}{n}\right)^{\alpha_2} V_2$$

$$\ldots$$

$$\psi(\zeta) - \psi((n-1)\zeta/n) = \psi((n-1)\zeta/n + \zeta/n) - \psi(2\zeta/n) = \frac{\zeta}{n}\psi'((n-1)\zeta/n) + \left(\frac{\zeta}{n}\right)^{\alpha_{n-1}} V_{n-1}$$

dove α_ν ($\nu = 0, 1, \ldots, n-1$) sono degli esponenti razionali maggiori di uno [Lacroix non sembra in realtà distinguere fra i diversi esponenti, indicandoli tutti per mezzo del medesimo simbolo] e V_ν ($\nu = 0, 1, \ldots, n-1$) rispettivamente delle funzioni di $\nu\zeta/n$ e ζ/n che non divengono infinite per $\zeta = 0$.

> Cette dernière circonstance - egli continua - permet de rendre le seconde terme de chacune des expressions ci-dessus aussi petit que l'on voudra, par rapport au premier: le signe de ces expressions ne dépendra donc que de celui de leur premier terme, et si ce dernier signe est le même dans toutes il affectera nécessairement leur somme.

Essendo tale somma uguale a $\psi(\zeta)$ ne segue che tale funzione ha lo stesso segno delle sue derivate puntuali $\psi'(\nu\, \zeta/n)$ ($\nu = 0, 1, \ldots, n-1$), da cui è facile trarre il Lemma II. La ricostruzione di Lacroix, pur impiegando un'inferenza in se stessa meramente intuitiva, rende manifesta la strategia sottostante alla dimostrazione di Lagrange.

Ora, se ξ é posto uguale a zero sia $f'(\rho_1)$ che $f'(\sigma_1)$ diverranno uguali a $f'(x)$ e quindi entrambe le somme che compaiono nelle (119) saranno a loro volta nulle. Ciò permette di determinare facilmente le costanti $C_{1,1}$ e $C_{2,1}$ che saranno rispettivamente uguali a $-f(x)$ e a $f(x)$.[240] Posto che $f(t)$ non sia infinita nel punto $t = x$, dalla (119) seguirà allora, senza difficoltà:

$$(120) \qquad f(x) + \xi f'(\sigma_1) < f(x+\xi) < f(x) + \xi f'(\rho_1)$$

Siano ora ρ_2 e σ_2 i valori della somma $x+\xi$ tali che le derivate puntuali seconde $f''(\rho_2)$ e $f''(\sigma_2)$ di una funzione qualsiasi $f(t)$ corrispondano rispettivamente ai valori massimo e minimo di $f''(x+\xi)$ relativamente alla variazione di ξ fra 0 e θ. Se $\xi \in (0, \theta]$ si avrà allora $f''(x+\xi) - f''(\sigma_2) > 0$ e $-f''(x+\xi) + f''(\rho_2) > 0$ e quindi, passando alle primitive rispetto a ξ, applicando il Lemma II, sotto la condizione che la derivata $f''(x+\xi)$ non divenga infinita nell'intervallo considerato:

$$(121) \qquad \begin{array}{l} \text{i) } f'(x+\xi) - \xi f''(\sigma_2) + C_{1,2} > 0 \\ \text{ii) } -f'(x+\xi) + \xi f''(\rho_2) + C_{2,2} > 0 \end{array}$$

Ragionando come sopra si avrà d'altra parte $C_{1,2} = -f'(x)$ e $C_{2,2} = f'(x)$ e quindi, passando ancora alle primitive a partire dalla (121) e assumendo che $f'(t)$ non sia infinita nel punto $t = x$:

$$(122) \qquad \begin{array}{l} \text{i) } f'(x+\xi) - \dfrac{\xi^2}{2} f''(\sigma_2) - \xi f'(x) + {}^*C_{1,2} > 0 \\ \text{ii) } -f'(x+\xi) + \dfrac{\xi^2}{2} f''(\rho_2) + \xi f'(x) + {}^*C_{2,2} > 0 \end{array}$$

Ponendo ancora $\xi = 0$ non è d'altra parte difficile rendersi conto che ${}^*C_{1,2} = C_{1,1} = -f(x)$ e ${}^*C_{2,2} = C_{2,1} = f(x)$. Dalla (122) è allora facile trarre:

$$(123) \qquad f(x) + \xi f'(x) + \frac{\xi^2}{2} f''(\sigma_2) < f(x+\xi) < f(x) + \xi f'(x) + \frac{\xi^2}{2} f''(\rho_2)$$

---

[240] Lagrange non giustifica esplicitamente tale identificazione traendo direttamente la (119) per le posizioni $C_1 = -f(x)$ e $C_2 = f(x)$, ciò che tuttavia non può seguire, dal punto di vista della teoria delle funzioni derivate, dalla semplice interpretazione del passaggio alle funzioni primitive come una integrazione definita fra 0 e ξ e richiede quindi un argomento ulteriore.

Reiterando tale ragionamento fino a un qualsiasi ordine $\nu+1$ si avrà allora, sotto la condizione che tanto la funzione $f(t)$ che nessuna delle sue derivate $f'(t)$, $f''(t)$, ..., $f^{(\nu+1)}(t)$ divenga infinita in un intervallo $[x, x+\theta]$:

$$(124)\quad f(x) + \xi f'(x) + ... + \frac{\xi^{\nu+1}}{(\nu+1)!} f^{(\nu+1)}(\sigma_\nu) < f(x+\xi) < f(x) + \xi f'(x) + ... + \frac{\xi^{\nu+1}}{(\nu+1)!} f^{(\nu+1)}(\rho_\nu)$$

dove $\xi \in (0, \theta]$ e ρ_ν e σ_ν sono i valori della somma $x+\xi$ tali che le derivate puntuali $f^{(\nu+1)}(\rho_\nu)$ e $f^{(\nu+1)}(\sigma_\nu)$ corrispondano rispettivamente ai valori massimo e minimo di $f^{(\nu+1)}(x+\xi)$ relativamente alla variazione di ξ fra 0 e θ. Non è difficile rendersi conto che se ξ è inteso come un incremento positivo fissato, posto uguale a θ, e è supposto il teorema dei valori intermedi, la (124) corrisponde esattamente alla (105). Un analogo ragionamento conduce allo stesso risultato anche nel caso di incrementi negativi.

Ritrovato così un analogo della (105), Lagrange può passare facilmente alla (104), ponendo semplicemente nella (124) $x = 0$ e presupponendo il teorema dei valori intermedi. E' come corollario della (104) che egli ritrova poi il Teorema I:

> On a par-là une démonstration rigoureuse de cette proposition qu'on s'était contenté de supposer jusqu'ici; savoir, que dans le développement d'une fonction, on peut donner à la variable suivant laquelle est ordonné le développement, une valeur assez petite pour qu'un terme quelconque de la série soit plus grand que la somme de tous ceux qui le suivent; car il est clair qu'il suffit pour cela de faire voir qu'on peut toujours prendre ξ assez petit pour que l'on ait
>
> $$(125)\quad \frac{\xi^\nu}{\nu!} f^{(\nu)}(0) > \frac{\xi^{\nu+1}}{(\nu+1)!} f^{(\nu+1)}(\zeta_\nu)$$
>
> condition qui se réduit à celle-ci $f^{(\nu)}(0) > \frac{\xi}{\nu+1} f^{(\nu+1)}(\zeta_\nu)$, à laquelle il est visible qu'on peut toujours satisfaire en diminuant la valeur de ξ, pourvu qu'on n'ait pas $f^{(\nu)}(0) = 0$.[241]

Secondo J. L. Ovaert,[242] Lagrange confonde qui fra sviluppo in serie convergente e sviluppo asintotico. Tuttavia se è evidente che egli intenda qui il "resto" definito dalla (104) come il prosieguo dello sviluppo, ciò non significa ancora che tale identificazione sia illegittima secondo le premesse accettate. Anche se si interpreta la (112) - e quindi l'intera dimostrazione della (104) - come indipendente dalle condizioni di convergenza della (2), basta infatti assumere che ogni serie intera converga su un disco centrato sullo zero, come

[241] Cfr. Lagrange (1801), pp. 78-9 e (1806a), p. 105.

[242] Cfr. Ovaert (1976), p. 181.

sembra fare Lagrange, per concludere che è sempre possibile trovare un valore positivo δ tale che questa equiparazione sia possibile per ogni $\xi \in (-\delta, \delta)$. Il Teorema I si presenta quindi, come nella *Théorie*, come un risultato relativo alla velocità della convergenza, piuttosto che come un asserzione di convergenza.

Per quanto una tale interpretazione "salvi" la dimostrazione di Lagrange, non vi è certamente dubbio che essi esprima - se non altro nel linguaggio di questi – una grave ambiguità relativamente alla nozione stessa di "resto" di uno sviluppo in serie. Tale ambiguità risulta ancora più evidente quando si confronti la precedente dimostrazione con due diversi argomenti che Lagrange aveva presentato poche righe prima di essa e che considererò qui secondo un ordine invertito rispetto alla loro esposizione nelle *Leçons*.

Scritta la (85), per la sostituzione di ξ in luogo di x:

$$(126) \qquad f(\xi) = f(0) + \xi f'(0) + \frac{\xi^2}{2} f''(0) + \frac{\xi^3}{3!} f'''(0) + \&c.$$

egli si richiama alla (124) per trarre le seguenti considerazioni:

> [...] si on veut s'arrêter au terme (ν+1), alors comme le terme suivant serait $\frac{\xi^{\nu+1}}{(\nu+1)!} f^{(\nu+1)}(0)$ il n'y aura qu'à substituer à la place de $f^{(\nu+1)}(0)$ la plus grande et la plus petite valeur de $f^{(\nu+1)}(\xi)$ ou des valeurs plus grandes et plus petites que celles-ci, et l'on aura les limites du reste du développement.
>
> Ainsi le développement sera exact tant que ces limites auront des valeurs finies. Si l'une d'elles devenait infinie, le reste de la série pourrait aussi devenir infini, et le développement deviendrait fautif. Il faudra donc alors ou s'arreter à un terme précédent, ou n'attribuer à ξ que des valeurs telles que $f^{(\nu+1)}(0)$ ne devienne pas infinie depuis $\xi = 0$ jusqu'à cette valeur.[243]

La prima ambiguità dell'argomento di Lagrange riguarda l'oggetto stesso a cui si applicano le proprietà cui esso si riferisce. Il fatto che la falsità dello "sviluppo" a cui questi si riferisce possa essere corretta diminuendo il valore di ν esclude infatti che il termine "sviluppo" possa qui riferirsi alla (126). Esso non può quindi che indicare o la ridotta parziale di ordine ν della (126) o questa stessa ridotta completata da un fattore compreso fra i limiti indicati dalla (124). La seconda ambiguità è invece relativa alla relazione fra l'argomento in quanto tale e il teorema del resto. Fra le premesse esplicite di questo teorema vi è infatti, secondo la stessa dimostrazione di Lagrange, la richiesta che la derivata di ordine ν+1 di $f(t)$ non divenga infinita nell'intervallo considerato, ciò che sembra ora essere posto esplicitamente in dubbio. Il solo modo per rendere conseguente l'argomento in questione è allora di intenderlo come relativo alle condizioni di applicabilità del teorema. L'eventuale falsità dello "sviluppo", nel secondo dei due sensi precedenti,

---

[243] Cfr. Lagrange (1801), p. 78 e (1806a), p. 104.

corrisponde quindi al fatto che esso è stabilito a partire da un teorema di cui non sono rispettate le condizioni di applicazione e può quindi essere corretta, come suggerisce Lagrange, scegliendo un valore minore o di ξ o di ν o di entrambi. Se la funzione $f(t)$ è (formalmente) sviluppabile in una serie intera centrata sul punto $t = 0$, allora, secondo i presupposti di Lagrange, è sempre possibile prendere ξ abbastanza piccolo, perché le condizioni di applicabilità del teorema siano rispettate per ogni valore di ν, perché la (126) converga e i limiti indicati dalla (124) inquadrino quindi la somma dei termini della (126) di ordine superiore a ν. Se $f(t)$ non è (formalmente) sviluppabile in una serie intera centrata sul punto $t = 0$ - pur essendo *ivi* definita - è comunque certo, secondo i presupposti di Lagrange, che essa possieda uno sviluppo (formale) in serie di potenze razionali della variabile ξ, la cui ridotta di ordine μ ($\mu = 0$, 1, 2, &c.) corrisponda alla ridotta dello stesso ordine della (126). In tal caso è comunque possibile scegliere ξ abbastanza piccolo perché lo sviluppo (formale) in serie di potenze razionali della variabile ξ sia convergente alla funzione generatrice e esista un valore di ν tale da soddisfare alle condizioni del teorema, in modo che i limiti indicati dalla (124) inquadrino, anche in tal caso, la somma dei termini della (126) di ordine superiore a ν. Se anche il precedente argomento sembra quindi interpretabile in modo da renderlo sostanzialmente corretto (relativamente all'universo delle funzioni lagrangiane), esso presenta comunque un'ambiguità che non può dipendere semplicemente dall'oscurità del linguaggio di Lagrange.

Vengo ora al secondo degli argomenti preannunciati, in cui al contrario l'interpretazione del "resto" come differenza fra la funzione generatrice e la ridotta parziale del suo sviluppo (formale) in serie intera sembra assolutamente inequivocabile. Data la propria formula generale, Lagrange mostra come essa si applichi nel caso degli sviluppi già trovati per le funzioni elementari, permettendo di trarre l'inquadramento del "resto". Particolarmente interessante è il ragionamento che egli conduce a proposito dello sviluppo binomiale. Ponendo $f(t) = t^{\alpha}$ si avrà $f^{(\nu+1)}(t) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-\nu)t^{\alpha-\nu-1}$ e quindi, se x e ξ sono positivi, i valori massimo e minimo di $f^{(\nu+1)}(t)$ in $[x, x+\xi]$ sono: $\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-\nu)x^{\alpha-\nu-1}$ e $\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-\nu)(x+\xi)^{\alpha-\nu-1}$.

Donc, en général - scrive Lagrange -, le développement de $(x+\xi)^{\alpha}$ sera compris entre ces deux limites:

$$x^{\alpha} + \alpha\xi x^{\alpha-1} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\xi^2 x^{\alpha-2} + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-\nu)}{(\nu+1)!}\xi^{\nu+1} x^{\alpha-\nu-1}$$

(127)

$$x^{\alpha} + \alpha\xi x^{\alpha-1} + \frac{\alpha(\alpha-1)}{2}\xi^2 x^{\alpha-2} + \ldots + \frac{\alpha(\alpha-1)\ldots(\alpha-\nu)}{(\nu+1)!}\xi^{\nu+1} (x+\xi)^{\alpha-\nu-1}$$

Par le moyen de ces limites, on est à couvert des difficultés qui peuvent résulter de la non-convergence de la série; car comme un terme quelconque $n^{\text{ème}}$ est au suivant dans le rapport de 1 à $\frac{\alpha-n+1}{n} \times \frac{\xi}{x}$, pour que la série soit convergente il faut que la quantité $\frac{\alpha-n+1}{n}\times\frac{\xi}{x}$, abstraction faite du signe qu'elle doit avoir, soit moindre que l'unité. Si $\frac{\xi}{x}<1$, il est clair que la série finira toujours par être convergente, puisque la dernière valeur de $\frac{\alpha-n+1}{n}$ est -1.[244] Mais elle sera toujours divergente à son extrémité, si $\frac{\xi}{x}>1$, quoiqu'elle puisse être convergente dans ses premiers termes. Ainsi, elle ne pourra alors < être employée avec sûreté, quelque loin qu'elle soit portée, qu'en ayant égard aux limites que nous venons de donner.[245]

Sebbene Lagrange non faccia qui ricorso alla (124) per determinare le condizione di convergenza dello sviluppo binomiale, limitandosi a una semplice applicazione del criterio di d'Alembert[246] relativamente alla forma di questo sviluppo indicata dalla (14), è chiaro che egli intenda qui il resto come la differenza fra la funzione e la ridotta parziale di ordine ν del suo sviluppo (formale) in serie intera. Questo può allora restare finito in un certo intervallo nel quale tale sviluppo è invece divergente - come avviene appunto per lo sviluppo di $(x+\xi)^{\alpha}$ per $\xi\in[x,\infty)$, $x>0$ - e può quindi indicare l'errore compiuto tramite un'approssimazione realizzata grazie all'impiego di una sua ridotta parziale. Una tale interpretazione sembra tuttavia incompatibile con la definizione lagrangiana di funzione derivata e non riemerge quindi entro il contesto della teoria cui essa mette luogo che a condizione di negare le premesse che rendono legittima la dimostrazione della (124). Tuttavia, lungi dall'indicare i limiti della sottilità matematica di Lagrange, l'osservazione precedente sembra esaltarne le capacità di vedere al di là dei confini troppo angusti, stabiliti dagli stessi principi della teoria delle funzioni analitiche, per preconizzare, sia pure in termini impliciti, la possibilità di una definizione quantitativa della nozione di derivata, la quale sia fornita proprio dalla (112). Letto con le lenti della successiva evoluzione del sapere matematico, lo scacco di Lagrange si trasforma così nella chiara indicazione di un'alternativa possibile. Visto invece dall'interno della sua teoria, esso si presenta come un'inevitabile conseguenza dell'impossibilità di una completa e soddisfacente integrazione del *calcolo* entro il dominio di una teoria euleriana delle forme analitiche, la quale non accetti di impiegarne lo stesso algoritmo come strumento definitorio di un oggetto matematico e non si precluda quindi la strada di ogni possibile applicazione allo studio di particolari sistemi di quantità. Per evitare una simile alternativa - la quale contiene la negazione della stessa speranza euleriana, quella di una scienza formale delle quantità e ne mostra anzi il carattere intrinsecamente contraddittorio - Lagrange non ha trovato altra strada che quella di proporre una definizione che,

---

[244]Ovvero: $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\alpha-n+1}{n}=-1$ e quindi se $\frac{\xi}{x}<1$, $\left|\lim\limits_{n\to\infty}\frac{\alpha-n+1}{n}\times\frac{\xi}{x}\right|<1$.

[245]Cfr. Lagrange (1801), pp. 75 e (1806a), pp. 99-100.

[246]Cfr. il precedente paragrafo II.2-A.γ..

richiedendo un evitabile presupposto di convergenza, non è in grado di liberarsi di esso e soprattutto non può permettersi di trattare separatamente le derivate dei diversi ordini come oggetti essenzialmente indipendenti. Il ritorno alla quantità coinvolge così inevitabilmente l'intera gerarchia infinita delle derivate e impedisce quindi di trattare adeguatamente le differenze *finite* fra una funzione e le ridotte parziali del proprio sviluppo formale in una serie intera tanto convergente che *divergente*. Nonostante questa impossibilità di principio, Lagrange ha così colto non solo la necessità di una trattazione analitica di un tale oggetto essenzialmente quantitativo, ma ha compreso che è proprio il comportamento di tali differenze che decide dell'applicabilità della teoria delle serie allo studio di un'ampia classe di sistemi di quantità (quelli generalmente detti differenziali), del tutto indipendentemente dal comportamento della serie completa. L'ambiguità delle sue dimostrazioni è così un prezzo inevitabile che egli ha dovuto pagare per adattare a una corretta intuizione una definizione originaria francamente inadeguata.

III. 6. *e*.
LA RIEDIFICAZIONE DELL'ANALISI SUPERIORE

III. 6. *e*. α. *Premessa: analisi diretta e inversa delle funzioni e calcolo differenziale e integrale*

Determinato l'algoritmo delle funzioni derivate e dimostrato il teorema del resto, Lagrange non disponeva che degli elementi di una nuova teoria matematica, la quale doveva ancora mostrare di poter essere completamente sostituita al calcolo differenziale e integrale. Come ho già osservato nel precedente paragrafo III.6.*d*.α. egli non avrebbe infatti potuto limitarsi all'introduzione di un principio generale di *transfer*, che permettesse di riformulare ogni dimostrazione redatta in un linguaggio differenziale in una corrispondente dimostrazione che impiegasse al contrario il linguaggio delle funzioni derivate e ne fornisse quindi un'alternativa formale. Non solo le applicazioni geometriche e meccaniche del calcolo differenziale e integrale, ma anche molti dei risultati che costituivano l'edificio dell'analisi superiore nella sua forma pura, in quanto teoria generale dell'algoritmo differenziale, trovavano infatti la loro giustificazione in argomenti concettuali che vertevano sulla natura particolare delle quantità alle quali tale algoritmo era esplicitamente riferito. Una semplice trasposizione simbolica non avrebbe così saputo fornire alcuna alternativa effettiva a tali giustificazioni e avrebbe tolto a esse ogni legittimità intuitiva, riproponendole sotto la forma di ingiustificate connessioni sintattiche. Ciò che occorreva erano al contrario delle dimostrazioni essenzialmente nuove, che eliminassero ogni argomento concettuale fondato sulla natura particolare delle quantità in gioco e ne mostrassero l'inessenzialità relativamente allo scopo di una una teoria generale delle quantità variabili. Gli stessi risultati del calcolo differenziale dovevano essere sostituiti da risultati diversi nei quali non potesse che riconoscersi una parentela algoritmica e un'analoga portata applicativa, ma non un'identità di contenuto matematico: in una parola l'analisi superiore doveva essere riformulata come una teoria di un nuovo genere di oggetti. Ecco d'altra parte come lo stesso Lagrange si esprime dopo aver presentato i principi generali di una teoria delle equazioni alle funzioni derivate:

> On peut appeler *analyse directe* des fonctions, la manière de trouver les fonctions et les équations dérivées [...]. Mais la manière de revenir de ces fonctions et de ces équations à celles d'où elles peuvent être dérivées, et qu'on peut regarder comme leurs primitives, forme une autre partie de l'analyse des fonctions, qu'on peut appeler *analyse inverse*, parce qu'elle dépend des mêmes méthodes et des mêmes règles, mais prises inversement, et qui, par cette raison, ne s'appliquent pas toujours avec la même facilité ni le même succès. [...]
> Nous avons indiqué les méthodes connues pour les principales formes de fonctions ou d'équations, et nous nous sommes sur-tout appliqués à bien établir les principes généraux de cette analyse inverse.
> Comme notre dessein n'est pas d'en donner un traité complet, nous n'ajouterons point ici d'autres détail; mais ceux qui savent le calcul différentiel, ne peuvent manquer d'apercevoir déjà la conformité de l'analyse des fonctions avec ce calcul, et la correspondance des analyses directe et inverse avec les deux parties de ce calcul qu'on appelle *calculs différentiel et intégral*. Ainsi, il leur sera aisé, s'ils le jugent à propos, de transporter aux fonctions les différentes méthodes d'intégration trouvées jusqu'à présent. Nous démontrerons plus bas cette conformité, d'une manière directe et rigoureuse. Nous aurions même pu commencer par là, et rappeler ainsi tout de suite notre analyse des fonctions au calcul différentiel; mais la marche que nous avons suivie, nous a paru plus propre à remplir l'objet que nous nous sommes proposé, et qui consiste uniquement à lier cette branche de l'analyse avec l'analyse élémentaire, sans la faire dépendre ni même rien emprunter d'aucune considération étrangère.[247]

III. 6. *e*. β. *Principi generali di una teoria delle equazioni derivate*

L'intero corpo dell'analisi superiore é reinterpretato da Lagrange come "un nuovo sistema di operazioni algebriche",[248] al quale è possibile pervenire considerando le funzioni derivate "in se stesse", indipendentemente dalla formazione delle serie, ovvero: in quanto trasformate formali regolate da un algoritmo assegnato,[249] il quale mette capo a un operatore, che può essere

---

[247]Cfr. Lagrange (1797), pp. 90-1. L'ultima parte di un tale brano è soppressa nella seconda edizione della *Théorie* [cfr. Lagrange (1813), pp. 123-24], alla quale Lagrange aggiunge un'addenda [cfr. Lagrange (1813), pp. 382-3] dove fornisce la dimostrazione di "conformità" della teoria delle funzioni derivate al calcolo differenziale e integrale che, benché annunciata nel passaggio citato, non compare nella prima edizione. Sviluppate successivamente le funzioni $y(x+dx)$, $y(x+2dx)$, $y(x+3dx)$, &c. secondo la (14) per le posizioni $\xi = dx$, $\xi = 2dx$, $\xi = 3dx$, &c., egli calcola per sottrazione le espressioni in serie dei differenziali successivi di $y(x)$ e, omettendo gli infinitesimi di ordine superiore rispetto all'ordine del primo termine di tali espressioni, giunge senza difficoltà alle identità $y' = dy/dx$, $y'' = d^2y/dx^2$, $y''' = d^3y/dx^3$, &c., che concludono la dimostrazione.

[248]Cfr. Lagrange (1797), p. 50, (1813), p. 70, (1081), p. 83 e (1806a), p. 111.

[249]Si osservi che tale interpretazione delle funzioni derivate "in sé stesse" è esattamente ciò cui Lagrange non può richiamarsi per giustificare le applicazioni della teoria di

studiato relativamente ai sistemi di equazioni cui esso conduce. Posta infatti, per ogni t, la condizione $f(t) = 0$, si avrà anche $f(x) = 0$ e $f(x+\xi) = f(x) + \xi f'(x) + \frac{\xi^2}{2!} f''(x) + \&c. = 0$ e quindi, per il metodo dei coefficienti indeterminati, $f'(x) = 0$, $f''(x) = 0$, &c., da cui Lagrange conclude che "l'on aura la même équation en prenant les fonctions dérivées d'un ordre quelconque".[250]

Se è data d'altra parte un'equazione fra due variabili $F(x, y) = 0$, si avrà, assumendo x come la variabile principale e ponendo quindi $x' = 0$:

$$
(128)\qquad
\begin{aligned}
&F'(x, y) = F'_x(x, y) + F'_y(x, y)\, y' = 0 \\
&F''(x, y) = F''_{x,x}(x, y) + 2F''_{x,y}(x, y) + F''_{y,y}(x, y)\, y'' = 0 \\
&\&c.
\end{aligned}
$$

Le equazioni che partecipano a tale sistema sono rispettivamente indicate da Lagrange come le "equazioni prime, seconde, &c." della funzione assegnata, che egli indica come la "primitiva", mentre "le equazioni che potranno essere formate mediante una combinazione qualunque dell'equazione primitiva e della sua equazione prima o di queste e dell'equazione seconda e così di seguito" sono più generalmente indicate come "equazioni derivate del primo ordine, del secondo ordine, &c.".[251] Se $F(x, y) = 0$ è l'equazione primitiva (la quale esprime implicitamente y in funzione di x), le sue equazioni derivate dei diversi ordini assumeranno così la forma seguente

$$
(129)\qquad
\begin{aligned}
&\Phi_1(x, y, y') = 0 \\
&\Phi_2(x, y, y', y'') = 0 \\
&\&c.
\end{aligned}
$$

in cui Φ_1, Φ_2, &c. sono delle funzioni qualsiasi delle variabili indicate (non univocamente determinate dalla conoscenza della funzione F), sorte rispettivamente secondo una data combinazione algebrica[252] delle equazioni: $F(x, y)$

---

tali funzioni allo studio di sistemi particolari di quantità [cfr. la parte finale del precedente paragrafo III.6.*d*. ζ.].

[250] Cfr. Lagrange (1801), p. 84 e (1806a), p. 111.

[251] Cfr. Lagrange (1797), p. 51, (1813), p. 70, (1801), p. 84 e (1806a), p. 112. Per quanto presente in entrambe le edizioni della *Théorie*, la distinzione terminologica fra le equazioni prime, seconde, &c. e le equazioni derivate del primo ordine, del second'ordine, &c. è in realtà abbandonata nelle *Leçons*, in cui Lagrange usa i termini "equazione prima", "equazione seconda", &c. come sinonimi di "equazione derivata del primo ordine", "equazione derivata del secondo ordine", &c.. Tali equazioni corrispondono, come é chiaro, alle equazioni differenziali ordinarie nel calcolo leibniziano. Per quanto Lagrange introduca la nozione di tali equazioni parlando di "combinazione qualsiasi" delle (128), egli si riferisce infatti con tutta evidenza alle sole combinazioni algebriche.

[252] Cfr. la precedente nota 251.

= 0 e F'(x, y) = 0; F(x, y) = 0, F'(x, y) = 0 e F"(x, y) = 0; &c. che rispondono alle (128).

La determinazione dell'equazione primitiva F(x, y) = 0, data una delle sue equazioni derivate o di un'equazione derivata di ordine inferiore, data un'equazione derivata di ordine superiore della stessa primitiva, risponde a una "operazione" che può essere qualificata come "l'inverse de celle par laquelle on descend de la fonction primitive aux fonctions dérivées".[253] Essa può sempre "essere eseguita" tramite il ricorso alle serie e a un impiego generalizzato del metodo dei coefficienti indeterminati. Data un'equazione $\Phi_\nu(x, y, y', ..., y^{(\nu)}) = 0$, si tratta di trarre il "valore" di $y^{(\nu)}$ in funzione delle variabili $x, y, y', ..., y^{(\nu-1)}$; ponendo in esso $x = 0$ si trarrà poi il coefficiente di ordine ν dello sviluppo di $y = y(x)$ in una serie intera centrata sul punto $x = 0$, espresso in funzione di ν quantità indeterminate che potranno essere intese come delle costanti arbitrarie. L'esibizione di una tale serie non può tuttavia essere considerata come una soluzione del problema consistente nella ricerca, a partire dall'equazione assegnata, della *funzione* primitiva $y = y(x)$, di cui, in tal modo, non si fornisce che uno sviluppo determinato.[254] Si tratta quindi di indicare dei procedimenti atti a trarre dall'equazione data una relazione finitaria fra y e x - la quale costituisca appunto la funzione cercata - e nella quale non potranno comunque che comparire ν costanti arbitrarie.[255] L'esposizione di Lagrange della teoria generale delle equazioni derivate presenta quest'ultima sotto la forma di una teoria generale di tali costanti arbitrarie, che corrispondono ovviamente alle costanti d'integrazione del calcolo differenziale. Essa può venir ricostruita nei termini che seguono.

Se l'equazione primitiva F(x, y) = 0 contiene un numero qualsiasi μ di costanti $a_1, a_2, ..., a_\mu$ (le quali non si presentano in essa come delle componenti di addendi indipendenti da x e y), allora queste saranno a loro volta presenti, secondo l'algoritmo delle funzioni derivate, anche nell'equazione prima F'(x, y) = 0. Confrontando fra loro le equazioni F(x, y) = 0 e F'(x, y) = 0 sarà allora sempre possibile eliminare una di tali costanti e quindi, quale che sia l'equazione derivata del primo ordine $\Phi_1(x, y, y') = 0$ tratta da tali equazioni, essa non conterrà in generale che μ-1 costanti, $a_1, a_2, ..., a_{\mu-1}$. Per la stessa

---

[253] Cfr. Lagrange (1797), p. 54 e (1813), p. 75. E' perfettamente chiaro come la nozione lagrangiana di funzione derivata corrisponda a una concezione dell'analisi come teoria delle trasformazioni formali. E' d'altra parte sintomatico che Lagrange, tanto nella *Théorie* che nelle *Leçons*, introduca la trattazione di tali equazioni attraverso una loro applicazione "pour la transformation des fonctions". Generalizzandone il metodo, si tratta di trovare l' equazione prima $y' - \varphi'[\psi(x)]\,\psi'(x) = 0$ di una primitiva data, $y - \varphi[\psi(x)] = 0$ e di comporre tra loro tali equazioni (o esse e l'equazione seconda, &c.) in modo da giungere a un'equazione derivata semplificata la cui soluzione esprime una trasformata della funzione di partenza $y = y(x)$. In tal modo Lagrange ritrova le (52) (per la posizione $a = e$), dalle quali parte, nelle *Leçons*, per sviluppare una "teoria completa delle sezioni angolari" [cfr. Lagrange (1797), pp. 51-4, (1813), pp. 71-5, (1801), pp. 84-115 (lez. X e XI) e (1806a), pp. 113- 150 (lez. X-XI)].

[254] Cfr. il precedente paragrafo III.6.*a*.β..

[255] Cfr. *sotto*.

ragione, quale che sia l'equazione derivata del secondo ordine $\Phi_2(x, y, y', y'')$ $= 0$, essa non conterrà in generale che μ-2 costanti, $a_1, a_2, ..., a_{\mu-2}$ e così di seguito. Data un'equazione derivata di ordine ν, $\Phi_\nu(x, y, y', ..., y^{(\nu)}) = 0$, l'espressione generale dell'equazione primitiva corrispondente dovrà contenere così ν costanti arbitrarie che non compaiono nell'equazione assegnata. Ciò detto, si osservi che, date le equazioni $F(x, y) = 0$, $F'(x, y) = 0$ e $F''(x, y) = 0$, è possibile pervenire a un'equazione derivata del second'ordine, $\Phi_2(x, y, y', y'')$ $= 0$ sia eliminando la costante a_μ, confrontando la prima e la secondo di tali equazioni, e la costante $a_{\mu-1}$, confrontando la prima e la terza, sia eliminando $a_{\mu-1}$, confrontando le prima e la seconda, e a_μ, confrontando la prima e la terza. Così un'equazione derivata del secondo ordine avrà due equazioni primitive generali del primo ordine, l'una contenente a_μ e l'altra contenente $a_{\mu-1}$. Per la stessa ragione, un'equazione derivata del terzo ordine avrà tre equazioni primitive generali del secondo ordine, e così di seguito. Trovate le ν equazioni primitive generali dell'ordine ν-1 di una data equazione derivata di ordine ν, $\Phi_\nu(x, y, y', ..., y^{(\nu)}) = 0$, ognuna contenente una costante arbitraria, è possibile, eliminando la variabile $y^{(\nu-1)}$ confrontando tali equazioni fra loro due a due, pervenire alle ν-2 equazioni primitive generali dell'ordine ν-2, ognuna delle quali conterrà due costanti arbitrarie. Continuando il tal modo si potrà pervenire così all'equazione primitiva di ordine zero, $F(x, y) =$ 0, la quale conterrà ν costanti arbitrarie. Il problema della ricerca della primitiva di una data equazione derivata di ordine ν è allora riducibile al problema della ricerca di tutte le corrispondenti ν equazioni primitive generali di ordine ν-1. Per contro, se a partire da una data equazione derivata del primo ordine, $\Phi_1(x, y, y') = 0$, è dedotta una certa equazione derivata di ordine ν, $\Phi_\nu(x, y, y', ..., y^{(\nu)}) = 0$, di cui si trovi una primitiva dell'ordine ν-1 e a partire da questa un'equazione derivata del primo ordine contenente una sola costante arbitraria, è possibile eliminare y' confrontando tale equazione con quella assegnata e dedurre quindi la primitiva di ordine zero $F'(x, y) = 0$, la quale conterrà una costante arbitraria.[256]

Il modo più semplice di trovare un'equazione primitiva dell'ordine ν-1 di una data equazione derivata dell'ordine ν, $\Phi_\nu(x, y, y', ..., y^{(\nu)}) = 0$, è di porre tale equazione sotto la forma di un'equazione prima delle variabili x, y, y', $..., y^{(\nu-1)}$, $\Gamma'(x, y, y', ..., y^{(\nu-1)}) = 0$ e da qui passare alla primitiva $\Gamma(x, y, y', ..., y^{(\nu-1)}) = a_1$.[257] Siccome la funzione $\Phi_\nu(x, y, y', ..., y^{(\nu)})$ è una funzione di $\nu+1$ variabili non è tuttavia assicurato che essa sia una derivata esatta di una funzione delle variabili $x, y, y', ..., y^{(\nu-1)}$, né che essa possa essere ridotta a una funzione di tal tipo per mezzo di opportune trasformazioni

[256] Per delle dimostrazioni esplicite di tutte le conclusioni precedenti, tratte ricorrendo al confronto fra gli sviluppi che definiscono le funzioni derivate, cfr. Lagrange (1801), lez. XII, pp. 115-28 e (1806a), lez. XII, pp. 151-67.

[257] Cfr. *ivi*, p. 128 e p. 168. Cfr. anche Lagrange (1797), p. 58 e (1813), pp. 80 e 82-3.

analitiche.[258] L'*equazione* assegnata $\Phi_\nu(x, y, y', ..., y^{(\nu)}) = 0$ può tuttavia essere trasformata in un'equazione della forma richiesta, $\Gamma'(x, y, y', ..., y^{(\nu-1)}) = 0$, moltiplicando ognuno dei suoi membri per un moltiplicatore opportuno. Nella XIII lezione "*sur le calcul des fonctions*", Lagrange dimostra "l'esistenza di un tale moltiplicatore per tutte le funzioni derivate",[259] e conclude quindi che la trasformazione in questione è "sempre possibile".[260] Si tratta per questo di dimostrare che *per ogni* funzione Φ_ν delle $\nu+1$ variabili $x, y, y', ..., y^{(\nu)}$ *esiste* un fattore M, costituito a sua volta da una funzione di opportune variabili, tale che:

$$(130) \qquad \Phi_\nu(x, y, y', y'', ..., y^{(\nu)}) = M \cdot \Gamma'(x, y, y', y'', ..., y^{(\nu-1)})$$

dove $\Gamma'(x, y, y', ..., y^{(\nu-1)})$ è la derivata prima completa di una certa funzione $\Gamma(x, y, y', ..., y^{(\nu-1)})$ delle variabili $x, y, y', ..., y^{(\nu-1)}$ che dovrà essere volta a volta determinata, insieme al suo moltiplicatore M. La dimostrazione di Lagrange è tuttavia fondata sull'assunzione di esistenza, per ogni equazione derivata di un'ordine qualunque, di (almeno) un'equazione primitiva di un ordine immediatamente inferiore contenente una costante arbitraria e procede indicando la forma generale del moltiplicatore opportuno nei termini della funzione indeterminata corrispondente a tale primitiva. Essa non fornisce quindi alcun metodo generale per risolvere l'equazione proposta e si limita a mostrare che essa può essere risolta per questa via.[261] Per pervenire

---

[258] Lagrange anticipa qui una conclusione, peraltro intuitivamente evidente, che egli non dimostrerà che più avanti nel quadro della teoria generale delle funzioni derivate a più variabili (cfr. il prossimo paragrafo III.6.*e*.ε).

[259] Cfr. Lagrange (1813), p. 10.

[260] Cfr. Lagrange (1801), p. 128 e (1806a), p. 168.

[261] La dimostrazione di Lagrange richiede per la verità anche l'esistenza di una radice per ogni equazione a una variabile. Questi assume infatti che l'equazione data, $\Phi_\nu(x, y, y', ..., y^{(\nu)}) = 0$, possa essere scritta sotto la forma

$$y^{(\nu)} + \Psi(x, y, y', y'', ..., y^{(\nu-1)}) = 0$$

e possegga una primitiva

$$\Gamma(x, y, y', y'', ..., y^{(\nu-1)}) = a_1$$

Da quest'ultima equazione si avrà, passando alle derivate,

$$\Gamma'(x, y, y', y'', ..., y^{(\nu-1)}) = \Gamma'_{x,y,...,y^{(\nu-2)}}(x, y, ..., y^{(\nu-1)}) + y^{(\nu)}\,\Gamma'_{y^{(\nu-2)}}(x, y, ..., y^{(\nu-1)}) = 0$$

e quindi:

$$y^{(\nu)} + \frac{\Gamma'_{x,y,...,y^{(\nu-2)}}(x, y, ..., y^{(\nu-1)})}{\Gamma'_{y^{(\nu-2)}}(x, y, ..., y^{(\nu-1)})} = 0$$

Confrontando tale equazione con l'equazione assegnata, ridotta in forma opportuna, sarà allora facile trarre a una tale soluzione occorrerebbe determinare il moltiplicatore M indipendentemente dalla conoscenza della primitiva, ciò che è "spesso assai difficile". Tale semplice considerazione conduce lo stesso Lagrange a qualificare la propria dimostrazione come "più curiosa che utile".[262]

III. 6. $e.\gamma$. *Una teoria generale delle primitive singolari*

Forniti i principi generali di una teorie delle equazioni derivate, Lagrange passa[263] all'esame dei metodi di soluzione di tali equazioni. Dopo una breve trattazione delle equazioni a variabili separabili e delle equazioni lineari,[264] egli dedica una ben diversa attenzione al problema costituito dalla ricerca delle "soluzioni singolari", che egli connette nella *Théorie* alla trattazione dei casi particolari in cui la (14) "è in difetto"[265] e nelle *Leçons* alla interpretazione delle quantità arbitrarie che entrano nelle equazioni primitive come delle funzioni che si annullano passando alla derivata.[266] Mi

---

$$\Psi(x, y, y', y'', \dots, y^{(v-1)}) = \frac{\Gamma'_{x,y,\dots,y^{(v-2)}}(x, y, \dots, y^{(v-1)})}{\Gamma'_{y^{(v-2)}}(x, y, \dots, y^{(v-1)})}$$

e quindi

$$y^{(v)} + \Psi(x, y, y', y'', \dots, y^{(v-1)}) = \frac{\Gamma'_{x,y,\dots,y^{(v-2)}}(x, y, \dots, y^{(v-1)}) + y^{(v)}\,\Gamma'_{y^{(v-2)}}(x, y, \dots, y^{(v-1)})}{\Gamma'_{y^{(v-2)}}(x, y, \dots, y^{(v-1)})}$$

$$= \frac{\Gamma'(x, y, y', \dots, y^{(v-1)})}{\Gamma'_{y^{(v-2)}}(x, y, \dots, y^{(v-1)})}$$

Basta allora porre $M = \dfrac{1}{\Gamma'_{y^{(v-2)}}(x, y, \dots, y^{(v-1)})}$ per trarre la (130).

[262]Cfr. Lagrange (1813), p. 83.

[263]Nella prima edizione delle *Leçons* Lagrange inserisce a questo punto un'intera lezione [cfr. Lagrange (1801), lez. XIV, pp. 136-162] dedicata alla determinazione delle condizioni necessarie e sufficienti che una funzione a più variabili deve rispettare per essere una derivata esatta. Tale lezione è invece omessa nella seconda edizione e il testo che la costituisce, peraltro largamente modificato, compare come prima parte della lezione XXI [cfr. Lagrange (1806a), pp. 401-23], in modo che la trattazione delle "equazioni di condizione" risulti successiva alla teoria generale delle equazioni derivate a più variabili indipendenti e possa fornire un'introduzione alla riformulazione del calcolo delle variazioni [cfr. il prossimo paragrafo III.6.$e.\varepsilon$. e la precedente nota (178)].

[264]Cfr. Lagrange (1797), pp.59-67 e (1813), pp. 81-91.

[265]Cfr. *ivi*, pp. 67-73 e pp. 92-100 (cap. IX).

[266]Cfr. Lagrange (1801), lez. XV-XVIII, rispettivamente pp. 162-181, 181-202, 202-219 e 219-42, e (1806a), lez. XIV-XVII, rispettivamente pp. 178-206, 207-37, 238-62 e 263-290. Nella prima di queste lezioni Lagrange fornisce la teoria generale delle soluzioni

riferirò qui alla ben più consistente e soddisfacente trattazione delle *Leçons*, limitandomi peraltro alla considerazione dei principi generali della teoria di tale genere di soluzioni.[267]

Sia in primo luogo $\Phi_1(x, y, y') = 0$ un'equazione derivata del primo ordine, la cui primitiva generale sia data dall'equazione $F(x, y) = 0$, la quale può essere a sua volta intesa come un'equazione $\varphi(x, y, a) = 0$ fra le due variabili x e y e la costante arbitraria a. Data quest'ultima equazione si sostituisca in essa la costante a con una variabile α dipendente da x, ottenendo così la nuova equazione $\varphi(x, y, \alpha) = 0$, la cui equazione prima avrà a sua volta la forma seguente:

$$(131) \qquad \varphi'(x, y, \alpha) = \varphi'_x(x, y, \alpha) + y' \varphi'_y(x, y, \alpha) + \alpha' \varphi'_\alpha(x, y, \alpha) = 0$$

E' chiaro che se la funzione α è scelta in modo tale che il prodotto $\alpha' \varphi'_\alpha(x, y, \alpha)$ sia costantemente nullo, per ogni x e y, allora il confronto fra la primitiva $\varphi(x, y, \alpha) = 0$ e la sua equazione prima $\varphi'(x, y, \alpha) = 0$ permette di eliminare α, e ottenere così la stessa equazione derivata $\Phi_1(x, y, y') = 0$ che sorge dalla composizione di $\varphi(x, y, a) = 0$ con la sua equazione prima $\varphi'(x, y, a) = 0$. L'equazione $\varphi(x, y, \alpha) = 0$ fornisce così una soluzione dell'equazione assegnata $\Phi_1(x, y, y') = 0$, la quale non è ovviamente compresa nella soluzione generale $F(x, y) = \varphi(x, y, a) = 0$ e dovrà quindi essere intesa come una *soluzione singolare*. Ora, è chiaro che essendo $\alpha = \alpha(x)$ una *variabile* che dipende da x, la condizione $\alpha' \varphi'_\alpha(x, y, \alpha) = 0$ può essere rispettata, per ogni x se e solo se la derivata della funzione $\varphi(x, y, \alpha)$ presa relativamente a α, $\varphi'_\alpha(x, y, \alpha)$ è essa stessa nulla per ogni x. Data la soluzione generale - o, come si esprime Lagrange, la *primitiva completa* dell'equazione assegnata - è così possibile determinare la *primitiva singolare* sostituendo in tale soluzione la costante arbitraria con una funzione indeterminata α di x, derivando rispetto a questa funzione e ponendo la derivata uguale a zero, ciò che rende possibile la determinazione di α in

singolari, nella seconda egli cerca un metodo atto a determinare tali soluzioni, il quale sia indipendente dalla considerazione dell'equazione primitiva, nella terza affronta il problema (indeterminato) della ricerca di un'equazione derivata che abbia una soluzione singolare data, e infine nella quarta presenta alcune considerazioni storiche, che lo conducono a qualificare la propria trattazione come la prima esposizione completa e generale di una teoria delle equazioni singolari. Un tale risultato costituisce senza dubbio uno dei grandi successi della teoria lagrangiana delle funzioni analitiche.

[267]Cfr. *ivi*, lez. XV e lez. XVI [cfr. la precedente nota (266)].

funzione di x e y. E' allora evidente che la primitiva singolare di una qualsiasi equazione derivata non conterrà alcuna costante arbitraria.[268]

Lo stesso ragionamento può venir ripetuto relativamente a un'equazione derivata di un ordine qualunque. Se ${}_{\nu-1}\psi(x, y, y', ..., y^{(\nu-1)}, a) = 0$ è *una* primitiva di un'equazione derivata assegnata di ordine ν e $\alpha = \alpha(x)$ è tale che ${}_{\nu-1}\psi'_{\alpha}(x, y, y', ..., y^{(\nu-1)}, \alpha) = 0$ per ogni x, allora componendo le due equazioni ${}_{\nu-1}\psi(x, y, y', ..., y^{(\nu-1)}, \alpha) = 0$ e ${}_{\nu-1}\psi'(x, y, y', ..., y^{(\nu-1)}, \alpha) = 0$ si potrà eliminare α e ottenere così (eventualmente dopo altre composizioni con equazioni di ordine inferiore) l'equazione assegnata. Data l'equazione ${}_{\nu-1}\psi(x, y, y', ..., y^{(\nu-1)}, a) = 0$ si tratterà allora di sostituire in essa la costante a con una funzione indeterminata di x, la quale potrà poi essere determinata in funzione delle variabili $x, y, y', ..., y^{(\nu-1)}$ grazie alla condizione ${}_{\nu-1}\psi'_{\alpha}(x, y, y', ..., y^{(\nu-1)}, \alpha) = 0$. Benché la primitiva singolare di ordine $\nu-1$ dell'equazione assegnata sia così ottenuta a partire dalla considerazione di *una* delle ν primitive complete di ordine ν-1, Lagrange è in grado di dimostrare *a priori* che essa è unica, ovvero che la procedure indicata, ripetuta su ognuna delle ν primitive complete di ordine ν-1, conduce sempre alla medesima equazione.[269]

Una caratteristica importante delle primitive singolari è che la proprietà di una data equazione $\phi_{\nu-1}(x, y, y', ..., y^{(\nu-1)})$ fra le variabili $x, y, y', ..., y^{(\nu-1)}$ di essere una primitiva singolare di un'equazione derivata di ordine ν, $\Phi_{\nu}(x, y, y', ..., y^{(\nu)}) = 0$, non si trasmette agli ordini inferiori: la primitiva singolare di $\phi_{\nu-1}(x, y, y', ..., y^{(\nu-1)})$ non è a sua volta una primitiva di ordine ν-2 dell'equazione assegnata $\Phi_{\nu}(x, y, y', ..., y^{(\nu)}) = 0$. Per render conto *a priori* di tale caratteristica delle primitive singolari, Lagrange considera il caso di un'equazione derivata assegnata del secondo ordine, $\Phi_2(x, y, y', y'') = 0$,[270] la quale deriva dall'eliminazione di due costanti a e b fra le equazioni $\varphi(x, y, a, b) = 0$, $\varphi'(x, y, a, b) = 0$ e $\varphi''(x, y, a, b) = 0$. Sostituendo tali costanti con due funzioni arbitrarie di x, $\alpha = \alpha(x)$ e $\beta = \beta(x)$ si avrà in primo luogo:

$$(132) \qquad \varphi'(x, y, \alpha, \beta) = \varphi'_{x|y}(x, y, \alpha, \beta) + \alpha' \varphi'_{\alpha}(x, y, \alpha, \beta) + \beta' \varphi'_{\beta}(x, y, \alpha, \beta)$$

dove il simbolo $\varphi'_{x|y}(x, y, \alpha, \beta)$ indica la derivata prima totale di $\varphi(x, y, a, b)$ per le sostituzioni di α e β a a e b, ovvero la derivata prima di $\varphi(x, y, \alpha, \beta)$

---

[268]E' infatti evidente che se la condizione $\varphi'_{\alpha}(x, y, \alpha) = 0$ fornisce un valore costante di α, allora la sostituzione di α a a non produrrà che un caso particolare della primitiva completa.

[269]Cfr. Lagrange (1801), pp. 168-69 e (1806a), pp. 187-90.

[270]Cfr. *ivi*, pp. 177-78 e pp. 200-02.

calcolata considerando α e β come delle costanti. Se $\alpha = \alpha(x)$ e $\beta = \beta(x)$ sono tali che le due derivate $\alpha' \varphi'_\alpha(x, y, \alpha, \beta)$ e $\beta' \varphi'_\beta(x, y, \alpha, \beta)$ sono contemporaneamente nulle per ogni x e y, allora $\varphi(x, y, \alpha, \beta)$ è la primitiva singolare dell'equazione derivata del primo ordine sorta dalla composizione di $\varphi(x, y, a, b) = 0$ e $\varphi'(x, y, a, b) = 0$. Passando tuttavia alla derivata seconda si avrà:

$$
\begin{aligned}
\varphi''(x, y, \alpha, \beta) = \varphi''_{x|y}(x, y, \alpha, \beta) &+ \alpha' \varphi''_{x,\alpha}(x, y, \alpha, \beta) + \beta' \varphi''_{x,\beta}(x, y, \alpha, \beta) \\
&+ \alpha' y' \varphi''_{y,\alpha}(x, y, \alpha, \beta) + \beta' y' \varphi''_{y,\beta}(x, y, \alpha, \beta) \\
&+ \alpha'' \varphi'_\alpha(x, y, \alpha, \beta) + \alpha' \varphi''_{\alpha,\alpha}(x, y, \alpha, \beta) \\
&+ \beta'' \varphi'_\beta(x, y, \alpha, \beta) + \beta' \varphi''_{\beta,\beta}(x, y, \alpha, \beta)
\end{aligned} \tag{133}
$$

da cui è chiaro che anche sotto la condizione $\alpha' \varphi'_\alpha(x, y, \alpha, \beta) = \beta' \varphi'_\beta(x, y, \alpha, \beta) = 0$ l'equazione seconda di $\varphi(x, y, \alpha, \beta) = 0$ non è tale che la sua composizione con questa stessa equazione e con la sua derivata prima possa condurre alla eliminazione di α e β.

Torniamo allora alla ricerca di una primitiva singolare di grado immediatamente inferiore a un'equazione data. Le considerazioni precedenti stabiliscono la condizione generale sotto la quale una data equazione derivata possiede una primitiva singolare. Esse non forniscono tuttavia alcun criterio *a priori* che permetta di stabilire se una tale primitiva possa venire determinata, né alcun suggerimento relativo al procedimento atto a determinarla, posta la conoscenza di una primitiva completa. Per giungere a un tale risultato Lagrange considera[271] una qualsiasi primitiva completa di ordine $\nu-1$, ${}_{\nu-1}\psi(x, y, y', ..., y^{(\nu-1)}), a) = 0$ di un'equazione derivata di ordine ν assegnata e assume che, sostituita in essa la costante a con una funzione indeterminata di x, $\alpha = \alpha(x)$, si abbia, risolvendo l'equazione risultante, $\alpha = \chi(x, y, y', ..., y^{(\nu-1)})$. Sostituendo tale valore nella stessa equazione da cui esso è stato tratto si otterrà allora un'equazione identica fra le variabili $x, y, y', ..., y^{(\nu-1)}$:

$$ {}_{\nu-1}\psi[x, y, y', ..., y^{(\nu-1)}, \chi(x, y, y', ..., y^{(\nu-1)})] = 0 \tag{134} $$

Essendo questa un'equazione identica, anche la sua derivata prima lo sarà e sarà quindi possibile uguagliare separatamente a zero tutte le derivate parziali che la compongono, ottenendo il seguente sistema a ν equazioni (dove ho

[271] Cfr. *ivi*, pp. 173-4 e pp. 195-97

omesso per semplicità l'indicazione delle variabili che compaiono nelle funzioni considerate):

$$(135)\qquad \begin{cases} {}_{\nu-1}\psi'_x + \chi'_x \cdot \left({}_{\nu-1}\psi'_\chi \right) = 0 \\ {}_{\nu-1}\psi'_y + \chi'_y \cdot \left({}_{\nu-1}\psi'_\chi \right) = 0 \\ \ldots \\ {}_{\nu-1}\psi'_{y^{(\nu-1)}} + \chi'_{y^{(\nu-1)}} \cdot \left({}_{\nu-1}\psi'_\chi \right) = 0 \end{cases}$$

Ora, essendo ${}_{\nu-1}\psi'_\chi = {}_{\nu-1}\psi'_\alpha\,(x, y, y', \ldots, y^{(\nu-1)}, \alpha)$, da qui è facile concludere che la condizione ${}_{\nu-1}\psi'_\alpha\,(x, y, y', \ldots, y^{(\nu-1)}, \alpha) = 0$ che mette capo alla primitiva singolare della equazione derivata assegnata è tale da rendere infinite tutte le derivate parziali di $\alpha = \chi(x, y, y', \ldots, y^{(\nu-1)})$. Quest'ultima è quindi una condizione sufficiente per l'esistenza di una primitiva singolare; per avere una condizione necessaria e sufficiente basta aggiungere poi che la funzione $\chi(x, y, y', \ldots, y^{(\nu-1)})$ non sia costante.

III. 6. *e. δ. Principi generali di una teoria delle funzioni derivate a due o più variabili*

Con la presentazione della propria teoria delle primitive singolari Lagrange conclude l'esposizione dei princìpi generali dell' "analisi inversa delle funzioni" e con essa quella dei principi generali della teoria stessa delle funzioni analitiche. Se a partire da questi è possibile dedurre abbastanza facilmente l'insieme dei risultati conosciuti che formano il corpo dell'analisi superiore settecentesca, ciò che sembra ai suoi occhi richiedere un'approfondimento particolare sono i principi che governano una non sempre ovvia estensione della teoria alle funzioni a due o più variabili. Per quanto nel corso della trattazione precedente Lagrange sia stato più volte costretto a anticipare in numerose occasioni dei risultati relativi alla derivazione di funzioni a più variabili, è infatti chiaro che egli non ha fin qui affrontato la questione in termini generali, né si è rivolto allo studio dei problemi specifici che sorgono da tale estensione e ha inteso generalmente una funzione a più variabili indipendenti come una funzione di più funzioni di una stessa variabile. Se quest'ultimo artificio permette in generale una riduzione della teoria delle funzioni a più variabili a quella delle funzioni a una sola variabile, esso non è per nulla necessario e conduce spesso a una riformulazione tutt'altro che agile di problemi che potrebbero essere più naturalmente affrontati limitandosi alla considerazione delle variabili in gioco. Ora, la riformulazione lagrangiana dell'analisi superiore come una teoria dei coefficienti dello sviluppo in serie intera di una funzione qualsiasi, rende naturale pensare la teoria delle funzioni a più variabili come una generalizzazione di quella delle funzioni a una variabile e permette quindi di eliminare quel fossato che si era di fatto stabilito fra il calcolo differenziale e il calcolo ai differenziali parziali. E' proprio un'ulteriore esigenza di unità dell'edificio dell'analisi che guida, ancora una volta, la trattazione lagrangiana e ne fornisce una giustificazione "filosofica".

> [...] le calcul des fonctions dérivées relatives à une seule variable - scrive Lagrange -, conduit naturellement à celui des fonctions dérivées relatives à différentes variables, lequel n'est [...] qu'une généralisation du premier, et dépend des mêmes principes.
> Si le inventeurs du calcul différentiel l'avaient regardé d'abord comme le calcul des fonctions dérivées, ils auroient été conduits naturellement et immédiatement au calcul des fonctions dérivées relatives à plusieurs variables; et il ne serait pas passé un demi-siècle entre la découverte du calcul différentiel proprement dit, et celle du calcul aux différences partielles, qui répond au calcul des fonctions dérivées relatives à différentes variables. A plus forte raison, au lieu d'envisager ce dernier comme un nouveau calcul, on l'aurait seulement regardé comme une nouvelle application ou plutôt comme une extension du calcul différentiel, et on auraït, des le commencement, embrassé sous un même point de vue et sous une même dénomination, les différentes branches du même calcul qui ont été longtemps séparées et comme isolées.[272]

Indicato l'obiettivo generale della trattazione di Lagrange, si tratta ora di ricostruirne gli argomenti principali.[273] Sia a questo scopo f(x, z) una funzione a due variabili indipendenti, nella quale si ponga innanzitutto $x+\xi$ in luogo di x. Sviluppando secondo la (14) si avrà allora, senza alcuna difficoltà,

$$(136)\qquad f(x+\xi, z) = f(x, z) + \xi\, f'_x(x, z) + \frac{\xi^2}{2!} f''_x(x, z) + \&c.$$

e sostituendo in questa serie $z+\zeta$ in luogo di z:

$$\begin{aligned}
f(x+\xi, z+\zeta) &= f(x, z+\zeta) + \xi\, f'_x(x, z+\zeta) + \frac{\xi^2}{2!} f''_x(x, z+\zeta) + \&c.\\
&= \left[f(x, z) + \zeta\, f'_z(x, z) + \frac{\zeta^2}{2!} f''_z(x, z) + \&c. \right]\\
(137)\qquad &\quad + \xi \left[f'_x(x, z) + \zeta\, f''_{x,z}(x, z) + \frac{\zeta^2}{2!} f'''_{x,z^2}(x, z) + \&c. \right]\\
&\quad + \frac{\xi^2}{2!} \left[f''_x(x, z) + \zeta\, f'''_{x^2,z}(x, z) + \frac{\zeta^2}{2!} f''''_{x^2,z^2}(x, z) + \&c. \right]\\
&\quad + \&c.
\end{aligned}$$

[272]Cfr. ivi, p. 264 e pp. 327-28.

[273]Mi limiterò qui a quelli che mi sono parsi come i principali risultati raggiunti da Lagrange nel corso della propria considerazione delle funzioni a più variabili.

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{h=0}^{\infty} \frac{\xi^k \zeta^h}{k!\, h!} f^{(k+h)}_{x^k, z^h}$$

Lo stesso procedimento può essere ripetuto invertendo le sostituzioni, ovvero ponendo $z+\zeta$ in luogo di z in $f(x, z)$ e $x+\xi$ nello sviluppo risultante. Non è difficile rendersi conto che il risultato sarà allora il seguente:

$$(138) \qquad f(x+\xi\ z+\zeta) = \sum_{h=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\zeta^h \xi^k}{h!\, k!} f^{(h+k)}_{z^h, x^k}$$

Confrontando la (137) e la (138) è allora possibile trarre, secondo il metodo dei coefficienti indeterminati:

$$(139) \qquad f^{(k+h)}_{x^k, z^h} = f^{(h+k)}_{z^h, x^k}$$

che esprime la proprietà formale fondamentale delle derivate di una funzione a due variabili.[274] La (137) (e la (138))[275] mostra(no) d'altra parte, secondo Lagrange, che una funzione a due variabile possiede "différentes sortes de fonctions dérivées relatives à chacune de ces variables", che egli indica rispettivamente come: *funzioni prima, seconda, &c. relativamente a x, funzioni prima, seconda, &c. relativamente a z*, e *funzioni primo-prima, secondo-prima, prima-seconda, &c.*.[276] Per quanto Lagrange abbia perfettamente chiara la distinzione fra derivate parziali e totali, il suo linguaggio sembra così nasconderla, né egli cerca di esplicitarla definendo le derivate prime parziali di $f(x, z)$ rispettivamente come i coefficienti di ξ e ζ nei precedenti sviluppi e quella totale come la somma dei coefficienti di ordine uno rispetto e entrambi gli incrementi.[277]

---

[274]Cfr. Lagrange (1797), pp. 93-4, (1813), pp. 126-27, (1801), pp. 267-68 e (1806a), pp. 329-31. Nella *Théorie* Lagrange indica le derivate rispetto a x e z rispettivamente con f' e $f_{,}$, mentre nelle *Leçons* egli sceglie le notazioni f'' e f'. E' chiaro che ciò conduce a indicare le due derivate che occorrono nella (139) con la medesima notazione e obbliga quindi Lagrange a esprimere verbalmente la proprietà in questione. Essendo d'altra parte impossibile distinguere, se non per l'ordine delle moltiplicazioni, fra le espressioni dei due sviluppi indicati nella (137) e nella (138), egli non può indicare tale proprietà che affermando che, quale che sia l'ordine delle sostituzioni, l'operazione di derivazione conduce a produrre lo stesso sviluppo per la funzione $f(x+\xi, z+\zeta)$.

[275]Cfr. la precedente nota (274).

[276]Cfr. Lagrange (1797), pp. 1797,-98 e (1813), pp. 132-33. Nelle *Leçons* Lagrange evita ogni denominazione.

[277]Alla luce delle precedenti considerazioni, è comunque banale il passaggio a funzioni a più di due variabili, al cui sviluppo in serie intera Lagrange dedica comunque un paragrafo nella seconda edizione della *Théorie* [cfr. Lagrange (1813), par. 76, pp. 129-32]. Ugualmente banale è riformulare il teorema del resto relativamente allo sviluppo (137) [cfr. Lagrange (1813), parte I., cap. XIII, pp. 134-9].

Nelle *Leçons*[278] Lagrange mostra come la (137) possa essere ottenuta anche per una strada diversa, intendendo x e z come due funzioni *opportune* di una stessa variabile t, rispettivamente $X(t)$ e $\Psi(t)$, e riducendo quindi $f(x, z)$ a una funzione $\Xi(t)$ della sola variabile t. Ponendo $t+\tau$ in luogo di t si avrà allora:

$$(140)\quad \begin{aligned} \Xi(t+\tau) &= f\Big(X(t+\tau), \Psi(t,\tau)\Big) = f\Big(X(t) + \tau X'(t) + \&c., \Psi(t) + \tau \Psi'(t) + \&c.\Big) \\ &= \Xi(t) + \tau\, \Xi'(t) + \frac{\tau^2}{2!} \Xi''(t) + \&c. \end{aligned}$$

Calcolando ora le derivate successive di Ξ relativamente a t secondo la (70) si avrà

$$(141)\quad \begin{aligned} \Xi'(t) &= f'_x(x, z)\, X'(t) + f'_z(x, z)\, \Psi'(t) \\ \Xi''(t) &= \Big[f'_x(x, z)\Big]'_t X'(t) + f'_x(x, z)\, X''(t) + \Big[f'_z(x, z)\Big]'_t \Psi'(t) + f'_z(x, z)\, \Psi''(t) \\ &= f''_x(x, z)\, [X'(t)]^2 + 2 f''_{x,z}(x, z)\, X'(t)\, \Psi'(t) + f'_x(x, z)\, X''(t) + \\ &\qquad + f''_z(x, z)\, [\Psi'(t)]^2 + f'_z(x, z)\, \Psi''(t) \\ &\&c. \end{aligned}$$

Ritornando alla (137) è tuttavia chiaro che essa deve la sua forma al fatto che gli incrementi ξ e ζ sono intesi come indipendenti dalle variabili x e z. Per trasformare quindi la (140) e la (141) nella (137) occorre assumere che gli incrementi $\tau X'(t) + \frac{\tau^2}{2!} X''(t) + \&c.$ e $\tau \Psi'(t) + \frac{\tau^2}{2!} \Psi''(t) + \&c.$ siano rispettivamente indipendenti da $X(t)$ e $\Psi(t)$ e quindi da t. Per questo occorre assumere evidentemente che $\tau X'(t)$ e $\tau \Psi'(t)$ siano costanti, ciò che rende le derivate $X''(t)$, $X'''(t)$, &c. e $\Psi''(t)$, $\Psi'''(t)$, &c. uguali a zero, per ogni t. Ponendo allora $\tau X'(t) = \xi$ e $\tau \Psi'(t) = \zeta$ e annullando tutte le derivate di ordine superiore di $X(t)$ e $\Psi(t)$ è facile constatare che le (141) assumono la forma seguente

$$(142)\quad \begin{aligned} \Xi'(t) &= f'_x(x, z)\, \frac{\xi}{\tau} + f'_y(x, z)\, \frac{\zeta}{\tau} \\ \Xi''(t) &= f''_x(x, z)\, \frac{\xi^2}{\tau^2} + 2 f''_{x,z}(x, z)\, \frac{\xi\zeta}{\tau^2} + f''_z(x, z)\, \frac{\zeta^2}{\tau^2} \end{aligned}$$

[278]Cfr. Lagrange (1801), pp. 269-73 e (1806a), pp. 334-38.

e quindi, sostituendo nella (140):

$$
\begin{aligned}
&f\Big(X(t+\tau), \Psi(t,\tau)\Big) = f(x+\xi, z+\zeta) = \\
(143)\qquad &= f(x, z) + \Big[f'_x(x, z)\,\xi + f'_z(x, z)\,\zeta\Big] + \\
&+ \Big[f''_x(x, z)\,\xi^2 + 2\,f''_{x,z}(x, z)\,\xi\,\zeta + f''_z(x, z)\,\zeta^2\Big] \\
&+ \&c.
\end{aligned}
$$

che corrisponde alla (137) e esibisce direttamente le derivate sia parziali che totali della funzione assegnata.

Tornando ora alle posizioni $\tau\,X'(t) = \xi$ e $\tau\,\Psi'(t) = \omega$, si ha, passando alle primitive, $X(t) = x = \dfrac{\xi t}{\tau} + \dfrac{C_1}{\tau}$ e $\Psi(t) = z = \dfrac{\zeta t}{\tau} + \dfrac{C_2}{\tau} = \dfrac{\zeta x}{\xi} + \dfrac{\zeta\,C_1}{\tau\xi} + \dfrac{C_2}{\tau} = ax + b$ (dove a e b sono delle costanti arbitrarie). Il procedimento che conduce alla (143) mostra così che, dal punto di vista della teoria delle funzioni derivate, una funzione $f(x, z)$ a due variabili indipendenti è formalmente equiparabile a una funzione a due variabili delle quali una sia una funzione *lineare* qualsiasi dell'altra.[279] Una tale conclusione - che individua la ragione profonda che permette una riduzione della teoria delle funzioni a più variabili alla teoria delle funzioni a una sola variabile - avrebbe potuto d'altra parte essere tratta anche intuitivamente, osservando che due variabili indipendenti, assunte entrambe come variabili principali, non esprimono relativamente a **R** (o a **C**) che due variazioni uniformi l'una relativamente all'altra, a cui è eventualmente assegnato un diverso punto di partenza, arbitrariamente stabilito. Una funzione a due variabili $f[X(t), \Psi(t)]$ si comporta quindi come una funzione a una sola variabile t se e solo se l'identità $f[X(t), \Psi(t)] = \Xi(t)$ esprime una relazione algoritmica, mentre si comporta come una funzione a due variabili indipendenti x e z solo se tale identità *non* esprime alcuna relazione algoritmica. Ciò rende chiaro che la teoria delle funzioni a due o più variabili non può essere costruita come un caso particolare della teoria delle funzioni a una sola variabile - ovvero non può essere ridotta a essa - che a condizione di intendere una "funzione", non solo come una forma analitica (eventualmente indeterminata), ma anche (e principalmente) come una quantità dipendente da un'altra quantità secondo una legge nota o ignota e tale da *non poter essere* determinata. Proprio tale intrinseca indeterminabilità della legge di relazione fra x, z e t è infatti ciò che distingue strutturalmente il caso di una funzione a due variabili, anche qualora questa sia *formalmente* ridotta a una funzione a una sola variabile, dal caso di una funzione a due variabili. Ciò detto, non si può non osservare come il procedimento di Lagrange mostri la possibilità di un'ulteriore generalizzazione della

[279] Lagrange lascia una tale conclusione sottintesa.

nozione di derivata, fondata sulla scelta di diverse sostituzioni, le quali rendano le serie $\tau X'(t) + \frac{\tau^2}{2!} X''(t) + \&c.$ e $\tau \Psi'(t) + \frac{\tau^2}{2!} \Psi''(t) + \&c.$ dipendenti da t, pur mantenendo l'indipendenza di τ da t. Questi non si avventura tuttavia in tale direzione, limitandosi a notare come "negli accrescimenti di x e z" esibiti dalla (140) sia possibile "considerare" quanti si voglia termini di queste serie (ponendo semplicemente uguali a zero le derivate di $X(t)$ e $\Psi(t)$ degli ordini successivi all'ordine dell'ultimo termine "considerato"), ottenendo così diverse relazioni algoritmiche rispetto a quelle esibite dalla (137).[280]

III. 6. *e*. ε. *Derivate esatte e corrispondenti equazioni di condizione*

Presentati i principi generali di una teoria delle funzioni derivate a due o più variabili, si tratta di studiare le caratteristiche specifiche di simili funzioni, individuando quei "comportamenti" di tali funzioni che non trovano alcun analogo nel caso di funzioni a una sola variabile. Fra tali caratteristiche, una delle più importanti è certamente legata al fatto che una funzione a più variabili può non corrispondere alla derivata (totale) esatta di nessun'altra funzione delle stesse variabili. In effetti[281] perché una funzione $V(x, z)$ possa essere una derivata (totale) esatta di una funzione $U(x, z)$, essa deve potersi porre sotto la forma di una somma $U'_x(x, z) + U'_z(x, z)$ di due funzioni di x e z che potremmo indicare genericamente con $\upsilon(x, z)$ e $u(x, z)$. Ora se $U'_x(x, z) = \upsilon(x, z)$ e $U'_z(x, z) = u(x, z)$ si avrà anche $U''_{x,z}(x, z) = \upsilon'_z(x, z) = u'_x(x, z)$. Una funzione a due variabili $V(x, y)$ è quindi una derivata (totale) esatta di una certa funzione delle stesse variabili solo a condizione che essa sia riducibile alla somma di due funzioni, $\upsilon(x, z)$ e $u(x, z)$, di queste stesse variabili tali che: $\upsilon'_z(x, z) = u'_x(x, z)$. La stessa conclusione può facilmente essere estesa a funzioni di tre o più variabili. Un problema centrale per la teoria delle funzioni derivate a due o più variabili - il quale è peraltro centrale anche nella teoria delle equazioni derivate ordinarie - è allora costituito dalla ricerca delle condizioni generali che permettono una tale riducibilità e fanno quindi di una funzione a due o più variabili la derivata esatta di un'altra funzione delle stesse variabili. La soluzione di Lagrange può essere presentata - limitandoci per semplicità al caso di funzioni a due variabili - nei termini che seguono.[282]

280Cfr. Lagrange (1801), p. 271 e (1806a), p. 335-36.

281Cfr. Lagrange (1797), p. 95 e (1813), p. 129.

282Mi riferisco qui alla lezione XVI di Lagrange (1801) [pp. 137-62] e alla prima parte della lezione XXI di Lagrange (1806a) [pp. 401-23]. Cfr. la precedente nota (263).

Si consideri in primo luogo y come una funzione di x e sia data un'equazione derivata di ordine ν, $\Phi_\nu(x, y, y', ..., y^{(\nu)})$, la quale sia la derivata esatta di una funzione derivata di ordine ν-1, $\Theta_{\nu-1}(x, y, y', ..., y^{(\nu-1)})$. Sia ora ω una funzione indeterminata di x e si ponga in entrambe le funzioni $y+\omega$ in luogo di y. Sviluppando in serie si avrà allora:

$$
(144) \qquad \begin{aligned} \overset{[0]}{\Phi_\nu} + \overset{[1]}{\Phi_\nu} + \overset{[2]}{\Phi_\nu} + \&c. &= \left[\overset{[0]}{\Theta_{\nu-1}} + \overset{[1]}{\Theta_{\nu-1}} + \overset{[2]}{\Theta_{\nu-1}} + \&c. \right]' \\ &= \left[\overset{[0]}{\Theta_{\nu-1}} \right]' + \left[\overset{[1]}{\Theta_{\nu-1}} \right]' + \left[\overset{[2]}{\Theta_{\nu-1}} \right]' + \&c. \end{aligned}
$$

dove $\overset{[\mu]}{\Phi_\nu}$ e $\overset{[\mu]}{\Theta_{\nu-1}}$ (μ = 0, 1, 2, ...) indicano rispettivamente i termini degli sviluppi di $\Phi_\nu(x, y+\omega, y'+\omega', ...,y^{(\nu)}+\omega^{(\nu)})$ e $\Theta_{\nu-1}(x, y+\omega, y'+\omega', ...y^{(\nu-1)}+\omega^{(\nu-1)})$ in cui la somma degli esponenti della "quantità" $\omega, \omega', ..., \omega^{(\nu)}$ è uguale a μ. Poiché è evidente che passando alla funzione derivata di ognuno dei termini $\overset{[\mu]}{\Theta_{\nu-1}}$ non è in generale possibile (a meno che la funzione $\omega = \omega(x)$ non sia scelta opportunamente) modificare la somma degli esponenti delle quantità $\omega, \omega', ..., \omega^{(\nu-1)}$ (alle quali si aggiungerà la quantità $\omega^{(\nu)}$) che compiono in tale termine, è evidente che perché la (144) sia rispettata per ogni scelta di $\omega = \omega(x)$ occorre che si abbia, per ogni μ, $\overset{[\mu]}{\Phi_\nu} = \left[\overset{[\mu]}{\Theta_{\nu-1}} \right]'$. Per μ = 0 tale condizione è verificata per ipotesi; si tratta quindi di studiare le conseguenze che essa comporta per μ = 1, 2, &c.. Ponendo in primo luogo μ = 1, si avrà:

$$
(145) \qquad \begin{aligned} \overset{[1]}{\Phi_\nu} &= \left[\left(\Theta_{\nu-1}\right)'_{y} \omega + \left(\Theta_{\nu-1}\right)'_{y'} \omega' + ... + \left(\Theta_{\nu-1}\right)'_{y^{(\nu-1)}} \omega^{(\nu-1)} \right]' \\ &= A_0\, \omega + A_1\, \omega' + ... + A_\nu\, \overset{\nu}{\omega} \end{aligned}
$$

dove A_0, A_1,... A_ν. sono dei coefficienti indipendenti da ω che possono facilmente venir calcolati. Osservando ora che, per ogni σ (σ = 1, 2,... ν), vale la relazione

$$
(146) \qquad A_\sigma\, \omega^{(\sigma)} = \left[A_\sigma\, \omega^{(\sigma-1)} \right]' - \left[A_\sigma \right]' \omega^{(\sigma-1)}
$$

sarà facile, reiterando le sostituzioni, porre la (145) sotto la forma seguente:

$$\Phi_\nu^{[1]} = \left[A_0 - \left(A_1\right)' + \ldots + (-)^\nu \left(A_n\right)^{(\nu)}\right]\omega + \tag{147}$$
$$+ \left[B_0\,\omega\right]' + \left[B_1\,\omega'\right]' + \ldots + \left[B_{\nu-1}\,\omega^{(\nu-1)}\right]'$$

dove B_0, B_1, ..., $B_{\nu-1}$ sono anche in questo caso dei coefficienti indipendenti da ω che possono facilmente venir calcolati. Perché il primo membro di tale identità sia una derivata esatta, come vuole la condizione $\Phi_\nu^{[\mu]} = \left[\Theta_{\nu-1}^{[\mu]}\right]'$, occorre allora che il primo termine del secondo membro sia a sua volta una derivata esatta, ciò che non può essere vero che grazie a una opportuna scelta di $\omega = \omega(x)$. Perché la (147) possa aver luogo per ogni scelta di ω occorre quindi che la funzione $\Theta_{\nu-1}$ sia tale che:

$$A_0 - \left(A_1\right)' + \ldots + (-)^\nu \left(A_n\right)^{(\nu)} = 0 \tag{148}$$

Dalla (145) è tuttavia facile trarre:

$$A_0 = \left(\Phi_\nu\right)_y \; ; \; A_1 = \left(\Phi_\nu\right)_{y'} \; ; \ldots ; \; A_\nu = \left(\Phi_\nu\right)_{y^{(\nu)}} \tag{149}$$

L'equazione

$$\left(\Phi_\nu\right)_y - \left(\left(\Phi_\nu\right)_{y'}\right)' + \ldots + (-)^\nu \left(\left(\Phi_\nu\right)_{y^{(\nu)}}\right)^{(\nu)} = 0 \tag{150}$$

fornirà quindi una condizione necessaria perché la funzione assegnata, $\Phi_\nu(x, y, y', \ldots, y^{(\nu)})$ sia una derivata esatta. Ora, se Φ_ν è tale da soddisfare la (150), anche la (148) avrà luogo e non sarà quindi difficile calcolare la primitiva della (147), la quale fornirà il valore di $\Theta_{\nu-1}^{[1]}$. Dato tale valore non sarà tuttavia difficile, applicando le regole di derivazione per funzioni a più variabili indipendenti, calcolare i valori di tutte le funzioni $\Theta_{\nu-1}^{[\mu]}$ ($\mu = 2, 3, \ldots$) che compaiono nella (144). Ciò permetterà di determinare lo sviluppo della funzione $\Theta_{\nu-1}(x, y+\omega, y'+\omega', \ldots, y^{(\nu-1)}+\omega^{(\nu-1)})$ e quindi quello della differenza $\Theta_{\nu-1}(x, y+\omega, y'+\omega', \ldots, y^{(\nu-1)}+\omega^{(\nu-1)}) - \Theta_{\nu-1}(x, y, y', \ldots, y^{(\nu-1)})$, il quale fornirà la primitiva della funzione $\Phi_\nu(x, y+\omega, y'+\omega', \ldots, y^{(\nu)}+\omega^{(\nu)}) - \Phi_\nu(x, y, y', \ldots, y^{(\nu)})$. Essendo ω una funzione arbitraria di x, nulla impedirà di porre $\omega = -y$, ciò che ridurrà quest'ultima funzione alla funzione $\Phi_v(x) - \Phi_v(x, y, y', ..., y^{(v)})$, di cui sarà facile determinare la primitiva, per mezzo di una semplice sostituzione. Ora, essendo $\Phi_v(x)$ una funzione a una sola variabile, essa è certamente una derivata esatta e quindi la conclusione precedente permette di asserire che anche $\Phi_v(x, y, y', ..., y^{(v)})$ è una derivata esatta. La condizione indicata dalla (150) non è quindi solo *necessaria*, ma anche *sufficiente*. Tale equazione potrà quindi essere indicata come "*l'equazione di condizione* tramite la quale è possibile riconoscere che $\Phi_v(x, y, y', ..., y^{(v)})$ è una derivata esatta".

Ora, ripercorrendo il ragionamento che ha condotto a una tale conclusione non sarà difficile rendersi conto come esso possa venir applicato anche a una funzione $\Phi_v(y, y', ..., y^{(v)})$ delle sole variabili $y, y', ..., y^{(v)}$, posto che y sia intesa come una funzione di una data variabile x. Da ciò è facile concludere che se x e z sono due funzioni di una stessa variabile t, per quanto indipendenti fra loro, il precedente ragionamento può essere ripetuto tanto relativamente a x, che relativamente a z conducendo quindi alla conclusione che la funzione $\Phi_v(x, x', ..., x^{(v)}, z, z', ..., z^{(v)})$ è una derivata esatta se e solo se le due equazioni

$$\text{(151)}\quad \begin{aligned} &\text{i)}\quad \left(\Phi_v\right)'_x - \left(\left(\Phi_v\right)'_{x'}\right)' + \ldots + (-)^v\left(\left(\Phi_v\right)'_{x^{(v)}}\right)^{(v)} = 0 \\ &\text{ii)}\quad \left(\Phi_v\right)'_z - \left(\left(\Phi_v\right)'_{z'}\right)' + \ldots + (-)^v\left(\left(\Phi_v\right)'_{z^{(v)}}\right)^{(v)} = 0 \end{aligned}$$

sono contemporaneamente verificate.

Lagrange non solo ha ritrovato in tal modo le note condizioni sufficienti di integrabilità di Euler e Condorcet,[283] ma egli ha mostrato che tali condizioni sono anche sufficienti.[284] Come già era avvenuto nel caso delle soluzioni singolari, la reinterpretazione di un frammento dell'analisi superiore nel quadro detta teoria delle funzioni derivate ha quindi permesso di introdurre un chiarimento decisivo, anche rispetto all'acquisizione di nuove conoscenze matematiche.

III. 6. e. ζ. *Teorie delle equazioni alle derivate parziali e "primitive generali"*

Così come una qualsiasi funzione (una classe di funzioni) a una sola variabile può essere esibita implicitamente per mezzo di un'equazione in due

[283]Cfr. Euler (1744), pp. 71-4, e Condorcet (1765), sez. I, pp. 4-35.

[284]Cfr. Lagrange (1806a), p. 409.

variabili $F(x, y) = 0$, una funzione (una classe di funzioni) a due o più variabili indipendenti può essere esibita implicitamente per mezzo di un'equazione in tre o più variabili $F(x, z, y,$ &c.$) = 0$. Consideriamo il caso di una equazione in tre variabili $F(x, z, y) = 0$, in cui y sia intesa come una funzione di x e z, intese a loro volta come variabili indipendenti fra loro.[285] Sostituendo $x+\xi$ e $z+\zeta$ in luogo di x e z si avrà ancora $F(x+\xi, z+\zeta, y) = 0$ e quindi, sviluppando secondo la (137),

$$
\begin{aligned}
0 = F(x+\xi, z+\zeta, y_{x+\xi, z+\zeta}) &= F(x, z, y) + F'_{z^*}(x, z, y)\,\zeta + F''_{z^*}(x, z, y)\,\frac{\zeta^2}{2!} + \&c. \\
&+ F'_{x^*}(x, z, y)\,\xi + F''_{x^*,z^*}(x, z, y)\,\xi\zeta + F'''_{x^*,z^*,z^*}(x, z, y)\,\frac{\xi\zeta^2}{2!} + \&c. \\
&+ F''_{x^*}(x, z, y)\,\frac{\xi^2}{2!} + F'''_{x^*,x^*,z^*}(x, z, y)\,\frac{\zeta\xi^2}{2!} + \&c. \\
&+ \&c.
\end{aligned}
\tag{152}
$$

dove l'asterisco indica che le corrispondenti derivate rispetto a x e z sono prese tenendo conto del fatto che y è una funzione di x e z e sono quindi delle derivate totali. Sfruttando il metodo dei coefficienti indeterminati si avrà allora, annullando separatamente i coefficienti delle prime potenze di ξ e ζ:

$$
\begin{aligned}
&\text{i) } F'_{z^*}(x, z, y) = F'_z(x, z, y) + y'_z\, F'_y(x, z, y) = 0 \\
&\text{ii) } F'_{x^*}(x, z, y) = F'_x(x, z, y) + y'_x\, F'_y(x, z, y) = 0
\end{aligned}
\tag{153}
$$

che saranno quindi le *due* equazioni prime di $F(x, z, y) = 0$. Alla stessa conclusione è possibile giungere, d'altra parte, non richiamandosi che ai principi della teoria delle funzioni derivate a una sola variabile, intendendo in $F(x, z, y) = 0$, y come una funzione di x e z e z come una funzione di x. In tal caso si avrà infatti direttamente, secondo l'algoritmo delle funzioni derivate,

$$
F'(x, z, y) = F'_x(x, y, z) + z'\, F'_z(x, z, y) + y'\, F'_y(x, z, y) = 0 \tag{154}
$$

e quindi, essendo $y' = y'_x + z'\, y'_z$:

$$
F'(x, z, y) = F'_x(x, y, z) + y'_x\, F'_y(x, z, y) + z'\left[F'_z(x, z, y) + y'_z\, F'_y(x, z, y)\right] = 0 \tag{155}
$$

[285]Cfr. Lagrange (1797), pp. 96-9, (1813), pp. 140-42, (1801), p. 284-86 e (1806a), pp. 353-55.

da cui, applicando il metodo dei coefficienti indeterminati rispetto alle potenze dell'indeterminata z', derivano facilmente le (153).

Il secondo procedimento di Lagrange merita un rapido commento. Se le equazioni a due variabili $F(x, y) = 0$ e $F(x, z, y) = 0$ esibiscono implicitamente due forme analitiche che costituiscono rispettivamente le funzioni $y = y(x)$ e $y = y(x, z)$, la seconda di tali funzioni *non può* esibire contemporaneamente, né esplicitamente né implicitamente, una forma analitica che costituisca la funzione $z = z(x)$. Quindi: o tale forma è data, ma allora la considerazione di funzioni a *tre* variabili è un puro e inessenziale artificio o essa è non solo indeterminata, ma in quanto tale indeterminabile. Ancora una volta la nozione di funzione come forma si mostra quindi troppo ristretta a render conto degli effettivi sviluppi dell'analisi e lo stesso Lagrange è costretto a sostituirla surrettiziamente con la nozione di funzione in quanto quantità dipendente da un'altra quantità, secondo un legame determinabile o non determinabile.

Ciò detto, vediamo come questi costruisce a partire dalle (153) la propria teoria delle equazioni alle derivate parziali.[286] Se l'equazione di partenza $F(x, z, y) = 0$ contiene due costanti arbitrarie a e b, tali costanti si ritroveranno in generale anche nelle (153) e esse potranno quindi venire eliminate confrontando l'equazione assegnata con le sue equazioni prime. Tale confronto darà ovviamente luogo a un'equazione derivata del primo ordine alle derivate parziali, $\Phi_1(x, z, y, y_x', y_z') = 0$ che conterrà due costanti in meno rispetto alla sua primitiva, primitiva che potrà essere scritta sotto la forma generica $\varphi(x, z, y, a, b) = 0$, che verrà d'ora in poi impiegata per indicare l'*equazione primitiva completa* di una data equazione del primo ordine alle derivate parziali.

Data ora l'equazione $\varphi(x, z, y, a, b) = 0$ si sostituiscano in essa le costanti a e b con due funzioni indeterminate $\alpha = \alpha(x, z)$ e $\beta = \beta(x, z)$ di x e z. Passando alle equazioni prime si avrà allora, secondo le (153):

$$
(156) \qquad
\begin{aligned}
&\text{i)}\ \varphi'_x(\Omega) + y'_x\,\varphi'_y(\Omega) + \alpha'_x\,\varphi'_\alpha(\Omega) + \beta'_x\,\varphi'_\beta(\Omega) = 0\\
&\text{ii)}\ \varphi'_z(\Omega) + y'_z\,\varphi'_y(\Omega) + \alpha'_z\,\varphi'_\alpha(\Omega) + \beta'_z\,\varphi'_\beta(\Omega) = 0
\end{aligned}
$$

dove Ω indica per semplicità la sequenza di variabili x, z, y, α, β. Ora è chiaro che se α e β sono tali che $\varphi'_\alpha(\Omega) = \varphi'_\beta(\Omega) = 0$, allora la composizione delle (156) con l'equazione assegnata permetterà di eliminare le due costanti α e β e di ottenere quindi un'equazione del primo ordine alle derivate parziali, $\Phi_1(x, z, y, y_x', y_z') = 0$, di cui l'equazione $\varphi(x, z, y, \alpha, \beta) = 0$ sarà la *primitiva singolare*.

---

[286]Cfr. Lagrange (1797), pp. 99-100, (1813), pp. 142-44, (1801), pp. 291-98 e (1806a), pp. 362-71. Mi limiterò per semplicità al caso di equazioni a tre variabili, le quali esibiscono implicitamente una funzione a due variabili indipendenti.

Quest'ultima equazione non è tuttavia la sola primitiva dell'equazione assegnata $\Phi_1(x, z, y, y_x', y_z') = 0$, in cui non compaia alcuna costante arbitraria. Per rendersi conto di questo si consideri ancora la primitiva completa $\varphi(x, z, y, a, b) = 0$ e si sostituiscano le costanti arbitrarie a e b con due funzioni indeterminate di x e z, a e b, la seconda delle quali sia considerata a sua volta come una funzione indeterminata della prima, $b = g(a)$. Passando alle equazioni prime si avrà allora, secondo le (153):

$$(157)\quad \begin{aligned} &\text{i) } \varphi'_x(\Omega^\circ) + y'_x\,\varphi'_y(\Omega^\circ) + a'_x\left[\varphi'_a(\Omega^\circ) + g'_a(a)\,\varphi'_{g(a)}(\Omega^\circ)\right] = 0 \\ &\text{ii) } \varphi'_z(\Omega^\circ) + y'_z\,\varphi'_y(\Omega^\circ) + a'_z\left[\varphi'_a(\Omega^\circ) + g'_a(a)\,\varphi'_{g(a)}(\Omega^\circ)\right] = 0 \end{aligned}$$

dove Ω° indica ora la sequenza di variabili $x, z, y, a, b = x, z, y, a, g(a)$. E' così ancora perfettamente chiaro che se a e $b = g(a)$ sono scelte in modo che valga la condizione

$$(158)\qquad \varphi'_a(\Omega^\circ) + g'_a(a)\,\varphi'_{g(a)}(\Omega^\circ) = 0$$

allora, combinando le (157) con l'equazione data, $\varphi(x, z, y, a, b) = 0$, si perviene a un'equazione del primo ordine alle derivate parziali nella quale non compaiono né a né b. Se $\Phi_1(x, z, y, y_x', y_z') = 0$ è tale equazione, allora $\varphi(x, z, y, a, b) = 0$ dovrà essere intesa come una sua primitiva, che Lagrange qualifica come *equazione primitiva generale*.[287] Il confronto fra la (158) e la condizione che mette capo alla primitiva singolare rende esplicita una differenza profonda fra quest'ultima equazione e la stessa primitiva generale.[288] Infatti mentre la condizione $\varphi'_\alpha(\Omega) = \varphi'_\beta(\Omega) = 0$ permette di determinare α e β nei termini delle variabili x, z, y, in modo che $\varphi(x, z, y, \alpha, \beta)$ non è altro che una funzione di x, z, y completamente determinata e priva di variabili arbitrarie, la (158) non permette di determinare entrambe le variabili a e b in funzione di x, z, y e dà quindi luogo a una primitiva $\varphi^*(x, z, y, g^*(v)) = 0$, in cui compare una funzione g^* intrinsecamente arbitraria di una certa funzione v delle variabili x, z e y.

Un semplice esempio chiarirà la situazione. Data l'equazione in tre variabili $y - ax - bz - c = 0$, se ne calcolino secondo la (153) le equazioni prime, $y_z' - b = 0$ e $y_x' - a = 0$ e si provveda all'eliminazione delle costanti a e b, ciò

[287] Non si confonda l' "equazione primitiva generale" di Lagrange con la nostra "soluzione generale", la quale corrisponde piuttosto, nel linguaggio di questi, alla "equazione primitiva completa".

[288] Per ciò che riguarda le relazioni fra le primitive completa, singolare e generale di un'equazione data, Lagrange è il primo a dimostrare in termini del tutto generali che nessuna di tali primitive può contenere una delle restanti. Le classi di soluzioni cui esse mettono capo sono quindi disgiunte [cfr. Lagrange (1801), p. 299-306 e (1806a), pp. 374-83.

che produrrà l'equazione del primo ordine alle derivate parziali $y - y_x' x - y_z' z - c = 0$, di cui l'equazione data sarà così la primitiva completa. Ponendo in quest'ultima equazione α e β in luogo di a e b e assumendo che la nuova equazione sia tale da rispettare la condizione $\varphi'_\alpha(\Omega) = \varphi'_\beta(\Omega) = 0$ si avrà, d'altra parte, $-x - y = 0$ e quindi l'equazione $y - c = 0$ sarà la primitiva singolare di $y - y_x' x - y_z' z - c = 0$. Sostituendo invece le costanti a e b con le nuove variabili a e $b = g(a)$ si otterrà, in base alla (158), $x + g'_a(a)z = 0$ e quindi $g'_a(a) = -\frac{x}{z}$ e $a = g'^{-1}\left(-\frac{x}{z}\right)$ e $b = g\left[g'^{-1}\left(-\frac{x}{z}\right)\right]$. La primitiva generale di $y - y_x' x - y_z' z - c = 0$ sarà così: $y - c - z\left(g'^{-1}\left(-\frac{x}{z}\right)\frac{x}{z} + g\left[g'^{-1}\left(-\frac{x}{z}\right)\right]\right) = y - c - z\, g^*\left(\frac{x}{z}\right) = 0$ dove $g^*\left(\frac{x}{z}\right)$ è una funzione completamente arbitraria di $v = x/z$.[289]

Un tale esempio rende evidente che l'arbitrarietà della funzione g^* non risiede semplicemente nel fatto che il simbolo $g^*(v)$ possa essere sostituito nell'equazione primitiva generale, $\varphi^*(x, z, y, g^*(v)) = 0$ da una qualsiasi forma analitica in cui compaia la funzione v delle variabili x, z, y: essa non esprime tanto l'arbitrarietà della forma, ma l'assenza intrinseca di una forma analitica. Data v, la "funzione" $g^*(v)$ non si comporta infatti in tale equazione che come un termine implicitamente caratterizzato dall'algebra dell'operatore di derivazione e sembra ancora una volta rinviare a una quantità dipendente da v secondo una legge intrinsecamente non determinabile. Per poter asserire quindi che la nozione lagrangiana di funzione mantenga, in questo come in molti altri casi, la propria capacità descrittiva di certi fenomeni matematici, occorre assumere che l'algebra dell'operatore individuato dal *calcolo*, non si riferisca che a forme analitiche semplici: una limitazione che la stessa ricerca matematica aveva già mostrato inaccettabile.[290]

III. 6. *e.* η. *Una nuova dimostrazione della formula di sviluppo per una funzione qualsiasi della radice dell'equazione generica* $y = x + z\phi(y)$

L'ultimo risultato raggiunto da Lagrange nel corso della sua riedificazione dell'analisi superiore al quale volgerò la mia attenzione è costituito da una nuova dimostrazione della formula di sviluppo, che lo stesso Lagrange aveva ottenuto per primo nel 1768 e che può essere impiegata in generale

---

[289]Data infatti l'equazione $y - c - z\, g^*\left(\frac{x}{z}\right) = 0$ si avrà, passando alle funzione prime secondo le (153) (e ponendo $x' - z' = 1$): $-g^*\left(\frac{x}{z}\right) + g^{*\prime}\left(\frac{x}{z}\right)\frac{x}{z} + y_z' = 0$ e $-g^{*\prime}\left(\frac{x}{z}\right) + y_x' = 0$. Non è difficile rendersi conto che, quale che sia la funzione g^*, queste tre equazioni combinate danno luogo all'equazione $y - y_x' x - y_z z - c = 0$.

[290]Cfr. il precedente paragrafo II.2.μ..

per sviluppare in serie una funzione qualsiasi della radice $y = y(x, z)$ dell'equazione generica $y = x + z\phi(y)$.[291]

Per questo egli assume come evidente che i primi due termini di uno sviluppo che esprima y in una serie intera ordinata secondo le potenze di z siano rispettivamente x e $z\phi(x)$. Tuttavia - benché, posta l'identità generica $y = x + z\phi(y) = \Psi_0(x) + \Psi_1(x)z + \Psi_2(x)z^2 +$ &c., sia facile determinare il coefficiente $\Psi_0(x)$, operando la semplice sostituzione $z = 0$ - è chiaro che la posizione $y = x$ non conduce all' identità $\phi(x) = \Psi_1(x)$ che al prezzo di annullare tanto $\phi(x)$ che $\Psi_1(x)$. Per giustificare la premessa di Lagrange sembra così necessario ricorrere al calcolo dei limiti e a qualche artificio analogo.

Assunta comunque tale premessa, Lagrange passa a determinare i successivi coefficienti $\Psi_2(x)$, $\Psi_3(x)$, &c. dello sviluppo di $y = x + z\phi(y)$ ricorrendo ai principi della teoria generale delle equazioni alle derivate parziali. Passando da tale equazione alle sue equazioni prime si avrà in primo luogo, secondo le (153),

$$(159)\qquad \begin{aligned} &\text{i) } y'_x = 1 + z\,\phi'(y)\,y'_x \\ &\text{ii) } y'_z = \phi(y) + z\,\phi'(y)\,y'_z \end{aligned}$$

e quindi, eliminando $\phi(y)$ e $\phi'(y)$ fra queste due equazioni e la loro primitiva,

$$(160)\qquad z\,y'_z - (y-x)\,y'_x = 0$$

da cui, ricordandosi d'aver posto $y = x + \phi(x)z + \Psi_2(x)z^2 +$ &c., si trae:

$$(161)\qquad \begin{aligned} &\phi(x) + 2\Psi_2(x)\,z + 3\Psi_3(x)\,z^2 + \&c. - \\ &\Big[\phi(x) + \Psi_2(x)\,z + \Psi_3(x)\,z^2 + \&c.\Big]\cdot\Big[1 + \phi'(x)\,z + \Psi'_2(x)\,z^2 + \Psi'_3(x)\,z^3 + \&c.\Big] = 0 \end{aligned}$$

Da qui è allora facile trarre, secondo il metodo dei coefficienti indeterminati,

$$(162)\qquad \begin{aligned} &\Psi_2(x) = \phi(x)\,\phi'(x) = \frac{1}{2!}\Big([\phi(x)]^2\Big)' \\ &\Psi_3(x) = \frac{\phi(x)\,\Psi'_2(x) + \Psi_2(x)\,\phi'(x)}{2} = \frac{2\,\phi(x)\,[\phi'(x)]^2 + \phi''(x)\,[\phi(x)]^2}{2} \\ &\qquad = \frac{1}{3!}\Big([\phi(x)]^3\Big)'' \\ &\&c. \end{aligned}$$

[291] Cfr. la precedente sezione III.4.a. e il successivo paragrafo III.4.c.ε..

e quindi:

$$(163)\qquad y = x + \phi(x)\, z + \frac{1}{2!}\left([\phi(x)]^2\right)' z^2 + \frac{1}{3!}\left([\phi(x)]^3\right)'' z^3 + \&c.$$

Sia ora $\psi(y)$ una funzione qualsiasi di $y = y(x, z)$. Calcolando le derivate parziali si avrà allora $\psi'_x(y) = \psi'(y)\, y'_x$ e $\psi'_z(y) = \psi'(y)\, y'_z$ e quindi: $\dfrac{\psi'_x(y)}{\psi'_z(y)} = \dfrac{y'_x}{y'_z}$.

Sostituendo nella (160) sarà allora facile trarre:

$$(164)\qquad \psi'_z(y)\, z - (y - x)\, \psi'_x(y) = 0$$

e quindi, ponendo l'identità generica $\psi(y) = \psi(x) + \Gamma_1(x)z + \Gamma_2(x)z^2 + \&c.$ e sostituendo secondo la (163):

$$(165)\qquad \begin{aligned} 0 &= \Gamma_1(x) + 2\Gamma_2(x)\, z + 3\Gamma_3(x)\, z^2 + \&c. - \\ &\left[\phi(x) + \frac{1}{2!}\left([\phi(x)]^2\right)' z + \frac{1}{3!}\left([\phi(x)]^3\right)'' z^2 + \&c.\right]\cdot\left[\psi'(x) + \Gamma'_1(x)\, z + \Gamma'_2(x)\, z^2 + \&c.\right] \end{aligned}$$

Basta allora una nuova applicazione del metodo dei coefficienti indeterminati per trarre

$$\Gamma_1(x) = \phi(x)\, \psi'(x)$$

$$(166)\qquad \Gamma_2(x) = \frac{\phi(x)\, \Gamma'_1(x) + \frac{1}{2!}\left([\phi(x)]^2\right)' \psi'(x)}{2} = \frac{2\, \phi(x)\, \phi'(x)\, \psi'(x) + \psi''(x)\, [\phi(x)]^2}{2}$$

$$= \frac{1}{2!}\left(\psi'(x)\, [\phi(x)]^2\right)'$$

ovvero:

$$(167)\quad \psi(y) = \psi(x) + [\psi'(x)\, \phi(x)]\, z + \frac{1}{2!}\left(\psi'(x)\, [\phi(x)]^2\right)' z^2 + \frac{1}{3!}\left(\psi'(x)\, [\phi(x)]^3\right)'' z^3 + \&c.$$

che per $z = 1$ corrisponde proprio alla (14) del precedente paragrafo III.4.*a*.α. che, accogliendo il suggerimento di Laplace,[292] è così ridimostrata entro la teoria delle derivate parziali.

[292] Cfr. il precedente paragrafo III.4.*c*.ε.

III.7.
CONCLUSIONE

[...] e 'l proposito nostro è fuggire la conclusione.

B. Dovizi da Bibbiena, *La Calandria*, (IV, 4)
[Fannio a Lidio (femina)]

Un'analisi non ha conclusione. Essa è la sua stessa conclusione.

RIFERIMENTI BIBLIOGRAFICI*

AA. VV.
(1984-85) *Lazare Carnot, révolution et mathématique*, L'Herne, Paris 1984-85 (2 voll.)

ABEL, N. H.
(1824) *Mémoire sur les équations algébriques où on démontre l'impossibilité de la résolution de l'équation générale du cinquième degré*, Impr. de Grœndahl, Christiania 1824.
(1826) "Beweis der Unmoglichkeit algebraische Gleichungen von höheren Graden als dem vierten allgemein aufzulösen", *Journ. für die reine und ang. Math.*, I, 1826, pp. 65-84.

ADAM, C. - TANNERY, P.
(1897-1908) *Œuvres de Descartes publiées par C. Adam et P. Tannery*, L. Cerf, Paris 1897-1908 (10 voll.).

ÆPINUS, F. U. T.
(1760-1) "Demonstratio generalis theoramatis Neutoniani de binomio ad potentiam indefinitam elevando", *Novi Comm. Acad. Sci. Imp. Petropolitanæ*, VIII, 1761-2 (pubbl. 1763), pp. 169-80.

AGNESI, M. G.
(1748) *Instituzioni analitiche [...]*, nella Regia-ducal corte, Milano 1748.

ALEMBERT, J. B. LE R. D'
(Anal.) "Analyse" (prima parte), *Encyclopédie, ou dictionnaire raisonné des sciences, des arts et de métiers*, I ed., Briasson, David l'aîné, le Breton, Durand, Paris 1751-80 (35 voll.), vol. I, 1751, pp. 400b - 401a.
(Dis.) "Discours préliminaire de éditeurs", *ivi*, vol. I, 1751, pp. I-XLV.
(Diff.) "Différentiel", *ivi*, vol. IV, 1754, pp. 985a-989b.

*I presenti riferimenti bibliografici non costituiscono, né vogliono costituire, una bibliografia completa, o almeno ragionata, relativa all'argomento affrontato nella mia dissertazione. Essi non si compongono che dei titoli effettivamente citati nel corso di quest'ultima. Ciò giustifica l'impiego di un ordine rigorosamente alfabetico, che ho creduto opportuno non turbare nemmeno attraverso una distinzione fra fonti primarie e secondarie (distinzione che sarebbe peraltro apparsa, in molti casi, tutt'altro che evidente). Ho cercato in tutti i casi possibili di riferirmi nelle mie citazioni alle edizioni originali e ho indicato, fra parentesi graffe, eventuali riedizioni, ristampe o traduzioni solo nel caso in cui abbia a esse rinviato nel testo; ogni volta che compare una indicazione fra parentesi graffe è quindi a essa che occorre riferire i miei rimandi. In alcune occasioni ho inoltre aggiunto fra parentesi quadre altre notizie significative concernenti l'opera che è richiamata. Per quanto riguarda le mie citazioni, mi sono in generale servito di una traduzione italiana codificata solo nel caso in cui il testo in questione non fosse esso stesso oggetto di indagine e non servisse che come ausilio illustrativo per le mie tesi. In nessun caso ho comunque proposto delle traduzioni personali.

'El. Sci.) "Elémens des sciences" (I parte), *ivi*, vol. V, 1755, pp. 491a-497a.
'Flux.) "Fluxion (Géométrie. transcend.)", *ivi*, vol. VI, 1756, pp. 922b-23a.
Inf.) "Infini (Géomet.)", *ivi*, vol. VIII, 1765, pp. 703a-b.
'Lim.) "Limite (Mathémat.)", *ivi*, vol. IX, 1765, pp. 542a-b.
;Ser.) "Serie ou suite", *ivi*, vol. 15 (pubbl. 1765), pp. 93b-96a.
'Ser. supp.) "Séries (Algèbre)", *Supplément à l'Encyclopédie [...]*, I ed., M. M. Rey, Amsterdam, 1776-77 (4 voll.), vol. IV, 1777, pp. 781a-83a.
'1743) *Traité de dynamique [...]*, David l'aîné, Paris 1743.
1744) *Traité de l'équilibre et du mouvement des fluides [...]*, David l'aîné, Paris 1744.
'1747a) "Recherches sur la courbe que forme une corde tenduë mise en vibration", *Hist. Acad. Roy. Sci. Bell. Lettr. [Berlin]*, III, 1747 (pubbl.1749), pp. 214-19.
1747b) "Suite des recherches sur la courbe que forme une corde tenduë mise en vibration", *Hist. Acad. Roy. Sci. Bell. Lettr. [Berlin]*, III 1747 (pubbl.1749), pp. 220-49
1750) "Addition au Mémoire sur la courbe que forme une corde tenduë mise en vibration", *Hist. Acad. Roy. Sci. Bell. Lettr. [Berlin]*, 1750 (pubbl.1752), pp. 355-60.
'1754-56) *Recherches sur differens points importans du systême du monde*, David l'aîné, Paris 1754-56 (3 voll.).
;1768) "Réflexions sur les suites et sur les racines imaginaires", in: J. B. le R. d'Alembert, *Opuscles mathématiques [...]*, David, Briasson, C. A. Jombert Paris, 1761-80 (8 tomi in 7 voll.), T. V, 1768, pp. 171-215.

AMPERE, A. M.
;1806) "Recherches sur quelques points de la théorie des fonctions dérivées qui conduisent à une nouvelle démonstration de la série de Taylor [...]", *Journ. Ec. Poly.*, cah. 13, tome VI (pubbl. 1806), pp. 148-81.

ARBOGAST, L. F.
;1791) *Mémoire sur la nature des fonctions arbitraires qui entrent dans les intégrales des équations aux différentielles partielles*, Impr. de l'Acad imp. des sci., St. Pétesbourg 1791.
'1800) *Du calcul des dérivations*, Levrault frères, Strasbourg, an VIII (1800).
.1789) *Essai sur des nouveaux principes de calcul différentiel et de calcul intégral*, manoscritto conservato alla *Bibl. Medicea-Laurenziana*, Firenze, Cod. Laur. Ashb. App. 1840 [una seconda copia è conservata alla Bibl. de l' *Ecole des Ponts et Chaussées*, Paris, Ms. 2809].

BARBEAU, E. J. - LEAH, P. J.
'1976) "Euler's 1760 paper on divergent series", *Hist. Math.*, III, 1976, pp. 141-60.

BELL, E. T.
;1940) *The Development of Mathematics*, McGraw-Hill, New York, Lonon 1940.

BENIS-SINACEUR, H.
;1987) "Structure et concept dans l'épistémologie mathématique de Jean Cavaillès", *Rev. Hist. Sci.*, XL, 1987, pp. 5-30.

BERGE, C.
;1968) *Principes de combinatoire*, Dunod, Paris 1968.

BERKELEY, G.
(1734) *The Analyst [...]*, J. Tonson, London 1734.

BERNOULLI, D.
(1728) "Observationes de seriebus quæ formantur ex additione vel subtractione quacunque terminorum se mutuo consequentium [...]", *Comm. Acad. Sci. Imp. Petropolitanæ*, III, 1728 (pubbl. 1732, pres. sett. 1728), pp. 85-100.

BERNOULLI, JACQUES I
(1689-1704) *Positionum[es] [...] de seriebus infinitis [...]*, J. Conradi à Mechel, Basileæ, 1689-1704 (5 parti) [anche in Jacques I Bernoulli (1744), vol. I, pp. 375-402 e 517-42, vol. II, pp. 745-67, 849-67 e 955-75].
(1713) *Ars conjectandi [...]*, imp. Thurnisiorum fratrum, Basileæ 1713 (2 parti in 1 vol.).
(1744) *Jacobi Bernoulli basileensis Opera*, Cramer et fratrum Philibert, Genevæ, 1744 (2 voll.).

BERNOULLI, JOHANN I
(1694) "Additamentum effectionis omnium quadraturam et rectificationum curvarum per seriem quandam generalissimam", *Acta Eruditorum*, 1694, pp. 437-41.
(1716) Recensione di Taylor (1715) [apparsa anonima], *Acta Eruditorum*, 1716, pp. 292-96.
(1718) "Remarques sue ce qu'on a donné jusqu'ici de solutions des problêmes sur les isoperimétres [...]", *Hist. Acad. Roy. Sci. [Paris], Mém. Math. et Phys.*, 1718 (pubbl. 1719-20 (2 tomi)), t. I, pp. 100-138
(1742) *Opera Omnia [...]* (a cura di G. Cramer), M. M. Bousquet et soc., Lausannæ et Genevæ 1742 (4 voll.).

BLAY, M.
(1986) "Deux moments de la critique du calcul infinitésimal: Michel Rolle et George Berkeley", *Rev. Hist. Sci.*, XXXIX, 1986, pp. 223-53.

BLONDEL, C.
(1989) "Vision physique «éthérienne», mathématisation «laplacienne»: l'électrodynamique d'Ampère", *Rev. Hist. Sci.*, XLII, 1989, pp. 123-37.

BOLZANO, B.
(1818) "Rein analytischer Beweis der Lehrsatzes [...]", *Abhand. der k Böhmischen Gesselleschaft der Wiss.*, V, 1818 [trad. francese in Sebestik (1964)].
(1930-48) *Schriften*, Hrsg. von der k. Böhmischen Gesellschaft der Wiss., Prag 1930-48 (5 voll.).

BOOLE, G.
(1854) *An Investigation of the Laws of Thought [...]*, Walton and Maberly, London 1854.

BOREL, E.
(1928) *Leçons sur les séries divergentes*, IIème éd. revue et entièrement remaniée avec le concours de G. Bouligand, Gauthier-Villars, Paris 1928.

BOS, H. J. M.
(1974) "Differential, higher-order differentials and the derivative in the Leibnizian calculus, *Arch. Hist. Exact Sci.*, XIV, 1974, pp. 1-90.
(1980) "Newton, Leibniz and the Leibnizian tradition", in Grattan-Guinness (1980), pp. 49-93.

BOTTAZZINI, U.
(1981) *Il calcolo sublime [...]*, Boringhieri, Torino 1981 [ed. inglese (ampliata): *The Higher Calculus [...]*, Springer-Verlag, Heidelberg, New-York 1986].

BOURBAKI, N.
(1960) *Eléments d'histoire des mathématiques*, Hermann, Paris 1960 (Nouv. éd. revue, corrigée et augmentée: 1974)

BOUTROUX, P.
(1920) *L'idéal scientifique des mathématiciens [...]*, F. Alcan, Paris 1920.

BOYER, C. B.
(1939) *The Concepts of the Calculus [...]*, Columbia U. P., New York 1939 [ristampato più volte come *The History of the Calculus and its Conceptual Development*].
(1968) *A History of Mathematics*, J. Wiley & sons, New York, London, Sydney 1968.

BRIGAGLIA, A. - NASTASI, P.
(1986) "Le ricostruzioni appolloniane in Viète e Ghetaldi", *Boll. St. Sci. Mat.*, VI, 1986, pp. 83-133.

BRISSON, B.
(1808) "Mémoire sur l'intégration des équations différentielles partielles", *Jour. Ec. Poly.*, cah. XIV, tome VII (pubbl. 1808, pres. all'*Institut de France* nel giugno 1804), pp. 191-261.

BRUNACCI, V.
(1802) *Analisi derivata [...]*, Bolzani, Pavia 1802.

BURJA, A.
(1801) "Sur le développement des fonctions en séries", *Mém. Acad. Roy. Sci. Bell. Lett. [Berlin]*, 1801 (pubbl. 1804), pp. 3-28.

BÜRMANN, H.
(1798) *Essai de calcul fonctionnaire aux constantes ad libitum*, Memoria inviata all'*Inst. Nat. de France*, manoscritto conservato agli *Archives de l'Acad.*, pochette de séance 21 Prair., an VI.
(1807) *Programme de la pangraphie [...]*, impr. de Kaufmann et Friederich, Mannheim 1807.
(s. d.) *Supplementum à l'Essai de calcul fonctionnaire aux constantes ad libitum*, Nota inviata a Legendre nel Termidoro an. IV, manoscritto conservato agli *Archives de l'Acad.*, pochette de Séance 21 Prair. an. VI.

CAGNOLI, A.
(1804) *Trigonomia piana e sferica*, edizione seconda, notabilmente ampliata, Frat. Masi & comp., Bologna 1804.

CAJORI, F.
(1919) *A History of the Conceptions of Limits and Fluxions in Great Britain, from Newton to Woodhouse*, The Open court, Chicago, London 1919.

CANTELLI, G.
(1958) *La disputa Leibniz-Newton sull'analisi*, Boringhieri, Torino 1958.

CANTOR, M.
(1880-1908) *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik*, B. G. Teubner, Leipzig 1880-1908 (4 voll.).

CARNAP, R.
(1936-37) "Testability and meaning", *Philosophy of Science*, III, 1936, pp. 420-71 e IV, 1937, pp. 2-40.
(1937) *Logical Syntax of Language*, Kegan Paul, New York and London, 1937 [trad. rivista di *Logische Syntax der Spache*, Springer, Wien 1934].
(1956) "The methodological character of theoretical concepts", in: H. Feigl, M. Scriven and G. Maxwell (ed. by), *Minnesota St. in the Phi. of Sci.*, Univ. of Minnesota Press, Minneapolis, vol. I 1956, pp. 38-76.

CARNOT, H.
(1861-63) *Mémoires sur Carnot par son fils*, Pagnerre, Paris 1861-3 (2 voll.).

CARNOT, L. M.
(1797) *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*, Duprat, Paris an V (1797) [anche in: *Œuvres mathématiques du citoyen Carnot*, J. Decker, Bâle 1797].
(1813) *Réflexions sur la métaphysique du calcul infinitésimal*, IIème éd., M. V. Courcier, Paris 1813.

CASSIRER, E.
(1923-29) *Philosophie der symbolischen Formen*, B. Cassirer, Berlin 1923-29 (3 voll.) {trad. italiana di E. Arnaud: *Filosofia delle forme simboliche*, La nuova Italia, Firenze, 1961-66 (3 voll. in 4 tomi)}.

CASTILLON, J. (G. F. M. SALVEMINI DA CASTIGLIONE)
(1761) *Arithmetica Universalis [...] auctore Is. Newton [...] cum commentario Joahannis Castillionei*, M. M. Rey, Amstelodami 1761.

CATALDI, P. A.
(1613) *Trattato del modo brevissimo di trovare la radice quadra delli numeri [...]*, B. Cochi, Bologna, 1613.

CATELAN (ABBE)
(1691) *Logistique pour la science générale des lignes courbes*, impr. de L. Roulland, Paris 1691.

CAUCHY, A. L.
(1821) *Cours d'analyse de l'Ecole royale polytechnique*, Debure frères, Paris 1821.
(1822) "Sur le développement des fonctions en séries, et sur l'intégration des équations différentielles, ou aux différences partielles", *Bull. des Sci. par la Soc. Philomatique de Paris*, 1822, pp. 49-54.

(1823) *Résumé des leçons données à l'Ecole royale polytechnique sur le calcul infinitésimal*, tome I, Impr. royale Debure, Paris 1823
(1882-1974) *Œuvres complètes*, Gauthier-Villars, Paris 1882-1974 (27 voll.: 12+15).

CAVAILLES, J.
(1937) *Remarques sur la formation de la théorie abstraite des ensemble*, Hermann, Paris 1937.
(1947) *Sur la logique et la théorie de la science*, P.U.F., Paris 1947 {III ed.: Vrin, Paris 1976}.
(1962) *Philosophie mathématique*, Hermann, Paris 1962.
(1941) "Transfini et continu", manoscritto inviato alla *Revue Philosophique* nel settembre 1941, ora in Cavaillès (1962), pp. 253-74.

CAVAILLES, J. - LAUTMAN, A.
(1939) "La pensée mathématique", resoconto di una discussione fra Cavaillès e Lautman tenuta alla *Société française de Philosophie* durante la seduta del 4 febbraio 1939, *Bulletin. Soc. Franç. de Philosophie*, XL, 1946, pp. 1-39.

CAVALIERI, B.
(1635) *Geometria indivisibilius continuorum nova quadam ratione promota*, Typis Clementis Ferronij, Bononiæ 1635.

CHEVALIER, J.
(1914) *La notion du nécessaire chez Aristote et chez ses prédécesseurs [...]*, Lyon, A. Rey 1914.

CHEVALLEY, C.
(1987) "Albert Lautman et le souci logique", *Rev. Hist. Sci.*, XL, 1987, pp. 49-77.

CHEYNE, G.
(1703) *Fluxionum methodus inversa [...]*, typis J. Matthews, Londini 1703.

CLAIRAUT, A. C.
(1743) *Théorie de la figure de la terre [...]*, David fils, Paris 1743.

COHEN, I. B.
(1980) *The Newtonian Revolution*, Cambridge Univ. Press, Cambridge, New-York 1980.

COLLINS, J.
(1712) *Commercium epistolicum d. Johannis Collins et aliorium de analysi promota*, jussu Societatis Regiæ in lucem editum, typis Pærsonianis, Londini, 1712.

CONDILLAC, E. B.
(1746) *Essai sur l'origine des connaissances humaines*, P. Mortier, Amsterdam 1746 (2 voll.).
(1775) *Cours d'étude pour l'instruction du Prince de Parme [...]*, Impr. royale, Parme 1775 (10 voll.).
(1796) *La logique ou les premiers développemens de l'art de penser*, Impr. de Glisau, Paris, an V (1796).
(1797) *La langue des calculs [...]*, Imp. de Ch. Houel, Paris, an VI (1797).

(1981) *La langue des calculs*, Edition critique par S. Auroux et A.-M. Chouillet, Impr. de l'Univ. de Lille III, s. d..

CONDORCET, M. J. A. C.
(1765) *Du calcul intégral*, impr. de Didot, Paris 1765.

COUSIN, J. A. J.
(1777) *Leçons du calcul différentiel et du calcul intégral*, C. A. Jombert Paris 1777.
(1796) *Traité de calcul différentiel et du calcul intégral*, Régent & Bernard, Paris an IV (1796) (2 voll.).

CRAMER, G.
(1750) *Introduction à l'analyse des lignes courbes algébriques*, Frères Cramer et C. Philibert, Genève 1750.

CROCE, B.
(1909) *Logica come scienza del concetto puro*, II ed. interamente rifatta, Bari Laterza 1909 [riedizione (modificata) di: B. Croce, *Lineamenti di una logica come scienza del concetto puro*, Giannini, Napoli 1905] (III ed.: 1917).

CURRY, H. B.
(1951) *Outlines of a Formalist Philosophy of Mathematics*, North Holland, Amsterdam 1951.

DAHAN-DALMEDICO, A.
(1989) "La notion de pression: de la métaphysique aux diverses mathématisations", *Rev. Hist. Sci.* XLII, 1989, pp. 79-108.
(1990) *Aspects de la mathématisation au XIX siècle. Entre physique mathématique du continu et mécanique moléculaire, la voie d'A. L. Cauchy*, Thèse d'Etat, Univ. de Nantes, gennaio 1990.

DEDEKIND, R.
(1854) "Über die Einführung neuer Funktionen in der Mathematik", lezione d'abilitazione (30/6/1954), in: *Gesammelte math. Werke*, F. Vieweg & Sohn, Braunschweig 1930-32 (3 voll.), vol. III, pp. 428-38.

DELAMBRE, J. B.
(1777) "Sur les séries", *Hist. Acad. Sci. [Paris]*, 1777, pp. 54-5.

DERRIDA, J.
(1972) *La dissémination*, ed. du Seuil, Paris 1972.

DESANTI, J. T.
(1968) *Les idéalités mathématiques [...]*, ed. du Seuil, Paris 1968.
(1975) *La philosophie silencieuse [...]*, ed du Seuil, Paris 1975.

DESCARTES, R.
(1637) *La géométrie*, in: [R. Descartes] *Discours de la méthode [...], plus la dioptrique, les météores et la géométrie qui sont des essais de cette méthode*, imp. de J. Maire, Leyde 1637, pp. 295-413.

(1701) *Regulæ ad directionem ingenii [...]*, in: R. Descartes, *Opuscula posthuma physica et mathematica*, ex Typ. P. & J. Blaev, apud Janssonio-Waesbergios, Boom & Gœthals, Amstelodami, 1701, parte IV.

DHOMBRES, J.

(1980) "L'enseignement des mathématiques par la «méthode révolutionnaire». Les leçons de Laplace à l'Ecole normale de l'an III", *Rev. Hist. Sci.*, XXXIII, 1980, pp. 315-48.

(1982-83) "La langue des calculs de Condillac (ou comment propager les lumières?)", *Sciences et Techniques en Perspective*, II, 1782-83, pp. 197-230.

(1986) "Quelques aspects de l'histoire des équations fonctionnelles liés à l'évolution du concept de fonction", *Arch. Hist. Exact Sci.*, 36, 1986, pp. 91-181.

(1987a) "Les présupposés d'Euler dans l'emploi de la méthode fonctionnelle", *Rev. Hist. Sci.*, XL, 1987, pp. 179-202.

(1987b) "Sur un texte d'Euler relatif à une équation fonctionnelle. Archaïsme, pédagogie, et style d'écriture", *Historia Scientiarum*, XXXIII, 1987, pp. 77-123.

(1988) "Un texte d'Euler sur les fonctions continues et les fonctions discontinues, véritable programme d'organisation de l'analyse au XVIIIème siècle", *Cahiers du Séminaire d'Histoire des Mathématiques*, IX, 1988, pp. 23-97.

(1989) "La théorie de la capillarité selon Laplace, mathématisation superficielle ou étendue?", *Rev. Hist. Sci.*, XLII, 1989, pp. 43-77.

DHOMBRES, J. - PENSIVY, M.

(1988) "Esprit de rigueur et présentation mathématique au XVIIIème siècle: le cas d'une démonstration d'Æpinus", *Hist. Math.*, XV, 1988, pp. 9-31.

DI SIENO S. - GALUZZI M.

(1987) "Calculus and geometry in Newton's mathematical work: some remarks", in: S. Rossi (a cura di), *Scienza e immaginazione nella cultura inglese del Settecento*, Unicopli Milano 1987, pp. 177-89.

DIEUDONNE, J.

(1978) "L'analyse mathématique au dix-huitième siècle", in: J. Dieudonné (dirigé par), *Abrégé d'histoire des mathématiques: 1700-1900*, Hermann, Paris 1978 (2 voll.), pp. 19-53.

DIONIS DE SEJOUR, A. P. - GODIN, L.

(1755) *Traité des courbes algébriques*, C. A. Jombert, Paris 1756.

DUPUY, P.

(1895) "L'école Normale de l'an III", in: *Le centenaire de l'Ecole normale, 1795-1895*, Hachette, Paris 1895.

EC. NORM. III

(s. d.) *Séances des écoles normales, recueillies par des stenographes et revues par les professeurs*, L. Reynier, Paris s. d. (5 tomi più uno di tavole e uno dedicato alle *séances* di dibattito numerato: I, *Débats*) [si tratta della rilegatura di un insieme di fascicoli separati (probabilmente distribuiti agli allievi della scuola); essi vennero ristampati in seguito con la semplice sostituzione del frontespizio, in cui è modificato il nome dell'editore - non più «L. Reynier», ma «imp. du cercle social» (si tratta in realtà del nuovo nome del medesimo editore); nelle ristampe tanto il tomo V che il tomo I, *Débats* riportano la notazione «Nouvelle édition» e sono datati *an* IV; a queste ristampe sono inoltre aggiunti altri 3 tomi numerati VI, VII e VIII; il primo è datato *an* IV e contiene alcune lezioni effettivamente impartite, ma non riprodotte in fascicoli; il secondo e il terzo sono datati *an* VI e contengono, senza alcuna indicazione dell'autore, la prima edizione dell'*Exposition du système du monde* di Laplace].

(1800-01) *Séances des écoles normales, recueillies par des sténographes et revues par les professeurs* nouvelle édition, imp. du cercle sociale, Paris, 1800-1 (10 tomi dedicati alle lezioni, più 3, numerati a parte, che raccolgono le *séances* di dibattito) [i tomi I-VI contengono le lezioni effettivamente impartite, seguite da un'appendice in lingua italiana ("Scuole Normali", *ivi*, t. VI, pp. 268-620), il tomo VII contiene un estratto della *Mécanique celeste* di Laplace fatto da Biot e una *Histoire de l'Agricolture* di Thouin, l' VIII e il XI contengono alcune lezioni non impartite di Daubenton [t. VIII] e di Bertholet e Thouin [t. IX], il X contiene infine la prima edizione delle *Leçons sur le calcul des fonctions* di Lagrange].

EULER, L

(1732-33) "De formis radicum æquationum cujusque ordinis conjectatio", *Comm. Acad. Sci. Imp. Petropolitanæ*, VI, 1732-33 (pubbl. 1738) pp. 216-31.

(1734-35) "De progressionibus harmonicis observationes", *Comm. Acad. Sci. Imp. Petropolitanæ*, VII, 1734-35, (pubbl. 1740), pp. 150-61.

(1736a) *Mechanica, sive motus scientia analytice exposita*, ex typ. Acad. sci. imp., Petropoli 1736 (2 voll.).

(1736b) "Inventio summæ cujusque seriei ex dato termino generali", *Comm. Acad. Sci. Imp. Petropolitanæ*, VIII, 1736 (pubbl. 1741), pp. 9-22.

(1744) *Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive [...]*, M.-M. Bousquet & soc., Lausannæ et Genevæ 1744.

(1748) *Introductio in analisyn infinitorum*, M.-M. Bousquet & Soc., Lausannæ 1748 (2 voll.).

(1748a) "Sur la vibration des cordes", *Hist. Acad. Roy. Sci Bell. Lettr. [Berlin]*, IV, 1748 (pubbl. 1750), pp. 69-85 [trad. di Euler (1749)].

(1749) "De vibratio chordarum exercitatio", *Nova Acta Eruditorum*, 1749 (pubbl. 1749), pp. 512-27 [tradotta in francese come Euler (1748a)].

(1753) "Remarques sur les Mémoires précédens de M. Bernoulli", *Hist. Acad. Roy. Sci. Bell. Lettr. [Berlin]*, IX, 1753 (pubbl. 1755), pp. 196-222.

(1754-55) "De seriebus divergentibus", *Novi Comm. Acad. Sci. Imp. Petropolitanæ*, V, 1754-55 (publ. 1760), pp. 205-37, sommario: pp.)(19)(-)(23)(.

(1755) *Institutiones calculi differentialis [...]*, Impensis Acad. imp. sci. petropolitanæ, ex off. Michaelis, Berolini 1755.

(1762-63) "De resolutione æquationum cujusvis gradus", *Novi Comm. Acad. Sci. Petropolitanæ*, IX, 1762-63 (pubbl. 1764), pp. 70-98.

(1765) "De usu functionum discontinuarum in analysi", *Novi Comm. Acad. Sci. Petropolitanæ*, XI, 1765 (pubbl. 1767), pp. 3-27 [sommario: *Summ. Diss.*, pp. 5-7].

(1768-70) *Institutionum calculi integralis [...]*, impensis Acad. imp. sci., Petropoli 1768-70 (3 voll.).

(1768-72) *Lettres à une princesse d'Allemagne, sur divers sujets de physique & de philosophie*, impr. de l'Académie imp. des Sciences, 1770-72.

(1770) *Vollständige Anleitung zur Algebra*, gedr. Kays. Acad. der Wiss., st. Petersburg 1770 (2 voll.).

(1774) "Demonstratio theorematis Nuetoniani de evolutione potestatum binomii pro casibus quibus exponentes non sunt numeri integri", *Novi Comm. Acad. Sci. Petropolitanæ*, XIX, 1774 (pubbl. 1775), pp. 103-11.

(1786) *Introduction à l'analyse des infiniment petits* (première partie), traduite [...] par M. Pezzi, Strasbourg, Libr. acad. 1786.
(1787) "Nova demonstratio quod evolutio potestatum binomii Neutoniana etiam pro exponentibus fracti valeat", *Nova Acta Acad. Sci. Petropolitanæ*, V, 1787 (pubbl. 1789, pres. 20 maggio 1776), pp. 52-8.
(1796) *Introduction à l'analyse infinitésimale,* traduite par J. B. Labey, Barrois aîné, Paris An IV-V (1796-97).(2 voll.).

FEIGENBAUM, L.
(1985) "Brook Taylor and the method of increments", *Arch. Hist. Exact Sci.*, XXXIV, 1985, pp. 1-140.

FELLMANN, E. A. - FLECKENSTEIN, J, O.
(1970) "Bernoulli, Johann I", *Dict. Sci. Biogr*, vol. II 1970, pp. 51-55.

FONTENELLE, B. LE B. DE
(1727) *Elémens de la géométrie de l'infini*, impr. royale, Paris 1727.

FOUCAULT, M.
(1969) *L'Archéologie du savoir*, Gallimard, Paris 1969.

FOURIER, J. B. J.
(1807) *Mémoire sur la propagation de la chaleur*, manoscritto, pubblicato in Grattan-Guinness - Ravetz (1972).
(1816) "Théorie de la chaleur", *Annales de chimie et de physique*, III, 1816, pp. 350-76.
(1822) *Théorie analytique de la chaleur*, F. Didot, père et fils, Paris 1822.

FRANÇAIS, F.
(1812) "Méthode de différentiation, indépendante du développement des fonctions en série", *Annalles de Math. pures et appl.*, II, 1811-12, pp. 325-31.

FRANÇAIS, J. F.
(1813) "Mémoire tendant à démontrer la légitimité de la séparation des échelles de différentiation et d'intégration des fonctions qu'elles affectent [...], *Annalles de Math. pures et appl.*, III, 1812-13, pp. 244-72.
(1815) "Du calcul des dérivations [...]", *Annalles de Math. pures et appl.*, VI, 1815-16, pp. 61-111.

FRASER, C.
(1985) "J.L. Lagrange's changing approach to the foundations of the calculus of variations", *Arch. Hist. Exact Sci.*, XXXII, 1985, pp. 151-91.
(1987) "Joseph Louis Lagrange's algebraic vision of the calculus", *Hist. Math.*, XIV, 1987, pp. 38-53.
(1989) "The calculus as algebraic analysis: some observations on mathematical analysis in the 18th century", *Arch. Hist. Exact Sci.*, XXXIX, 1989, pp. 317-35.

FREGE, F. L. G.
(1884) *Die Grundlagen der Arithmetik [...]*, W. Koebner, Breslau 1884.
(1892) "Über Begriff und Gegestand", *Vierteljahrsschrift für wissenchaftliche Philosophie.*, XVI, 1892, pp. 192-205.
(1918) "Der Gedanke. Eine Logische Untersuchung", *Beiträge zur Philosophie des deutschen Idealismus*, I Band, 2 Heft, 1918, pp. 58-77 (trad. italina di R.

Casati in: F. L. G. Frege, *Ricerche logiche* (a cura di M. di Francesco), Guerini e associati, Milano 1988, pp. 43-74).

FREGUGLIA, P.
(1988) *Ars analitica. Matematica e methodus nella seconda metà del Cinquecento*, Bramante, Busto A., 1988.

FREYCINET, C. DE
(1860) *De l'analyse infinitésimale, étude sur la métaphysique du haut calcul [...]*, Mallet-Bachelier, Paris 1860.

FRIDBERG, A.
(1978) *Sadi Carnot physicien et les Carnot dans l'histoire*, La pensée universelle, Paris 1978.

FUSS, P. H.
(1843) *Correspondance mathématique et physique de quelques célèbres géomètres du XVIIIème siècle [...]*, Pubbl. Acad. imp. sci. St. Pétesbourg, 1843 (2 voll.).

GALUZZI, M.
(1980) "Il problema delle tangenti nella *Géométrie* di Descartes", *Arch. Hist. Exact Sci.*, XXII, 1980, pp. 37-51.

GARDIES, J.-L.
(1975) *Esquisse d'une grammaire pure*, Vrin, Paris 1975.

GARNIER, J. G.
(1803) *Cours d'analyse algébrique*, Paris 1803.

GEACH, P.
(1957) *Mental Acts. Their Content and Their Objects*, Routledge & Kegan Paul, London and Humanities Press, New-York 1957.

GERHARDT, C. I.
(1849-63) *Leibnizes mathematische Schriften* (heraus. von C. I. Gerhardt), Asher & Comp., Berlin 1849-50: voll. I-II; H. W. Schmidt, Halle 1855-63: voll. III-VII.

GHETALDI, M.
(1630) *De Resolutione et compositione mathematica libri quinque [...]*, Rev. Cameræ Apostolicæ, Roma 1630.

GILLISPIE, C. C. - YOUSCHKEVITCH, A. P.
(1971) *Lazare Carnot, savant [...]*, Princeton Univ. Press, Princeton 1971.
(1979) *Lazare Carnot, savant [...]*, Vrin, Paris 1979.

GILLISPIE, C.G. - GRATTAN-GUINNESS, I. - FOX R.
(1978) "Laplace, Pierre Simon", *Dict. Sci. Biogr.*, vol. XV, pp. 273-403.

GIORELLO, G.
(1981) "Zero" in *Enciclopedia*, Einaudi Torino 1977-1984 (16 voll.), vol. 14 (1981), pp. 1318-53.
(1985a) *Lo spettro e il libertino*, Mondadori, Milano 1985.

(1985b) "«Approfondimento» e «traduzione». Il caso storico di uno «scisma» in matematica", in: C. Mangione (a cura di), *Scienza e filosofia. Saggi in onore di Ludovico Geymonat*, Garzanti, Milano 1985, pp. 93-109.

GIRARD, A.
(1629) *Invention nouvelle en l'Algebre [...]*, G. Iansson Blaeuw, Amsterdam 1629.

GIUSTI, E.
(1983) *Analisi matematica*, Boringhieri, Torino 1983 (2 voll.).
(1984a) "Gli «errori» di Cauchy e i fondamenti dell'analisi", *Boll. St. Sci. Mat.*, IV, 1984, pp. 24-54.
(1984b) "A tre secoli dal calcolo: la questione delle origini" *Boll. Un. Mat. It.*, VI, 3-A, 1984, pp. 1-55.

GLYMOUR, C.
(1980) *Theory and Evidence*, Princeton Univ. Press, Princeton 1980.

GOLBACH, C.
(1728) "De terminis generalibus serierum", *Comm. Acad. Sci. Imper. Petropolitanæ*, III, 1728 (pubbl. 1732), pp. 104-73.
(1720) "Specimen methodi ad summas serierum", *Acta Eruditorum*, 1720, pp. 27-31.

GRABINER, J. V.
(1981) *The Origins of Cauchy Rigorous Calculus*, M. I. T. Press, Cambridge (Mass.) 1981.

GRANDI, G.
(1701) *Geometria demonstratio theorematum Hugenianorum [...]*, A. Brigonci, Florentiæ 1701.
(1703) *Quadratura circuli, et hyperbolæ [...]*, Ex Typografia F. Bindi, Pisis 1703.
(1706) "Geometrica demonstratio theorematum Hugenianorum circa logisticam seu logaritmica lineam", *Acta Eruditorum*, 1706, pp. 149-53.
(1710a) *Quadratura circuli, et hyperbolæ [...] editio altera [...]*, Ex Typografia F. Bindi, Pisis 1710.
(1710b) *De infinbitis infinitorum et infinite parvorum [...]*, Typ. F. Bindi, Pisis 1710.
(1712) *Risposta apologetica [...]*, P. Frediani, Lucca, 1712.

GRANGER, G. G.
(1968) *Essai d'une philosophie du style*, A. Colin, Paris 1968 [II ed. (aggiornata): O. Jacob, Paris 1988].
(1982) "The notion of formal content", *Social Research*, IL, 1982, pp. 359-82.
(1988) Pour la connaissance philosophique, O. Jacob, Paris 1988.

GRATTAN-GUINNESS, I.
(1969) "Berkeley's criticism of the calculus as a study of the theory of limits", *Janus*, LVI, 1969/70, pp. 215-27.
(1970) *The Development of the Foundations of Mathematical Analysis from Euler to Riemann*, M. I. T. Press, Cambridge (Mass.), London 1970.
(1975) "Preliminary notes on the historical significance of quantification and of axiom of choice in the development of mathematical analysis", *Hist. Math.*, II, 1975, pp. 475-88.
(1980) (ed. by) *From the Calculus to the Set Theory, 1630-1910*, Duckworth, London 1980.

(1986) "Collection XII: on the transformation of the Ecole Polytechnique archives", *Br. J. Hist. Sci.*, XIX, 1986, pp. 45-50.
(1990) *Convolutions in French Mathematics, 1800-1840 [...]*, Birkhäuser, Basel, Boston, Berlin 1990 (3 voll.).

GRATTAN-GUINNESS, I. - RAVETZ, J. R.
(1972) *Joseph Fourier 1768-1830 [...]*, M. I. T. Press, Cambridge (Mass.), London 1972.

GUA DE MAVES, J.-P. DE
(1740) *Usage de l'analyse de Descartes [...]*, Briasson, Piget, Paris 1740.

GUERRAGGIO, A. - PANZA, M.
(1985) "Le *Réflexions* di Carnot e le *Contre-Réflexions* di Wroński sul calcolo infinitesimale", *Epistemologia*, VIII, 1985, pp. 3-32

GUICCIARDINI, N.
(1984) "Una risposta a Berkeley: Colin Maclaurin e i fondamenti del calcolo flussionale", *Epistemologia*, VII, 1984, pp. 207-24.
(1989) *The Development of the Newtonian Fluxional Calculus in the Eighteenth Century*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1989.

GUITARD, T.
(1985) "La querelle des infiniment petits à l'Ecole polytechnique au XIXème siècle", *Historia Scientiarum*, XXX, 1886, pp. 1-61.

GUSDORF, G.
(1971) *Les principes de la pensée au siècle des lumières*, Payot, Paris 1971.

HAAS, K.
(1972) "Hindenburg, Carl Friedrich", *Dict. Sci. Biogr.*, vol. VI, pp. 403-4.

HALL, A. R. - HALL, M. B.
(1962) *Unpublished Scientific Papers of Sir Isaac Newton*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1962.

HEGEL, G. W. F.
(1807) *System der Wissenschaft, I Theil. Die Phänomenologie des Geistes*, J. A. Goebhardt, Bamberg uns Würzburg 1807 [ora in: G. W. F. Hegel, *Gesammelte Werke*, F. Meiner, Hamburg, vol. IX, 1980; trad. italiana di E. Negri: *Fenomenologia dello spirito*, Sansoni, Firenze 1933-36 (2 voll.)].
(1833-36) *Vorlesugen über der Geschichte der Philosophie* (her. von D. K. L. Michelet), in: G. W. F. Hegel's *Werke*, Duncker und Humblot, Berlin, Leipzig, voll. XIII-XV, 1833-6 [trad. italiana di E. Codignola e G. Sanna: *Lezioni sulla storia della filosofia*, La nuova Italia, Firenze 1930-1945 (4 voll.)].

HEINZMANN, G.
(1987) "La position de Cavaillès dans le problème des fondements en mathématiques, et sa différence avec celle de Lautman", *Rev. Hist. Sci.*, XL, 1987, pp. 31-47.

HEMPEL, G.
(1950) "Problems and changes in the empiricist criterion of meaning", *Rev. Int. Phi.*, XI, 1950, pp. 41-63.

HERMANN, J.
(1716) *Phoronomia [...]*, R. et G. Wetstenios, Amstelædami 1716.

HINDENBURG, C. F.
(1778a) *Infinitinomi dignitatum indeterminatarum leges ac formulæ*, J. C. Dieterich, Gottinæ 1778.
(1778b) *Methodus nova et facilis serierum infinitarum exhibendi dignitates exponentis indeterminati [...]*, ex off. Langenhemiana, Lipsiæ s.d.
(1779) *Infinitinomi dignitatum exponentis indeterminati historia leges ac formulæ [...]. Accessit methodus potentiarum problematis solvendis [...] et serierum ab evolutione factorum quotcunque oriundarum*, J. C. Dieterich, Gottingæ 1779.
(1781) *Novi systemetis permutationum combinationum ac variationum primæ linæ et logisticæ serierum formulis analytico-combinatoriis per tabulas exhibendæ conspectus et specimina*, S. L. Crusium, Lipsiæ 1781.
(1793) *Problema solutum maxime universale ad serierum reversionem formulis localibus et combinatorio-analyticis absolvendam paralipomenon*, ex off. Klaubarthia, Lipsiæ 1793
(1795) *Terminorum ab infinitomi coefficientes moivræanos sequi ordinem lexicographicum ostenditur*, ex off. Klaubarthia, Lipsiæ 1795.
(1796) *Der polynomische Lehrsatz das wichtigste Theorem der ganzen Analysis [...]*, G. Fleischer dem Jüngem, Leipzig 1796.
(1796-1800) *Sammlung combinatorisch-analytischer abhandlungen* (hrsg. von C. F. Hindenburg), G. Fleischer dem Jüngem, Leipzig 1796-1800 (2 voll.).
(1803) *Über combinatorische Analysis und Derivations-Calcul [...]*, (hrsg. von C. F. Hindemburg) im Schwickertschen verlage, Leipzig, 1803.

HUSSERL, E.
(1891) *Philosophie der Arithmetik [...]*, R. Stricker, Halle-Saale 1891.
(1900-01) *Logische Untersuchungen*, Niemeyer, Halle 1900-01 (2 voll.) [II ed.: 1913, III ed.: 1921] [trad. italiana di G. Piana.: *Ricerche logiche*, Il Saggiatore, Milano 1968, (2 voll.)].

ISRAEL, G.
(1987) "Dalle «Regulæ» alla «Géométrie»", in: G. Belgioioso, C. Cimino, P. Costabel, G. Papuli (a cura di), *Descartes: il Metodo e i Saggi*, (Atti del convegno per il Trecentocinquantesimo anniversario della pubblicazione del *Discours de la méthode* e degli *Essais*, Lecce, ottobre 1987), *Acta Encicplopædica*, XVIII (2 voll.), 1990, *Istituto dell'Enciclopedia Italiana, Roma*, vol. 2, pp. 441-74.

JONES, P. S.
(1976) "Taylor, Brook", *Dict. Sci. Biogr.*, XIII, pp. 265-68.

JOURDAIN, E. B.
(1912) "The ideas of the «fonctions analytiques» in Lagrange's early work", *Proceedings of the Fifth Int. Congr. of Math.* (Cambridge 1912), Putnam, Cambridge 1914, vol. II, pp. 540-54.

KÆSTNER, A. G.
(1758) *Theorema binomiale universaliter demonstratum [...]*, Litteris Pockwitzii, Gottingæ 1758
(1759) Infinitinomii ad potentiam indefinitam elevati formula, Edit simulque

KANT, I.
(1764) *Untersuchung über die Deutlichkeit der Grundsätze der natürlichen Theologie und der Moral*, Haude und Spener, Berlin 1764 [ora in *Kant's Werke*, G. Reiner, Berlin 1902-13 (15 voll.), vol. II (trad. italiana di P. Carabellese: "Indagine sulla distinzione dei principi della teologia naturale e della morale" in: I. Kant, *Scritti precritici* (nuova edizione riveduta e accresciuta da R. Assunto e R. Hohenemser), Laterza, Bari 1953, pp. 219-255].
(1770) *De mundi sensibilis atque intelligibilis forma et principiis dissertatio [...]*, Impensis Io. Iac. Kanteri, Regiomonti 1770[ora in *Kant's Werke*, G. Reiner, Berlin 1902-13 (15 voll.), vol. II] (trad. italiana di A. Lamacchia: I. Kant, *La forma e i principi del mondo sensibile e del mondo intelligibile*, Liviana, Padova 1969].
(1787) *Kritik der reinen Vernunft*, J. F. Hartknoch Leipzig, II ed., 1787 [I ed.: 1781; ora in *Kant's Werke*, G. Reiner, Berlin 1902-13 (15 voll.), vol. III] [traduzione italiana di G. Colli: *Critica della ragione pura*, Einaudi, Torino 1957].
(1790) *Kritik der Urteilskraft*, Lagarde und Friederick, Berlin, Liebau 1790 [ora in *Kant's Werke*, G. Reiner, Berlin 1902-13 (15 voll.), vol. IV].

KITCHER, P.
(1984) *The Nature of Mathematical Knowledge*, Oxford U. P. New-York, Oxford 1984.

KLINE, M.
(1972) *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*, Oxford U. P., Oxford, New-York 1972.

KOPPELMAN, E.
(1969) *Calculus of Operations: French Influence in British Mathematics in the First Half of the Nineteenth Century*, Ph. D. Dissertation, John Hopkins Univ. 1969.
(1971) "The calculus of operations and the rise of abstract algebra", *Arch. Hist. Exact Sci.*, VIII, 1971, pp. 155-242.

KREISEL, G.
(1967) "Informal rigour and completeness proofs", in Lakatos (1967), pp. 138-71.

KRIPKE, S.
(1972) "*Naming and necessity*", in: D: Davidson and G. Harman (ed. by), *Semantics of Natural Languages*, Humanities Press, New-York 1972, pp. 253-355.

LACROIX, S. F.
(1797) *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, Duprat, Paris 1797-98 (2 voll.).
(1800) *Traité des différences et des séries faisant suite au Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, Duprat, Paris 1800.
(1810-19) *Traité du calcul différentiel et du calcul intégral*, IIème ed., Courcier, Paris 1810-19 (3 voll.).

LAGRANGE, J. L.
(1759) "Recherches sur la nature, et la propagation du son", *Miscell. Phil.-Math. Soc. priv. Taurin*, I, (pubbl. 1759), *Diss. et op. var.*, pp. I-X e 1-112 (seconda paginazione).
(1760-61a) "Essai d'une nouvelle méthode pour déterminer les maxima et les minima des formules intégrales indéfinies", *Mélange de Phil. et de Math. de la Soc. Roy. de Turin*, II, 1760-61, cl. math., pp. 173-95.
(1760-61b) "Application de la méthode précédente à la solution de différens problêmes de dynamique", *Mélange de Phil. et de Math. de la Soc. Roy. de Turin*, II, 1760-61, cl. math. pp. 196-298.
(1768) "Nouvelle méthode pour résoudre les équations littérales par le moyen des séries", *Hist. Acad. Roy. Sci. Bell. Lett. [Berlin], Mem. de l'Acad., cl. de Math.*, 1768, pp. 251-326.
(1769) "Sur le problème de Kepler", *Hist. Acad. Roy. Sci. Bell. Lett. [Berlin], Mem. de l'Acad., cl. de Math.*, 1769 (pubbl. 1771), pp. 204-33.
(1772) "Sur une nouvelle espèce de calcul relatif à la différentiation et à l'intégration des quantités variables", *Nouv. Mem. Acad. Roy. Sci. Bell. Lett. [Berlin]*, 1772 (pubbl. 1774), pp. 185-221.
(1784-85) "Sur une nouvelle méthode de calcul intégral [...]", *Mém. Acad. Roy. Sci. [Turin]*, 1784-85 (pubbl. 1986), parte II, pp. 218-90.
(1797) *Théorie des fonctions analytiques [...]*, impr. de la Rép., Paris an. V (1797) [*Journ . Ec. Poly.*, cah. IX].
(1798) De la résolution des équations numériques de tous les degrés, Duprat, Paris an VI (1798).
(1801) *Leçons sur le calcul des fonctions*, Vol. X di Ec. Norm. (1800-01) {ristampa: impr. impér., Paris, an XII (1804) [*Journ. Ec. Poly.*, cah. XII]}.
(1806a) *Leçons sur le calcul des fonctions*, nouv. édition, revue, corrigée et augmentée par l'auteur, Courcier, Paris 1806.
(1806b) *Supplément aux Leçons sur le calcul des fonctions [...]*, Imp. impér. Paris 1806.
(1812) "Leçons élémentaires sur les mathématiques données à l'école normale en 1795 par J. L. Lagrange", *Journ. Ec. Poly.*, cah. 7-8, t. II, pp. 173-278 (pubbl. 1812).
(1813) *Théorie des fonctions analytiques*, Courcier, Paris 1813.
(1867-92) *Œuvres de Lagrange*, publiées par les soins de M. J.- A. Serret, [et G. Darboux], Gauthier-Villars, Paris, 1867-92 (14 voll.).

LAGUERRE, E. L.
(1879) "Sur l'intégrale $\int_x^{\infty} \frac{e^{-x}}{x} dx$ ", *Bull. de la Soc. Math. de France*, VII, 1879, pp. 72-81.

LAKATOS, I.
(1967) (ed. by) *Problems in the Philosophy of Mathematics*, North-Holland, Amsterdam, 1967.
(1976) *Proofs and Refutations* (Ed. by J. Worrall and E. Zahar), Cambridge U. P., Cambridge 1976 {trad. italiana D. Benelli e a cura di G. Giorello: *Dimostrazioni e confutazioni*, Feltrinelli, Milano 1979} [versione ampliata di: "Proofs and refutations", *Brit. Jour. Phil. Sci.*, XIV, 1963-64, pp. 1-25, 120-39, 221-43, 196-342] .

(1978) *Philosophical Papers* (ed. by J. Worrall and G. Currie), Cambridge U. P., Cambridge 1978 (2 voll.) {trad. italiana di M. d'Agostino: *Scritti filosofici*, Il Saggiatore, Milano 1985 (2 voll.)}.

LAMBERT, J. H.
(1764) *Neues Organon [...]*, J. Wendler, Leipzig 1764 (2 voll.).
(1770) "Observations analytiques", *Nouv. Mém. Acad. Sci. Bell. Lettr. [Berlin]*, 1770 (pubbl. 1772), pp. 225-44.

LANDEN, J.
(1758) A Discourse Concerning the Residual Analysis [...], J. Nourse, London 1758.
(1764) The Residual Analysis [...], printed for the author and sold by L. Hawes, W. Clarke and R. Collins, London 1764.

LAPLACE, P. S.
(1773) "Mémoire sur l'inclinaison moyenne des orbites des comètes, sur la figure de la terre, et sur les fonctions", *Mem. Math. et Phy. pres. à l'Acad. Roy. Sci. [Paris] par div. Sav.*, VII, 1773, (pubbl. 1776), pp. 503-40.
(1777) "Mémoire sur l'usage du calcul aux différences partielles dans la théorie des suites", *Hist. Acad. Roy. Sci. [de Paris], Mém. Math. et Phy.*, 1777 (pubbl. 1780, pres. 1779), pp. 99-122.
(1779) "Mémoire sur les suites", *Hist. Acad. Roy. Sci. [Paris], Mém. Math. Phy.*, 1779 (pubbl. 1782), pp. 207-309.
(1782) "Mémoire sur les approximations des formules qui sont fonctions de très-grands nombres", *Hist. Acad. Roy. Sci. [Paris], Mém. Math. et Phy.*, 1782 (pubbl. 1785), pp. 1-88.
(1809) "Mémoires sur divers points d'analyse", *Journ. Ec. Poly.*, cah. XV, tome VIII (pubbl. 1809), pp. 229-65.
(1810) "Mémoire sur les intégrales définies et leur application aux probabilités [...]", *Mém. Cl. Sci. Math. et Phy. Inst. Imp. de France*, XI, 1810 (pubbl. 1811), Ière partie, pp. 279-347.
(1812a) *Théorie analytique des probabilités*, I ed., Courcier, Paris 1812.
(1812b) "Leçons de mathématiques données à l'école normale en 1795 par M. Laplace", *Journ. Ec. Poly.*, cah. 7-8, t. II, pp. 1-172 [pubbl. 1812].
(1814a) *Théorie analytique des probabilités*, II ed., Courcier, Paris 1814.
(1814b) *Essai philosophique sur les probabilités*, Courcier, Paris 1814.
(1878-1912) *Œuvres complètes de Laplace*, publiées sous les auspices de l'Académie des Sciences, Gauthier-Villars, Paris 1878-1912 (14 voll.).

LAUGWITZ, D.
(1987) "Infinitely small quantities in Cauchy's textbooks", *Hist. Math.*, XIV, 1987., pp. 258-74.

LAURENT, P. A.
(1843) *Extension du théorème de M. Cauchy relatif à la convergence du développement d'une fonction suivant les puissances ascendants de la variable* x, Memoria presentata à l'*Académie de Paris* le 30 Octobre 1843, manoscritto conservato agli *Archives de l'Acad.*, pochette de séance 21 agosto 1843.

LAUTMAN, A.
(1977) Essai sur l'unité des mathématiques et divers écrits, Union générale d'éditions, Paris 1977.

LEIBNIZ, G. G.
(1682) "De vera proportione circuli ad quadratum circumscriptum in numeris rationalibus [...] expressa", *Acta Eruditorum*, 1682, pp. 41-6.
(1684a) "Nova methodus pro maximis et minimis [...]", *Acta Eruditorum*, 1684, pp. 467-73.
(1684b) "Meditationes de cognitione, veritate et ideis", *Acta Eruditorum*, 1984, pp. 537-42.
(1686) "De geometria recondita et analysi indivisibilium atque infinitorum", *Acta Eruditorum*, 1686, pp. 292-300.
(1693) "Supplementum geometriæ practicæ [...]", *Acta Eruditorum*, 1693, pp. 178-80.
(1710) "Symbolismus memorabilis calculi algebraïci et infinitesimalis, in comparatione potentiarum et differentiarum; et de lege homogenearum transcendentali", *Miscellanea Berolinensia*, I, 1710, pp. 160-65.
(1765) *Nouveaux essais sur l'entedement humain*, I ed. in: *Œuvres philosophiques latines et françaises de feu Mr. de Leibnitz [...]*, J. Schreuder, Amsterdam et Leipzig 1756, pp. 1 - 496.

LEIBNIZ, G. W. - BERNOULLI, JOHANN I
(1745) *Virorum celeberr. Got. Gul. Leibnitii et Johan. Bernoulli Commercium philosophicarum et mathematicarum*, M. M. Bousquet, Lousanæ et Genevæ, 1745 (2 voll.).

L'HOPITAL, G. F. A. DE
(1696) *Analyse des infiniment petits pour l'intelligence des lignes courbes*, Impr. royale, Paris 1696.

L'HUILIER, S.
(1786) *Exposition élémentaire des principes des calculs supérieurs [...]*, J. D. Decker, Berlin s. d..
(1795) *Principiorum calculi differentialis et integralis expositio elementaris*, J. G. Cottam, Tubingæ 1795.

LORGNA, A. M.
(1786-87) "Théorie d'une nouvelle espèce de calcul, fini et infinitésimal", *Mém. Acad. Sci. Turin*, III, 1786-7 (pubbl. 1788), pp. 409-48.

LORIA, G.
(1929-33) *Storia delle matematiche*, S.t.e.n., Torino 1929-33 (3 voll.) [II ed. riveduta e aggiornata, Hœpli, Milano 1950].

LUSTERNIK, L.A. - PETROVA, S. S.
(1972) "Les premières étapes du calcul symbolique", *Rev. Hist. Sci.*, XXV, 1972, pp. 201-06.

MACLAURIN, C.
(1742) *A Treatise of Fluxions in Two Books*, T. W. and T. Ruddimans, Edinburgh 1742 (2 voll.).

MANFREDI, G.
(1707) *De constructione æquationum differentialium primi gradus*, typis C. Pisarii, Bononiæ 1707.

MARCHETTI, A.
(1711) *Lettera nella quale si ribattono l'ingiuste accuse date dal P. D. G. G. [...]*, L. Venturini, Lucca 1711.
(1713) *Lettera scritta a su' eccellenza il Sig. Bernardo Trevisano, patrizio veneto*, F. Bindi, Pisa 1713.

MARX, K.
(1845) *Thesen über Feuerbach*, manoscritto del febbraio 1843, I ed., Marx-Engels - Institut, Mosca 1932, (ora in: Marx-Engels *Werke*, Dietz Verlag, Berlin, 1959-71 (43 voll.), vol. III, pp. 5-7).

MASTROGREGORI, M.
(1987) "I problemi della storia della storiografia", *Rivista di storia della storiografia moderna*, VIII, 1987, faSci. 2-3, pp. 23-38.

MERCATOR, N.
(1668) *Logarithmo-technia, sive, methodus construendi logarithmos, nova, accurata, et facilis [...]*, Typis G. Godbid, impensis M. Pitt, Londini 1688.

MILHAUD, G.
(1904) "La connaissance mathématique et l'idéalisme transcendantal", *Rev. Méta. et Mor.*, XII, 1904, pp. 385-400.

MILL, J. S.
(1843) *A System of Logic Ratiocinative and Inductive [...]*, J. W. Parker, London 1843 (2 voll.).

MOIVRE, A. DE
(1697) "A method of raising an infinite multinomial to any given power, or xxtraxting any given root of the same", *Phil. Trans.*, XIX, n. 230 (luglio 1697), pp. 619-25.
(1698) "A method of extracting the root of an infinite equation", *Phil. Trans.*, XX, n. 240 (maggio 1968), pp. 190-93.
(1704) *Animadversiones in D. Georgii Cheynæi Tractatum de fluxionum methodo inversa*, D. Midwinter & T. Leigh, Londini 1704.
(1707) "Æquationum quarundam potestatis tertæ, quintæ, septimæ, nonæ et superium ad infinitum usque pergendo, in terminis finitis, ad instar regularum pro cubicis, quæ vocantur cardani, resolutio analytica", *Phil. Trans.*, XXV, n. 309 (gennaio-marzo 1707), pp. 2368-71.
(1718) *The Doctrine of Chances [...]*, W. Pearson, London 1718.
(1722a) "De fractionibus algebraicis radicalitate immunibus ad fractiones simpliciores reducendis, deque summandis terminis quarundam serierum æquali intervallo a se distantibus", *Phil. Trans.*, XXXII, n. 373 (settembre-ottobre, 1722), pp. 162-78.
(1722b) "De sectione anguli", *Phil. Trans.*, XXXII, n. 374, (novembre-dicembre, 1772), pp. 228-30.
(1738) *The Doctrine of Chances [...]*, 2d ed., fuller, clearer and more correct than the 1st, H. Woodfall, London 1738.

MOLITOR, O.
(1934) *Das Lebenswerk Guido Gradi's [...]*, Braunschweig 1934 [Diss. dell'università di Heidelberg].

MONNA, A. F.
(1972) "The concept of function in the 19th and 20th centuries [...]", *Arch. Hist. Exact Sci.*, IX, 1972, pp. 57-84.

MONTUCLA, J.
(1799-1802) *Histoire des mathématiques*, nouvelle édition, considérablement augmentée et prolongée jusque vers l'époque actuelle, H. Agasse, Paris an. VII-X (1799-1802) (4 voll.).

MORAVIA, S.
(1968) Il tramonto dell'illuminismo, Filosofia e politica nella socità francesc., 1770-1810, Laterza, Bari 1968.
(1974) *Il pensiero degli «idéologues»: scienza e filosofia in Francia, 1780-181*, La Nuova Italia, Firenze 1974.

MORGAN, A. DE
(1866) "On infinity and on the sign of equality", *Trans. Cambridge Phil. Society*, XI (part I), 1866, pp. 145-89.

MURRAY, J. D.
(1974) *Asymptotic Analysis*, Claredon Press, Oxford 1974.

NEWTON, I.
(1704a) "Enumeratio linearum tertii ordinis", in *Opticks [...] Also Two Treatises of the Species and Magnitude of Curvilinea Figures*, S. Smith and B. Walford, London 1704, pp. 138-62.
(1704b) "Tractatus de quadratura curvarum", *Ivi*, pp. 163-211.
(1711) *Analysis per quantitatum series, fluxiones, ac differentias [...]* (a cura di W. Jones), ex off. Paersoniana, Londini 1711.
(1736) *The Method of Fluxions and Infinite Series [...] Translated by John Colson*, printed by H. Woodfall and sold by J. Nourse, London 1736.
(1687) *Philosophiæ naturalis principia mathematica [...]*,Jussu Soc. Regiæ ac Typis J. Streater, Londini 1687 [II ed.: s. e. Catabrigiæ 1713; III ed.: apud G. & J. Innys, Londini 1726].

NIETZSCHE, F
(1874) *Unzeitgemässe Betrachtungen III*, E. Schmeitzner, Schloss-Chemnitz 1874 [ora in: F. Nietzsche, *Werke*, Walter de Gruyter, Berlin, New York 1967-..., vol. III,1, pp. 331-423].

OTTE, M.
(1989) "The ideas of Hermann Grasmann in the context of the mathematical and philosophical tradition since Leibniz", *Hist. Math.*, XVI, 1989, pp. 1-35.

OVAERT, J. L.
(1976) "La thèse de Lagrange et la transformation de l'analyse", in C. Houzel, J.-L. Ovaert, P. Raymond, J.-J. Sansuc, *Philosophie et calcul de l'infini*, Maspero, Paris 1976, pp. 157-222.

OZANAM, J.
(1684) *La géométrie pratique [...]*, l'auteur, Paris 1684.

PANZA, M.
(1984) "L'interpretazione del cacolo delle funzioni analitiche di Lagrange come un calcolo dei differenziali da parte del matematico italiano Vincenzo Brunacci", *Atti del Convegno: Storia degli studi sui fondamenti della matematica e connessi sviluppi interdisciplinari*, Pisa-Tirrenia, 26-31 Marzo 1984, Tip. Ed. Luciani, Rona, s. d., pp. 171-84.
(1985) "Il manoscritto del 1789 di Arbogast sui principi del calcolo differenziale e integrale", *Rivista di Storia della Scienza*, II, 1985, pp. 123-57.
(1987) "Ettore Bortolotti, storico della matematica", in A. Guerraggio (a cura di) *La matematica italiana tra le due guerre mondiali*, Pitagora, Bologna 1987, pp. 279-305.
(1988) "Eliminare il tempo. Newton, Lagrange e il problema inverso del moto resistente", c. s. negli atti del convegno: *Giornate di storia della matematica*, Cetraro, Settembre 1988.
(1989) *La statua di Fidia. Analisi filosofica di una teoria matematica: il calcolo delle flussioni*, Unicopli, Milano 1989.
(1990) "The analytical foundation of mechanics of discrete systems in Lagrange's *Théorie des fonctions analytiques*, compared with Lagrange's earlier treatments of this topics", c. s..

PENSIVY, M.
(1986) "La série du binôme de Wallis à Abel", *Gazette des mathématiciens*, settembre 1986.
(1987-88) *Jalons historiques pour une épistémologie de la série infinie du binôme*, vol. 14, 1987-88 di *Sciences et Techniques en perspective* [thèse de troisième cycle sostenuta il 7 ottobre 1986 all'università di Nantes].

PEPE, L.
(1982) "Sulla trattatistica del calcolo infinitesimale in Italia nel secolo XVIII", in: O. Montaldo e L. Grugnetti (a cura di), *La storia delle matematiche in Italia*, Monograf, Bologna s. d. [Atti del convegno di Cagliari, 29, 30 sett., 1 ott. 1982], pp. 145-227.
(1986a) "Lagrange e la trattatistica dell'analisi matematica", *Symposia Mathematica*, XXVII, 1986, pp. 69-99.
(1986b) "Tre «prime edizioni» ed un'introduzione della *Théorie des fonctions analitiques* di Lagrange", *Boll. St. Sci. Mat.*, VI, 1986, pp. 17-44.

PETITOT, J.
(1985a) *Les catastrophes de la parole: de Roman Jakobson à René Thom*, Maloine, Paris 1985.
(1985b) *Morphogenèse du Sens*, P.U.F., Paris 1985.
(1987a) "Refaire le «Timée». Introduction à la philosophie mathématique d'Albert Lautman", *Rev. Hist. Sci.* XL (1987), 79-115.
(1987b) "Mathématiques et ontologie", in: F. Minazzi e L. Zanzi (a cura di) *La scienza tra filosofia e storia in Italia nel Novecento*, tip. dello Stato, Roma 1987, pp. 191-211.

POINCARÉ, H.
(1886) "Sur les intégrales irrégulières des équations linéaires", *Acta Mathematica*, VIII, 1886, pp. 295-344.

POISSON, S. D.
(1805) "Démonstration du théorème de Taylor", *Correspondance sur l'Ec. Poly.*, I, 1804-05, n. 3, Pluviôse, an XIII, pp. 52-5.

POLYA, G.
(1945) *How to Solve It*, Princeton U. P., Princeton 1945.
(1954) *Mathematics and Plausible Reasoning*, Oxford U. P., London, Oxford, 1954 (2 voll.).
(1962-65) *Mathematical Discovery*, Wiley, New York 1962-65 (2 voll.).

POPPER, K. R.
(1934) *Logik der Forschung*, Springer, Vien 1934.
(1945) *The Open Society and its Enemies*, Routledge and Kegan Paul, London 1945 (2 voll.).
(1957) *The Poverty of Historicism*, Routledge and Kegan Paul, London 1957.
(1959) *The Logic of Scientific Discovery*, Hutchinson, London 1959.
(1963) *Conjectures and Refutations*, Routledge and Kegan Paul, London 1963 [trad. italiana di G. Pancaldi: *Congetture e confutazioni*, Il Mulino, Bologna 1972].
(1972) *Objective Knowledge*, Oxford U.P., Oxford 1972.
(1979) *Die Beiden Grundprobleme der Erkenntnistheorie*, J. C. B. Mohr, Tübingen 1979 [trad. italiana di Mario Trinchero: *I due problemi fondamentali della teoria della conoscenza*, Il Saggiatore, Milano 1987].
(1983) *Realism and the Aim of Science* [primo volume del *Postscript to the Logic of Scientific Discovery*, Ed. by W. W. Bartley III], Hutchinson, London 1983.

PRASSE, M. VON
(1803a) *Theorematis binomialis demonstratio elementaris*, Univ. Litterarum Lipsiensis, Lipsiæ 1803.
(1803b) *Functiones logarithmicæ et trigonometricæ in series infinitas solutæ*, Lipsiæ 1803.

PRINGSHEIM, A.
(1900) "Zur Geschichte der taylorishen Lehrsatzes", *Bibl. Math.* III serie, I, 1900, pp. 433-79.

PRONY, G. R. DE
(1796) "Notices sur un cours élémentaire d'analyse fait par Lagrange", *Journ. Ec. Poly.*, cah. II (t. I), pp. 206-08.

PUTNAM, H.
(1981) *Reason, Truth and History*, Cambridge Univ. Press, Cambridge 1981.

QUINE, W. V. O.
(1951) "Two dogmas of empiricism", *Phil. Rev.*, LX, 1951, pp. 20-43.
(1959) "Meaning and translation", in R. A. Brower (ed. by), *On Translation*, Harvard U. P. 1959, Cambridge (Mass.).

REIFF, R.
(1889) *Geschichte der unendlichen Reihen*, H. Laupp, Tübingen 1889.

REINHARD, M.
(1950-52) *Le grand Carnot*, Hachette, Paris 1950-52 (2 voll.).

REYNEAU, C. R.
(1708) *Analyse démontrée [...]*, J. Quillau, Paris 1708 (2 tomi).

ROBINS, B.
(1735) *A Discourse Concerning the Nature and Certainty of Sir Isaac Newton's Method of Fluxions, and Prime and Ultimate Ratios*, W. Innys and M. Manby, London 1735.

ROBINSON, A.
(1966) *Non-Standard Analysis*, North-Holland, Amsterdam, London 1966.
(1967) "The metaphysics of the calculus" in I. Lakatos (1967), pp. 28-40.

ROTH, H. A.
(1793) *Formulæ de serierum reversione demonstratio universalis signis localibus combinatorio-analyticorum vicariis exhibita [...]*, Litteris Sommeriis, Lipsiæ [1793].
(1796) *Theorema binomilae ex simplicissimis analyseos finitorem fontibus universaliter demonstratum*, ex off. Sommeria, apud C. T. Rabenhorst, Lipsiæ 1796.

RUFFINI, P.
(1799) *Teoria generale delle equazioni [...]*, stamp. di S. T. d'Aquino, Bologna, 1799 (2 voll.).
(1813) *Riflessioni intorno alla soluzione delle equazioni algebraiche generali*, La Soc. Tipografica, Modena 1813.

RUSSELL, B.
(1901) "Recent work in the philosophy of mathematics", *The International Monthly*, III, 1901, [ripubblicato come "Mathematics and the metaphysicians" in: B. Russell, *Mysticism and Logic [...]*, Allen and Unwin, London 1917].

SALANSKIS, J. M.
(1989) "The meaning of formalism, as revealed by non-standard analysis", c. s..

SARASA, A. A.
(1649) *Solutio problematis a R. P. Marino Mersenno minimo propositi*, I. & I. Meursios, Antverpiæ 1649.

SCHAFHEITLIN, P.
(1922) "Johannis I Bernoullii Lectiones de calculo differentialium", *Verhandlungen der Naturforsch. Gesellschaft in Basel*, XXXVI 1923, pp. 1-32.

SCRIBA, C. J.
(1976) "Wallis, John", *Dict. Sci. Biogr.*, vol. XIV, pp.146-55.

SEBESTIK, J.
(1964) "Bernard Bolzano et son mémoire sur le théorème fondamental de l'analyse", *Rev. Hist. Sci.*, XVII, 1964, pp. 129-64.

SEGNER, J. A.
(1739) *Elementa arithmeticæ et geometriæ [...]*, C. H. Cunonem, Gottingæ 1739.

(1777) "Demonstratio universalis theorematis binomialis Neutoni", *Nouv. Mém. Acad. Sci. Bell. Lettres [Berlin]*, 1777 (pubbl. 1779), pp. 37-41.

(1756-63) *Cursus mathematici [...]*, off. Rengeriana, Halæ Magdeburgicæ 1756-63 (3 parti in 4 voll.).

SEIDEL, P. L.

(1847) "Note über eine Eigenschaft der Reihen, welche discontinuirliche Functionen darstellen", *Abh. der Math.-Phy. Classe der Kön. Baier. Akad. der Wiss.*, V, 1847, pp. 379-94.

SERVOIS, F. J.

(1814-15a) "Essai sur un nouveau mode d'exposition des principes du calcul différentiel", *Ann. Math. pures et appl.* V, 1814-15, pp. 93-140.

(1814-15b) "Réflexions sur les diverses systèmes d'exposition des principes du calcul différentiel, et, en particulier, sur la doctrine des infiniment petits", *Ann. Math. pures et appl.* V, 1814-15, pp. 141-70.

SIMPSON, T.

(1750) *The Doctrine and Applications of Fluxions*, [...], J. Nourse, London 1750.

SMITHIES, F.

(1986) "Cauchy's conception of rigour in analysis", *Arch. Hist. Exact Sci.*, XXXVI, 1986, pp. 41-61.

STIRLING, J.

(1717) *Lineæ tertii ordinis neutonianæ [...]*, E. theatro Sheldoniano, Oxoniæ 1717.

(1730) *Methodus differentialis [...]*, G. Bowyer and Strahan, Londini 1730.

STOKES, G.

(1848) "On the critical values of the sums of periodic series", *Trans. Camb. Phil. Soc.*, VIII, 1848, pp. 533-83.

STRAUB, H.

(1970) "Bernoulli, Daniel", *Dict. Sci. Biogr.*, vol. II, pp. 36-46.

TATON, R.

(1988) "Le départ de Lagrange de Berlin et son installation à Paris en 1787", *Rev. Hist. Sci.*, XLI, 1988, pp. 39-74.

TAYLOR, B.

(1715) *Methodus incrementorum directa e inversa*, G. Innys, Londini 1715.

THOM, R.

(1988) *Esquisse d'une sémiophysique*, Interéditions, Paris 1988.

TORRICELLI, E.

(1644) *Opera geometrica*, typis A Masse & M. L. de Laudis, Florentiæ 1644.

(1919-44) *Opere* , ed. da G. Loria e G. Vassura, tomi I-III: stab. tip. G. Montanari, tomo IV: stab. graf. F. Lega, Faenza 1919-44(4 tomi in 5 voll.).

TRUESDELL, C. A.

(1960) "The rational mechanics of flexible or elastic bodies 1638-1788", introduction to L. Euler, *Opera Omnia*, ed. dalla Soc. Sci. Nat. Helveticæ, Leipzig-Berlin-Zurich-Basel 1911-..., vol. X et XI, II serie, *ivi*, vol. IX.

TURBNULL, H V. - HALL, A. R. - TILLING, L.

(1959-77) *The Correspondence of Isaac Newton*, (ed. by Turbnull: voll. I-V; and by Hall and Tilling: voll. V-VII), Cambridge Univ. Press, Cambridge 1959-77 (7 voll.).

VALERY, P.

(1941) "Une vue de Descartes", introduzione a : *Les pages immorteles de Descartes choisies et expliquées par Paul Valéry*, Ed. Corréa, 1941 {ora in: P. Valéry, *Œuvres*, 1, Gallimard, Paris 1957, pp. 810-42}.

(1986) *Cartesius redivivus*, Cahiers Paul Valery, IV, Gallimard, Paris 1986.

VARIGNON, P.

(1715) "Précautions à prendre dans l'usage des suites ou series infinies resultantes, tant de la division infinie des fractions, que du développement à l'infini des puissances d'exposants négatifs entiers", *Hist. Acad. Roy. Sci. [Paris], Mém. Math. et Phy.*, 1715 (pubbl. 1718), pp. 203-25.

(1725a) *Traité du mouvement et de la mesure des eaux coulantes et jaillissantes [...]. Tiré des ouvrages manuscrits de feu M. Varignon par M. l'abbé Pujol [...]*, Pissot, Paris 1725.

(1725b) *Eclaircissemens sur l'analyse des infiniment petits*, Rollin, Paris 1725.

VIETE, F.

(1591) *In artem analiticem isagoge [...]*, J. Mettayer, Turonis 1591.

(1631) *Ad logisticam speciosam notæ priores*, G. Baudry, Paris 1631.

(1646) *Francisi Vietæ Opera matematica, in unum volumen congesta ac recognita, opera atque studio Francisci a Schooten*, ex off. B. et A. Elzeviriorum, Lugduni Batavorum 1646.

VOLKERT, K.

(1989) "Zur Differenzierbarkeit stetiger Funkionem Ampère's Beweis und seine Folgen", *Arch. Hist. Exact Sci.*, XL, 1989, pp. 37-112.

VUILLEMIN, J.

(1955) *Physique et métaphysique kantiennes*, P.U.F., Paris 1955.

(1962) *La philosophie de l'algèbre*, P.U.F., Paris 1962 (2 voll.).

WALLIS, J.

(1656) *Arithmetica infinitorum [...]*, typ. L. Lichfield, imp. T. Robinson, Oxoniæ 1656.

(1685) *A Treatise of Algebra both Historical and Practical [...]*, printed by J. Playford by R. Davis, London 1685.

(1693) *De Algebra tractatus historicus et practicus [...]*, tomo II di: J. Wallis, *Opera mathematica*, e theatro Sheldoniano, Oxoniæ 1693-1699 (3 voll.), 1693..

WHITESIDE, D. T.

(1967-81) *The Mathematical Papers of Isaac Newton*, Cambridge U. P., Cambridge 1967-81 (8 voll.).

(1970) "Sources and strengths of Newton's early mathematical thoughts", in L. Palter (ed. by) *The «Annus Mirabilis» of Sir Isaac Newton*, 1666-1966, M. I. T. Press, Cambridge (Mass.), London 1970, pp. 69-85.

WITTGENSTEIN, L.
(1921) "Logisch-philosophische Abhandlung", *Annalen der Naturphilosophie*, XIV, 1921, pp. 185-262 [trad. inglese di C. K. Ogden e F. P. Ramsey in: L. Wittgenstein *Tractatus Logico-Philosophicus*, Routledge & Kegan Paul, London 1922].

WOLFF, C.
(1735-43) *Elementa matheseos universæ, editio novissima*, M. M. Bousquet e H. A. Gosse, Genevæ 1735-45 (5 voll.).

WOODHOUSE, R.
(1803) *The Principles of Analytical Calculation*, Cambridge U. P., Cambridge 1803.

WRONSKI, J. M. HOENE
(1814) *Philosophie de l'infini*, Imp. de Didot l'aîné, Paris 1814.

YOUSCHKEVITCH, A. P.
(1971) "Lazare Carnot and the competition of the Berlin Academy in 1786 on the mathematical theory of the infinite", in Gillispie-Youschkevitch (1971), pp. 147-68.
(1976) "The concept of function up to the middle of the 19th century", *Arch. Hist. Exact Sci.*, XVI, 1976, pp. 37-85.

Achevé d'imprimer sur les Presses de l'Université de Nantes

Dépôt légal : 2ème trimestre 1992

N°24 - 1988 - *Vulgariser les sciences (1919-1939). Acteurs, projets, enjeux,* publié avec le concours de la Cité des Sciences et de l'Industrie. 109 p.

Ce Cahier contient les exposés de la Première Journée sur l'histoire de la diffusion et de la vulgarisation des sciences et des techniques (26 mars 1985, Cité des Sciences et de l'Industrie) : B. Bensaude-Vincent, C. Blondel, *Introduction* et *Deux stratégies divergentes de vulgarisation scientifique : Georges Claude et Paul Langevin* ; S. Poirot-Delpech, *L'Encyclopédie Française* ; A. Petit, *La diffusion des sciences comme souci philosophique : Bergson* ; P. Ory, *Front populaire et vulgarisation scientifique* ; J. Eidelman, *Politique de la science ou politique de l'Esprit ? Genèse du Palais de la Découverte* ; D. Pestre, *Les revues de vulgarisation scientifique en France, 1918-1940 : un panorama* ; D. Jacobi, C. Condé, *Un survol du contenu de* La Science et la Vie *entre 1913 et 1932* ; M. J. Nye, T. Shinn, *Postface*.

N°25 - 1988 - Jacques Gapaillard, *Le mouvement de la Terre. La détection de sa rotation par la chute des corps.* 179 p.

Cette étude retrace d'abord l'historique de l'idée d'une Terre en mouvement et souligne les problèmes posés par la démonstration de ce mouvement. Ce dernier étant conçu comme absolu, une difficulté apparaît quand on prend conscience du caractère essentiellement relatif de tout mouvement. L'aspect théorique de la détection de la rotation diurne de la Terre au moyen de la chute libre est ensuite examiné en détail. Cet examen permet en particulier d'expliquer une correction de Hooke à la conclusion de Newton, et met en lumière une faute de Gauss, commise après lui par beaucoup d'auteurs, et consistant à tirer des conséquences trop précises d'un calcul comportant des approximations.

N°26 - 1988 - Michel Saillard, *Histoire de la spectroscopie. De la théorie de la lumière et des couleurs de I. Newton (1672) à la découverte de l'effet Zeeman (1897).* 172 p.

Après les apports fondamentaux de Newton, cette étude relate en détail les difficultés rencontrées par les physiciens confrontés à des phénomènes lumineux inattendus. A travers une succession de théories spectroscopiques sans cesse remises en cause par des faits nouveaux, la fécondité des recherches qui aboutiront aux idées de Planck, est principalement marquée, pour la période étudiée, par la naissance de la spectrochimie et de l'astrophysique grâce aux travaux de Kirchhoff.

N° 27 - 1989 - *Les amateurs de sciences et de techniques.* Sous la direction de Yves Cohen et Jean-Marc Drouin. 190 p.

Ce cahier contient l'essentiel des communications présentées à la journée sur "Les amateurs de science", qui s'est tenue à la Cité des Sciences et de l'Industrie le 26 mai 1986. A travers des domaines aussi variés que, par exemple, les mathématiques, l'informatique, la T.S.F., l'astronomie et l'entomologie, ces articles soulignent le rôle joué par les amateurs dans le développement des sciences et des techniques, tout en s'efforçant de définir les différents types d'amateurs et

N° 28 - 1990 - Dominique Cardon, *Les "vers" du rouge. Insectes tinctoriaux (Homoptera : Coccoidea). Essai d'entomologie historique.* 178 p.

L'ouvrage, illustré de nombreuses reproductions de gravures anciennes et de huit planches en couleur, est le remarquable résultat du travail d'une historienne qui est aussi naturaliste. Elle a commenté et rassemblé les textes européens, arabes, persans et chinois qui décrivent la récolte et la préparation des insectes qui, surtout au Moyen Age, ont donné les plus beaux rouges (du cramoisi tiré de la cochenille d'Arménie ou kirmiz, au vermeil du kermès des teinturiers, en passant par le czerwiec de la cochenille de Pologne).

N° 29 - 1990 - *Le moteur hydraulique en France au XIX siècle : concepteurs, inventeurs et constructeurs.* B Belhoste, J.F. Belhoste, S. Benoît, C. Cartier, G. Dufresne, G. Emptoz, C. Fontanon, L. Lemaître. Avant-propos de Louis Bergeron. 317p.

Ce sont les moteurs hydrauliques, dans leur matérialité et en dépit de la rareté des exemplaires conservés, qui suscitent dans cet ouvrage un éventail d'interrogations régressives à partir desquelles sont reconstruites toute une économie et toute une société d'acteurs solidaires de cette économie. Ce livre est au croisement de l'histoire des techniques et de l'histoire des sciences : il inaugure une nouvelle façon de parler des techniques.

N° 30 - 1990 - François Russo, *L'explication des mouvements des planètes, des Grecs à Kepler.* 273 p.

Cet ouvrage porte essentiellement sur la constitution et le développement de l'explication des mouvements des "planètes" par des cercles et des épicycles, théorie imaginée par Apollonius (IIIe s. av. J.-C.) sous une forme plutôt qualitative, puis mettant en jeu des modèles et des calculs géométriques avec Hipparque (IIe s. av. J.-C.), et surtout avec Ptolémée (IIe s. ap. J.-C.). Par la suite cette théorie ne sera substantiellement modifiée ni par les astronomes arabes (IXe-XVe s.), ni par les astronomes occidentaux (XIIIe-XVIe s.) y compris Copernic. Kepler lui-même y adhère un certain temps avant de l'abandonner définitivement pour lui substituer la loi des aires et les trajectoires elliptiques (Astronomia nova, 1609). En raison de son intérêt et de son unité, cette histoire méritait d'être retracée dans une vue d'ensemble et d'être rendue accessible à un public nettement plus large que celui des spécialistes de l'astronomie ancienne.

N° 31 - 1990 - *Les archives du Palais de la Découverte.* 120 p.

Inauguré lors de l'Exposition Internationale de 1937, le Palais de la Découverte a été confirmé dans un statut de musée permanent par un décret de 1938. A l'occasion de son cinquantenaire il a été décidé d'éditer l'inventaire de ses archives historiques couvrant la période 1924-1975, publication destinée aux conservateurs, bibliothécaires et muséologues, aussi bien qu'à tous ceux qui, chercheurs ou curieux, s'intéressent à l'histoire et à la sociologie des sciences.

Charles Hermite fut un très grand mathématicien français. On peut même le onsidérer comme le père de l'analyse mathématique moderne. On lui doit de ombreux travaux sur les fonctions elliptiques, la théorie des nombres dans laquelle introduisit l'usage de variables continues, les fractions continues et les pproximants de Padé-Hermite, l'interpolation et les polynômes orthogonaux. 'est lui encore qui donna la première démonstration de la transcendance du ombre e, base des logarithmes népériens, ouvrant ainsi la voie à celle de π, ce qui ıontrait l'impossibilité de la quadrature du cercle. Hermite eut aussi une grande ıfluence sur les mathématiques de son temps par ses conseils et sa volumineuse orrespondance. Sa vie dans le cadre de son époque, son œuvre et sa pensée sont :tracées ici ainsi que l'homme, d'après les opinions de ses contemporains.

|° 33 - 1991 - Giovanna Cleonice Cifoletti, ***La méthode de Fermat : son statut et sa iffusion.*** 243 p.

Ce travail est une étude sur la méthode de Fermat pour le maximum et le ıinimum. Fermat, qui en fait n'explique que quelques procédures, déclare fonder ı méthode d'une part, sur l'observation de Pappus à propos des extrema et, 'autre part, sur la *syncrisis* ou comparaison entre équations quadratiques. L'étude nalyse les transformations subies par la méthode dans le *Cursus mathematicus* de ierre Hérigone, et aussi chez Van Schooten et Huygens. En conclusion la méthode st comparée avec l'approche des questions d'extrema par une théorie ɔntemporaine qui se réclame de Fermat, la géométrie différentielle synthétique.

|° 34 - 1991 - Hélène Gispert, ***La France mathématique : la Société Mathématique e France (1872-1914).*** 424 p.

Créée au lendemain de la guerre de 1870, la Société Mathématique de France oit le jour dans une période charnière du développement des mathématiques et du ystème d'enseignement supérieur français. Après une période de stagnation, les ıathématiques françaises reviennent au premier plan et sont, au début du XXe ècle, parmi les plus créatrices du monde. Au moyen de l'étude de la Société lathématique de France l'auteur analyse cette renaissance des mathématiques ançaises en prenant en compte toutes les composantes de l'activité mathématique e ces années. Cinq études sur des points particuliers de l'histoire des ıathématiques complètent cette histoire du milieu mathématique français entre deux uerres. Ouvrage d'histoire des sciences en liaison vivante avec l'histoire de la ɔciété, ce livre s'adresse également aux historiens, aux sociologues, aux ıathématiciens, aux philosophes.

|° 35 - 1991 - Jean Gouillard, ***Histoire des Entomologistes français.*** 222 p.

La présente Histoire des Entomologistes français 1750-1950, écrite pour le 150^e ınniversaire de la Société Entomologique de France, est destinée à combler une cune dans la littérature spécialisée, alors que des travaux similaires avaient été :alisés par les Anglo-Saxons. La borne de 1950 est approximative et elle permet éanmoins de mentionner des entomologistes vivants. Les différentes branches de ette science ont été abordées, y compris les Arachnides et les Myriapodes qui ɔpartenaient autrefois à l'Entomologie. Ce dictionnaire quasiment exhaustif des ntomologistes français fournit, après une brève biographie de chaque auteur, une

N° 36 - 1991 - Paul Acloque, *L'aberration stellaire.* 258 p.

La variation annuelle, détectée par Bradley, de la direction apparente de l'étoile *Gamma Draconis*, ne pouvait relever d'un effet de parallaxe. En 1729 Bradley donna finalement une interprétation correcte de ce nouveau phénomène d'*aberration* en l'expliquant par la composition de la vitesse de l'observateur entraîné par la révolution annuelle de la Terre, avec celle de la lumière provenant de l'étoile. Toutefois cette interprétation souleva des difficultés théoriques. A travers les discussions suscitées par des expériences variées, depuis la lunette à eau de Boscovich jusqu'au troublant résultat de Michelson et Morley, cette étude montre combien le phénomène d'aberration a joué un rôle stimulant dans la science du XIXe siècle en préparant l'avénement de la théorie de la relativité.

N° 37 - 1991 - Jozef Hurwic, *La radioactivité : découverte et premiers travaux.* 147 p.

L'ouvrage présente les démarches scientifiques qui ont abouti à la découverte de la radioactivité par Henri Becquerel et les travaux fondamentaux dans ce domaine de Marie et Pierre Curie, Kasimir Fajans et autres. La présente étude envisage l'influence des conditions techniques de l'expérience, examine la nécessité d'une idée conductrice qui, même fausse, peut donner des résultats scientifiques valables, analyse l'enchaînement des diverses recherches, indique l'importance de l'imagination et de l'intuition, envisage le rôle du hasard, etc. Des textes originaux, souvent difficilement accesssibles aujourd'hui encore, sont reproduits et servent de base à l'étude épistémologique.

N° 38 - 1992 - Marco Panza, La forma della quantità, La forme de la quantité
Tome I 421p.

ISSN : 0221 - 3664

CAHIERS D'HISTOIRE & DE PHILOSOPHIE DES SCIENCES

nouvelle série

N° 34 - 1991
Hélène Gispert
La France mathématique :
La Société mathématique de France
(1870-1914)

N° 35 - 1991
Jean Gouillard
Histoire des entomologistes français

N° 36 - 1991
Paul Acloque
L'aberration stellaire

N° 37 - 1991
Jozef Hurwic
La radioactivité : découverte
et premier travaux

N° 38 - 1992
Marco Panza
La forma dellà quantità
La forme de la quantité
Tome I

xandre Herlé
(trésorier)

ers diffusés
e Férou
78 PARIS C
1-46-34-21-

Diffusion Belin
8, rue Férou - 75006 Paris
Prix : 75 F